УДК 513.88

О базисной структуре степенных пространств Кёте первого рода

Захарюта В.П., Чалов П.А.

Для монтелевских степенных пространств Кёте первого рода доказана инвариантность базисных подпространств, изоморфных степенным пространствам Кёте конечного и бесконечного типов. Усиливаются предшествующие результаты авторов (совместных с Т. Терзиоглу) [18,19]. Используются специальные составные линейные топологические инварианты, состоящие в применении классических геометрических характеристик (в нашем случае, обратных поперечников по Бернштейну) к многопараметрическим инвариантным конструкциям, построенным из множеств, входящих в фиксированный базис окрестностей нуля (или базис борнологии) пространства.

On basis structure of power Köthe spaces of the first type

Chalov P., Zahariuta V.

It is proved that Montel power Köthe spaces of the first type [5,8] have the structure of basis subspaces of the finite or infinite type invariant under isomorphisms, which strengthens authors' previous results (joint with T. Terzioğlu) [18,19]. The main tools are special compound linear topological invariants, which evaluate classical geometric characteristic (namely inverse Bernstein diameters) of certain invariant multi-parameter constructions built from given bases of neighborhoods or bounded sets.

1. Пространством Кёте, определяемым матрицей Кёте $A=\left(a_{i,p}\right)_{i,p\in N}$ называют пространство Фреше

$$K(A):=\left\{x=(\xi_i):|x|_p:=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|a_{i,p}<\infty,\quad p\in N,\right\}$$

с топологией, задаваемой системой преднорм $\left\{|x|_p : p\in N\right\}$ (см., например, [11,3]); символом $e=(e_i)_{i\in N}$ обозначают канонический базис этого пространства. Для каждого $I\subset N$ будем рассматривать соответствующее *базисное подпространство* пространства $X=K(A)$: $X_I:=\overline{span}\{e_i : i\in I\}$.

А.Гротендик ввел в [1] (II,p.122) важный класс пространств: $E_\alpha(a):=K\left(\exp\left(\alpha_p a_i\right)\right)$, где $a=(a_i)$, $a_i\geq 1$, $\alpha_p\uparrow\alpha$ $(-\infty<\alpha\leq+\infty)$, называемых ([8]) *степенными пространствами Кёте конечного типа*, если $\alpha<\infty$, или *бесконечного типа*, если $\alpha=\infty$ (в другой терминологии, центрами шкал Рисса [12], либо пространствами степенных рядов [14]). Так как при $\alpha<\infty$ пространства $E_\alpha(a)$ изоморфны между собой, обычно рассматривают только $E_0(a)$ и $E_\infty(a)$.

Следуя [5,8], *степенным пространством Кёте первого рода* называют пространство:

$$E(\lambda,a):=K\left(\exp\left(\left(-\frac{1}{p}+\lambda_i\right)a_i\right)\right),\tag{1}$$

где $a=(a_i)$, $\lambda=(\lambda_i)$ --- последовательности положительных чисел.

Оператор $T:K(A)\to K(\widetilde{A})$ называется *квазидиагональным*, если $Te_i=t_ie_{\sigma(i)}$, где (t_i) --- числовая последовательность, $\sigma:N\to N$; при этом, если T является изоморфизмом (изоморфным вложением), мы будем говорить, что $K(A)$ *квазидиагонально изоморфно* (*квазидиагонально вкладывается в*) $K(\widetilde{A})$.

Будем далее предполагать, что $E(\lambda,a)$ --- монтелевское пространство, то есть, $a_i\to\infty$. Через $\mathrm{E}_0(\lambda,a)$ и $\mathrm{E}_\infty(\lambda,a)$ обозначим классы базисных подпространств пространства $E(\lambda,a)$, изоморфных степенным пространствам Кёте конечного и бесконечного типов соответственно; эти классы являются направленными множествами относительно упорядочения по вложению.

Предложение 1 (см. [5,8]). Пусть $X = E(\lambda, a)$ и X_I --- базисное подпространство, определяемое подпоследовательностью $I \subset N$. Пространство $X_I \in \mathrm{E}_0(\lambda, a)$ ($X_I \in \mathrm{E}_\infty(\lambda, a)$) тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{i \in I} \lambda_i = 0$ ($\inf\{\lambda_i : i \in I\} > 0$ соответственно).

