

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE
PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN RESSOURCES ET SYSTÈMES

PAR
MICHEL PRIVÉ
B. ING.

APPROCHES PHYSIQUE ET NUMÉRIQUE
DU PHÉNOMÈNE DES VIBRATIONS
INDUITES PAR EFFET DE COURONNE

AOÛT 1986



Mise en garde/Advice

Afin de rendre accessible au plus grand nombre le résultat des travaux de recherche menés par ses étudiants gradués et dans l'esprit des règles qui régissent le dépôt et la diffusion des mémoires et thèses produits dans cette Institution, **l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** est fière de rendre accessible une version complète et gratuite de cette œuvre.

Motivated by a desire to make the results of its graduate students' research accessible to all, and in accordance with the rules governing the acceptance and diffusion of dissertations and theses in this Institution, the **Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** is proud to make a complete version of this work available at no cost to the reader.

L'auteur conserve néanmoins la propriété du droit d'auteur qui protège ce mémoire ou cette thèse. Ni le mémoire ou la thèse ni des extraits substantiels de ceux-ci ne peuvent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

The author retains ownership of the copyright of this dissertation or thesis. Neither the dissertation or thesis, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

RÉSUMÉ

Une étude en deux parties du mécanisme des vibrations induites par effet de couronne des conducteurs à haute tension est présentée dans ce travail.

Dans la première partie, approche physique, nous avons fait un calcul de la force de réaction due au vent électrique agissant sur une pointe. Il a permis de démontrer que cette force est négligeable comparativement à la force totale produisant les vibrations. Nous avons démontré qu'un conducteur H.T., suspendu par des ressorts au-dessus d'une plaque métallique, vibre lorsqu'une charge d'espace intermittente est injectée entre le conducteur H.T. et la plaque reliée à la terre. Ceci démontre le rôle important de la charge d'espace dans le mécanisme des vibrations induites par effet de couronne, et la nécessité d'étudier numériquement les forces d'interaction électrostatiques entre la charge d'espace et le système conducteur-gouttes.

Dans la seconde partie, approche numérique, nous avons utilisé une méthode combinée qui est basée sur les méthodes de simulation de charges de surface et des éléments finis de frontière, afin de déterminer l'influence de la charge d'espace sur le champ électrique à l'extrémité d'une pointe simulant une goutte d'eau suspendue. Nous avons constaté que la présence de la charge d'espace occasionne une baisse considérable du champ électrique à l'extrémité de la pointe. La diminution périodique du champ électrique cause par conséquent une force intermittente qui entraîne les vibrations. L'approche numérique utilisée a également démontré la possibilité de calculer la force répulsive d'origine électrostatique agissant entre la charge d'espace et la pointe.

Michel Privé
Michel Privé
Etudiant

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au sein du Groupe de recherche de l'ingénierie de l'environnement atmosphérique de l'UQAC, et grâce à l'appui financier du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada.

Je tiens à exprimer mes sincères sentiments de reconnaissance à feu monsieur Luan C. Phan qui fut à l'origine de ce travail et qui a d'ailleurs été mon premier directeur de recherche.

Je remercie monsieur Masoud Farzaneh qui a dirigé la poursuite de mes travaux, pour l'attention et les précieux conseils qu'il m'a accordés.

Je remercie également monsieur Augustin Gakwaya qui a agi comme co-directeur. Il fut une personne ressource inestimable dans le domaine des méthodes numériques.

Mesdames Johanne Simard, Annie Lalancette et Lucie Bellemare qui ont contribué à la présentation de ce texte, ainsi que mes confrères d'études et mes amis(es) qui ont su me donner le courage de poursuivre le travail entrepris, voudront également trouver mes sincères remerciements.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	ii
REMERCIEMENTS	iii
TABLE DES MATIÈRES	iv
LISTE DES FIGURES	vii
LISTE DES TABLEAUX	x
1. INTRODUCTION	1
1.1 Forces induites par effet de couronne et mécanisme des vibrations	2
1.2 Distribution du champ électrique	4
1.3 Objectifs et méthodologie	9
2. APPROCHE PHYSIQUE	11
2.1 Forces induites par effet de couronne	11
2.1.1 Montage utilisé pour déterminer la force totale induite par effet de couronne	12
2.1.2 Résultats expérimentaux	12
2.2 Force réactive due au vent électrique	16
2.2.1 Notion de vent électrique	16
2.2.2 Calcul de la force réactive due au vent électrique ..	17
2.3 Effet d'écran de la charge d'espace	23
2.3.1 Notion de la charge d'espace	23
2.3.2 Montage expérimental	23
2.3.3 Résultats expérimentaux	26

3. APPROCHE NUMÉRIQUE	31
3.1 Choix de la méthode	32
3.2 Modèle utilisé	34
3.3 Formulation mathématique (Méthode des équations intégrales)	36
3.3.1 Équation de base de la MSCS pour la région V_1	38
3.3.2 Méthode par équation intégrale directe pour la région V_2	38
3.4 Discrétisation par la méthode des éléments finis de frontière (MEFF)	39
3.4.1 Généralités sur la MEF	39
3.4.2 Discrétisation des équations intégrales	43
3.4.3 Présentation matricielle	45
3.4.4 Intégration numérique	48
3.4.4.1 Évaluation des composantes de la matrice $[G]$	49
3.4.4.2 Évaluation des composantes de la matrice $[H]$	55
3.4.4.3 Évaluation des composantes de la matrice $[G']$	56
3.4.4.4 Évaluation des composantes du vecteur $\{f\}$	58
3.4.5 Assemblage matriciel et résolution	62
3.5 Champ électrique	63
3.6 Force électrostatique	65
3.7 Organigrammes de calcul et programmation	66
3.7.1 Programme principal MEFF	69
3.7.2 Blocs de lecture	70
3.7.3 Blocs de calcul	71
3.8 Validation et résultats	81
3.8.1 Validation du modèle numérique	81

3.8.2 Limites d'application du modèle numérique	92
3.8.3 Application à l'étude du mécanisme des vibrations....	95
3.8.3.1 Champ électrique	96
3.8.3.2 Force électrostatique	100
3.9 Discussion des résultats	102
4. CONCLUSION GÉNÉRALE ET RECOMMANDATIONS	103
BIBLIOGRAPHIE	106
ANNEXE 1 Formulation par équation intégrale directe	111
ANNEXE 2 Liste des sous-programmes de calculs	115

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: Système tige-plan	9
Figure 2.1: Montage expérimental utilisé pour déterminer la force totale induite par effet de couronne	13
Figure 2.2: Amplitude du déplacement du conducteur et de la force exercée sur chaque pointe en fonction des tensions continues et alternative appliquées	14
Figure 2.3: Amplitude de la force exercée sur une pointe métallique en fonction du courant de décharge	15
Figure 2.4: Profil de vitesse du vent électrique dans un plan situé au niveau de l'électrode grille	18
Figure 2.5: Schéma de l'écoulement d'air entre la pointe et la terre	18
Figure 2.6: Volume et surface de contrôle considérés autour de la pointe	20
Figure 2.7: Grandeur des vitesses V_i correspondant aux sections A_i	21
Figure 2.8: Vitesses axiales du vent entre la pointe et une grille pour un plan situé à 3.5 mm de la pointe	22
Figure 2.9: Montage expérimental avec système d'injection de charges d'espace	25
Figure 2.10: Schéma du circuit d'alimentation	28
Figure 2.11: Forme de la tension impulsionnelle; fréquence 2.46 Hz .	29
Figure 2.12: Amplitude des vibrations du conducteur et intensité du courant injecté en fonction de la valeur crête de la tension impulsionnelle	30
Figure 3.1: Programme d'éléments finis versus programme d'éléments frontières	33
Figure 3.2: Modèle géométrique pour la formulation mathématique	35

Figure 3.3: Transformation d'un espace réel à 2 dimensions en un espace de référence à 1 dimension	41
Figure 3.4: Intégration avec singularité	54
Figure 3.5: Division de la charge d'espace en cellules triangulaires.	59
Figure 3.6: Élément de référence triangulaire	60
Figure 3.7: Organigramme général du programme MEFF	68
Figure 3.8: Organigramme du programme principal MEFF	70
Figure 3.9: Organigramme du bloc BLLMAT	74
Figure 3.10: Organigramme du sous-programme STNS (cas non singulier)	75
Figure 3.11: Organigramme du sous-programme STCS (cas singulier)	76
Figure 3.12: Organigramme du sous-programme FVOL	77
Figure 3.13: Organigramme du sous-programme POTS3	78
Figure 3.14: Organigramme du bloc BLCINT	79
Figure 3.15: Organigramme du bloc BLFINT	80
Figure 3.16: Configuration condensateur cylindrique	82
Figure 3.17: Configuration conducteurs parallèles	82
Figure 3.18: Configuration condensateur cylindrique divisée en 8 éléments	84
Figure 3.19: Configuration conducteurs parallèles divisée en 8 éléments	85
Figure 3.20: Comparaison entre les valeurs numérique et analytique de la charge électrique	87
Figure 3.21: Pourcentage d'erreur sur la valeur numérique de la charge électrique	88
Figure 3.22: Comparaison entre la valeur numérique et analytique du champ électrique	89
Figure 3.23: Pourcentage d'erreur sur la valeur numérique du champ électrique	90
Figure 3.24: Champ électrique pour 28,40,49 et 56 éléments	91

Figure 3.25: Polarité des charges et potentiel des surfaces pour trois grandeurs de charge d'espace	95
Figure 3.26: Distribution du champ électrique sur l'axe de symétrie au voisinage de la pointe en fonction de la distance à la pointe r pour différents potentiels ..	98
Figure 3.27: Intensité du champ électrique à la pointe en fonction de la tension appliquée	99
Figure 3.28: Force électrostatique en fonction de la distance de la charge à la pointe	101
Figure A1.1: Description du domaine V	112

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I : Paramètres utilisés pour la simulation	36
Tableau II: Abscisses et poids d'intégration pour un élément de référence triangulaire	61

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

Une des conséquences inévitables du transport d'énergie électrique en haute tension est l'apparition de l'effet de couronne. Les propriétés de l'effet de couronne ont été étudiées par certains chercheurs⁽¹⁻³⁾, et sont utilisées dans quelques applications⁽⁴⁾. Toutefois, il existe quelques aspects indésirables de l'effet de couronne, tels que les pertes⁽⁵⁾ et les interférences radiophoniques^(6,7) et télévisuelles⁽⁸⁾. Ces aspects ont été suffisamment étudiés dans le passé. Par contre, les vibrations induites par effet de couronne ainsi que leur mécanisme ne semblent pas avoir reçu autant d'attention.

D'après une série d'observations, et d'après les résultats obtenus par certains chercheurs⁽⁹⁻¹⁴⁾, il a été constaté que, lors de la pluie et sous certaines conditions, les conducteurs de lignes de transport d'énergie électrique vibrent avec la fréquence naturelle de la portée des conducteurs. Ces vibrations, appelées vibrations induites par effet de couronne, ont une amplitude de l'ordre de 10 cm. Ces vibrations pourraient causer des incidents dus à la fatigue du matériel (comme les conducteurs, les pinces de fixation, etc.). Afin de pouvoir minimiser ou éliminer ces vibrations, il est nécessaire d'en connaître l'origine ainsi que les conditions favorisant le démarrage. La connaissance du

mécanisme des vibrations est donc un élément de solution important. C'est pour cette raison qu'un groupe de chercheurs de l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC) s'est préoccupé essentiellement de cet aspect du problème.

1.1 FORCES INDUITES PAR EFFET DE COURONNE ET MÉCANISME DES VIBRATIONS

Les vibrations induites par effet de couronne des conducteurs des lignes de transmission à haute tension (H.T.) sont connues depuis 1932⁽⁹⁾. Depuis ce temps, plusieurs observations ainsi que des études expérimentales et théoriques ont été réalisées⁽¹⁰⁻²¹⁾. Depuis quelques années, des travaux sont en cours au sein du Groupe de recherche de l'ingénierie de l'environnement atmosphérique (GRIEA) de l'UQAC, dans le but de déterminer le mécanisme des vibrations induites par effet de couronne des conducteurs H.T. sous la pluie⁽¹⁵⁻²¹⁾. Plusieurs hypothèses sur l'origine de la force ont été avancées, les principales étant:

- la force réactive due à l'éjection de gouttelettes d'eau du conducteur⁽¹⁵⁾;
- la force répulsive d'origine électrostatique agissant entre les gouttes éjectées et le conducteur^(13,15);
- la force réactive due au vent électrique⁽¹⁵⁾;

- l'effet d'écran des charges d'espace produites par les gouttes d'eau suspendues ^(18,21).

Il a été démontré que la force réactive due à l'éjection de gouttelettes d'eau ainsi que la force répulsive d'origine électrostatique sont négligeables comparativement à la force totale produisant les vibrations^(18,20,21). Ainsi, le mécanisme proposé tenait compte exclusivement de l'effet d'écran des charges d'espace. Le mécanisme proposé peut être résumé comme suit ⁽¹⁸⁾:

”Sous des conditions de pluie, des gouttes d'eau suspendues se forment sous le conducteur. Sans tension appliquée, ces gouttes d'eau ont une forme hémisphérique. Quand la haute tension est appliquée au conducteur, les gouttes d'eau suspendues s'allongent et prennent une forme conique. La formation des cônes est le résultat de l'interaction entre les forces dues au champ électrique à la surface du conducteur, à la tension de surface et à la gravité. Dû à l'augmentation du champ électrique à la pointe des cônes, les décharges de couronne apparaissent, et conséquemment, les charges d'espace autour des gouttes d'eau suspendues augmentent. La présence d'une charge d'espace a pour effet de diminuer le champ électrique à la pointe des gouttes d'eau suspendues; autrement dit, la charge d'espace a un rôle d'écran entre le système conducteur-gouttes et son image. Les forces d'origine électrostatique dirigées verticalement vers le haut sont appliquées et

le conducteur se déplace dans le même sens. Lorsqu'une goutte atteint une taille critique, l'instabilité apparaît et des gouttelettes d'eau sont éjectées. Les gouttes d'eau restantes perdent leur forme conique; l'activité de décharge devient très faible et les charges d'espace diminuent. Par conséquent, la force attractive entre le conducteur et la terre devient importante et le conducteur redescend. Sous la pluie, les gouttes d'eau suspendues reprennent une forme conique; la quantité de charges d'espace augmente à nouveau et le processus est répété. Après le démarrage du mouvement, le conducteur est soumis à une accélération dirigée tantôt vers le bas, tantôt vers le haut. L'élongation des gouttes d'eau devient synchronisée avec le mouvement du conducteur. Les vibrations sont ainsi maintenues."

