

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

L'Attrito Dinamico

Tesi di Laurea in
Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Professore
Sandro Graffi

Presentata da:
Katia Bonella

Sessione seconda
Anno Accademico
2010/2011

Indice

Introduzione	I
1 Il coefficiente di attrito dinamico	1
1.0.1 Considerazioni generali	1
1.0.2 Derivazione del coefficiente dell'attrito dinamico	4
2 Il tasso di fuga	8
2.0.3 Metodo generale	8
2.0.4 Il tasso di fuga dagli ammassi aperti	10
3 Dipendenza del coefficiente di attrito dinamico dalla velocità	20
3.0.5 Risultati numerici	25
Bibliografia	28

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di analizzare l'effetto dell'attrito dinamico seguendo il lavoro di Subrahmanyan Chandrasekhar, premio Nobel per la fisica 1983.

L'attrito dinamico è il termine con cui in astrofisica ci si riferisce alla perdita di quantità di moto e di energia cinetica da parte dei corpi per effetto della forza gravitazionale che intercorre tra di essi.

Un'idea intuitiva dell'effetto dell'attrito dinamico si ha considerando un oggetto dotato di massa imponente che si muove tra corpi notevolmente più piccoli: la gravità fa sì che gli oggetti più piccoli vengano accelerati e che aumentino la loro quantità di moto e la loro energia cinetica, mentre, il corpo più grande viene rallentato.

Nel primo capitolo si introduce il coefficiente dell'attrito dinamico, e si ricava che esso è dell'ordine del reciproco del tempo di rilassamento del sistema.

Nel secondo capitolo si ricava il tasso di fuga di una stella dagli ammassi dapprima tralasciando l'effetto dell'attrito dinamico e successivamente tenendone conto.

Nel terzo capitolo si analizza la dipendenza del coefficiente di attrito dinamico dalla velocità.

Capitolo 1

Il coefficiente di attrito dinamico

1.0.1 Considerazioni generali

La parte oscillante del campo gravitazionale che agisce su una stella può essere descritta tramite due funzioni: $W(\mathbf{F})$ e $T(|\mathbf{F}|)$. $W(\mathbf{F})$ governa la probabilità che una forza \mathbf{F} per unità di massa agisca su una stella; $T(|\mathbf{F}|)$ fornisce il tempo medio durante il quale la forza agisce. La stella può subire in direzioni casuali numerosi incrementi discreti della velocità che sono pari a $|\mathbf{F}|T(|\mathbf{F}|)$. L'incremento quadratico medio della velocità che la stella si aspetta di subire nel tempo t (grande rispetto al periodo medio delle oscillazioni elementari in \mathbf{F}) è dato da:

$$|\overline{\Delta \mathbf{u}}|^2 = \overline{|\mathbf{F}|^2 T(|\mathbf{F}|) t}. \quad (1.1)$$

Equivalentemente si può descrivere la stessa situazione imponendo che la funzione di probabilità $W(\mathbf{u}, t)$, che governa la velocità u al tempo t , soddisfi l'equazione di diffusione

$$\frac{\partial W}{\partial t} = q \nabla_{\mathbf{u}}^2 W, \quad (1.2)$$

ove, il coefficiente di diffusione q ha il valore

$$q = \frac{1}{6} \overline{|\mathbf{F}|^2 T}. \quad (1.3)$$

Se la stella ha velocità \mathbf{u}_0 al tempo $t = 0$ allora la soluzione dell'equazione di diffusione, che sarà appropriata per descrivere la distribuzione di \mathbf{u} ai tempi successivi, è data da:

$$W(\mathbf{u}, t; \mathbf{u}_0) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi qt)^3}} e^{-\frac{|\mathbf{u}-\mathbf{u}_0|^2}{4qt}}. \quad (1.4)$$

Si osserva che l'equazione 1.1 è un'immediata conseguenza della precedente soluzione per W ; di conseguenza le considerazioni precedenti possono essere valide solo per tempi che sono brevi rispetto a $\frac{\overline{|\mathbf{u}|^2}}{|\mathbf{F}|^2 T}$ ove $\overline{|\mathbf{u}|^2}$ è la velocità quadratica media delle stelle. Infatti, dato che $W(\mathbf{u}, t; \mathbf{u}_0)$ descrive le variazioni stocastiche di \mathbf{u} per tutti i tempi, la probabilità che una stella subisca un'accelerazione arbitrariamente grande può essere resa vicino a 1 scegliendo un tempo t sufficientemente grande.

Questa conclusione è, tuttavia, contraria a quanto potremmo aspettarci dalle considerazioni generali, cioè che $W(\mathbf{u}, t; \mathbf{u}_0)$ tenda ad una distribuzione Maxwelliana indipendentemente da \mathbf{u}_0 per $t \rightarrow \infty$.

Definendo un processo stocastico come *conservativo* se è lasciato immutato da una distribuzione Maxwelliana, è ovvio che il processo descritto nell'equazione 1.2 è *non conservativo*.

Di conseguenza, l'equazione 1.2 è adatta a descrivere solo le situazioni fisiche per tempi t che soddisfano

$$t \ll \frac{\overline{|\mathbf{u}|^2}}{|\mathbf{F}|^2 T}. \quad (1.5)$$

Per modificare le prime considerazioni approssimative in modo tale che sottostiano ad un processo conservativo, si introduce l'*attrito dinamico*.

Si suppone che l'accelerazione, $\Delta \mathbf{u}$, che una stella subisce in un tempo Δt (breve, rispetto agli intervalli di tempo durante i quali \mathbf{u} può cambiare apprezzabilmente; lungo, rispetto ai periodi delle oscillazioni elementari di \mathbf{F}) possa essere espressa da:

$$\Delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}(\Delta t) - \eta \mathbf{u} \Delta t, \quad (1.6)$$

ove $\delta \mathbf{u}(\Delta t)$ è governata dalla seguente distribuzione di probabilità (cfr. eq. 1.4)

$$\psi(\delta \mathbf{u}(\Delta t)) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi q \Delta t)^3}} e^{-\frac{|\delta \mathbf{u} - \frac{\text{grad}_{\mathbf{u}} q \Delta t|^2}{4q \Delta t}}{4q \Delta t}}, \quad (1.7)$$

mentre $-\eta \mathbf{u} \Delta t$ rappresenta una decelerazione della stella nella direzione del suo moto di un valore proporzionale a $|\mathbf{u}|$.

La costante di proporzionalità η è detta *coefficiente dell'attrito dinamico*.

Con il processo stocastico definito nell'equazione 1.6 la funzione di distribuzione $W(\mathbf{u}, t + \Delta t)$ al tempo $t + \Delta t$ può essere derivata dalla distribuzione $W(\mathbf{u}, t)$ al tempo t dalla seguente equazione integrale:

$$W(\mathbf{u}, t + \Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}, t) \psi(\mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}) d(\Delta \mathbf{u}), \quad (1.8)$$

ove $\psi(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u})$ indica la probabilità di transizione (cfr. eq. 1.6 e 1.7)

$$\psi(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi q \Delta t)^3}} e^{-\frac{|\Delta\mathbf{u} - \text{grad}_{\mathbf{u}} q \Delta t + \eta \mathbf{u} \Delta t|^2}{4q \Delta t}}. \quad (1.9)$$

Sviluppando in serie di Taylor i termini che compaiono nell'equazione 1.8, valutando i vari momenti di $\Delta\mathbf{u}$ in accordo con la distribuzione data dall'equazione 1.9, e infine passando al limite $\Delta t = 0$ si ottiene la seguente equazione del tipo Fokker-Plank:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \text{div}_{\mathbf{u}}(q \text{grad}_{\mathbf{u}} W) + \text{div}_{\mathbf{u}}(\eta W \mathbf{u}). \quad (1.10)$$

Si nota che la precedente equazione è valida anche quando q e η sono funzioni di \mathbf{u} .