2. Основные результаты. В данной работе исследуется инвариантность структуры классов E_0 и E_∞ при изоморфизмах пространств (1). Следующие результаты ([19], теоремы 13 и 14) показывают, что множества E_0 и E_∞ являются инвариантами.

Теорема 1. Пусть пространства $E(\lambda, a)$ и $E(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$ изоморфны. Тогда для каждого $L \in \mathrm{E}_\infty(\lambda, a)$ найдётся $M \in \mathrm{E}_\infty(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$ изоморфное L.

Теорема 2. Пусть пространства $E(\lambda, a)$ и $E(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$ изоморфны. Тогда для каждого $L \in \mathrm{E}_0(\lambda, a)$ найдётся $M \in \mathrm{E}_0(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$ изоморфное L.

Отметим, что некоторые частные случаи этих утверждений были рассмотрены в [4,5,7].

Будут доказаны следующие результаты, показывающие, что инвариантами являются не только классы E_0 и E_∞ как множества, но и их структура.

Теорема 3. Пусть $X = E(\lambda, a)$ изоморфно $\tilde{X} = E(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$. Тогда существует возрастающая функция $\varphi : [0,2] \to [0,1]$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(2) = 1$, такая, что для каждого $X_I \in \mathrm{E}_\infty(\lambda, a)$ найдётся $\tilde{X}_{\tilde{I}} \in \mathrm{E}_\infty(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$ такое, что пространства X_I и $\tilde{X}_{\tilde{I}}$ изоморфны, а последовательности I и $\tilde{I}$ связаны условием:

$$\varphi(\delta) \le \tilde{\lambda}_i \le \varphi(\varepsilon), \quad i \in \tilde{I}, \tag{2}$$

где $\delta = \inf\{\lambda_i : i \in I\}$, $\varepsilon = \sup\{\lambda_i : i \in I\}$.

Пусть Q --- множество всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел.

Теорема 4. Пусть пространства $X = E(\lambda, a)$ и $\tilde{X} = E(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$ изоморфны. Тогда

$$\forall\, (\mathrm{r}_\mathrm{i}^{(1)}) \in \mathrm{Q}\ \exists\, (\mathrm{q}_\mathrm{i}^{(1)}) \in \mathrm{Q}\ \ \forall\ (\mathrm{q}_\mathrm{i}^{(2)}) \in \mathrm{Q}\ \ \exists\ (\mathrm{r}_\mathrm{i}^{(2)}) \in \mathrm{Q}, \quad \tau_0 \ge 1,$$

такие, что для каждого $X_I \in \mathrm{E}_0(\lambda, a)$, удовлетворяющего условию:

$$\frac{1}{q_i^{(1)}} \le \lambda_i \le \frac{1}{q_i^{(2)}}, \ \ a_i \ge \tau_0, \ \ i \in I, \tag{3}$$

найдётся $\tilde{X}_J \in \mathrm{E}_\infty(\tilde{\lambda}, \tilde{a})$ изоморфное X_I такое, что

$$\frac{1}{r_j^{(1)}} \le \tilde{\lambda}_j \le \frac{1}{r_j^{(2)}}, \quad j \in J. \tag{4}$$

3. В [13] Б.С.Митягин ввёл характеристику (считающую функцию последовательности $a = (a_i)$):

$$M_a(\tau, t) := \left|\{i \in N : \tau < a_i \le t\}\right|, \ 0 < \tau < t < \infty,$$

где $|A|$ обозначает число элементов для конечного множества A и $+\infty$, если A бесконечное множество, и доказал, что эта характеристика является *полным инвариантом* на классе степенных пространств конечного (бесконечного) типа. Мы будем неоднократно использовать следующее усиление этого результата.

Предложение 2 ([16], теорема 8). Пусть $\alpha = 0$ или $\alpha = \infty$. Следующие утверждения эквивалентны:

(i) пространство $E_\alpha(a)$ квазидиагонально вкладывается в $E_\alpha(\tilde{a})$;

(ii) пространство $E_\alpha(a)$ изоморфно вкладывается в $E_\alpha(\tilde{a})$;

(iii) $\exists \alpha > 1 : M_a(\tau, t) \le M_{\tilde{a}}\left(\dfrac{\tau}{\alpha}, \alpha t\right), \quad 0 < \tau < t < \infty.$