Dans le mécanisme proposé, la contribution du vent électrique est considérée comme négligeable comparativement à l'effet d'écran des charges d'espace. Mais, aucun ordre de grandeur de la force réactive due au vent électrique n'a été donné.

1.2 DISTRIBUTION DU CHAMP ÉLECTRIQUE

La présence intermittente des charges d'espace et du vent électrique en-dessous des gouttes d'eau suspendues aux conducteurs semble être la principale cause de l'apparition des vibrations induites par effet de couronne. La quantité de charges d'espace et la vitesse du vent

électrique sont directement reliées à la valeur du champ électrique à la pointe des gouttes d'eau. L'étude des vibrations induites par effet de couronne demande donc l'évaluation de la distribution du champ électrique à proximité des gouttes d'eau suspendues au conducteur. Il s'avère difficile de déterminer expérimentalement la grandeur du champ électrique créé dans une configuration géométrique présentant une pointe, puisque tout appareil ou sonde de mesure introduit dans le montage aurait pour conséquence de modifier la distribution du champ. De plus, l'utilisation d'une pointe est un réel obstacle dans l'étude analytique de ces phénomènes parce que le calcul du champ devient alors difficile. Le calcul du champ requiert en général la solution d'équations différentielles couplées et non linéaires qu'on peut cependant réduire par des hypothèses simplificatrices à des équations de Laplace et de Poisson avec satisfaction des conditions appropriées aux frontières. Cela peut être fait par des méthodes numériques ou analytiques. Dans plusieurs cas, la géométrie des systèmes physiques étant trop complexe, la solution analytique est difficile, si non impossible. Alors, pour surmonter cette difficulté, les méthodes numériques doivent être employées. Les méthodes numériques communément employées dans des applications pratiques en ingénierie sont normalement basées sur des formulations différentielles ou intégrales des problèmes aux limites d'intérêt, et comprennent la méthode des différences finies, la méthode des équations intégrales de frontière et la méthode des éléments finis.

Quelques articles traitant de la solution de l'équation de Laplace par la technique de différences finies ont été publiés^(22,23). Cette méthode a permis d'obtenir quelques informations sur la distribution du champ électrique à proximité d'une pointe (le rayon du bout de la pointe est de $3 \mu\text{m}$) dans un système pointe-plan en présence d'une charge d'espace, pour différentes densités de charge et une tension constante de 40 kv ⁽²²⁾. La charge d'espace est située dans une région cylindrique ($10 \mu\text{m}$ de rayon) autour de la pointe. Les résultats obtenus dans cette référence se résument ainsi:

- l'intensité du champ électrique au bout de la pointe diminue lorsque la densité de charge augmente;
- la valeur du champ électrique au voisinage de la pointe est maximum à la frontière de la charge d'espace;
- la densité de charge d'espace influence fortement l'intensité du champ électrique au point où le champ est maximum, c'est-à-dire à la frontière de la charge d'espace et au bout de la pointe.

Ces résultats indiquent clairement que la charge d'espace crée un effet d'écran entre la pointe et la terre.

Une autre approche possible est la méthode de simulation de

charges (MSC). Cette technique est basée sur la résolution des équations intégrales correspondant aux équations de Laplace et de Poisson, en employant des charges discrètes, ou en divisant la surface de l'électrode en petites surfaces de charge⁽²⁴⁻²⁸⁾. La méthode basée sur le concept des charges discrétisées a été utilisée avec succès pour la détermination du champ électrique pour quelques configurations d'électrodes. Cette méthode est très simple et est applicable à des systèmes incluant un ou plusieurs corps avec une densité de charge homogène. Certains auteurs^(25,26), en utilisant cette technique, ont modélisé la distribution des charges à la surface d'une tige (dans le système tige-plan représenté à la figure 1.1) par un point de charge localisé au centre de la pointe hémisphérique et des lignes de charges axiales semi-infinies, pour simuler respectivement une pointe hémisphérique et une tige cylindrique. L'erreur du calcul du potentiel électrique pour cette configuration est fonction de la distance pointe-plan G et du rayon de courbure R du bout hémisphérique de la tige. Elle augmente substantiellement pour des rapports G/R inférieurs à 50%. Pour un rapport G/R égal à 10, cette erreur est de l'ordre de 3%⁽²⁶⁾. L'erreur sur le potentiel peut être considérablement réduite en employant un système d'équations linéaires introduit par Singer⁽²⁴⁾.

La méthode des éléments finis a également été employée pour l'étude du champ électrique⁽²⁹⁻³¹⁾. Une approche numérique basée sur la méthode des éléments finis classique a été présentée par Gak-

waya et Farzaneh ⁽²⁹⁾. Selon ces auteurs, une telle approche pour l'étude des vibrations induites par effet de couronne n'avait pas encore été employée. Dans cette approche, une goutte d'eau est simulée par une pointe métallique fixée à la surface inférieure d'un conducteur. Ce dernier est placé au centre d'une cage cylindrique reliée à la terre. On suppose que la charge d'espace se forme dans un espace sphérique ($r=0.02$ cm) situé à proximité du bout de la pointe. Les dimensions géométriques sont égales à celles du montage utilisé par Farzaneh pendant ses travaux de recherche^(18,20,21). Pour simplifier le calcul, le champ électrique est évalué entre l'extrémité de la pointe et la charge d'espace dans un système de coordonnées bidimensionnel. Cependant, cette méthode ne permet pas de déterminer la force répulsive entre la charge d'espace et la pointe. Les résultats se résument ainsi: la présence de la charge d'espace diminue l'intensité du champ électrique à l'extrémité de la pointe. Selon les auteurs, l'apparition intermittente de ce phénomène serait la cause principale des vibrations induites par effet de couronne.

Afin d'exploiter les avantages inhérents à l'une ou l'autre des méthodes numériques citées précédemment, et de déterminer la force répulsive agissant entre la charge d'espace et la pointe, il est possible d'employer une méthode combinée⁽²⁸⁾. C'est cette dernière approche qui est d'ailleurs utilisée dans ce travail en utilisant le même modèle que celui déjà cité⁽²⁹⁾.

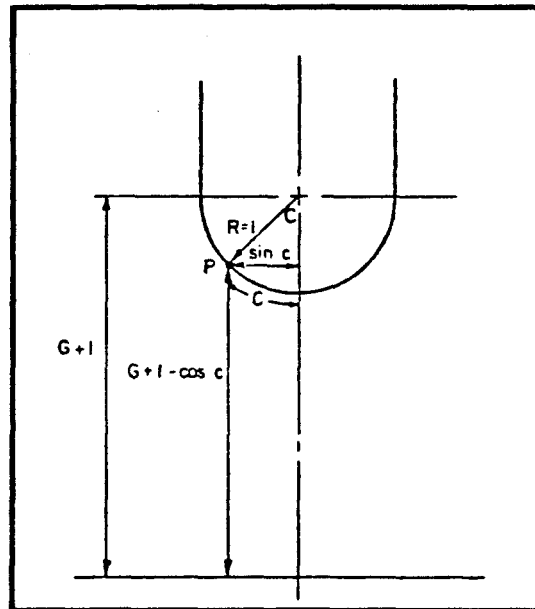


Figure 1.1: Système tige-plan⁽²⁵⁾

1.3 OBJECTIFS ET MÉTHODOLOGIE

Les objectifs principaux de ce mémoire sont les suivants:

1. Déterminer expérimentalement:

- la force totale produisant les vibrations;
- la force réactive due au vent électrique.

2. Évaluer numériquement:

- la variation du champ électrique au voisinage immédiat de la

pointe;

- la force électrostatique existant entre la charge d'espace et la pointe.

C'est ainsi que dans la première partie du travail (chapitre II), nous présentons une approche physique du problème. Il s'agit, dans un premier temps, d'évaluer expérimentalement l'ordre de grandeur de la force totale produisant les vibrations et celle créée par le vent électrique en simulant les gouttes d'eau par des cônes métalliques. Ensuite nous démontrons qu'un conducteur H.T., suspendu au-dessus d'une plaque métallique reliée à la terre, vibre lorsque des charges d'espace intermittentes sont injectées dans l'espace entre le conducteur et la plaque. Alors que dans la seconde partie (chapitre III) nous abordons une approche numérique du problème afin d'étudier le rôle de la charge d'espace dans le mécanisme des vibrations. Une technique développée à l'aide d'une méthode combinée de simulation de charges de surface (MSCS)⁽²⁷⁾ et d'éléments finis de frontière (MEFF)⁽³²⁾ sera présentée. Cette technique permettra d'évaluer la distribution du champ électrique au voisinage de la pointe et de calculer la force agissant entre la pointe métallique et la charge d'espace.

CHAPITRE II

APPROCHE PHYSIQUE

Le mécanisme des vibrations induites par effet de couronne des conducteurs H.T. proposé par M. Farzaneh et L.C. Phan, cité à la section 1.1, est basé sur la présence intermittente de la charge d'espace entre le conducteur et la terre. Bien qu'il soit mentionné par ces auteurs que l'influence de la force de réaction due au vent électrique est de moindre importance que celle due à la charge d'espace, l'évaluation quantitative de chacune de ces forces n'a cependant pas été faite.

Dans ce chapitre, nous tentons tout d'abord d'évaluer l'amplitude de la force totale produisant les vibrations ainsi que celle de la force réactive due au vent électrique. Ensuite, nous démontrons expérimentalement qu'un conducteur H.T. peut vibrer lorsque une charge d'espace intermittente est injectée dans l'espace situé entre celui-ci et la terre.

2.1 FORCES INDUITES PAR EFFET DE COURONNE

Nous savons, selon les résultats obtenus précédemment⁽¹⁸⁾, qu'un conducteur muni de pointes à sa surface inférieure se déplace verticalement vers le haut lorsqu'il est soumis à la haute tension. Connaissant

le déplacement du conducteur, donc la déformation des ressorts, les forces agissant sur le conducteur peuvent être calculées.

2.1.1 Montage utilisé pour déterminer la force totale induite par effet de couronne^(18,21)

Pour effectuer les mesures, 65 pointes coniques en aluminium, de diamètre de base de 6 mm et de hauteur de 20 mm chacune, ont été fixées à la surface d'un conducteur lisse et creux en aluminium de 3.2 cm de diamètre (figure 2.1). Le conducteur est ensuite suspendu par 2 paires de ressorts dans l'axe d'un cylindre en grillage métallique d'un mètre de diamètre et de 2 m de long. Les cônes métalliques simulent les gouttes d'eau suspendues au conducteur pendant la pluie et sont espacés de 3 cm. Le déplacement vertical du conducteur est mesuré à l'aide de jauges de contrainte tel que montré sur la figure 2.1. Le courant de décharge est mesuré à l'aide de la résistance de mesure de 1 k Ω placée entre la partie centrale de la cage et la terre.

2.1.2 Résultats expérimentaux

Lorsque le conducteur est soumis à la haute tension (continue ou alternative), il a été observé qu'il se déplace verticalement vers la partie supérieure de la cage. La figure 2.2 illustre l'amplitude du déplacement en fonction des tensions continue ou alternative appliquées au conduc-

teur. Le déplacement vertical du conducteur permet de déterminer la force mise en jeu. Celle-ci est également représentée à la figure 2.2. Il est possible d'observer à travers ces résultats que l'amplitude de la force augmente en fonction de la tension appliquée. On peut aussi remarquer que pour une tension donnée, l'amplitude de la force la plus élevée est obtenue en polarité positive.

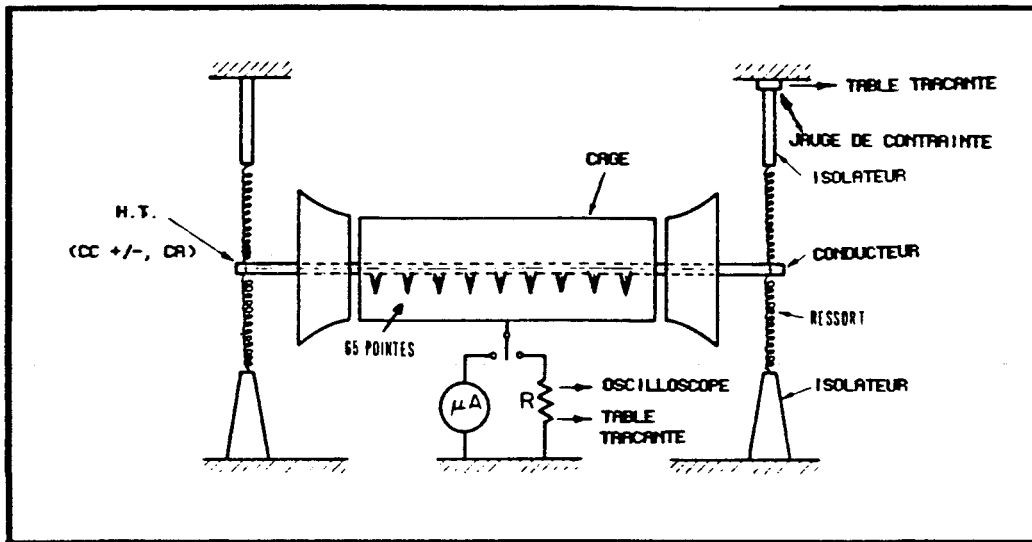


Figure 2.1: Montage expérimental utilisé pour déterminer la force totale induite par effet de couronne⁽²¹⁾

Sur la figure 2.3, nous avons présenté l'amplitude de la force exercée sur chaque pointe en fonction de l'intensité du courant de décharge par pointe métallique. Nous remarquons que pour une intensité donnée du courant, l'amplitude de la force est plus grande en polarité positive.