Infine, la condizione affinché la distribuzione Maxwelliana

$$\left(\frac{3}{2\pi |\mathbf{u}|^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3|\mathbf{u}|^2}{2|\mathbf{u}|^2}} \quad (1.11)$$

soddisfi l'equazione 1.10 è:

$$\frac{q}{\eta} = \frac{1}{3} \overline{|\mathbf{u}|^2} = \text{costante}. \quad (1.12)$$

Di conseguenza, la soluzione dell'equazione 1.10 adatta a descrivere la distribuzione delle velocità al tempo t , ponendo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ e $t = 0$ è:

$$W(\mathbf{u}, t; \mathbf{u}_0) = \left[\frac{3}{2\pi |\mathbf{u}|^2 (1 - e^{-2\eta t})} \right]^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0 e^{-\eta t}|^2}{2|\mathbf{u}|^2 (1 - e^{-2\eta t})}}. \quad (1.13)$$

ove si è assunto q e η costanti.

Si verifica che $W(\mathbf{u}, t; \mathbf{u}_0)$, in accordo con l'equazione 1.13, tende alla precedente soluzione data dall'equazione 1.4 per $t \ll \eta^{-1}$ in virtù della relazione 1.12; inoltre per $t \rightarrow \infty$ tende alla distribuzione Maxwelliana espressa dalla 1.11.

Di conseguenza, η^{-1} può essere considerata come la misura del *tempo di rilassamento* del sistema.

Considerando le equazioni 1.3 e 1.12 si ottiene

$$\frac{1}{\eta} = 2 \frac{\overline{|\mathbf{u}|^2}}{|\mathbf{F}|^2 T}, \quad (1.14)$$

che è in accordo con l'usuale definizione di tempo di rilassamento a meno di un fattore 2.

Riassumendo, si è concluso che l'invarianza della distribuzione Maxwelliana richiede che le stelle sentano l'effetto dell'attrito dinamico durante il loro moto e che il coefficiente dell'attrito dinamico sia dell'ordine del reciproco del tempo di rilassamento del sistema.

1.0.2 Derivazione del coefficiente dell'attrito dinamico

Si esamina ora un caso particolare in cui le oscillazioni di \mathbf{F} sono analizzate in termini di singole interazioni stellari, ciascuna idealizzata tramite il problema dei due corpi.

In questa approssimazione gli incrementi della velocità, Δv_{\parallel} e Δv_{\perp} , che una stella, con velocità $v_2 = |\mathbf{v}_2|$ e massa m_2 , subisce come risultato di un'interazione nella direzione rispettivamente parallela e perpendicolare alla direzione del suo moto sono:

$$\Delta v_{\parallel} = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} [(v_2 - v_1 \cos \theta) \cos \psi + v_1 \sin \theta \cos \Theta \sin \psi] \cos \psi \quad (1.15)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta v_{\perp} = \pm \frac{2m_1}{m_1 + m_2} [(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta - \{(v_2 - v_1 \cos \theta) \cos \psi \\ + v_1 \sin \theta \cos \Theta \sin \psi\}^2]^{\frac{1}{2}} \cos \psi, \end{aligned} \quad (1.16)$$

ove m_1 e v_1 indicano la massa e la velocità di una stella tipica del campo.

Si osserva che, in accordo con l'equazione 1.16, Δv_{\perp} , quando è calcolata su numerose interazioni si annulla identicamente; mentre $\sum \Delta v_{\parallel}$ è data da:

$$\sum \Delta v_{\parallel} = \Delta t \int_0^{\infty} dv_1 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{D_0} dD \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta}{2\pi} \{2\pi N(v_1, \theta, \varphi) V D \Delta v_{\parallel}\}, \quad (1.17)$$

ove i vari integrali rappresentano le singole interazioni rispetto ai diversi parametri. Si ricorda inoltre che Δt è lungo rispetto ai periodi delle oscillazioni elementari ma breve rispetto al tempo degli intervalli durante i quali \mathbf{v}_2 può cambiare apprezzabilmente. Dato che Θ è l'inclinazione del piano orbitale con il piano fondamentale che contiene i vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , l'integrale su Θ si risolve facilmente, perciò l'equazione 1.17 si riscrive così:

$$\begin{aligned} \sum \Delta v_{\parallel} = & -4\pi \frac{m_1}{m_1 + m_2} \Delta t \int_0^{\infty} dv_1 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{D_0} dD N(v_1, \theta, \varphi) \\ & \times V(v_2 - v_1 \cos \theta) \frac{D}{1 + \frac{D^2 V^4}{G^2(m_1 + m_2)^2}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

L'integrale sul parametro d'impatto D quando si estende da 0 a ∞ diverge, quindi per ragioni che qui non si approfondiranno, si consente per D solo un finito intervallo di integrazione che va da 0 a D_0 , ove D_0 è dell'ordine della distanza media che intercorre tra le stelle.

Sviluppando l'integrale su D si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum \Delta v_{\parallel} = & -2\pi m_1(m_1 + m_2) G^2 \Delta t \int_0^{\infty} dv_1 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi N(v_1, \theta, \varphi) \frac{1}{V^3} \\ & \times (v_2 - v_1 \cos \theta) \log(1 + \vartheta^2 V^4) \}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

ove

$$\vartheta = \frac{D_0}{G(m_1 + m_2)}. \quad (1.20)$$

Se si assume che la distribuzione delle velocità \mathbf{v}_1 sia sferica e che valga

$$N(v_1, \theta, \varphi) = N(v_1) \frac{1}{4\pi} \sin \theta, \quad (1.21)$$

sostituendo l'equazione 1.20 nella 1.19 e svolgendo l'integrale su φ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum \Delta v_{\parallel} = & -\pi m_1(m_1 + m_2) G^2 \Delta t \int_0^{\infty} dv_1 N(v_1) \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin \theta}{V^3} \\ & \times (v_2 - v_1 \cos \theta) \log(1 + \vartheta^2 V^4) \}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Per effetto dell'integrazione su θ si può usare la velocità relativa V come variabile di integrazione invece di θ .

Dato che

$$V^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta, \quad (1.23)$$

si ha:

$$\begin{aligned} V dV = & v_1 v_2 \sin \theta d\theta, \\ v_2 - v_1 \cos \theta = & \frac{1}{2v_2} (V^2 + v_2^2 - v_1^2). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Utilizzando la 1.24 si trova che la 1.22 si riduce così:

$$\sum \Delta v_{\parallel} = -\frac{1}{2} \pi m_1(m_1 + m_2) \frac{G^2}{v_2^2} \Delta t \int_0^{\infty} \frac{1}{v_1} N(v_1) J dv_1, \quad (1.25)$$

ove

$$J = \int_{|v_1-v_2|}^{(v_1+v_2)} \left(1 - \frac{v_2^2 - v_1^2}{V^2}\right) \log(1 + \vartheta^2 V^4) dV, \quad (1.26)$$

che dopo aver svolto l'integrazione per parti diventa:

$$J = \left(V - \frac{v_2^2 - v_1^2}{V}\right) \log(1 + \vartheta^2 V^4) \Big|_{|v_1-v_2|}^{(v_1+v_2)} - 4 \int_{|v_1-v_2|}^{(v_1+v_2)} \left(1 - \frac{v_2^2 - v_1^2}{V^2}\right) \frac{\vartheta^2 V^4}{1 + \vartheta^2 V^4} dV. \quad (1.27)$$

Ora, sotto le condizioni della maggior parte degli interessi pratici $\vartheta^2 V^4$ è generalmente molto più grande rispetto all'unità, quindi si può assumere

$$J = \left[\left(V - \frac{v_2^2 - v_1^2}{V}\right) \log(1 + \vartheta^2 V^4) - 4 \left(V + \frac{v_2^2 - v_1^2}{V}\right) \right]_{|v_1-v_2|}^{(v_1+v_2)}, \quad (1.28)$$

e, dopo ulteriori riduzioni, si giunge a:

$$J = \begin{cases} 2v_1 \log(1 + \vartheta^2 [v_1 + v_2]^4) (1 + \vartheta^2 [v_1 - v_2]^4) & (v_1 < v_2) \\ 2v_1 \log(1 + 16\vartheta^2 v_1^4) - 8v_1 & (v_1 = v_2) \\ 2v_1 \log \frac{1 + \vartheta(v_1+v_2)^4}{1 + \vartheta^2(v_1-v_2)^4} - 16v_2 & (v_1 > v_2). \end{cases} \quad (1.29)$$

Inoltre, dato che $\vartheta^2(v_1+v_2)^4$ e $\vartheta^2(v_1-v_2)^4$ sono in genere molto più grandi rispetto all'unità l'equazione precedente si può ulteriormente semplificare in:

$$J = \begin{cases} 8v_1 \log \vartheta(v_2^2 - v_1^2) & (v_1 < v_2) \\ 4v_1 \log 4\vartheta v_1^2 - 8v_1 & (v_1 = v_2) \\ 8v_1 \log \frac{v_1+v_2}{v_1-v_2} - 16v_2 & (v_1 > v_2). \end{cases} \quad (1.30)$$

Se si tiene in considerazione solo il termine dominante si ha:

$$J = \begin{cases} 8v_1 \log \vartheta \overline{|\mathbf{u}|^2} & (v_1 < v_2) \\ 0 & (v_1 > v_2), \end{cases} \quad (1.31)$$

ove $\overline{|\mathbf{u}|^2}$ indica la velocità quadratica media delle stelle nel sistema.