Основу наших исследований составляют *составные* линейные топологические инварианты, предложенные в [6] и развитые в [2,16 -- 19], применительно к различным классам пространств. Этот метод состоит в следующем: какая-либо числовая характеристика пары абсолютно-выпуклых множеств в локально выпуклом пространстве (например, поперечники или энтропийные характеристики) вычисляется (или оценивается) для разнообразных *инвариантных многопараметрических конструкций составленных из множеств, входящих в фиксированный базис* окрестностей нуля (или базис борнологии пространства). Такой подход даёт существенно более полную информацию об исследуемых пространствах, нежели классические инварианты (аппроксимативные или диаметральные размерности), основанные на рассмотрении характеристик пар множеств, *берущихся из фиксированного базиса*. Мы будем использовать следующую характеристику пары абсолютно-выпуклых множеств U и V в линейном пространстве X

$$\beta(V,U) := \sup\{\dim L : L \in X_V := span V, U \bigcap L \subset V\}, \tag{5}$$

естественно связанную с поперечниками по Бернштейну (см., например, [15]).
Отметим, что при доказательстве включения (ii) → (iii) в предложении 2 эта характеристика рассматривалась для пары $V = \exp(-\tau)\ U_p \bigcap \exp t\ U_r$ и $U = U_q$, где $\{U_n\}_{n\in N}$ --- заданный базис окрестностей нуля и $p < q < r$. В данном исследовании будут использоваться намного более сложные геометрические и интерполяционные конструкции с использование абсолютно выпуклых окрестностей нуля и ограниченных множеств.
Пусть $f = (f_i)_{i\in N}$ --- абсолютный базис в пространстве Кёте X, $a = (a_i)$, $a_i > 0$, $B^f(a)$ --- весовой l_1-шар в X:

$$B^f(a) := \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f_i \in X : \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| a_i \le 1 \right\}.$$

Предложение 3 (см., например, [12,15]). Для весовых шаров $B^f(a)$ и $B^f(b)$ характеристика (5) вычисляется по формуле: $\beta(B^f(b), B^f(a)) = |\{i : b_i \le a_i\}|$.

Предложение 4 (см., например, [2]). В монтелевском пространстве $K(A)$ семейство

$$B^e((a_{i,q_i})) := \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in X : \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| a_{i,q_i} \le 1 \right\}, \quad (q_i) \in Q,$$

является фундаментальной системой ограниченных множеств ([11], с. 262) в $K(A)$, то есть семейство $\{C\,B^e((a_{i,q_i})) : C > 0, (q_i) \in Q\}$ образует базис ограниченных множеств в $K(A)$.

4. Базисные подпространства бесконечного типа. Без ограничения общности будем предполагать, что параметры пространств (1) удовлетворяют условию

$$a_i > 1, \quad \frac{1}{a_i} \le \lambda_i \le 1, \quad i \in N. \tag{6}$$

Для пространства $X = E(\lambda, a)$ определим считающую функцию, называемую прямоугольной (1-прямоугольной) характеристикой пространства X или пары числовых последовательностей (λ, a):

$$\mu^X(\delta, \varepsilon; \tau, t) := |\{i : \delta < \lambda_i \le \varepsilon, \tau < a_i \le t\}|,$$

определённую для

$$0 \le \delta < \varepsilon \le 1, \quad 0 \le \tau < t < \infty. \tag{7}$$

Предложение 5 (см. [18], теорема 7). Если пространства $X = E(\lambda, a)$ и $\widetilde{X} = E(\widetilde{\lambda}, \widetilde{a})$ изоморфны, то функции μ^X и $\mu^{\widetilde{X}}$ *эквивалентны* в следующем смысле: существует возрастающая функция $\varphi : [0,2] \to [0,1]$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(2) = 1$, и постоянная $\alpha > 0$ такие, что для $\delta, \varepsilon, \tau, t$, удовлетворяющих условию (7) выполняются следующие неравенства

$$\mu^X(\delta, \varepsilon; \tau, t) \le \mu^{\widetilde{X}}\left(\varphi(\delta), \varphi^{-1}(\varepsilon); \frac{\tau}{\alpha}, \alpha t \right), \tag{8}$$

$$\mu^{\widetilde{X}}(\delta, \varepsilon; \tau, t) \le \mu^X\left(\varphi(\delta), \varphi^{-1}(\varepsilon); \frac{\tau}{\alpha}, \alpha t \right).$$