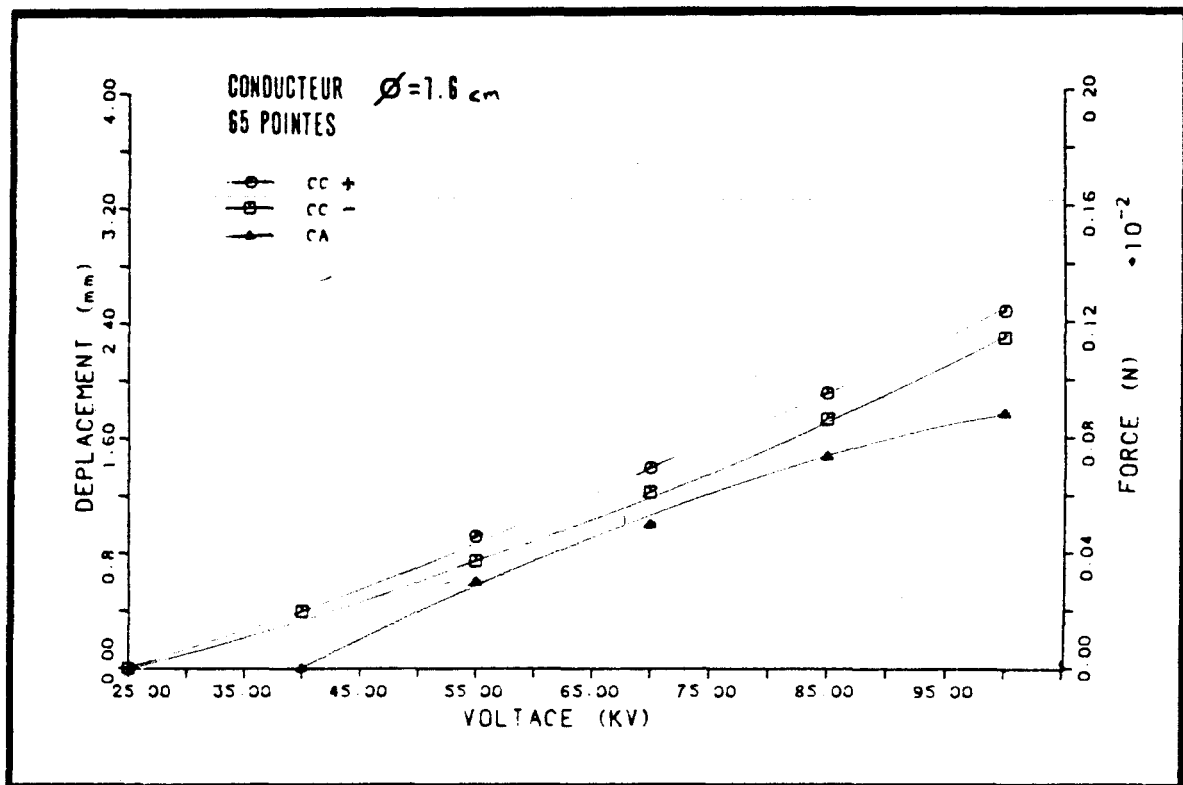


Figure 2.2: Amplitude du déplacement du conducteur et de la force exercée sur chaque pointe en fonction des tensions continues et alternative appliquées

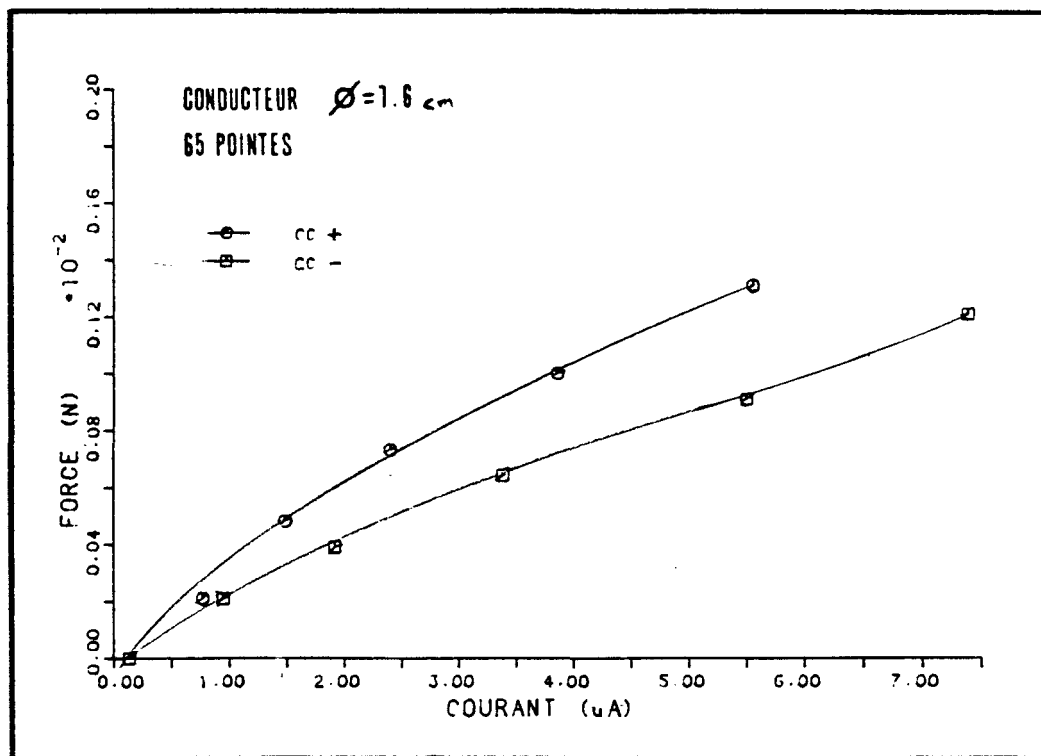


Figure 2.3: Amplitude de la force exercée sur une pointe métallique en fonction du courant de décharge

2.2 FORCE RÉACTIVE DUE AU VENT ÉLECTRIQUE

2.2.1 Notion de vent électrique

Considérons un système d'électrodes pointe-plan. Lorsqu'on établit un champ électrique suffisamment élevé entre les électrodes, les électrons libres se déplacent dans le sens opposé à celui du champ électrique. Grâce à quelques collisions élastiques entre les électrons et les molécules du gaz ambiant (air), l'énergie cinétique, et par conséquent la vitesse des électrons, augmente. Lorsque l'énergie cinétique des électrons devient importante, ils peuvent produire des collisions inélastiques avec les atomes neutres du gaz, et les ioniser. Les électrons créés lors de l'ionisation acquièrent à leur tour suffisamment d'énergie pour produire d'autres collisions ionisantes. C'est le processus d'avalanche qui entraîne un accroissement rapide des ions positifs. Dans les gaz électro-négatifs, les ions négatifs sont également formés par l'attachement entre les électrons et les molécules neutres.

Les ions créés lors de la décharge tendent à migrer vers le sol, mais au cours de leur déplacement, ils entrent en collision avec des molécules de gaz. L'énergie transmise aux molécules d'air se transforme non seulement en chaleur mais aussi en énergie cinétique. De cette énergie cinétique découle un flux d'air en quelque sorte entraîné visqueusement par les ions. C'est le vent électrique. Le vent électrique, ainsi créé, peut

exercer une certaine force sur la surface des électrodes.

2.2.2 Calcul de la force réactive due au vent électrique

Dans cette partie de notre étude, nous essayons de déterminer la force agissant sur une pointe métallique à partir des vitesses du vent électrique déterminées par d'autres chercheurs pour une configuration pointe-plan. Quelques travaux de recherche ont été effectués dans le but de mesurer la vitesse du vent⁽³³⁻³⁹⁾. Adachi⁽³³⁾ a déterminé le profil de vitesse du vent électrique au niveau de l'électrode plane en utilisant un anémomètre à thermistance. A titre d'exemple, nous présentons un de ses résultats à la figure 2.4. Lors de ces mesures, la distance pointe-grille D était de 2 cm, la tension V était à 14 kv en polarité positive et l'intensité du courant de décharge était de $74 \mu A$. On remarque que la vitesse du vent électrique est maximale sur l'axe de symétrie (0.8 m/s) et diminue en s'éloignant de celle-ci.

Ballereau⁽³⁵⁾, en utilisant un système optique d'anémométrie laser, a mesuré la vitesse du vent dans un plan situé entre une pointe et une grille. Il a déterminé aussi la trajectoire des poussières atmosphériques. Ainsi, on peut observer que les trajectoires des poussières sont convergentes vers l'axe de la pointe. Elle s'orientent, à l'intérieur d'un cône coaxial au système avec son sommet à la pointe, vers la grille pour devenir approximativement parallèles à l'axe de la décharge; comme

schématisé sur la figure 2.5.

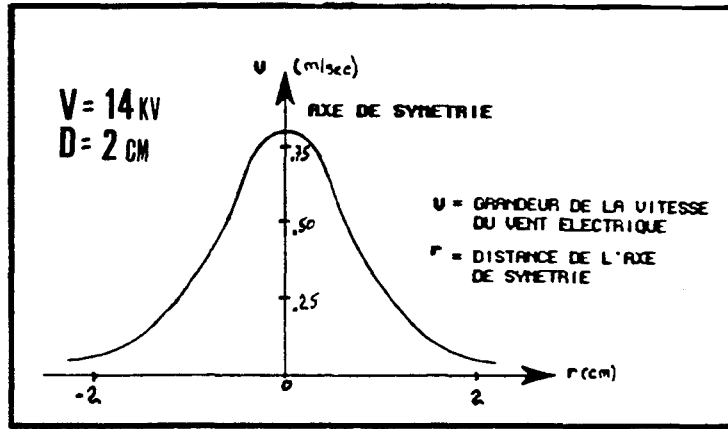


Figure 2.4: Profil de vitesse du vent électrique dans un plan situé au niveau de l'électrode grille⁽³³⁾

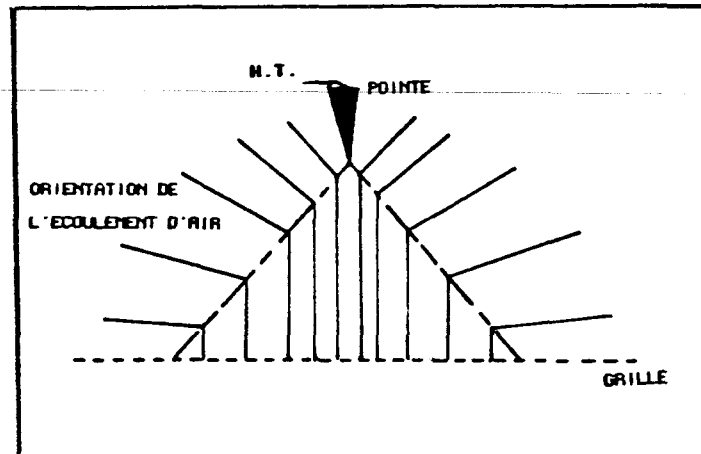


Figure 2.5: Schéma de l'écoulement d'air entre la pointe et la terre⁽³⁵⁾

La force, nécessaire pour accélérer les ions et ainsi créer le vent, produit une réaction sur l'électrode pointue. Si le profil du vent est connu dans un plan horizontal situé entre la pointe et l'électrode plane,

la loi de conservation de quantité de mouvement permet de calculer la force de réaction à la pointe. En régime établi et en négligeant les forces de volume, l'équation de conservation de quantité de mouvement s'écrit sous la forme suivante⁽⁴⁰⁾:

$$\int_{SC} \int \vec{T} dA = \int_{SC} \int \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \quad (2.1)$$

où \vec{T} représente les forces de surface, dA un élément de surface, \vec{V} et ρ respectivement la vitesse et la densité de l'air. Pour déterminer la force appliquée sur une électrode conique lors de la décharge, on considère un volume de contrôle limité par les surfaces BAG , GF, FE, ED , DC et CB (figure 2.6). BAG représente la pointe conique simulant une goutte d'eau et ED le plan dans lequel les mesures de vitesse sont effectuées. Les surfaces GF, FE, DC et CB sont choisies suffisamment éloignées pour qu'on puisse négliger la vitesse du vent.

En considérant la densité de l'air constante et le volume de contrôle tel que décrit précédemment, l'équation (2.1) s'écrit:

$$F_v = \sum \rho V_i^2 A_i \quad (2.2)$$

i=1,2, ... nombre d'éléments
de surface

Où F_v est la force de réaction à la pointe, V_i sont les vitesses moyennes du vent sur les sections A_i situées sur la surface ED (figure 2.7).

Pour calculer la force de réaction F_v , nous utilisons les vitesses du vent électrique obtenues par Ballereau⁽³⁵⁾ lors d'un de ses essais. Dans cet essai, la distance entre la pointe et la grille est de 4 mm. Le courant de décharge est de $20 \mu\text{A}$ et la polarité de la pointe est négative. La vitesse du vent en fonction de la distance à l'axe est mesurée dans un plan perpendiculaire à l'axe de la décharge situé à une distance de 3.5 mm de la pointe (figure 2.8). La force calculée à partir de ce profil de vitesse est de l'ordre de 10^{-4} N.