In accordo con le equazioni 1.30 e 1.31 si ha il notevole risultato che solo le stelle con velocità minore di quella che si sta considerando contribuiscono a $\sum \Delta v_{\parallel}$.

Considerando le equazioni 1.25 e 1.31 si ottiene:

$$\sum \Delta v_{\parallel} = -4\pi m_1(m_1 + m_2) \frac{G^2}{v_2^2} \log(\vartheta \overline{|\mathbf{u}|^2}) \Delta t \int_0^{v_2} N(v_1) dv_1. \quad (1.32)$$

Infine, se si assume che le velocità v_1 siano distribuite secondo la legge di Maxwell allora:

$$\int_0^{v_2} N(v_1) dv_1 = \frac{4j^3}{\sqrt{\pi}} N \int_0^{v_2} e^{-j^2 v_1^2} v_1^2 dv_1, \quad (1.33)$$

ove N indica il numero di stelle per unità di volume e j è un parametro che misura la dispersione delle velocità nel sistema.

Approssimando il secondo integrale della 1.33 con

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx, \quad (1.34)$$

e sostituendo nella 1.32 si ottiene:

$$\sum \Delta v_{\parallel} = -4\pi N m_1 (m_1 + m_2) \frac{G^2}{v_2^2} \log(\vartheta \overline{|\mathbf{u}|^2}) \Delta t [\Phi(x_0) - x_0 \Phi'(x_0)], \quad (1.35)$$

ove $x_0 = jv_2$.

Questa equazione mostra che la stella sente l'effetto dell'attrito dinamico e il coefficiente dell'attrito dinamico ha il seguente valore:

$$\eta = 4\pi N m_1 (m_1 + m_2) \frac{G^2}{v_2^3} \log(\vartheta \overline{|\mathbf{u}|^2}) [\Phi(x_0) - x_0 \Phi'(x_0)]. \quad (1.36)$$

Capitolo 2

Il tasso di fuga

In questo capitolo si determina il tasso di fuga delle stelle da ammassi globulari e da ammassi aperti basandosi su principi statistici.

Essenzialmente il metodo consiste nel ridurre la questione ad un problema al contorno con equazioni differenziali parziali e nell'interpretare il processo stocastico nello spazio delle velocità come un processo di diffusione.

Il tasso di fuga è stato calcolato dapprima ignorando l'attrito dinamico e, successivamente, tenendone conto.

Si vedrà che nel primo caso il tasso di fuga delle stelle previsto è così veloce da non poter essere compatibile con la vita dell'ammasso aperto, mentre nel secondo caso è drasticamente ridotto. Si concluderà che nella stessa esistenza degli ammassi aperti si trova la diretta evidenza dell'effetto dell'attrito dinamico, che era stato predetto su motivi teorici.

Infine tramite il tasso di fuga si cercherà in ultima analisi la certezza dell'esistenza dell'effetto dell'attrito dinamico.

Si ricorda che, essendo il coefficiente di attrito dinamico dell'ordine del reciproco del tempo di rilassamento del sistema, l'attrito dinamico può diventare effettivo solo durante tempi dell'ordine del tempo di rilassamento; di conseguenza, gli effetti dell'attrito dinamico appariranno solo in sistemi stellari con tempi di rilassamento relativamente brevi.

Tali sistemi sono, ad esempio, gli ammassi aperti come le Pleiadi, caratterizzate da tempi di rilassamento dell'ordine di 6×10^7 anni.

2.0.3 Metodo generale

Si è visto che, quando il coefficiente di diffusione q e il coefficiente dell'attrito dinamico η sono funzioni di \mathbf{u} , l'equazione che governa la distribuzione $W(\mathbf{u}, t)$ è:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \operatorname{div}_{\mathbf{u}}(q \operatorname{grad}_{\mathbf{u}} W) + \operatorname{div}_{\mathbf{u}}(\eta W \mathbf{u}), \quad (2.1)$$

ove q e η sono correlati da

$$\frac{q}{\eta} = \frac{1}{3} \overline{|\mathbf{u}|^2} = \text{costante}. \quad (2.2)$$

In accordo con 2.1, si può visualizzare il moto dei punti nello spazio delle velocità come un processo di diffusione nel quale il tasso del flusso che passa attraverso un elemento di superficie $d\sigma$ è dato da:

$$-(q \operatorname{grad}_{\mathbf{u}} W + \eta W \mathbf{u}) \cdot \mathbf{1}_{d\sigma} d\sigma, \quad (2.3)$$

ove $\mathbf{1}_{d\sigma}$ è un versore normale all'elemento di superficie considerato.

Tale interpretazione del processo stocastico suggerisce il seguente metodo per trovare il tasso con il quale si prevede che una stella acquisisca una data velocità.

In prima istanza si considera la probabilità, $p(v_0, t)dt$, che una stella con velocità iniziale $|\mathbf{u}| = v_0$ acquisisca una data velocità $|\mathbf{u}| = v_\infty$, nell'intervallo di tempo che va da t a $t + dt$.

Integrando $p(v_0, t)dt$ su t da 0 a t si ottiene la probabilità totale, $Q(v_0, t)$, che la stella acquisisca la velocità v_∞ durante l'intero intervallo da 0 a t .

Infine, il valore atteso, $Q(t)$, che esprime il fatto che una stella si aspetti di acquisire la velocità v_∞ nel tempo t , si ottiene facendo la media di $Q(v_0, t)$ sul range rappresentativo delle velocità.

Il vantaggio di rappresentare il problema nel modo descritto è che la funzione $p(v_0, t)$ può essere determinata come soluzione simmetrica sferica dell'equazione 2.1 che soddisfa le seguenti soluzioni al contorno:

$$W(|\mathbf{u}|, t) = 0 \quad \text{per } |\mathbf{u}| = v_\infty \quad \text{per } t > 0 \quad (2.4)$$

e

$$W(|\mathbf{u}|, t) \rightarrow \frac{1}{4\pi v_0^2} \delta(|\mathbf{u}| - v_0) \quad \text{per } t \rightarrow 0, \quad (2.5)$$

ove δ è la funzione di Dirac.

Se W è una siffatta soluzione, allora la funzione di probabilità $p(v_0, t)$ è data da (cfr. eq. 2.1):

$$p(v_0, t) = \left(4\pi q |\mathbf{u}|^2 \frac{\partial W(|\mathbf{u}|, t)}{\partial |\mathbf{u}|} \right)_{|\mathbf{u}|=v_\infty}. \quad (2.6)$$

Di conseguenza si ha

$$Q(v_0, t) = \int_0^t p(v_0, t) dt \quad (2.7)$$

e

$$Q(t) = \int_0^{v_\infty} Q(v_0, t) f(v_0) dv_0, \quad (2.8)$$

ove $f(v_0)$ governa la frequenza dell'evento che la velocità iniziale sia v_0 .