Доказательство теоремы 3. Возьмем подпространство $X_I \in \mathsf{E}_\infty(\lambda, a)$. Положим $J := \{j : \varphi(\delta) \le \widetilde{\lambda}_j \le \varphi(\varepsilon)\}$, где $\delta = \inf\{\lambda_i : i \in I\}$, $\varepsilon = \sup\{\lambda_i : i \in I\}$. По предложению 1 $\delta > 0$, а, следовательно, и $\varphi(\delta) > 0$. По условию (6) δ и ε удовлетворяют (7). Пусть $I = (i_k)_{k \in N}$, $J = (j_k)_{k \in N}$, $c = (c_k) = (a_{i_k})_{k \in N}$, $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_k) = (\widetilde{a}_{j_k})_{k \in N}$. Тогда, используя (8), выводим оценку для считающих M_c и $M_{\widetilde{c}}$ последовательностей c и $\widetilde{c}$:

$$M_c(\tau, t) \le \mu^X(\delta, \varepsilon; \tau, t) \le \mu^{\widetilde{X}}\left(\varphi(\delta), \varphi^{-1}(\varepsilon); \frac{\tau}{\alpha}, \alpha t\right) = M_{\widetilde{c}}\left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t\right).$$

Пусть $\widetilde{X}_J := \overline{span}\{e_j : j \in J\}$. По предложению 1 подпространство $\widetilde{X}_J \in \mathsf{E}_\infty(\widetilde{\lambda}, \widetilde{a})$. Применяя предложения 1 и 2, заключаем, что X_I квазидиагонально изоморфно некоторому базисному подпространству $\widetilde{X}_{\widetilde{I}}$ пространства $\widetilde{X}_J$.Поскольку $\widetilde{I} \subset J$, справедлива оценка (2). Следовательно, по предложению 1 получаем: $\widetilde{X}_{\widetilde{I}} \in \mathsf{E}_\infty(\widetilde{\lambda}, \widetilde{a})$. Доказательство теоремы завершено.

5. Базисные подпространства конечного типа

Основные трудности описания структуры класса E_0 преодолеваются в следующем утверждении.

Лемма. Пусть $X = E(\lambda, a)$ и $\widetilde{X} = E(\widetilde{\lambda}, \widetilde{a})$ изоморфные пространства. Тогда

$$\forall\, (\mathrm{r}_\mathrm{i}^{(1)})\ \exists\, (\mathrm{q}_\mathrm{i}^{(1)})\ \forall\ (\mathrm{q}_\mathrm{i}^{(2)})\ \exists\ (\mathrm{r}_\mathrm{i}^{(2)})\Big(\, (\mathrm{r}_\mathrm{i}^{(1)}), (\mathrm{q}_\mathrm{i}^{(1)}), (\mathrm{q}_\mathrm{i}^{(2)}), (\mathrm{r}_\mathrm{i}^{(2)}) \in \mathrm{Q}\Big), \alpha > 1, \tau_0 \ge 1$$

такие, что неравенство

$$\left|\left\{i : \frac{1}{q_i^{(1)}} \le \lambda_i \le \frac{1}{q_i^{(2)}}, \tau < a_i \le t\right\}\right| \le \left|\left\{j : \frac{1}{r_j^{(1)}} \le \widetilde{\lambda}_j \le \frac{1}{r_j^{(2)}}, \frac{\tau}{\alpha} < \widetilde{a}_j \le \alpha t\right\}\right| \qquad (9)$$

выполняется для всех $\tau_0 \le \tau < t < \infty$.

Доказательство. Пусть $T : \widetilde{X} \to X$ --- изоморфизм. В пространстве X рассмотрим два абсолютных базиса: канонический базис e и T-образ $\widetilde{e} = (\widetilde{e}_i)_{i \in N}$ канонического базиса в пространстве $\widetilde{X}$. Тогда каждый элемент $x \in X$ имеет два базисных разложения: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \widetilde{e}_i$, а система норм

$$\|x\|_p := \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i| \widetilde{a}_{i,p},\ x \in X,\ p \in N, \text{ где } \widetilde{a}_{i,p} = \exp\left(\left(-\frac{1}{p} + \widetilde{\lambda}_i\, p\right)\widetilde{a}_i\right),$$

эквивалентна исходной системе норм в X :

$$|x|_p := \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| a_{i,p},\ x \in X,\ p \in N, \text{ где } a_{i,p} = \exp\left(\left(-\frac{1}{p} + \lambda_i\, p\right) a_i\right).$$