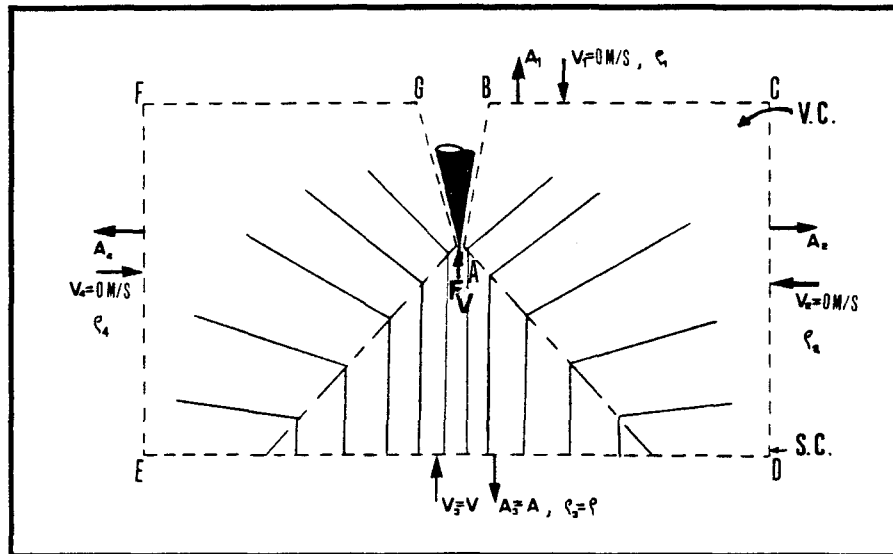


Figure 2.6: Volume et surface de contrôle considérés autour de la pointe

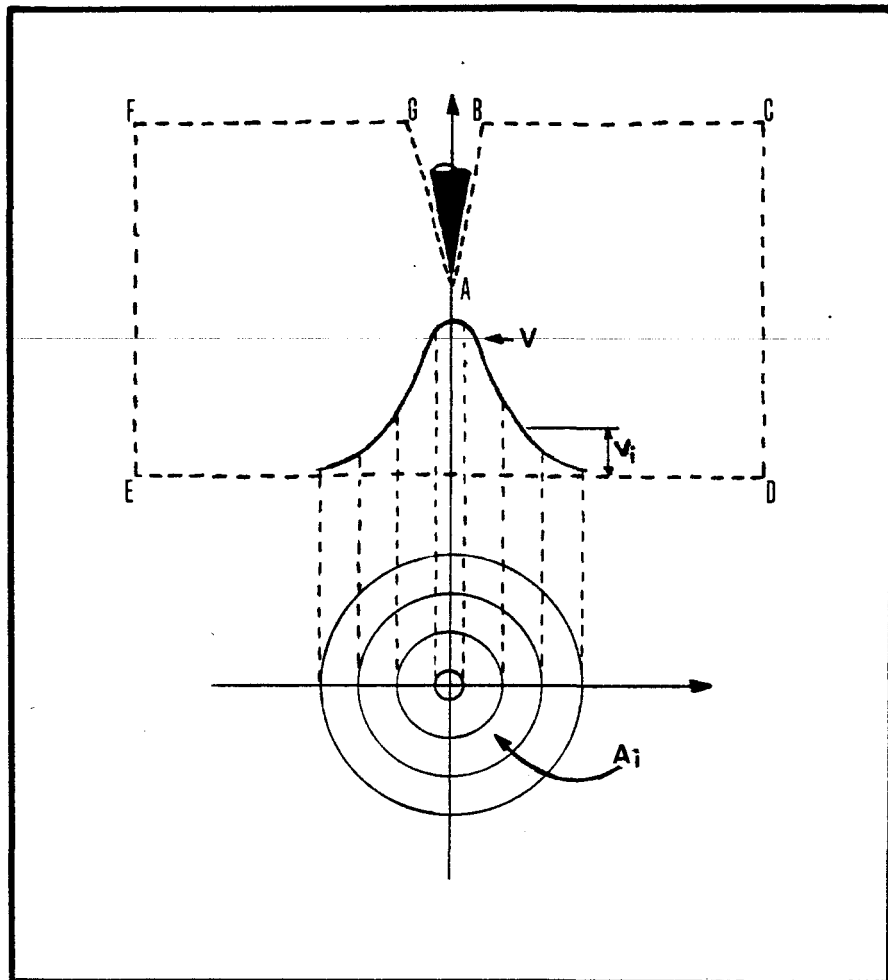


Figure 2.7: Grandeur des vitesses V_i correspondant aux sections A_i

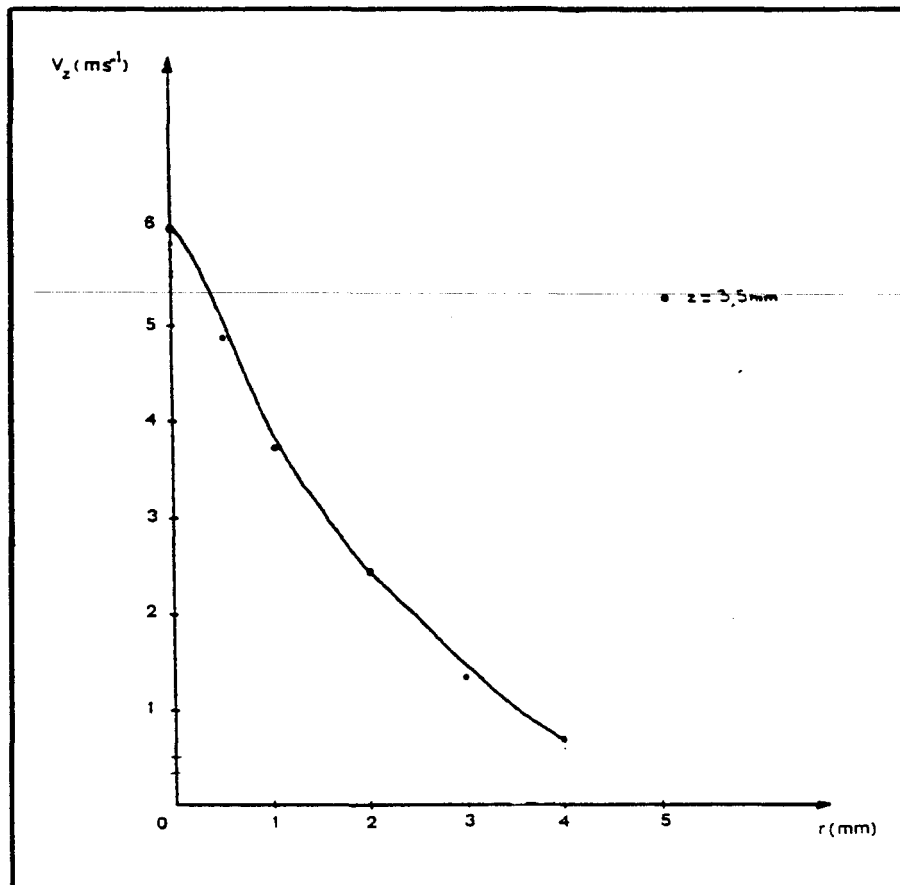


Figure 2.8: Vitesses axiales du vent entre la pointe et une grille pour un plan situé à 3.5 mm de la pointe⁽³⁵⁾

2.3 EFFET D'ÉCRAN DE LA CHARGE D'ESPACE

2.3.1 Notion de la charge d'espace

Comme il a été mentionné au paragraphe 2.2.1, pendant la décharge électrique, des ions positifs et négatifs sont créés. Ces ions sont plus lourds que les électrons. Ils prennent donc plus de temps pour se déplacer dans le champ électrique. Par conséquent, il y a accumulation d'une charge d'espace positive près de l'électrode pointue en polarité positive. Ceci modifie le champ électrique local et provoque une force d'interaction d'origine électrostatique entre la charge d'espace et l'électrode. Pour l'électrode pointue en polarité négative, les ions négatifs créés par l'attachement forment une charge d'espace négative près d'elle.

Dans cette partie de notre étude, nous démontrons expérimentalement qu'il est possible de faire vibrer un conducteur H.T. en injectant des charges d'espace intermittentes sous le conducteur.

2.3.2 Montage expérimental

Pour l'étude de l'influence de la charge d'espace sur les vibrations, nous devons faire un montage qui permettra de minimiser l'effet du vent électrique. Il est possible de le réaliser en injectant des charges

d'espace horizontalement sous le conducteur à l'aide d'un dispositif auxiliaire⁽²⁰⁾. De cette façon, le vent électrique créé lors de la décharge est situé essentiellement dans un plan horizontal et n'a aucune influence sur le conducteur.

Le montage utilisé (figure 2.9) est constitué d'un conducteur lisse suspendu par deux paires de ressorts au-dessus d'une plaque métallique reliée à la terre. Un système créant des charges d'espace est fixé horizontalement entre le conducteur et la plaque. Ce système à position variable est constitué d'une part d'un conducteur comprenant 33 pointes métalliques, et d'autre part d'un conducteur de même longueur relié à la terre. Les caractéristiques du montage sont les suivantes:

- fréquence naturelle du conducteur suspendu : 2.46 Hz;
- facteur d'amortissement: 4.4×10^{-2} kg/s;
- diamètre du conducteur suspendu: 1.58 cm;
- longueur du conducteur suspendu: 126 cm;
- hauteur du conducteur suspendu (distance de la plaque métallique): 16.6 cm;
- distance du conducteur suspendu au plan comprenant le système à injection de charges d'espace: 5.1 cm;
- distance du peigne par rapport au conducteur relié à la terre : 10.5 cm;
- distance pointe à pointe: 2.5 cm;

- longueur des pointes: 2 cm.

L'amplitude des vibrations est mesurée à l'aide de jauges de contrainte. L'intensité du courant injecté est mesurée par l'intermédiaire d'une résistance de $1\text{ k}\Omega$ placée entre le conducteur situé en face des pointes et la terre.

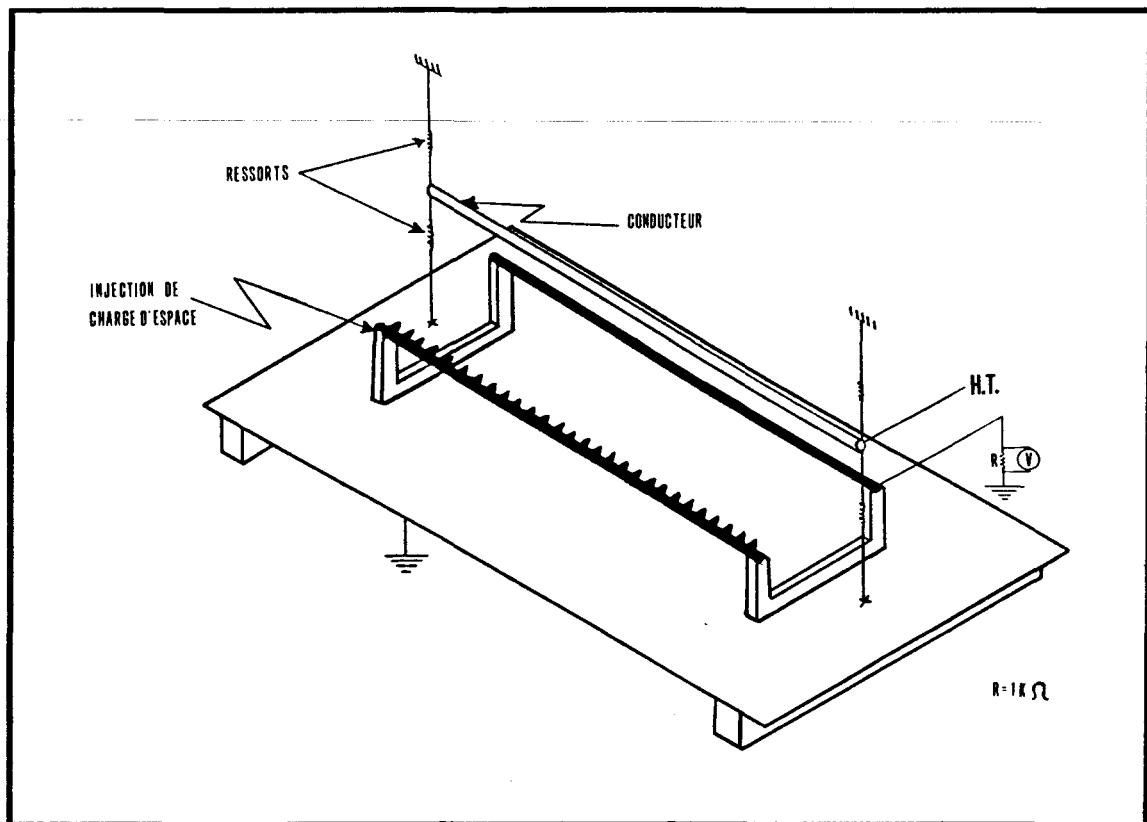


Figure 2.9: Montage expérimental avec système d'injection de charges d'espace

2.3.3 Résultats expérimentaux

Pour effectuer nos expériences, le conducteur suspendu a été relié à une tension continue de 30 kv en polarité négative, et les pointes à une tension impulsionnelle négative. Il a été observé que lorsque le taux de répétition de la tension appliquée est égal à la fréquence naturelle du conducteur suspendu, le conducteur vibre à la même fréquence. Cependant, le conducteur ne vibre pas avec une tension impulsionnelle standard ($1.5 \times 50 \mu s$) probablement parce que la durée de l'activité de décharge est trop courte. Nous avons donc utilisé le circuit d'alimentation représenté à la figure 2.10. La forme de la tension impulsionnelle est donnée à la figure 2.11.