Si è visto che (cfr. eq. 1.32 con $m_1 = m_2 = m$):

$$\eta = 8\pi N m^2 G^2 \log \left[\frac{D_0 \overline{|\mathbf{u}|^2}}{2Gm} \right] \frac{1}{|\mathbf{u}|^3} \int_0^{|\mathbf{u}|} f(v) dv. \quad (2.9)$$

Si osserva che η tende ad un costante valore limite quando $|\mathbf{u}| \rightarrow 0$; mentre quando $|\mathbf{u}| \rightarrow \infty$ si ha che $\eta \rightarrow 0$.

Per la relazione 2.2, anche q tende a zero simultaneamente a η , di conseguenza, una sovrastima di η per un valore elevato di $|\mathbf{u}|$ può essere compensata da una corrispondente sovrastima di q eguagliando i rispettivi valori medi.

Per ora si esamina il caso in cui η e q sono costanti, successivamente, verrà trattata la loro dipendenza da $|\mathbf{u}|$.

2.0.4 Il tasso di fuga dagli ammassi aperti

Se si assumono η e q costanti e indipendenti da $|\mathbf{u}|$, allora l'equazione 2.1 si può riscrivere così (cfr. eq. 2.2):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{3} \overline{|\mathbf{u}|^2} \eta \nabla_{\mathbf{u}}^2 W + \eta \operatorname{div}_{\mathbf{u}}(W \mathbf{u}) \quad (2.10)$$

Ponendo $\eta t = \tau$

$$\mathbf{u} = \left(\frac{2}{3} \overline{|\mathbf{u}|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\rho} \quad (2.11)$$

ovvero, τ misura il tempo in unità del tempo di rilassamento; se si assume che le velocità siano distribuite secondo una gaussiana:

$$\frac{j^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-j^2 \overline{|\mathbf{u}|^2}} d\mathbf{u} \quad (2.12)$$

ove $\boldsymbol{\rho}$ misura la velocità di \mathbf{u} in unità di j^{-1} .

Quindi l'equazione 2.10 diventa:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2} \nabla_{\boldsymbol{\rho}}^2 W + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\rho}}(W \boldsymbol{\rho}) \quad (2.13)$$

(si osserva che il coefficiente di diffusione ha un valore pari a $\frac{1}{2}$) considerando una soluzione simmetrica sferica,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial W}{\partial \rho} \right) + \left(3W + \rho \frac{\partial W}{\partial \rho} \right) \quad (2.14)$$

ove ρ indica $|\boldsymbol{\rho}|$.

Per le osservazioni fatte in precedenza si cercherà ora una soluzione dell'equazione precedente tale da soddisfare le seguenti condizioni al contorno:

$$W(\rho, \tau) = 0 \quad \text{per } \rho_0 = \rho_\infty \quad \text{per } \tau > 0 \quad (2.15)$$

e

$$W(\rho, \tau) \rightarrow \frac{1}{4\pi\rho_0^2} \delta(\rho - \rho_0) \quad \text{per } \tau \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

Il tasso di fuga calcolato trascurando l'attrito dinamico

Quando si ignora l'attrito dinamico, l'equazione 2.14 si semplifica ulteriormente in:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial W}{\partial \rho} \right) \quad (2.17)$$

e la sua soluzione che soddisfa le condizioni al contorno 2.15 e 2.16 è:

$$W = \frac{1}{2\pi\rho\rho_\infty\rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-n^2\pi^2\tau}{2\rho_\infty^2}} \sin\left(\frac{n\pi}{\rho_\infty}\rho\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\rho_\infty}\rho_0\right) \quad (2.18)$$

con la quale si determina la probabilità $p(\rho_0, \tau)d\tau$ che una stella, con velocità iniziale ρ_0 , acquisisca una velocità pari a ρ_∞ durante l'intervallo $(\tau, \tau + d\tau)$.

Ricordando che nel caso ora in esame il coefficiente di diffusione è pari ad $\frac{1}{2}$ si ottiene (cfr.eq. 2.6):

$$p(\rho_0, \tau) = -2\pi\rho_\infty^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_\infty} \quad (2.19)$$

oppure, utilizzando la soluzione 2.18:

$$p(\rho_0, \tau) = \frac{\pi}{\rho_0\rho_\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} e^{\frac{-n^2\pi^2\tau}{2\rho_\infty^2}} \sin\left(\frac{n\pi}{\rho_\infty}\rho\right) \quad (2.20)$$

di conseguenza, la probabilità totale, $Q(\rho_0, \tau)$ che la stella possa acquisire la velocità ρ_∞ durante l'intervallo $(0, \tau)$ è:

$$Q(\rho_0, \tau) = \int_0^\tau p(\rho_0, \tau) d\tau = \frac{2\rho_\infty}{\pi\rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2\tau}{2\rho_\infty^2}} \right) \sin\left(\frac{n\pi}{\rho_\infty}\rho\right) \quad (2.21)$$

Allo scopo di ottenere il valore atteso si utilizza per la distribuzione ρ_0 la funzione gaussiana radiale:

$$\frac{4}{\pi^{\frac{1}{2}}} e^{-\rho_0^2} \rho_0^2 \quad (2.22)$$

e si estende il range di integrazione da 0 a ∞ (in realtà non sarebbe valido estendere il range oltre a ρ_∞ , tuttavia, per i valori di ρ_∞ a cui si è normalmente interessati, il numero di stelle con $\rho > \rho_\infty$ costituisce una trascurabile frazione del numero totale) così la media di $Q(\rho_0, \tau)$ su ρ_0 porta a:

$$Q(\tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2\tau}{2\rho_\infty^2}} \right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{4\rho_\infty^2}} \quad (2.23)$$

Ora, in un ammasso stellare, si ha la seguente relazione tra la velocità quadratica media di fuga e la velocità quadratica media delle stelle nel sistema:

$$\overline{v_\infty^2} = 4\overline{|\mathbf{u}|^2} \quad (2.24)$$

nel caso ora in esame (cfr. eq. 2.11) si ha:

$$\rho_\infty^2 = 6 \quad (2.25)$$

tuttavia, il fatto che la stella acquisisca la velocità di $2(\overline{|\mathbf{u}|^2})^{\frac{1}{2}}$ non implica necessariamente che quest'ultima abbandoni l'ammasso, così è lecito supporre:

$$\rho_\infty^2 = 8 \quad (2.26)$$

La Tabella seguente fornisce i valori di aspettazione, $Q(\tau)$, sia per $\rho_\infty = \sqrt{6}$ che per $\rho_\infty = \sqrt{8}$.

τ	$Q(\tau)$	
	$\rho_\infty^2 = 6$	$\rho_\infty^2 = 8$
0.25	0.069	0.023
0.5	0.19	0.081
1.0	0.42	0.25
1.5	0.60	0.43
2.0	0.73	0.57
2.5	0.82	0.68
3.0	0.87	0.77
4.0	0.94	0.87
5.0	0.97	0.93

Tabella 2.1: Valori di aspettazione $Q(\tau)$ calcolati trascurando l'attrito dinamico

Ricordando che il tasso di rilassamento degli ammassi aperti è dell'ordine di 6×10^7 anni, un esame della Tabella 1 rivela che i tassi di fuga predetti senza tenere conto dell'attrito dinamico sono incompatibili con tempi anche dell'ordine di 3×10^8 anni, ciò si ricava anche a partire dall'equazione 2.23 ottenendo:

$$Q(\tau) \sim 2e^{\frac{-\pi^2}{4\rho_\infty^2}} \left(1 - e^{\frac{-\pi^2\tau}{2\rho_\infty^2}} \right) \quad (\tau \gtrsim 1) \quad (2.27)$$

che per $\rho_\infty^2 = 6$ e $\rho_\infty^2 = 8$ si approssima così:

$$\begin{aligned} Q(\tau) &\sim 1.3(1 - e^{-0.82\tau}) & (\rho_\infty^2 = 6) \\ Q(\tau) &\sim 1.5(1 - e^{-0.62\tau}) & (\rho_\infty^2 = 8) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Il tasso di fuga calcolato considerando l'attrito dinamico

Si esamina ora il problema di calcolare il tasso di fuga delle stelle dagli ammassi tenendo in considerazione l'effetto dell'attrito dinamico.