Для доказательства оценки (9) построим в пространстве X две пары "синтетических" абсолютно выпуклых множеств U, V и $\widetilde{U}, \widetilde{V}$ в виде некоторых геометрических и интерполяционных конструкций. Материалом для их построения будут служить весовые l_1-шары $B^e(A_p)$, $B^{\widetilde{e}}(\widetilde{A}_p)$ с весами $A_p := (a_{i,p})$, $\widetilde{A}_p := (\widetilde{a}_{i,p})$, и ограниченные множества $B^e(A_{(q_i)})$, $B^{\widetilde{e}}(\widetilde{A}_{(q_i)})$, которые также являются весовыми l_1-шарами с весами

$$A_{(q_i)} := \left(a_{i,q_i}\right) = \left(\exp\left(\left(-\frac{1}{q_i} + \lambda_i q_i\right) a_i\right)\right),$$
$$\widetilde{A}_{(q_i)} := \left(\widetilde{a}_{i,q_i}\right) = \left(\exp\left(\left(-\frac{1}{q_i} + \widetilde{\lambda}_i q_i\right) \widetilde{a}_i\right)\right), \qquad (q_i) \in Q.$$

Множества U, V и $\widetilde{U}, \widetilde{V}$ будем строить так, чтобы обеспечить включения

$$U \supset \widetilde{U}, \quad V \subset \widetilde{V} \tag{10}$$

и оценки

$$\left|\left\{ i : \frac{1}{q_i^{(1)}} \le \lambda_i \le \frac{1}{q_i^{(2)}}, \tau < a_i \le t \right\}\right| \le \beta(V, U), \tag{11}$$

$$\beta\left(\widetilde{V}, \widetilde{U}\right) \le \left|\left\{ j : \frac{1}{r_j^{(1)}} \le \widetilde{\lambda}_j \le \frac{1}{r_j^{(2)}}, \frac{\tau}{\alpha} < \widetilde{a}_j \le \alpha t \right\}\right|. \tag{12}$$

По свойству (6), из включений (10) следует оценка

$$\beta(V, U) \le \beta\left(\widetilde{V}, \widetilde{U}\right). \tag{13}$$

Тогда, объединяя (11), (13) и (12), получим оценку (9).

На основании эквивалентности систем норм $\left(\|x\|_p\right)$ и $\left(|x|_p\right)$ можно выбрать цепочку натуральных чисел

$$p_0' < p_0 < p_0'' < p_1' < p_1 < p_1'' < p_2' < p_2 < p_2''$$

так, чтобы следующие включения

$$\frac{1}{C} B^{\widetilde{e}}\left(\widetilde{A}_{p_k''}\right) \subset B^e\left(A_{p_k}\right) \subset C B^{\widetilde{e}}\left(\widetilde{A}_{p_k'}\right), k = 0,1,2, \tag{14}$$

выполнялись с какой-нибудь константой C.
По предложению 4

$$\forall\, (\mathrm{r}_\mathrm{i}^{(1)})\ \exists\, (\mathrm{q}_\mathrm{i}^{(1)})\ \forall\ (\mathrm{q}_\mathrm{i}^{(2)})\ \exists\ (\mathrm{r}_\mathrm{i}^{(2)}), (\mathrm{s}_\mathrm{i}^{(\mathrm{k})}), \quad k = \overline{1,5}, \tag{15}$$

такие, что с некоторой константой $L \ge C$ выполняются следующие включения:

$$\begin{aligned} &B^{\widetilde{e}}\left(\widetilde{A}_{(\mathrm{r}_\mathrm{i}^{(1)})}\right) \subset L B^e\left(A_{(\mathrm{q}_\mathrm{i}^{(1)})}\right), \quad B^{\widetilde{e}}\left(\widetilde{A}_{(\mathrm{s}_\mathrm{i}^{(\mathrm{k})})}\right) \subset L B^e\left(A_{(\mathrm{s}_\mathrm{i}^{(\mathrm{k+1})})}\right), \quad k = 2,4, \\ &B^e\left(A_{(\mathrm{q}_\mathrm{i}^{(2)})}\right) \subset L B^{\widetilde{e}}\left(\widetilde{A}_{(\mathrm{r}_\mathrm{i}^{(2)})}\right), \quad B^e\left(A_{(\mathrm{s}_\mathrm{i}^{(\mathrm{k})})}\right) \subset L B^{\widetilde{e}}\left(\widetilde{A}_{(\mathrm{s}_\mathrm{i}^{(\mathrm{k+1})})}\right), \quad k = 1,3. \end{aligned} \tag{16}$$