La figure 2.12 représente l'amplitude de vibration du conducteur ainsi que l'intensité du courant injecté sous le conducteur, en fonction de la valeur crête de la tension impulsionnelle.

Nous remarquons que l'intensité du courant injecté augmente en fonction de la valeur crête de la tension appliquée et provoque une augmentation de l'amplitude des vibrations du conducteur.

Les vibrations du conducteur peuvent être expliquées par deux causes possibles: soit la présence du vent électrique, soit l'effet d'écran de la charge d'espace. En considérant l'axe de la décharge dans un plan horizontal contenant les pointes, la direction du vent s'oriente es-

sentiellement des pointes vers le conducteur relié à la terre. En tenant compte de la distance de 5.1 cm entre le conducteur suspendu et l'axe de la décharge, la composante verticale du vent électrique au niveau du conducteur suspendu est nulle. Par conséquent, la seule cause des vibrations du conducteur est la présence de la charge d'espace qui a un effet d'écran entre le conducteur chargé et son image. On peut aussi dire que la présence de la charge d'espace diminue le champ électrique à la surface du conducteur, ce qui provoque la diminution de la force entre le conducteur et son image. Lorsque la charge d'espace est créée d'une manière intermittente, la force agissant sur le conducteur varie périodiquement. Ceci explique les vibrations du conducteur. Cette interprétation est en accord avec des études rapportées dans les références (18) et (21). Cependant, une étude approfondie de la relation qui existe entre les vibrations et la présence intermittente d'une charge d'espace est nécessaire. Pour ce faire, nous devons connaître la distribution du champ électrique au voisinage d'une pointe (représentant une goutte d'eau). Comme on ne peut pas la déterminer expérimentalement, dans le prochain chapitre nous présentons une procédure numérique que nous avons employée afin d'évaluer la distribution du champ électrique, ainsi que la force électrostatique agissant entre une charge d'espace et une pointe.

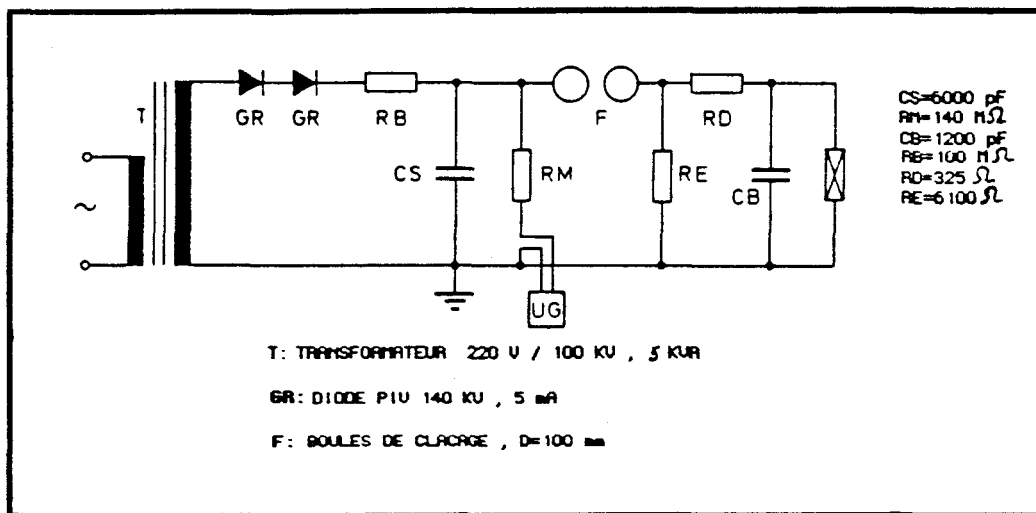


Figure 2.10: Schéma du circuit d'alimentation⁽⁴¹⁾

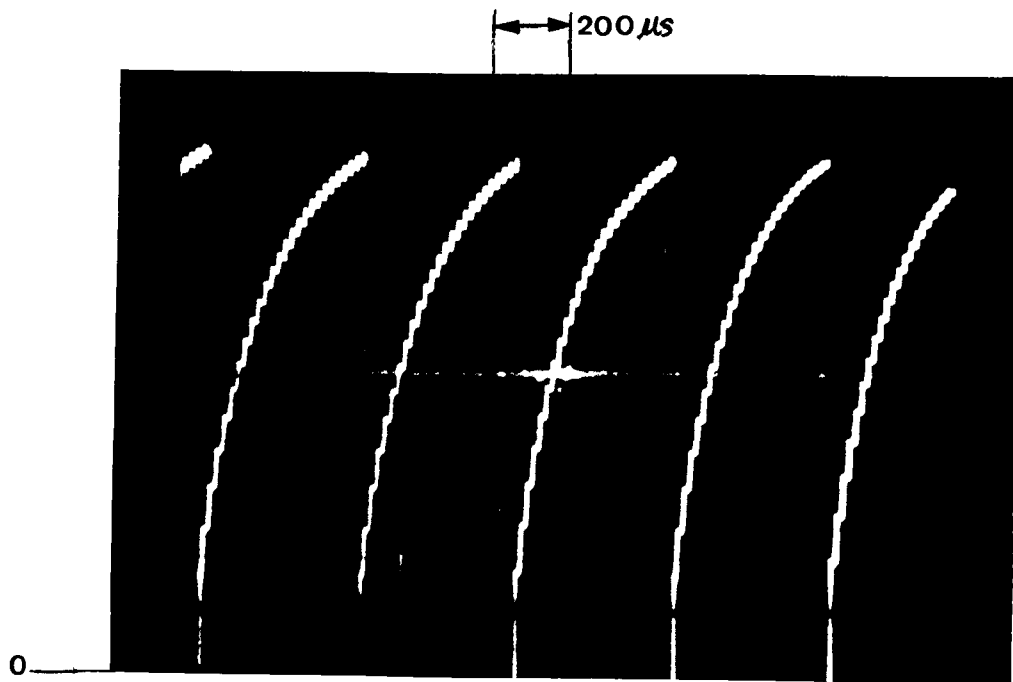


Figure 2.11: Forme de la tension impulsionnelle; fréquence 2.46 Hz

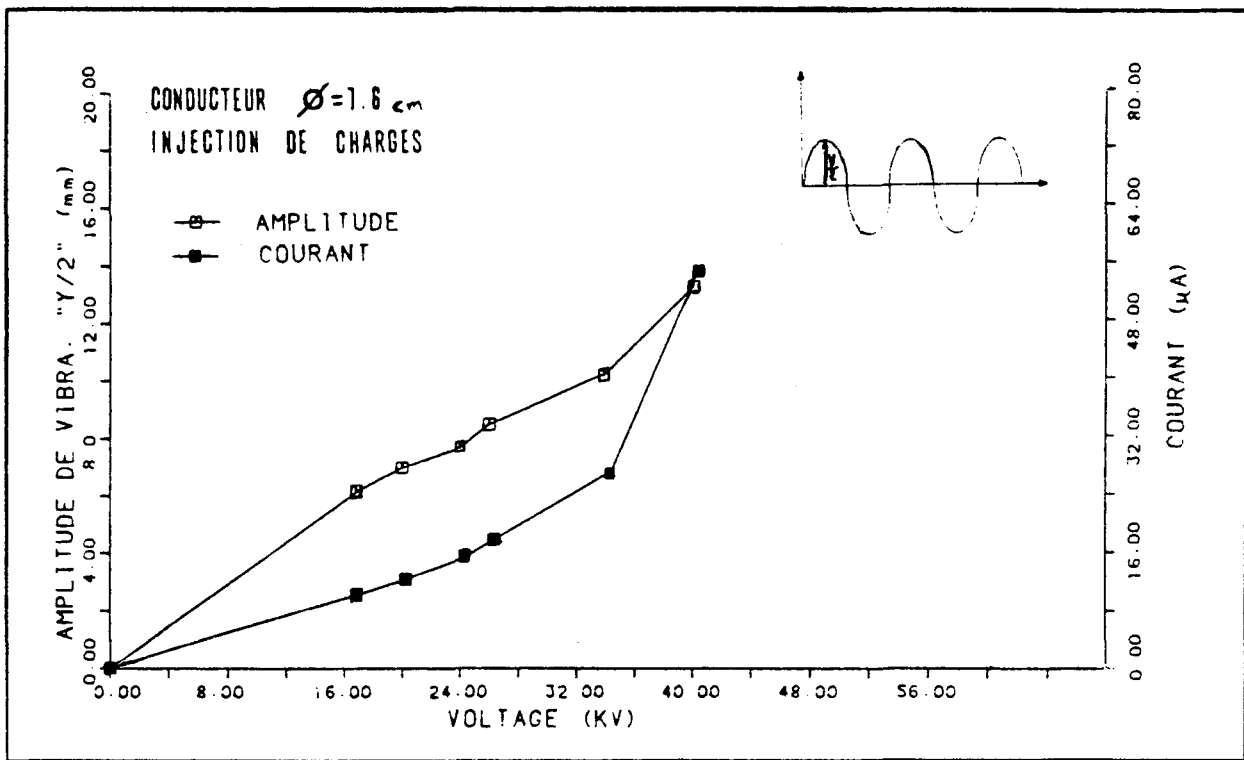


Figure 2.12: Amplitude des vibrations du conducteur et intensité du courant injecté en fonction de la valeur crête de la tension impulsionnelle

CHAPITRE III

APPROCHE NUMÉRIQUE

Afin de déterminer la distribution du champ électrique à proximité d'une pointe simulant une goutte d'eau suspendue, nous utilisons une approche numérique puisque les calculs analytiques ne sont pas efficaces pour la configuration particulière (conducteur avec pointe) que nous étudions.

La méthode de modélisation et de simulation que nous employons est basée principalement sur les techniques des éléments finis de frontière (MEFF) et de simulation de charges de surface (MSCS). Le but du modèle développé et décrit dans ce chapitre est de déterminer les paramètres suivants:

- la valeur du champ électrique au voisinage d'une pointe métallique simulant une goutte d'eau suspendue, en présence ou non de la charge d'espace;
- la valeur de la force répulsive entre la charge d'espace et la pointe métallique.

Les résultats obtenus à l'aide du modèle numérique nous permettront d'évaluer le rôle de la charge d'espace dans le mécanisme des

vibrations.

3.1 CHOIX DE LA MÉTHODE

Depuis quelques années, les méthodes d'éléments finis de frontière et de simulation de charges ont connu des développements intéressants qui ont été appliqués avec succès à l'analyse des problèmes de champ et de milieux continus. Ces méthodes peuvent être employées pour le calcul de champ électrique. La méthode des éléments finis classique, qui est d'une bonne flexibilité, donne de bons résultats⁽²⁹⁾ mais exige l'utilisation d'un grand nombre d'éléments ce qui occasionne un temps de calcul élevé et un espace mémoire considérable. De plus, cette méthode ne permet pas d'évaluer la force répulsive agissant entre la charge d'espace et l'électrode pointe. Par contre, la méthode des éléments finis de frontière n'exige qu'un petit nombre d'éléments et demande une étape de calcul en moins, comparativement à la méthode des éléments finis classique (figure 3.1).

Ainsi, pour minimiser le temps de calcul tout en conservant un bon niveau de précision, nous avons envisagé la mise au point d'une formulation combinée exploitant les avantages d'au moins deux méthodes. Cette approche utilise le principe de la méthode de simulation de charges de surface ⁽²⁴⁻²⁸⁾ et la formulation intégrale directe de la méthode des éléments finis de frontière^(32,42,43).

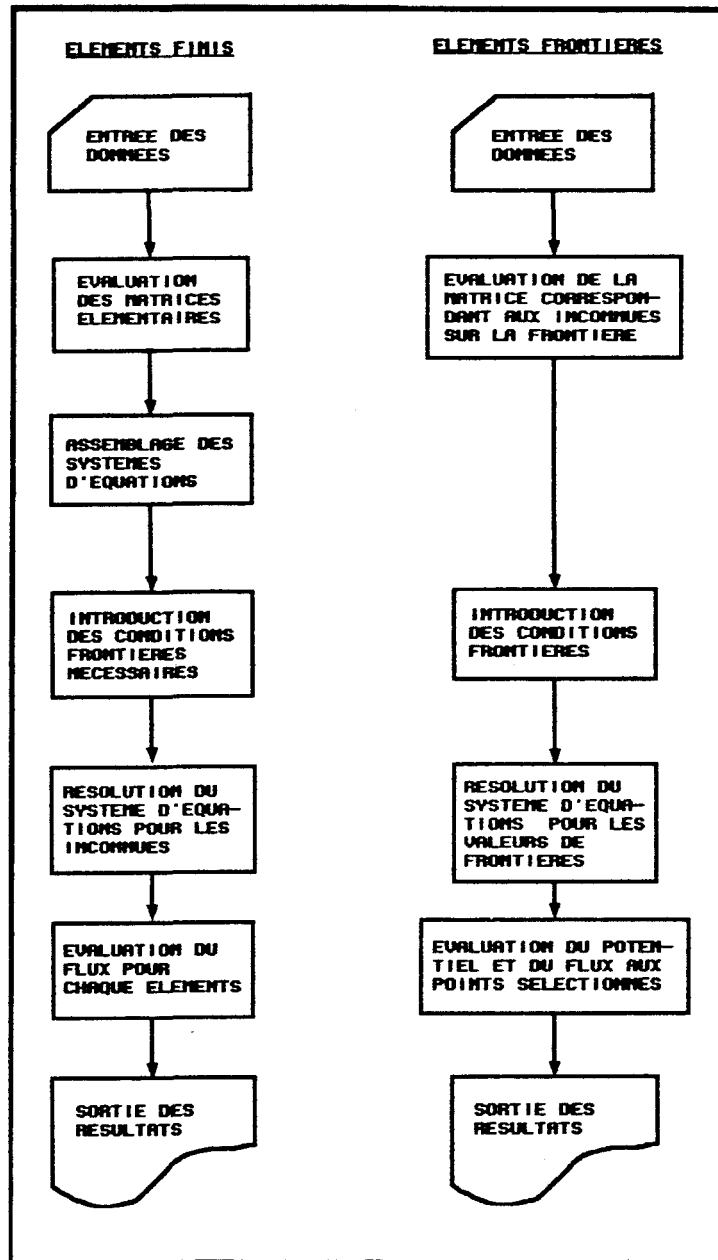


Figure 3.1: Programme d'éléments finis versus programme d'éléments frontières

3.2 MODÈLE UTILISÉ

Le modèle géométrique employé est basé sur le modèle expérimental existant au laboratoire de l'UQAC^(18,21). Nous avons d'ailleurs utilisé ce modèle expérimental dans l'approche physique de cette étude. Nous pouvons, de cette manière, comparer plus facilement les résultats obtenus par les approches numérique et expérimentale. Pour simplifier le calcul, le champ électrique est évalué entre l'extrémité de la pointe et la charge d'espace dans un système de coordonnées bidimensionnel. La figure 3.2 représente la géométrie utilisée (cette figure représente en fait une coupe transversale du modèle expérimental). On suppose la formation de la charge d'espace dans un espace circulaire (0.04 cm de diamètre) situé sur l'axe de la pointe⁽²⁹⁾. Elle est définie en termes du nombre d'ions. La relation suivante a été employée afin de trouver la densité de charge d'espace équivalente ρ :