A questo scopo si deve risolvere l'equazione già introdotta:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial W}{\partial \rho} \right) + \left(3W + \rho \frac{\partial W}{\partial \rho} \right)$$

con le condizioni al contorno, anche queste già presentate in precedenza,

$$W(\rho, \tau) = 0 \quad \text{per } \rho_0 = \rho_\infty \quad \text{per } \tau > 0$$

e

$$W(\rho, \tau) \rightarrow \frac{1}{4\pi\rho_0^2} \delta(\rho - \rho_0) \quad \text{per } \tau \rightarrow 0$$

Si introduce la variabile

$$w = W\rho \tag{2.29}$$

così da poter semplificare come segue:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + 2w + \rho \frac{\partial w}{\partial \rho} \tag{2.30}$$

$$w(\rho, \tau) = 0 \quad \text{sia per } \rho = \rho_\infty \quad \text{che per } \rho = 0 \quad \text{per } \tau > 0 \tag{2.31}$$

$$w(\rho, \tau) \rightarrow \frac{1}{4\pi\rho_0} \delta(\rho - \rho_0) \quad \text{per } \tau \rightarrow 0 \tag{2.32}$$

Si nota che una separazioni delle variabili può essere effettuata dalla sostituzione:

$$w = e^{-\lambda\tau} \Phi(\rho) \tag{2.33}$$

ove λ è una costante che, per ora, non specificheremo.

Così dall'equazione 2.30:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} + 2\rho \frac{d\Phi}{d\rho} + (2\lambda + 4)\Phi = 0 \tag{2.34}$$

ponendo,

$$\Phi = e^{-\frac{\rho^2}{2}} \psi \tag{2.35}$$

si ottiene per ψ l'equazione differenziale

$$\frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + (2\lambda + 3 - \rho^2)\psi = 0 \tag{2.36}$$

oppure, ponendo

$$\lambda = \mu - 1 \tag{2.37}$$

si ottiene

$$\frac{d^2\psi}{d\rho^2} + (2\mu + 1 - \rho^2)\psi = 0 \quad (2.38)$$

si osserva che quest'ultima equazione per ψ è uguale all'equazione delle onde per un moto armonico semplice, tuttavia, le condizioni al contorno con cui si deve risolvere la 2.38 sono differenti da quelle consuete nella teoria quantistica per il moto armonico.

Infatti, nel caso ora in esame

$$\psi = 0 \quad \text{sia per } \rho = 0 \quad \text{sia per } \rho = \rho_\infty \quad (2.39)$$

ovvero, le ψ sono le caratteristiche funzioni del moto armonico delimitate all'origine e a $\rho = \rho_\infty$.

Le ψ che soddisfano queste soluzioni al contorno sono un insieme di funzioni ortogonali che possono essere normalizzate.

Siano

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots \quad (2.40)$$

le funzioni normalizzate a cui rispettivamente appartengono i valori

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots \quad (2.41)$$

La soluzione generale dell'equazione 2.30 che soddisfa le condizioni al contorno 2.31 può quindi essere espressa da

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(\mu_n-1)\tau} e^{\frac{-\rho^2}{2}} \psi_n(\rho) \quad (2.42)$$

ove le A_n sono costanti tali da soddisfare le condizioni al contorno per $\tau = 0$.

Ora, una funzione δ può essere sempre costruita a partire da un insieme di funzioni ortogonali normalizzate in accordo alla seguente equazione

$$\delta(\rho - \rho_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(\rho) \psi_n(\rho_0) \quad (2.43)$$

da cui segue che la soluzione che soddisfa le condizioni al contorno 2.31 e 2.32 è

$$w = \frac{e^{\frac{-(\rho^2 - \rho_0^2)}{2}}}{4\pi\rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\mu_n-1)\tau} \psi_n(\rho) \psi_n(\rho_0) \quad (2.44)$$

Così la soluzione per W diventa:

$$W = \frac{e^{-\frac{(\rho^2 - \rho_0^2)}{2}}}{4\pi\rho\rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\mu_n - 1)\tau} \psi_n(\rho) \psi_n(\rho_0) \quad (2.45)$$

da cui:

$$p(\rho_0, \tau) = \frac{\rho_\infty}{2\rho_0} e^{-\frac{(\rho_\infty^2 - \rho_0^2)}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\mu_n - 1)\tau} \left(-\frac{d\psi_n}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_\infty} \psi_n(\rho_0) \quad (2.46)$$

$$Q(\rho_0, \tau) = \frac{\rho_\infty}{2\rho_0} e^{-\frac{(\rho_\infty^2 - \rho_0^2)}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n - 1} [1 - e^{-(\mu_n - 1)\tau}] \left(-\frac{d\psi_n}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_\infty} \psi_n(\rho_0) \quad (2.47)$$

Per ottenere $Q(\tau)$ si deve fare la media della precedente equazione su un adeguato range di ρ_0 ; con questo si è formalmente risolto il problema.

Per ottenere una soluzione esplicita si devono specificare le ψ_n e i rispettivi valori μ_n .

Seguendo la procedura che Sommerfeld ha sviluppato si ottiene la natura della dipendenza dei valori μ_n da ρ_∞ ; dapprima si osserva che quando

$$\rho_\infty \rightarrow \infty \quad \mu_n \rightarrow n \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.48)$$

(si considerano solo i valori dispari perché la funzione d'onda deve annullarsi nell'origine)

poi,

$$\Psi_n = e^{-\frac{\rho^2}{2}} H_n(\rho) \quad (2.49)$$

ove le H_n sono polinomi di Hermite che risolvono formalmente l'equazione 2.38 con $\mu_n = n$;

se n è un numero intero dispari, le Ψ_n soddisfano anche le condizioni al contorno all'origine.

Se dovesse accadere che ρ_∞ coincida con uno zero di uno dei polinomi dispari di Hermite, allora, le corrispondenti funzioni d'onda Ψ_n soddisferanno le condizioni al contorno anche a ρ_∞ .

Così,

$$H_3 = 8\rho^3 - 12\rho \quad (2.50)$$

ha uno zero in $\rho = (1.5)^{\frac{1}{2}}$.

Di conseguenza, se $\rho_\infty = (1.5)^{\frac{1}{2}}$, allora, $\mu = 3$ è un valore caratteristica per il caso qui preso in esame e Ψ_3 per $\rho \leq (1.5)^{\frac{1}{2}}$ e la funzione caratteristica che gli appartiene.

Analogamente, gli ordini alti dei polinomi di Hermite forniscono specifiche soluzioni.

Dall'andamento degli zeri dei vari polinomi di Hermite in un diagramma (μ, ρ_∞) (Figura 2.1) si ottiene un'indicazione generale di come i valori caratteristici sono modificati dalle condizioni al contorno.

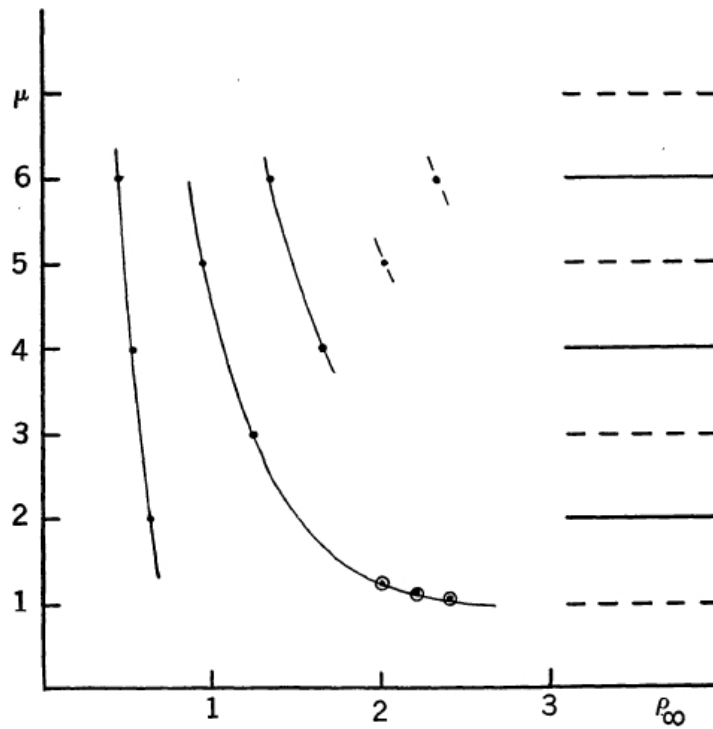


Figura 2.1: Andamento degli zeri dei vari polinomi di Hermite

Analizzando la Figura 2.1 si osserva che per $\rho_\infty > 2$ il primo valore caratteristico del problema ora in esame deve essere estremamente vicino all'unità, di conseguenza $\mu_1 - 1$ deve essere una quantità molto piccola.