Мы можем предполагать, что каждая последующая последовательность в (15) растет значительно медленнее, чем предыдущая. Пусть номер i_0 такой, что

$$4 p_2'' < s_i^{(5)} < s_i^{(4)} < s_i^{(3)} < s_i^{(2)} < s_i^{(1)}, 2 p_1 s_i^{(1)} < r_i^{(2)} < q_i^{(2)} < q_i^{(1)} < r_i^{(1)}, i \ge i_0.$$

Возьмём $K = \ln\left(3L^2\right)$, выберем $\alpha \ge 16 p_1 p_2'' K$, $\tau_0 \ge \max\left\{8\alpha\, p_0'' K, a_{i_0}\right\}$ и определим блоки $W_k = B^e\left(w_k\right)$ и $W_k' = B^e\left(w_k'\right)$, $k = 1,2,3$, из которых будут собраны множества U и V. Веса этих шаров зададим равенствами:

$$w_1 = w_1' = A_{p_1}^{\frac{1}{2}} A_{\left(s_i^{(3)}\right)}^{\frac{1}{2}},\ w_2 = A_{p_0}^{\frac{1}{2}} A_{\left(q_i^{(2)}\right)}^{\frac{1}{2}},\ w_2' = A_{p_0}^{\frac{1}{2}} A_{\left(s_i^{(1)}\right)}^{\frac{1}{2}},$$

Положим $V = \bigcap_{k=1}^{3} W_k$, $U = conv\left(\bigcup_{k=1}^{3} W_k'\right)$. Для построения множеств $\widetilde{V}$ и $\widetilde{U}$ определим блоки $\widetilde{W}_k = B^e\left(\widetilde{w}_k\right)$ и $\widetilde{W}_k' = B^e\left(\widetilde{w}_k'\right)$, $k = 1,2,3$. Их веса мы задаем такими же формулами как и веса шаров $W_k = B^e\left(w_k\right)$ и $W_k' = B^e\left(w_k'\right)$, но со следующим правилом замены: в весах $\widetilde{w}_k$ (соответственно $\widetilde{w}_k'$) мы пишем $\frac{1}{L}\widetilde{A}_{p_k'}$, $\frac{1}{L}\widetilde{A}_{\left(s_i^{(k+1)}\right)}$ и $\frac{1}{L}\widetilde{A}_{\left(r_i^{(k)}\right)}$ (соответственно $L\widetilde{A}_{p_k''}$, $L\widetilde{A}_{\left(s_i^{(k-1)}\right)}$ и $L\widetilde{A}_{\left(r_i^{(k)}\right)}$) вместо A_{p_k}, $A_{\left(s_i^{(k)}\right)}$ и

$A_{\left(q_i^{(k)}\right)}$. На основании (14) и (16) и хорошо известного интерполяционного факта [10] (см. также [9], предложение 3) заключаем, что

$$W_k \subset \widetilde{W}_k\,,\ W'_k \supset \widetilde{W}'_k\,,\ k=1,2,3\,. \tag{17}$$

Теперь положим $\widetilde{V}=\bigcap_{k=1}^{3}\widetilde{W}_k$, $\widetilde{U}=conv\left(\bigcup_{k=1}^{3}\widetilde{W}'_k\right)$. Ввиду (17), для множеств U, $\widetilde{U}$, V, $\widetilde{V}$ справедливы включения (10). Используя простейшие геометрические свойства весовых шаров (см. [9], предложение 5), замечаем, что

$$U=B^e(d),\ \widetilde{U}=B^{\widetilde{e}}\left(\widetilde{d}\right),\ V\supset B^e(c),\ \widetilde{V}\subset 3B^{\widetilde{e}}\left(\widetilde{c}\right), \tag{18}$$

где

$$d=(d_i):=\left(\min\left\{w'_{i,1},w'_{i,2},w'_{i,3}\right\}\right),\ \widetilde{d}=\left(\widetilde{d}_i\right):=\left(\min\left\{\widetilde{w}'_{i,1},\widetilde{w}'_{i,2},\widetilde{w}'_{i,3}\right\}\right),$$
$$c=(c_i):=\left(\max\left\{w_{i,1},w_{i,2},w_{i,3}\right\}\right),\ \widetilde{c}=\left(\widetilde{c}_i\right):=\left(\max\left\{\widetilde{w}_{i,1},\widetilde{w}_{i,2},\widetilde{w}_{i,3}\right\}\right).$$