$$\rho = \frac{Ne_0}{S} \quad (3.1)$$

où N est le nombre d'ions, e_0 la charge d'un électron ($1.6 * 10^{-19}$ C) et S la surface occupée par la charge d'espace. Le tableau I donne les différents paramètres utilisés dans la simulation. Pour chacune des valeurs de tension appliquée et pour différentes positions de la charge d'espace, nous avons fait varier la valeur de la densité de la charge d'espace.

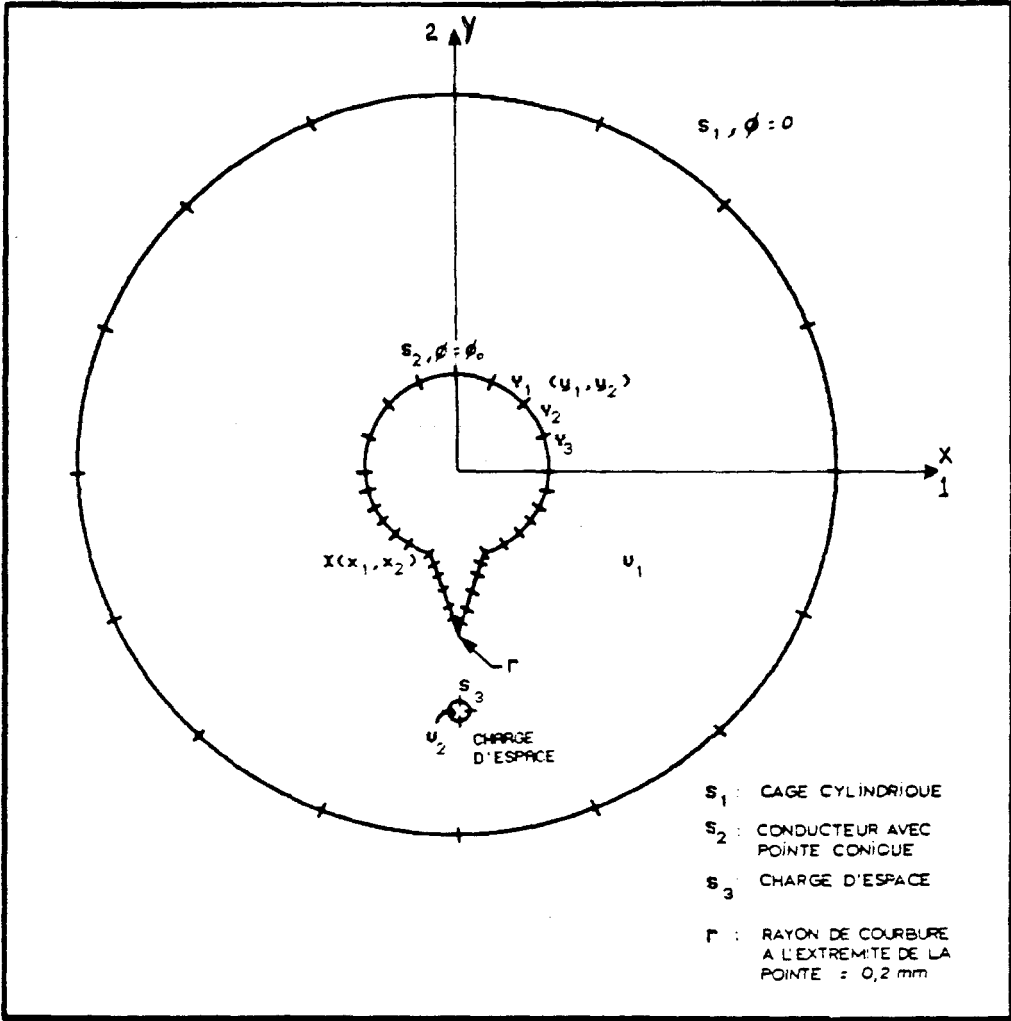


Figure 3.2: Modèle géométrique pour la formulation mathématique

TABLEAU I
Paramètres utilisés pour la simulation

dimension de la charge d'espace (rayon,cm)	nombre d'ions (N)	densité de la charge d'espace (C/cm^2)	distance du bout de la pointe (cm)
r=0.02	10^{12}	$1.274 * 10^{-4}$	0.02,0.05,0.1,0.2
voltage appliqué (KV)	10^{11}	$1.274 * 10^{-5}$	
	10^{10}	$1.274 * 10^{-6}$	
	10^9	$1.274 * 10^{-7}$	
70,80,90	10^8	$1.274 * 10^{-8}$	

3.3 FORMULATION MATHÉMATIQUE (MÉTHODE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES)

Le but de l'étude numérique est de déterminer la distribution du champ électrique au voisinage d'une pointe en absence et en présence d'une charge d'espace. Dû à la présence d'une charge d'espace, le problème devient non-homogène, et la résolution de l'équation de Poisson (équation (3.2)) pour le domaine d'intérêt V (figure 3.2) est donc nécessaire.

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.2)$$

où ϕ représente le potentiel électrique, ρ la densité de la charge d'espace et ϵ_0 la permittivité du vide ($8.854 * 10^{-12} F/m$). L'utilisation de

l'équation (3.2) exige de spécifier les conditions aux limites suivantes qui doivent être satisfaites dans un problème bien posé:

$$\begin{aligned} \phi(y) &= g(y) && \text{sur la partie } S' \text{ de la frontière } S \text{ de } V \\ \frac{\partial \phi(y)}{\partial n} &= h(y) && \text{sur } S'' \text{ de } S, (S' + S'' = S) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $g(y)$ et $h(y)$ sont des fonctions connues représentant les conditions frontière.

L'équation précédente (3.2), soumise à des conditions limites appropriées, peut être résolue de façon approchée par différentes méthodes numériques. Les plus intéressantes pour nous sont la méthode des éléments finis dans le domaine ou sur la frontière, et la méthode de simulation de charges.

Pour simplifier la simulation numérique par ordinateur, nous avons divisé le domaine d'intérêt en deux régions homogènes (figure 3.2). La région V_1 est délimitée par la surface S_1 de la cage, la surface S_2 du conducteur H.T. et de la pointe, et la surface S_3 de la charge d'espace. Dans cette région, le problème est gouverné par l'équation de Laplace (équation (3.4)) avec les conditions aux limites de Dirichlet.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.4)$$

Pour la région V_2 occupée par la charge d'espace, nous utilisons l'équation de Poisson (équation (3.2)).

3.3.1 Équation de base de la MSCS pour la région V_1

Pour la région V_1 , la formulation de l'équation intégrale correspondant à l'équation (3.4) est obtenue via une approche indirecte employant une distribution de simple couche de charges de surface ⁽³²⁾:

$$\phi(\underline{X}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_s G(\underline{X}, \underline{Y}) q'(\underline{Y}) dS_y \quad (3.5)$$

$$\begin{matrix} \underline{X} \in V_1, \\ \underline{Y} \in S_1 + S_2 + S_3 \end{matrix}$$

où $q'(\underline{Y})$ est la distribution choisie des charges de surface et $G(\underline{X}, \underline{Y})$ est la solution fondamentale de l'équation de Laplace, qui est en fait la fonction de Green habituelle pour un espace infini à deux dimensions:

$$G(\underline{X}, \underline{Y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(\underline{X}, \underline{Y})} \quad (3.6)$$

où $r(\underline{X}, \underline{Y})$ est la distance entre le point d'intérêt $\vec{X}(x_1, x_2)$ et le point d'influence $\vec{Y}(y_1, y_2)$ tel que représenté sur la figure 3.2. L'équation (3.5) signifie qu'un potentiel en un point \underline{X} est créé par une distribution de charges de surface. Ainsi les charges choisies représenterons le potentiel aux frontières considérées.

3.3.2 Méthode par équation intégrale directe pour la région V_2

Pour la région V_2 , nous employons la formulation directe de la méthode des éléments finis de frontière. L'équation de base de cette

formulation⁽³²⁾, dont la démonstration est donnée à l'annexe 1, est la suivante:

$$C(\underline{X})\phi(\underline{X}) + \int_{S_3} \frac{\partial G(\underline{X}, \underline{Y})}{\partial n} \phi(\underline{Y}) dS_y = \int_{S_3} G(\underline{X}, \underline{Y}) \frac{\partial \phi(\underline{Y})}{\partial n} dS_y - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V_2} \rho(\underline{Y}) G(\underline{X}, \underline{Y}) dV_y \quad (3.7)$$

où n est la normale unitaire à la surface S_3 , et $C(\underline{X})$ est un coefficient qui dépend de la géométrie locale en X , égal à $1/2$ si la frontière est lisse. Pour une frontière quelconque, $C(\underline{X})$ peut être calculé par la relation suivante⁽⁴⁴⁾:

$$C(\underline{X}) = 2\pi + \lim_{\xi \rightarrow x} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial}{\partial n(x)} \left(\ln \frac{1}{r(\xi, x)} \right) d\Gamma(x) \quad (3.8)$$

Ainsi l'équation (3.7) peut s'écrire sous une forme numériquement plus attrayante:

$$\int_{S_3} \frac{\partial G(\underline{X}, \underline{Y})}{\partial n} (\phi(\underline{Y}) - \phi(\underline{X})) dS_y = \int_{S_3} G(\underline{X}, \underline{Y}) \frac{\partial \phi(\underline{Y})}{\partial n} dS_y - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V_2} \rho(\underline{Y}) G(\underline{X}, \underline{Y}) dV_y \quad (3.9)$$

3.4 DISCRÉTISATION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS DE FRONTIÈRE (MEFF)

3.4.1 Généralités sur la MEF⁽⁴³⁾

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation par sous-domaines P_e , appelés éléments finis, pour représenter

les fonctions inconnues $(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial n})$ sur chaque sous-domaine en terme de leurs valeurs nodales inconnues attachées aux noeuds d'interpolation du sous-domaine. Les fonctions ainsi approchées sont construites de manière à être continues sur P_e et sur les frontières entre les différents sous-domaines. Lorsque le domaine en question se réduit à sa frontière, comme c'est le cas pour les équations intégrales que nous avons à résoudre, on parle alors de la "méthode des éléments finis de frontière".

La règle de partition de la frontière S en éléments finis est la suivante: si P_i et P_j sont deux éléments de S , alors pour $i \neq j$, on a: $P_i \cap P_j = \emptyset$ ou P_i et P_j ont une arête ou un sommet commun.

La définition analytique des éléments de forme complexe se fait en introduisant le concept d'élément de référence P_0 de forme simple; élément qui est repéré dans un espace de référence, et qui peut être transformé en chaque élément réel P_e par une transformation biunivoque τ^e en chaque point ξ de l'espace de référence. La transformation τ^e dépend de la forme et de la position de l'élément réel. Cependant, un même élément de référence se transforme en tous les éléments réels de même type. Dans ce contexte, la transformation géométrique τ^e représente un simple changement de variable:

$$X \rightarrow \xi \quad (3.10)$$

Le système ξ peut être considéré comme un système de coordonnées

locales lié à chaque élément. On définit alors les fonctions d'interpolations $N(\xi)$ sur l'élément de référence⁽⁴³⁾.

Pour notre application, nous divisons la surface S en NEL éléments quadratiques à une dimension ($NEL =$ nombre d'éléments). À chacun de ces éléments (en général courbes), correspond un élément de référence P_0 défini sur l'axe ξ (figure 3.3).