D'altra parte per i valori caratteristici più alti si avrà $(\mu_n - 1) \sim (n - 1)$ con n intero dispari e maggiore dell'unità.

Si può dunque considerare per $\tau \gtrsim 1$:

$$Q(\rho_0, \tau) \simeq \frac{\rho_\infty}{2\rho_0(\mu_1 - 1)} e^{-\frac{(\rho_\infty^2 - \rho_0^2)}{2}} [1 - e^{-(\mu_1 - 1)\tau}] \left(-\frac{d\psi_1}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_\infty} \psi_1(\rho_0) \quad (2.51)$$

Infine, ponendo

$$\psi = e^{-\frac{\rho^2}{2}} f \quad (2.52)$$

dalla 2.38 si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} - 2\rho \frac{df}{d\rho} + 2\mu f = 0 \quad (2.53)$$

sostituendo

$$f = \sum c_s \rho^s \quad (2.54)$$

ove s assume valori interi dispari,
si ottiene la formula ricorsiva:

$$c_{s+2} = -\frac{2(\mu - s)}{(s + 2)(s + 1)} \quad (2.55)$$

Si è visto che il particolare valore caratteristico a cui si è interessati deve essere molto vicino all'unità, di conseguenza, scrivendo $\mu_1 = 1 + \epsilon$, ove ϵ rappresenta una piccola quantità, si trova che tutti i coefficienti c_3, c_5, \dots contengono ϵ come fattore.

Conservando solo i termini del primo ordine in ϵ e ponendo $c_1 = 1$ si può scrivere f come

$$f = \rho(1 + \epsilon\chi) \quad (2.56)$$

ove

$$\chi = \frac{1}{3}\rho^2 + \frac{1}{15}\rho^4 + \frac{4}{315}\rho^6 + \frac{2}{945}\rho^8 + \dots \quad (2.57)$$

La condizione che f si annulli per alcuni determinati ρ_∞ determinerà ϵ , così è stato trovato che:

$$\epsilon = 0.059 \quad (\rho_\infty^2 = 6) \quad (2.58)$$

$$\epsilon = 0.013 \quad (\rho_\infty^2 = 8) \quad (2.59)$$

quindi, in prima approssimazione Ψ_1 si può scrivere come:

$$\Psi_1 = ae^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho(1 - \epsilon\chi) \quad (2.60)$$

ove a indica il fattore di normalizzazione che può essere determinato numericamente.

Dall'equazione 2.51 si ottiene per $\tau \gtrsim 1$:

$$Q(\rho_0, \tau) \simeq \frac{a^2 \rho_\infty^2 e^{-\rho_\infty^2}}{2\epsilon} \left[-\frac{d}{d\rho} (\rho - \epsilon\rho\chi) \right]_{\rho=\rho_\infty} [1 - \epsilon\chi(\rho_0)] (1 - e^{-\epsilon\tau}) \quad (2.61)$$

dalla quale considerando i casi $\rho_\infty^2 = 6$ e $\rho_\infty^2 = 8$ si ricava:

$$\begin{aligned} Q(\tau) &\simeq (1 - e^{-0.059\tau}) & (\rho_\infty^2 = 6; \tau \gtrsim 1) \\ Q(\tau) &\simeq (1 - e^{-0.013\tau}) & (\rho_\infty^2 = 8; \tau \gtrsim 1) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Comparando le formule 2.28 e 2.62 si nota che se si tiene conto dell'effetto dell'attrito dinamico la vita media di un ammasso è aumentata di un fattore che va da 15 ($\rho_\infty \sim 2.5$) a 50 ($\rho_\infty \sim 2.8$).

Nella tabella 2.2 sono riportati i valori di aspettazione $Q(\tau)$ quando si tiene conto dell'attrito dinamico.

τ	$Q(\tau)$	
	$\rho_\infty^2 = 6$	$\rho_\infty^2 = 8$
5	0.26	0.064
10	0.44	0.12
20	0.95	0.23
100		0.73

Tabella 2.2: Valori di aspettazione $Q(\tau)$ calcolati considerando l'attrito dinamico

La riduzione dei tassi di fuga quando si considera l'attrito dinamico si spiega: fisicamente, osservando che le azioni dell'attrito dinamico sono nella direzione tale da impedire ad una stella di essere accelerata di un fattore troppo elevato, per questa ragione, la probabilità che una stella acquisisca la necessaria velocità di fuga è così piccola; matematicamente, questa riduzione ha determinato il piccolo valore numerico di $(\mu_1 - 1)$ che per i valori di ρ_∞ che rientrano in questa trattazione dipende sensibilmente dal preciso valore di ρ_∞ .

In conclusione, l'attrito dinamico ha la funzione di prevenire una troppo rapida disintegrazione di un ammasso isolato.

Capitolo 3

Dipendenza del coefficiente di attrito dinamico dalla velocità

Si è visto che il valore del coefficiente di attrito dinamico nell'approssimazione del problema dei due corpi è dato da:

$$\eta = 8\pi m^2 G^2 \left(\log_e \left[\frac{D_0 |\mathbf{u}|^2}{2Gm} \right] \right) \frac{1}{|\mathbf{u}|^3} \int_0^{|\mathbf{u}|} N(v) dv \quad (3.1)$$

da cui:

$$\eta \rightarrow \eta_0 = \text{costante} \quad \text{per } |\mathbf{u}| \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

$$\eta \rightarrow \text{costante } |\mathbf{u}|^{-3} \quad \text{per } |\mathbf{u}| \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

Si era anche ricavato la probabilità, $p(v_0, t)dt$, che una stella con velocità iniziale v_0 acquisisca la velocità di fuga v_∞ durante l'intervallo di tempo $(t, t + dt)$ e ricavato la funzione di probabilità, $p(v_0, t)dt$, dalla soluzione sferica simmetrica di:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \text{div}_{\mathbf{u}}(q \text{grad}_{\mathbf{u}} W + \eta W \mathbf{u}) \quad (3.4)$$

che soddisfa le soluzioni al contorno:

$$W(|\mathbf{u}|, t) = 0 \quad \text{per } |\mathbf{u}| = v_\infty \quad \text{per } t > 0 \quad (3.5)$$

$$W(|\mathbf{u}|, t) \rightarrow \frac{1}{4\pi v_0^2} \delta(|\mathbf{u}| - v_0) \quad \text{per } t \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

CAPITOLO 3. DIPENDENZA DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO
DINAMICO DALLA VELOCITÀ

Immediatamente si nota che la 3.3 non appare soddisfacente se viene ignorata la dipendenza di η da $|\mathbf{u}|$. Con le assunzioni fatte in precedenza si era ottenuto:

$$\eta = 8\pi m^2 G^2 \left(\log_e \left[\frac{D_0 \overline{|\mathbf{u}|^2}}{2Gm} \right] \right) \frac{1}{|\mathbf{u}|^3} [\Phi(j|\mathbf{u}|) - j|\mathbf{u}| \Phi'(j|\mathbf{u}|)] \quad (3.7)$$

che può essere riscritta così:

$$\eta = \eta_0 \nu(j|\mathbf{u}|) \quad (3.8)$$

ove:

$$\eta_0 = 8\pi N m^2 G^2 \left(\log_e \left[\frac{D_0 \overline{|\mathbf{u}|^2}}{2Gm} \right] \right) \left(\frac{3}{2\overline{|\mathbf{u}|^2}} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{4}{3\pi^{\frac{1}{2}}} \quad (3.9)$$

$$\nu(\rho) = \frac{3\pi^{\frac{1}{2}}}{4} \rho^{-3} [\Phi(\rho) - \rho \Phi'(\rho)] \quad (3.10)$$

con

$$\nu(\rho) \rightarrow 1 \quad \text{per } \rho \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

$$\nu(\rho) \sim \frac{3\pi^{\frac{1}{2}}}{4} \rho^{-3} \quad \text{per } \rho \rightarrow \infty \quad (3.12)$$

Poiché q e η sono legate da

$$q = \frac{1}{3} \overline{|\mathbf{u}|^2} \eta \quad (3.13)$$

si ha:

$$q = \frac{1}{3} \overline{|\mathbf{u}|^2} \eta_0 \nu(j|\mathbf{u}|) \quad (3.14)$$

La funzione $\nu(\rho)$ è di seguito tabulata.