По определению характеристики β, из (18) следуют оценки:

$$\beta\left(B^e(c),B^e(d)\right)\le\beta(V,U), \tag{19}$$

$$\beta\left(\widetilde{V},\widetilde{U}\right)\le\beta\left(3B^{\widetilde{e}}\left(\widetilde{c}\right),B^{\widetilde{e}}\left(\widetilde{d}\right)\right). \tag{20}$$

Ввиду (19), для доказательства оценки (11) достаточно показать, что левая часть неравенства (19) может быть оценена снизу числом, стоящим в левая части неравенства (11). Применяя предложение 3, и учитывая определения весов c и d, получаем

$$\beta\left(B^e(c),B^e(d)\right)=\left|\bigcap_{k=1}^{3}\bigcap_{l=1}^{3}\left\{i:w_{i,k}\le w'_{i,l}\right\}\right|. \tag{21}$$

Но так как $w_1=w'_1$, из (21) следует равенство:

$$\beta\left(B^e(c),B^e(d)\right)=\left|\bigcap_{k=2}^{3}\left\{i:w_{i,1}\le w'_{i,l},w_{i,k}\le w'_{i,1}\right\}\right|. \tag{22}$$

Теперь рассматривая последовательно все неравенства из правой части (22), подобно тому, как это было сделано, например, в [18,19], мы получим требуемую оценку для $\beta\left(B^e(c),B^e(d)\right)$, а, следовательно, и оценку (11).

Для доказательства оценки (12), благодаря (20), достаточно получить оценку:

$$\beta\left(3B^{\widetilde{e}}\left(\widetilde{c}\right),B^{\widetilde{e}}\left(\widetilde{d}\right)\right)\le\left|\left\{j:\frac{1}{r_j^{(1)}}\le\widetilde{\lambda}_j\le\frac{1}{r_j^{(2)}},\frac{\tau}{\alpha}<\widetilde{a}_j\le\alpha t\right\}\right|. \tag{23}$$

По предложению 3

$$\beta\left(3B^{\widetilde{e}}\left(\widetilde{c}\right),B^{\widetilde{e}}\left(\widetilde{d}\right)\right)\le\left|\bigcap_{k=2}^{3}\left\{i:\widetilde{w}_{i,1}\le 3w'_{i,k},\widetilde{w}_{i,k}\le 3w'_{i,1}\right\}\right|. \tag{24}$$

Рассматривая последовательно все неравенства, входящие в правую часть (24), мы получим оценку (23), а, следовательно, и оценку (12). Что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 4. Так как пространства X и $\widetilde{X}$ изоморфны, по лемме

$\forall\,(\mathrm{r}_\mathrm{i}^{(1)})\in\mathrm{Q}\ \exists\,(\mathrm{q}_\mathrm{i}^{(1)})\in\mathrm{Q}\ \forall\ (\mathrm{q}_\mathrm{i}^{(2)})\in\mathrm{Q}\ \exists\ (\mathrm{r}_\mathrm{i}^{(2)})\in\mathrm{Q},\ \ \alpha>1,\ \tau_0\ge1,$

такие, что для всех $\tau_0\le\tau<t<\infty$ выполняется неравенство (9). Возьмём любое $X_I\in\mathsf{E}_0(\lambda,a)$ с I удовлетворяющим (3). Пусть $\widetilde{J}:=\left\{j:\frac{1}{r_j^{(1)}}\le\widetilde{\lambda}_j\le\frac{1}{r_j^{(2)}}\right\}$, $\widetilde{X}_{\widetilde{J}}$ - подпространство в $\widetilde{X}$, натянутое на орты $\left(e_j\right)_{j\in\widetilde{J}}$. По предложению 1 имеем $\widetilde{X}_{\widetilde{J}}\in\mathsf{E}_0\left(\widetilde{\lambda},\widetilde{a}\right)$. Далее, как и в доказательстве теоремы 3, положим $I=\left(i_k\right)_{k\in N}$, $\widetilde{J}=\left(j_k\right)_{k\in N}$, $c=\left(c_k\right)=\left(a_{i_k}\right)_{k\in N}$, $\widetilde{c}=\left(\widetilde{c}_k\right)=\left(\widetilde{a}_{j_k}\right)_{k\in N}$. Тогда, использую (9), выводим оценку для считающих M_c и $M_{\widetilde{c}}$ последовательностей c и $\widetilde{c}$:

$$M_c(\tau,t) \le \left|\left\{ i : \frac{1}{q_i^{(1)}} \le \lambda_i \le \frac{1}{q_i^{(2)}}, \tau < a_i \le t \right\}\right|$$

$$\le \left|\left\{ j : \frac{1}{r_j^{(1)}} \le \widetilde{\lambda}_j \le \frac{1}{r_j^{(2)}}, \frac{\tau}{\alpha} < \widetilde{a}_j \le \alpha t \right\}\right| = M_{\widetilde{c}}\left(\frac{\tau}{\alpha}, \alpha t\right).$$

Следовательно, по предложению 2, подпространство X_I квазидиагонально вкладывается в $\widetilde{X}_{\widetilde{J}}$. Поэтому найдется $J \subset \widetilde{J}$ такое, что $\widetilde{X}_J$ вложено в $\widetilde{X}_{\widetilde{J}}$ и квазидиагонально изоморфно X_I. Поскольку $J \subset \widetilde{J}$, множество индексов J удовлетворяет (4). Теорема 4 доказана.

Литература

1. Grothendieck A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc., 16, Providence (1955).
2. Djakov P.B., Zahariuta V.P., On Dragilev type power spaces. Studia Math., 120:3 (1996), 219--234.
3. Драгилев М.М., Базисы в пространствах Кёте. Ростов-на-Дону: изд-во Ростовского гос. ун-та, 1983, 144 с.
4. Захарюта В.П., Некоторые линейные топологические инварианты и изоморфизм тензорных произведений центров шкал. Изв. Сев.-Кавк. науч. центра высшей школы, Естеств. науки, 4 (1974), 62--64.
5. Захарюта В.П., Об изоморфизме и квазиэквивалентности базисов для степенных пространств Кёте. Труды седьмой зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. Дрогобыч, 1974. М.: ЦЭМИ, 1976, 101--126.
6. Захарюта В.П., Сложные поперечники и линейные топологические инварианты. Школа по теории операторов в функциональных пространствах (тезисы докладов), Минск, 1978, 51--52.
7. Захарюта В.П., Компактные операторы и изоморфизм пространств Кёте. В кн.: Актуальные вопросы математического анализа, Ростов-на-Дону: изд-во Ростовского гос. ун-та, 1978, 62--71.
8. Zahariuta V.P., Linear topological invariants and their application to generalized power spaces. Turkish J. Math., 20:2 (1996), 237--289.
9. Захарюта В.П., Чалов П.А., Конечные семейства l_p-пространств и многопрямоугольные характеристики. Сиб. матем. ж., 42:3 (2001), 538—549.
10. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М., Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978, 400 с.
11. Meise M., Vogt D. Introduction to Functional Analysis. New York: Oxford Univ. Press, 1997. 437 p.
12. Митягин Б.С., Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах. Успехи матем. наук, 16:4 (1961), 63--132.
13. Митягин Б.С., Эквивалентность базисов в гильбертовых шкалах. Studia Math., 37:2 (1971), 111--137.
14. Pietsch A., Nukleare Lokalkonvexe Räume, Akademie-Verlag, Berlin, (1965).
15. Тихомиров В.М., Некоторые вопросы теории приближений. М.: изд-во Московского гос. ун-та, 1976, 304 с.
16. Chalov P.A., Djakov P.B., Zahariuta V.P., Compound invariants and embeddings of Cartesian products. Studia Math., 137:1 (1999), 33—47.
17. Chalov P.A., Dragilev M.M., Zahariuta V.P., Pairs of finite-type power series spaces. Note di matematica (Proceedings of the Second International Workshop on Functional Analysis at Trier University, Germany, September 26 --- October 1, 1997), 17 (1997), 121--142.
18. Chalov P.A., Terzioğlu T., Zahariuta V.P., First type power Köthe spaces and m-rectangular invariants. Linear Topological Spaces and Complex Analysis III, METU- TÜBİTAK, Ankara, (1997), 30--44.
19. Chalov P.A., Terzioğlu T., Zahariuta V.P., Multirectangular invariants for power Köthe spaces. J. Math. Anal. Appl. 297 (2004), 673--695.

Sabanci University (Tuzla-Istanbul, Turkey),
Ростовский государственный университет (Ростов-на-Дону)