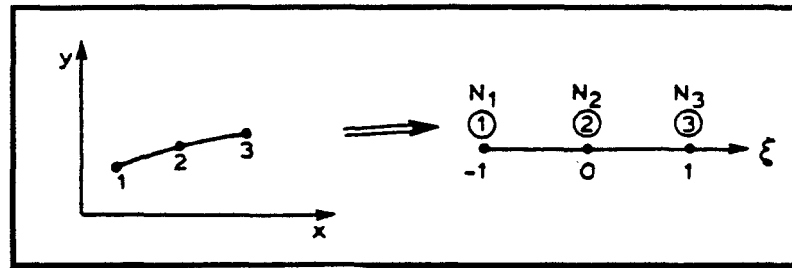


Figure 3.3: Transformation d'un espace réel à 2 dimensions en un espace de référence à 1 dimension

L'élément de référence P_0 est repéré par n_e noeuds de coordonnées locales $\xi^l, l = 1, 2, \dots, n_e$ et pour cet élément, on définit n_e fonctions à valeurs scalaires $N^l(\xi)$, appelées fonctions d'interpolations, telles que:

$$N^l(\xi^k) = \delta_{lk} \quad , \quad 1 \leq l, k \leq n_e \quad (3.11)$$

Si on désigne par $\{X_{n_e}\}$ les coordonnées des noeuds géométriques de l'élément réel P_e , alors la transformation τ^e faisant passer de P_0 à P_e sur S est définie par:

$$\tau^e = \xi \rightarrow X(\xi) = [N(\xi)]\{X_{n_e}\} \quad (3.12)$$

soit sous forme de composantes:

$$X^e(\xi) = \sum_{l=1}^{n_e} N^l(\xi) X^e(\xi^l) \quad . \quad e = 1, 2, \dots, NEL \quad (3.13)$$

On dit alors que la fonction $X^e(\xi)$ interpole $X(\xi)$ sur P_e et que l'élément de surface P_e représenté par (3.11) et (3.12) est un élément fini de surface (ou de frontière). La surface d'approximation $\bar{S} = \bigcup_e P_e$, obtenue par assemblage des P_e ainsi définis, est régulière mais ne coïncide pas en général avec la surface réelle S en tout point $X \in S$.

Lorsque les fonctions de transformations géométriques sont identiques aux fonctions d'interpolations des variables, on dit qu'on a une formulation isoparamétrique. Les noeuds géométriques sont alors confondus avec les noeuds d'interpolations.

Lorsqu'on considère des éléments isoparamétriques et les restrictions des fonctions N^l sur les éléments P_e , alors sur chaque élément P_e , on a les approximations suivantes:

$$\text{Potentiel:} \quad \phi^e(\underline{X}) = \sum_{l=1}^{n_e} N^l(\xi) \phi_l^e \rightarrow \{\phi^e\} = [N(\xi)] \{\phi_{n^e}\} \quad (3.14)$$

$$\text{Charge:} \quad q^e(\underline{X}) = \sum_{l=1}^{n_e} N^l(\xi) q_l^e \rightarrow \{q^e\} = [N(\xi)] \{q_{n^e}\} \quad (3.15)$$

Après avoir divisé la surface S en éléments finis de contour, défini la géométrie de chacun des éléments et choisi le type d'approximation par

éléments finis que l'on désire pour les fonctions inconnues, on procède ensuite à la discrétisation correspondant au type d'équations intégrales dont on cherche l'approximation.

Comme l'exige la méthode de simulation de charges de surface, il sera nécessaire de connaître les charges sur le conducteur, la pointe et la cage. On suppose une distribution continue de charges réparties sur la frontière du domaine d'intérêt. La frontière est ensuite divisée en éléments finis, sur chacun desquels on utilise une approximation nodale par sous-domaines, pour représenter une distribution approchée des charges de surface. La densité du maillage en éléments finis sera fonction de l'emplacement des zones où il y a physiquement des possibilités d'accumulation de charges (maillage fin dans les zones où les gradients sont élevés).

3.4.2 Discrétisation des équations intégrales

En appliquant les concepts précédents aux équations intégrales (3.5) et (3.9), les intégrales sur toute la surface sont alors remplacées par une somme d'intégrales sur chacun des éléments la constituant.

En insérant (3.14) dans l'équation (3.5), nous obtenons alors une

équation sous forme discrétisée en un point donné $X^\alpha \in S$:

$$o(X^\alpha) = \sum_{e=1}^{NEL} \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{s^e} G(X^\alpha, \underline{Y}) [N(\xi)] dS_y \{q'_n\}_e \quad (3.16)$$

$\alpha = 1, 2 \dots NNT$ (Nombre de Noeuds Total)

soit, en la transposant sur l'élément de référence:

$$\phi(X^\alpha) = \sum_{e=1}^{NEL} \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-1}^1 G(X^\alpha, \underline{Y}(\xi)) [N(\xi)] J(\xi) d\xi \{q'_{ne}\} \quad (3.17)$$

où $J(\xi)$ est le déterminant de Jacobien de surface. De la même façon, la discrétisation de l'équation (3.9) conduit, après l'introduction des expressions (3.14) et (3.15), à:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{NEL3} \int_{s^e} \frac{\partial G(X^\alpha, \underline{Y}(\xi))}{\partial n} [N(\xi) - \delta_{\alpha e}] dS_y \{\phi_n\}_e = \\ \sum_{e=1}^{NEL3} \int_{s^e} G(X^\alpha, \underline{Y}(\xi)) [N(\xi)] dS_y \left\{ \frac{\partial \phi_n}{\partial n} \right\}_e \\ - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V^l} \rho(X^\alpha) G(X^\alpha, \underline{Y}) dV_y \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots N3, \quad l = 1, 2, \dots NCC$$

où $\delta_{\alpha e}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{\alpha e} = 1$, si $\alpha = e$ et $\delta_{\alpha e} = 0$, si $\alpha \neq e$), NCC est le nombre de cellules dans la charge d'espace, N3 est le nombre de noeuds sur la surface S_3 , et NEL3 est le nombre d'éléments

sur la surface S_3 . Et sur l'élément de référence on a:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{NEL3} \int_{-1}^1 \frac{\partial G(\underline{X}^\alpha, \underline{Y}(\xi))}{\partial n} [N(\xi) - \delta_{\alpha e}] J(\xi) d\xi \{ \phi_{n^e} \} = \\ \sum_{e=1}^{NEL3} \int_{-1}^1 G(\underline{X}^\alpha, \underline{Y}(\xi)) [N(\xi)] J(\xi) d\xi \left\{ \frac{\partial \phi_{n^e}}{\partial n} \right\} \\ - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V_1} \rho(\underline{X}^\alpha) G(\underline{X}^\alpha, \underline{Y}) dV y \end{aligned} \quad (3.19)$$

La résolution numérique est essentiellement basée sur les équations obtenues ici, soit (3.17) et (3.19).

3.4.3 Présentation matricielle

Nous utilisons une représentation matricielle afin de mieux suivre le processus d'assemblage du problème complet et du traitement numérique sur ordinateur. Nous pouvons exprimer la relation (3.17) décrivant le phénomène physique dans la région V_1 comme suit:

$$[G]\{\underline{q}\} = \{\underline{\phi}\} \quad (3.20)$$

Les composantes de la matrice $[G]$ s'expriment à l'aide de (3.17) et sont:

$$g_{\alpha e} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-1}^1 G(\underline{X}^\alpha, \underline{Y}(\xi)) [N(\xi)] J(\xi) d\xi \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, 2, \dots, NNT, \\ e &= 1, 2, \dots, NEL \end{aligned}$$

En tenant compte des indices représentant les surfaces, l'expression matricielle se formule ainsi:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}_{NNT * NNT} * \begin{Bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \\ \underline{q}_3 \end{Bmatrix}_{NNT} = \begin{Bmatrix} \underline{\phi}_1 \\ \underline{\phi}_2 \\ \underline{\phi}_3 \end{Bmatrix}_{NNT} \quad (3.22)$$

où \underline{q}_1 et $\underline{\phi}_1$ désignent les charges et les potentiels sur la cage, \underline{q}_2 et $\underline{\phi}_2$ ceux sur le conducteur et la pointe métallique, et \underline{q}_3 et $\underline{\phi}_3$ ceux sur la surface S_3 de la charge d'espace (figure 3.2). L'indice 1 se rapporte donc à la frontière définie par la surface de la cage, l'indice 2 à la frontière définie par le contour du conducteur et de la pointe, et l'indice 3 à la surface sphérique délimitant la charge d'espace. Dans l'équation (3.22), les inconnues sont les charges $\underline{q}_1, \underline{q}_2$ et \underline{q}_3 et le potentiel $\underline{\phi}_3$. Le potentiel $\underline{\phi}_1$ de la cage est fixé à zéro (0) et le potentiel $\underline{\phi}_2$ du conducteur-pointe est connu. Les valeurs des coefficients G_{ij} , $i=1,2,3$, $j=1,2,3$, sont calculées à l'aide de l'équation (3.21). Le système ainsi obtenu est de NNT équations à $NNT + N3$ inconnues, $N3$ étant le nombre de noeuds sur S_3 .

La région V_2 (figure 3.2) servira à définir les contraintes permettant d'éliminer le surplus d'inconnues introduites sur S_3 . La relation (3.19), décrivant le problème physique dans la région V_2 , peut s'écrire, après discrétisation, sous la forme matricielle suivante:

$$[H]\{\underline{\phi}\} = [G]\left\{\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial n}\right\} - \{f\} \quad (3.23)$$

Dans l'équation (3.19) obtenue précédemment, nous reconnaissons les composantes des matrices de l'expression (3.23):

$$h_{\alpha e} = \int_{-1}^1 \frac{\partial G(\underline{X}^\alpha, \underline{Y}(\xi))}{\partial n} [N^e(\xi)] J^e(\xi) d\xi \quad (3.24)$$

$$g_{\alpha e} = \int_{-1}^1 G(\underline{X}^\alpha, \underline{Y}(\xi)) [N^e(\xi)] J^e(\xi) d\xi \quad (3.25)$$

$$f_\alpha = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V^1} \rho(\underline{Y}) G(\underline{X}^\alpha, \underline{Y}) dV_y \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, 2, \dots, N3, \\ e &= 1, 2, \dots, NEL3, \\ l &= 1, 2, \dots, NNC \end{aligned}$$

Afin de faire ultérieurement le couplage entre les deux formulations proposées ((3.20) et (3.23)), nous pouvons faire la transformation suivante:

$$[G] \left\{ \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial n} \right\} = [G'] \{ \underline{\phi} \} \quad (3.27)$$

en sachant que ⁽⁴⁵⁾:

$$\left\{ \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial n} \right\} = \left[\frac{\partial N}{\partial n} \right] \{ \underline{\phi} \} \quad (3.28)$$

et donc que les composantes de [G'] sont:

$$g'_{\alpha e} = \int_{-1}^1 G(\underline{X}^\alpha, \underline{Y}(\xi)) \left[\frac{\partial N^e(\xi)}{\partial n} \right] J^e(\xi) d\xi \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, 2, \dots, N3 \\ e &= 1, 2, \dots, NEL3 \end{aligned}$$

la représentation matricielle (3.23) devient:

$$[H] \{ \underline{\phi} \} = [G'] \{ \underline{\phi} \} - \{ f \} \quad (3.30)$$

ou en tenant compte des indices relatifs à la frontière sur laquelle sont définis les noeuds:

$$[H^3]\{\underline{\phi}^3\} = [G^3]\{\underline{\phi}^3\} - \{f^3\} \quad (3.31)$$

Le potentiel étant continu sur la frontière S_3 , $\underline{\phi}^3$ est le même que celui identifié dans la formulation de la région V_1 , soit ϕ_3 . Les deux régions sont donc liées par l'équation de continuité de $\underline{\phi}$:

$$\{\underline{\phi}^3\} = \{\phi_3\} \quad (3.32)$$

De (3.31), on tire la valeur de $\underline{\phi}^3$:

$$\{\phi^3\} = [H^3 - G^3]^{-1}\{f^3\} \quad (3.33)$$

De (3.32) et (3.33), on voit que la substitution suivante est possible:

$$\{\phi_3\} = [H^3 - G^3]^{-1}\{f^3\} \quad (3.34)$$

En retournant la valeur de $\underline{\phi}_3$ dans l'équation (3.22), nous obtenons finalement:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\phi}_1 \\ \underline{\phi}_2 \\ \underline{\phi}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ [H^3 - G^3]^{-1}\{f^3\} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

qui est le système matriciel à résoudre.

3.4.4 Intégration numérique

Nous avons donc à résoudre le système matriciel (3.35) afin de connaître la distribution de charges $\{q\}$. Pour ce faire, nous devons solutionner les équations intégrales (3.21),(3.24),(3.25) et (3.26). La complexité de ces équations rend pratiquement impossible l'intégration analytique. Nous devons donc les évaluer numériquement par programmation.

Afin de simplifier la formulation et la programmation, on utilisera un élément de référence et quatre points de Gauss pour l'intégration numérique; celle-ci se faisant de -1 à 1 (figure 3.3). Les fonctions d'interpolations utilisées sont⁽⁴⁵⁾:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= -\frac{\xi(1-\xi)}{2} \\ N_2(\xi) &= 1 - \xi^2 \\ N_3(\xi) &= \frac{\xi(1+\xi)}{2} \end{aligned}$$

3.4.4.1 Évaluation des composantes de la matrice [G]

Pour l'évaluation numérique de l'intégrale sur l'élément de référence de l'équation (3.17), nous utilisons la formule de quadrature de Gauss suivante:

$$\phi(\underline{X}^\alpha) = \sum_{e=1}^{NEL} \sum_{j=1}^{NG} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r(\underline{X}^\alpha, \underline{Y}(\xi_j))} [N^e(\xi_j)] \{q_j\}_e J^e(\xi_j) \omega_j \quad (3.36)$$

où NG est le nombre de points de Gauss (NG = 4), ξ_j est l'abscisse du point d'intégration numérique sur l'élément de référence⁽⁴⁵⁾, $J(\xi_j)$ est

le déterminant du Jacobien de surface défini par:

$$J(\xi_j) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi_j}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi_j}\right)^2} \quad (3.37)$$

et les ω_j sont les poids d'intégration⁽⁴⁵⁾. Les termes $g_{\alpha k}$ du système matriciel (3.35) sont:

$$g_{\alpha k} = \sum_{j=1}^{NG} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r(\underline{X}^\alpha, \underline{Y}(\xi_j))} [N(\xi_j)] J(\xi_j) \omega_j \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, 2, \dots, NNT \\ k &= 1, 2, \dots, NNT \end{aligned}$$

Traitement des singularités

Lors de l'intégration numérique de l'équation (3.38), deux situations peuvent se produire. La première se présente lorsque le noeud d'intérêt \underline{X}^α n'appartient pas à l'élément sur lequel on fait l'intégration. Cette situation ne représente aucun problème particulier et on utilise l'intégration numérique de Gauss standard. Il suffit simplement d'effectuer les calculs impliqués dans l'équation (3.38).