CAPITOLO 3. DIPENDENZA DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO
DINAMICO DALLA VELOCITÀ

ρ	$\nu(\rho)$	$-\frac{d \log \nu}{d \rho}$	ρ	$\nu(\rho)$	$-\frac{d \log \nu}{d \rho}$
0.00	1.00000	0.00000	1.45	0.33133	1.3062
0.05	0.99850	0.0600	1.50	0.31026	1.3206
0.10	0.99402	0.1199	1.55	0.29035	1.3323
0.15	0.98661	0.1795	1.60	0.27157	1.3413
0.20	0.97634	0.2389	1.65	0.25392	1.3477
0.25	0.96332	0.2979	1.70	0.23734	1.3515
0.30	0.9470	0.3563	1.75	0.22183	1.3528
0.35	0.92962	0.4141	1.80	0.20732	1.3518
0.40	0.90927	0.4712	1.85	0.19379	1.3486
0.45	0.88684	0.5274	1.90	0.18117	1.3432
0.50	0.86257	0.5827	1.95	0.16943	1.3358
0.55	0.83666	0.6369	2.00	0.15852	1.3267
0.60	0.80936	0.6899	2.05	0.14839	1.3159
0.65	0.78090	0.7417	2.10	0.13898	1.3036
0.70	0.75152	0.7921	2.15	0.13025	1.2901
0.75	0.72145	0.8409	2.20	0.12216	1.2754
0.80	0.69093	0.8881	2.25	0.11466	1.2597
0.85	0.66016	0.9336	2.30	0.10770	1.2433
0.90	0.62936	0.9772	2.35	0.10126	1.2262
0.95	0.59872	1.0188	2.40	0.09528	1.2087
1.00	0.56842	1.0584	2.45	0.08973	1.1907
1.05	0.53861	1.0958	2.50	0.08458	1.1726
1.10	0.50944	1.1309	2.55	0.07980	1.1544
1.15	0.48104	1.1636	2.60	0.07536	1.1361
1.20	0.45350	1.1939	2.65	0.07123	1.1179
1.25	0.42692	1.2216	2.70	0.06739	1.0999
1.30	0.40137	1.2468	2.75	0.06381	1.0820
1.35	0.37689	1.2693	2.80	0.06048	1.0645
1.40	0.35354	1.2891	2.85	0.05737	1.0472

Tabella 3.1: Le funzioni $\nu(\rho)$ e $-\frac{d \log \nu}{d \rho}$

Ritornando all'equazione 3.4 si introduce un cambio di variabili indipendenti ponendo

$$\tau = \eta_0 t ; \quad \mathbf{u} = \left(\frac{2}{3} |\mathbf{u}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\rho}, \quad (3.15)$$

con il quale si riscrive l'equazione 3.4:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \operatorname{div}_{\boldsymbol{\rho}} \left[\frac{1}{2} \nu(|\boldsymbol{\rho}|) \operatorname{grad}_{\boldsymbol{\rho}} W + \nu(|\boldsymbol{\rho}|) W \boldsymbol{\rho} \right], \quad (3.16)$$

che, per una soluzione sferica simmetrica $W(|\boldsymbol{\rho}|, \tau)$, si riduce a:

$$\rho \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\nu(\rho) \left\{ \frac{1}{2} \rho \frac{\partial w}{\partial \rho} + \left(\rho^2 - \frac{1}{2} \right) w \right\} \right], \quad (3.17)$$

ove $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$ e $w = W\rho$.

In accordo con le equazioni 3.5 e 3.6 si richiede che una soluzione della 3.17 soddisfi le seguenti condizioni al contorno:

$$w(\rho, \tau) = 0 \quad \text{sia per } \rho = 0 \quad \text{sia per } \rho = \rho_{\infty} \quad (\tau > 0), \quad (3.18)$$

$$w(\rho, \tau) \rightarrow \frac{1}{4\pi\rho_0} \delta(\rho - \rho_0) \quad (\tau \rightarrow 0). \quad (3.19)$$

Si pone

$$w = e^{-\lambda\tau} \phi(\rho), \quad (3.20)$$

ove λ è una costante che, per ora, non sarà specificata. Si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\nu(\rho) \left\{ \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \left(\rho^2 - \frac{1}{2} \right) \phi \right\} \right] + \lambda \rho \phi = 0, \quad (3.21)$$

ponendo:

$$\phi = e^{-\frac{\rho^2}{2}} \psi, \quad (3.22)$$

la 3.21 si riscrive così:

$$\frac{d^2 \psi}{d\rho^2} + \frac{d \log \nu}{d\rho} \frac{d\psi}{d\rho} + \left[2 \frac{\lambda}{\nu(\rho)} + 3 - \rho^2 - \frac{d \log \nu}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right) \right] \psi = 0. \quad (3.23)$$

Si osserva che affinché una soluzione dell'equazione precedente si annulli sia per $\rho = 0$ sia per $\rho = \rho_{\infty}$, è necessario che λ faccia parte di un insieme infinito numerabile di valori discreti

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots, \quad (3.24)$$

detti *valori caratteristici* del problema.

Se

$$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots \quad (3.25)$$

indicano le soluzioni dell'equazione 3.23 che soddisfano le condizioni al contorno 3.18 per $\rho = 0$ e $\rho = \rho_{\infty}$, siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ i rispettivi valori, allora, si verifica che queste soluzioni formano un insieme di funzioni

CAPITOLO 3. DIPENDENZA DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO
DINAMICO DALLA VELOCITÀ

ortogonali e, senza perdere in generalità, si può supporre che siano tutte normalizzate. Di conseguenza, si possono costruire soluzioni che soddisfano una qualsiasi condizione arbitraria al contorno per $\tau = 0$ in termini di soluzioni fondamentali

$$w_n = e^{-\lambda_n \tau} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \psi_n \quad (3.26)$$

che soddisfano le soluzioni al contorno 3.18.

Allora in corrispondenza della soluzione

$$w = \frac{1}{4\pi\rho_0} e^{-\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau} \psi_n(\rho) \psi_n(\rho_0) \quad (3.27)$$

si ha

$$W = \frac{1}{4\pi\rho\rho_0} e^{-\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau} \psi_n(\rho) \psi_n(\rho_0) \quad (3.28)$$

con cui si scrive la funzione di probabilità $p(\rho_0, \tau)$, infatti poiché:

$$p(\rho_0, \tau) = -2\pi\rho_\infty^2 \nu(\rho_\infty) \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_\infty} \quad (3.29)$$

si ha:

$$p(\rho_0, \tau) = \frac{\rho_\infty}{2\rho_0} \nu(\rho_\infty) e^{-\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n \tau} \left(-\frac{d\psi_n}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_\infty} \psi_n(\rho_0) \quad (3.30)$$

Per ottenere la probabilità totale $Q(\rho_0, \tau)$ che una stella con velocità iniziale corrispondente a ρ_0 acquisisca durante un tempo τ una velocità corrispondente a ρ_∞ si deve integrare la 3.30 da 0 a τ

$$Q(\rho_0, \tau) = \int_0^\tau p(\rho_0, \tau) d\tau \quad (3.31)$$

$$Q(\rho_0, \tau) = \frac{\rho_\infty}{2\rho_0} \nu(\rho_\infty) e^{-\frac{\rho^2 - \rho_0^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n \tau}) \left(-\frac{d\psi_n}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_\infty} \psi_n(\rho_0) \quad (3.32)$$

Infine, per ottenere il valore di aspettazione, $Q(\tau)$, che una stella rappresentativa ha per acquisire la necessaria velocità di fuga durante un tempo τ , bisogna fare la media della precedente equazione su tutti i ρ_0 , il risultato finale può esprimersi così:

$$Q(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(\tau) \quad (3.33)$$

ove

$$Q_n(\tau) = A_n(1 - e^{-\lambda_n \tau}) \quad (3.34)$$

$$A_n = \frac{1}{2\lambda_n} \rho_{\infty} \nu(\rho_{\infty}) e^{-\frac{\rho_{\infty}^2}{2}} \left(-\frac{d\psi_n}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_{\infty}} \left[\frac{e^{\frac{\rho_0^2}{2}}}{\rho_0} \psi_n(\rho_0) \right] \quad (3.35)$$

3.0.5 Risultati numerici

Dato che in un ammasso stellare la velocità quadratica media di fuga è doppia rispetto alla velocità quadratica media delle stelle nel sistema, risulta chiaro che i valori di ρ_{∞} che verranno considerati sono:

$$\rho_{\infty} = \sqrt{6} \sim 2.45 \quad (3.36)$$

Si assegni un valore a λ e si cerchi una una soluzione $\Psi(\rho)$ della 3.23 tale che vicino all'origine il suo andamento si possa descrivere con una successione esponenziale

$$\Psi = \rho + a_3 \rho^3 + a_5 \rho^5 + \dots \quad (3.37)$$

Per ogni dato valore di λ i coefficienti a_3, a_5, \dots sono determinati dalla 3.25 e si trova che:

$$a_3 = -\frac{1}{6}(3 + 2\lambda) \quad (3.38)$$

$$a_5 = \frac{1}{20} \left[2.2 - 1.2\lambda + \frac{1}{6}(3 + 2\lambda)(0.6 + 2\lambda) \right] \quad (3.39)$$

Si esprime ora, in modo alternativo, A_1 come:

$$A_1 = \frac{a^2}{2\lambda} \rho_{\infty} \nu(\rho_{\infty}) e^{-\frac{\rho_{\infty}^2}{2}} \left(-\frac{d\Psi}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_{\infty}} \left[\frac{e^{\frac{\rho_0^2}{2}}}{\rho_0} \Psi(\rho_0) \right] \quad (3.40)$$

si è trovato che per valori di ρ_{∞} vicini a 2.45: λ è molto piccolo mentre A_1 è molto vicino all'unità. Di conseguenza, per $\lambda = 0.0075$ un'integrazione numerica della 3.23 fornisce

CAPITOLO 3. DIPENDENZA DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO
DINAMICO DALLA VELOCITÀ

$$\rho_\infty = 2.4518 \quad A_1 = 0.9966 \quad (\lambda_1 = 0.0075) \quad (3.41)$$

e in accordo alla 3.33

$$Q(\tau) = 0.9966(1 - e^{-0.0075\tau}) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(1 - e^{-\lambda_n\tau}) \quad (\rho_\infty = 2.4518) \quad (3.42)$$

dato che $Q(\tau)$ deve, per definizione, tendere all'unità per $\tau \rightarrow \infty$ si ha:

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n = 0.0034 \quad (\rho_\infty = 2.4518) \quad (3.43)$$

Inoltre, dato che λ_2 deve essere in un intorno di 2 e maggiore dei valori caratteristici più elevati si ha:

$$Q(\tau) = 1 - e^{-0.0075\tau} \quad (\tau \gtrsim 5) \quad (3.44)$$

La situazione per altri valori di ρ_∞ è simile come si può dedurre dalla seguente tabella.

λ	ρ_∞	$\nu(\rho_\infty)$	$-\Psi'(\rho_\infty)$	a^2	$\left[\frac{\rho_0^2}{\rho_0} e^{-\frac{2}{\rho_0}} \rho_0^{-1} \Psi(\rho_0) \right]$	$Q_1(\tau)$
0.0025	2.6642	0.07011	0.4077	2.3083	0.9891	$1.0000(1 - e^{-0.0025\tau})$
0.0050	2.5320	0.08148	0.5183	2.3458	0.9813	$0.9978(1 - e^{-0.0050\tau})$
0.0075	2.4518	0.08954	0.5932	2.3787	0.9748	$0.9966(1 - e^{-0.0075\tau})$
0.0100	2.3936	0.09601	0.6503	2.4089	0.9689	$0.9941(1 - e^{-0.0100\tau})$
0.0125	2.3476	0.10156	0.6969	2.4373	0.9634	$0.9921(1 - e^{-0.0125\tau})$

Tabella 3.2: Il tasso di fuga con l'attrito dinamico e la dipendenza di η da $|\mathbf{u}|$

Dai risultati appena raggiunti segue che per $\tau \gtrsim 5$ è lecito scrivere

$$Q(\tau) = 1 - e^{-\lambda_1\tau} \quad (\tau = \eta_0 t) \quad (3.45)$$

di conseguenza, si può considerare $\frac{1}{\lambda_1\eta_0}$ come misura della vita media di un ammasso, ove η_0 è stata definita nella 3.9.

Il preciso valore di λ_1 dipenderà dalle situazioni, tuttavia, si è trovato che per $\rho_\infty \simeq 2.45$ si ha $\lambda_1 \simeq 0.0075$, così la vita media di un ammasso può essere definita da $133\eta_0^{-1}$.

Per l'ammasso delle Pleiadi η_0^{-1} è dell'ordine di 2×10^7 anni, così la sua vita media è dell'ordine di 3×10^9 anni.

CAPITOLO 3. DIPENDENZA DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO
DINAMICO DALLA VELOCITÀ

Nell'analisi di questo valore si ricorda che, se l'attrito dinamico viene trascurato, viene ridotto a 5×10^7 e, nei calcoli in cui non si tiene conto della dipendenza del coefficiente di attrito dinamico dalla velocità, si ottengono vite medie minori di 7 - 8 volte.

Più specificatamente si è trovato che (cfr. eq. 2.28 e 2.62):

$$\begin{aligned}
 Q(\tau) &\simeq 1.3(1 - e^{-0.82\tau}) && \text{(attrito dinamico ignorato)} \\
 Q(\tau) &= (1 - e^{-0.059\tau}) && \text{(attrito dinamico incluso, dipendenza di } \eta \text{ da } |\mathbf{u}| \text{ ignorata)} \\
 Q(\tau) &= (1 - e^{-0.075\tau}) && \text{(attrito dinamico incluso, dipendenza di } \eta \text{ da } |\mathbf{u}| \text{ inclusa)}
 \end{aligned}
 \tag{3.46}$$

Si può dunque concludere che l'attrito dinamico è il principale meccanismo per il quale è permessa l'esistenza degli ammassi aperti, come le Pleiadi, per tempi dell'ordine di 3×10^9 anni.

Infine la tabella 3.2 permette di concludere che: per stelle con masse apprezzabilmente differenti dal valore medio, ρ_∞ varia in accord con:

$$\rho_\infty(m) = \left(6 \frac{m}{\bar{m}}\right)^{\frac{1}{2}}
 \tag{3.47}$$

dalla tabella 3.2 si osserva inoltre che un aumento del 10% di ρ_∞ prolunga la vita media di un fattore 3, mentre un simile decremento la riduce di un fattore 2.

Si conclude che un ammasso perde i membri meno massivi più rapidamente di quelli con la massa vicino al valore medio, mentre i membri più massivi continuano a far parte dell'ammasso per tempi più lunghi.

Bibliografia

- [1] S. Chandrasekhar - *Dynamical Friction. I. General Considerations: the Coefficient of Dynamical Friction* - Astrophysical Journal 97: 255–262 1943.
- [2] S. Chandrasekhar - *Dynamical Friction. II. The Rate of Escape of Stars from Clusters and the Evidence for the Operation of Dynamical Friction* - Astrophysical Journal 97: 263–273 1943.
- [3] S. Chandrasekhar - *Dynamical Friction. III. a More Exact Theory of the Rate of Escape of Stars from Clusters* - Astrophysical Journal 98: 54–60 1943.