La seconde situation se produit lorsque le noeud d'intérêt \underline{X}^α appartient à l'élément sur lequel on fait l'intégration. Dans ce cas, si le noeud \underline{X}^α coïncide avec le point $\underline{Y}(x, y)$, on a une singularité (logarithmique) et on doit utiliser un artifice afin d'éviter ce problème. On distingue trois cas.

Dans le premier cas, le noeud étudié est un noeud d'extrémité gauche (figure 3.4 a). Il y a singularité au noeud 1, soit $\underline{X}^\alpha = \underline{Y}_1$. L'intégration se fait de gauche à droite, c'est-à-dire du noeud 1 au noeud 3, avec un système de coordonnées locales dont l'origine est le noeud 1. En employant un changement de variable⁽⁴³⁾, l'intégration sur l'élément de référence:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 N_1(\xi) \ln(r(\underline{X}, \underline{Y})) q(\xi) J(\xi) d\xi \quad (3.39)$$

devient, avec $\eta = \frac{1}{2}(\xi + 1)$, $0 \leq \eta \leq 1$:

$$I = \frac{1}{2\pi} \left[- \int_{-1}^1 N_1(\xi) \ln\left(\frac{2r(\underline{X}, \underline{Y})}{1 + \xi}\right) q(\xi) J(\xi) d\xi \right. \\ \left. + 2 \int_0^1 N_1(2\eta - 1) \ln(\eta) J(2\eta - 1) q(2\eta - 1) d\eta \right] \quad (3.40)$$

Dans le deuxième cas, le noeud étudié est un noeud d'extrémité droite (figure 3.4 b). Il y a singularité au noeud 3, soit $\underline{X}^\alpha = \underline{Y}_3$. L'intégration se fait de droite à gauche, c'est-à-dire du noeud 3 au noeud 1, et en plaçant l'origine des coordonnées locales au noeud 3. On peut encore montrer, en employant un changement de variable adéquat⁽⁴³⁾, que l'intégration sur un élément de référence:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 N_3(\xi) \ln(r(\underline{X}, \underline{Y})) q(\xi) J(\xi) d\xi \quad (3.41)$$

devient, en utilisant $\eta = \frac{1}{2}(1 - \xi)$, $0 \leq \eta \leq 1$:

$$I = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-1}^1 N_3(\xi) \ln\left(\frac{2r(\underline{X}, \underline{Y})}{1 - \xi}\right) q(\xi) J(\xi) d\xi \right. \\ \left. + 2 \int_0^1 N_3(1 - 2\eta) \ln(\eta) J(1 - 2\eta) q(1 - 2\eta) d\eta \right] \quad (3.42)$$

Ce qui revient, en pratique, à la même intégration que précédemment mais de signe contraire. On pourra donc utiliser le même sous-programme pour chacun des noeuds extrémités (noeud 1 ou 3).

Dans le troisième cas, le noeud étudié est le noeud milieu (figure 3.4 c). Il y a singularité au noeud 2, soit $\underline{X}^\alpha = \underline{Y}_2$. Afin de l'éviter, on divise l'élément en 2 sous-éléments, et on intègre en deux sections; c'est-à-dire du noeud 2 au noeud 1 et du noeud 2' au noeud 3. Dans chacune des sections, l'intégration sera identique mais de signe contraire. Il peut être montré cette fois-ci, en employant un changement de variable approprié⁽⁴³⁾, que l'intégration sur un élément de référence:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 N_2(\xi) \ln\left(\frac{1}{r(\underline{X}, \underline{Y})}\right) q(\xi) J(\xi) d\xi \quad (3.43)$$

après avoir remplacé ξ par $\bar{\eta}$ défini par:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{2}(\xi - 1), \quad 0 \leq \bar{\eta} \leq 1,$$

devient:

$$I = \frac{1}{2\pi} \left[2 \int_0^1 N_2(2\bar{\eta} - 1) \ln\left(\frac{1}{r(\underline{X}, \underline{Y})}\right) q(2\bar{\eta} - 1) J(2\bar{\eta} - 1) d\bar{\eta} \right] \quad (3.44)$$

ou:

$$I = \frac{1}{2\pi} * 2 \left[\int_0^{0.5} N_2(2\bar{\eta} - 1) \ln\left(\frac{1}{r(\underline{X}, \underline{Y})}\right) q(2\bar{\eta} - 1) J(2\bar{\eta} - 1) d\bar{\eta} \right. \\ \left. + \int_{0.5}^1 N_2(2\bar{\eta} - 1) \ln\left(\frac{1}{r(\underline{X}, \underline{Y})}\right) q(2\bar{\eta} - 1) J(2\bar{\eta} - 1) d\bar{\eta} \right] \quad (3.45)$$

soit: $I = I_1 + I_2$. En employant d'autres substitutions on a. pour I_1 :

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} * \left(\frac{-1}{2}\right) \left[\int_0^1 N_2(-\eta) \ln\left(\frac{l}{2}\right) q(-\eta) J(-\eta) d\eta \right. \\ \left. - \int_0^1 N_2(-\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) q(-\eta) J(-\eta) d\eta \right] \quad (3.46)$$

où $\eta = 1 - 2\bar{\eta}$, $0 \leq \eta \leq 1$. Et pour I_2 :

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} * \left(\frac{1}{2}\right) \left[\int_0^1 N_2(\eta) \ln\left(\frac{l}{2}\right) q(\eta) J(\eta) d\eta \right. \\ \left. - \int_0^1 N_2(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) q(\eta) J(\eta) d\eta \right] \quad (3.47)$$

où $\eta = 2\bar{\eta} - 1$, $0 \leq \eta \leq 1$.

Les intégrations standards se font à l'aide des formules de Gauss-Legendre avec pondération unitaire. Les intégrations logarithmiques s'effectuent à l'aide des formules de Gauss avec une fonction de poids logarithmique⁽⁴³⁾.

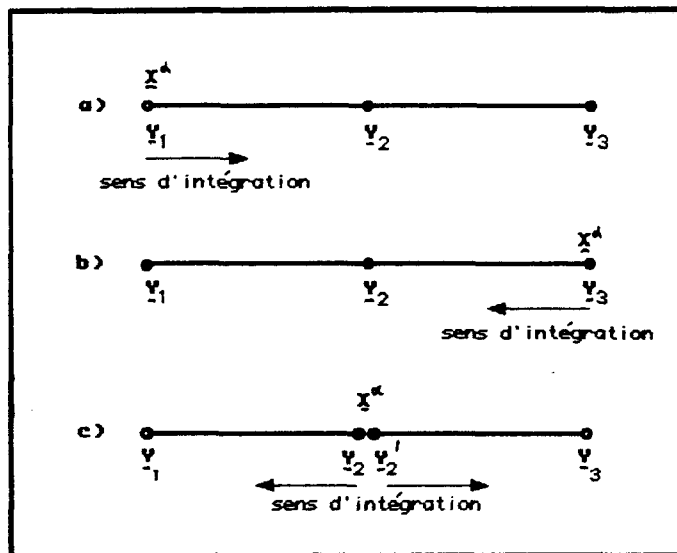


Figure 3.4: Intégration avec singularité:

$$a) \quad \underline{X}^\alpha = \underline{Y}_1$$

$$b) \quad \underline{X}^\alpha = \underline{Y}_3$$

$$c) \quad \underline{X}^\alpha = \underline{Y}_2$$

3.4.4.2 Évaluation des composantes de la matrice [H]

Nous pouvons déterminer numériquement les composantes de la matrice [H] définies par l'équation (3.24) en utilisant le même type d'intégration numérique que précédemment, l'intégrande étant cette fois:

$$h_{\alpha k} = \frac{\partial G(\underline{X}^\alpha, \underline{Y}(\xi_j))}{\partial n} [N(\xi_j)] J(\xi_j) \omega_j \quad (3.48)$$

Après avoir trouvé la dérivée normale du terme $G(\underline{X}^\alpha, \underline{Y}(\xi_j))$, l'équation (3.48) devient:

$$h_{\alpha k} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{(\underline{X}_1^\alpha - \underline{Y}_1(\xi_j))\vec{n}_1 + (\underline{X}_2^\alpha - \underline{Y}_2(\xi_j))\vec{n}_2}{(r(\underline{X}^\alpha, \underline{Y}(\xi_j)))^2} [N(\xi_j)] J(\xi_j) \omega_j \right\} \quad (3.49)$$

Traitement des singularités

L'intégration numérique diffère selon deux situations. Celle où \underline{X}^α n'appartient pas à l'élément sur lequel on intègre ne présente aucune difficulté, et l'évaluation de l'expression (3.49) se fait aisément. La seconde situation se produit lorsque \underline{X}^α appartient à l'élément sur lequel on intègre. Dans ce cas, nous devons traiter une singularité si le noeud \underline{X}^α coïncide avec un des noeuds $\underline{Y}(x, y)$. Nous contournons cette irrégularité à l'aide de quelques changements de variables⁽⁴³⁾. L'équation intégrale est de la forme:

$$I = \int_{-1}^1 f(\underline{X}, \underline{Y}) N(\xi) J(\xi) d\xi \quad (3.50)$$

En substituant $\bar{\eta}$ à ξ , avec $\bar{\eta} = \frac{1}{2}(\xi + 1)$, $0 \leq \bar{\eta} \leq 1$, on obtient:

$$I = 2 \int_0^1 N(2\bar{\eta} - 1) f(\underline{X}, \underline{Y}) J(2\bar{\eta} - 1) d\bar{\eta} \quad (3.51)$$

ou:

$$I = 2 \left[\int_0^{0.5} N(2\bar{\eta} - 1) f(\underline{X}, \underline{Y}) J(2\bar{\eta} - 1) d\bar{\eta} + \int_{0.5}^1 N(2\bar{\eta} - 1) f(\underline{X}, \underline{Y}) J(2\bar{\eta} - 1) d\bar{\eta} \right] \quad (3.52)$$

soit:

$$I = 2(I_1 + I_2) \quad (3.53)$$

Une seconde substitution de variables pour I_1 , avec $\eta = 2\bar{\eta}$ pour $0 \leq \eta \leq 1$ donne:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 N(\eta - 1) f(\underline{X}, \underline{Y}) J(\eta - 1) d\eta \quad (3.54)$$

La substitution pour I_2 est $\eta = 2\bar{\eta} - 1$, si $0 \leq \eta \leq 1$, ce qui conduit à:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 N(\eta) f(\underline{X}, \underline{Y}) J(\eta) d\eta \quad (3.55)$$

Les intégrations s'effectuent à l'aide des formules de Gauss-Legendre.

3.4.4.3 Évaluation des composantes de la matrice [G']

Les termes de [G'] sont déterminés à l'aide de l'expression (3.29), dans laquelle la fonction à évaluer est:

$$g'_{\alpha k} = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r(\underline{X}^\alpha, \underline{Y}(\xi_j))} \right) \left[\frac{\partial N(\xi_j)}{\partial n} \right] J(\xi_j) \omega_j \quad (3.56)$$

Il faut donc définir les dérivées normales des fonctions d'interpolations $N(\xi_j)$ avant d'évaluer (3.56). Nous savons que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla_{\underline{\phi}} \cdot \vec{n} \quad (3.57)$$

ainsi:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = n_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + n_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3.58)$$

où n_1, n_2 sont les composantes du vecteur normal extérieur unitaire. Sur un élément de référence, on sait que le potentiel est représenté par $[N]\{\phi\}$, où $[N]$ est la matrice des fonctions d'interpolation, ce qui conduit à:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = n_1 \frac{\partial N}{\partial x} \phi + n_2 \frac{\partial N}{\partial y} \phi \quad (3.59)$$

Pour un élément à trois noeuds, (3.59) devient:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \left\{ n_1 \left[\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x} \right] + n_2 \left[\frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \frac{\partial N_3}{\partial y} \right] \right\} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

or:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} * \left(\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi}} \right) \quad (3.61)$$

où⁽⁴⁵⁾:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right] \{x\} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \{x_1\} + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \{x_2\} + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \{x_3\} \quad (3.62)$$

ainsi:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\left[\frac{\partial N}{\partial \xi} \right] \{x\}} \right) \quad (3.63)$$

et:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} &= -1 + 2\xi \\
 \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} &= -4\xi \\
 \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi} &= 1 + 2\xi
 \end{aligned}
 \tag{3.64}$$

La procédure pour déterminer $\frac{\partial N_2}{\partial x}$, $\frac{\partial N_3}{\partial x}$, $\frac{\partial N_1}{\partial y}$, $\frac{\partial N_2}{\partial y}$ et $\frac{\partial N_3}{\partial y}$ est similaire.

Pour chacun des cas rencontrés, les intégrations numériques de l'équation (3.56) se font comme indiqué à la section 3.4.4.1.

3.4.4.4 Évaluation des composantes du vecteur $\{f\}$

Le concept utilisé avec la méthode des éléments finis de frontière demande la résolution du problème sur la frontière. Lorsque l'on considère une charge d'espace, on doit cependant évaluer les intégrales de volume puisque les charges sont réparties à l'intérieur du volume de la charge d'espace. On aurait pu cependant transformer l'intégrale de volume en une intégrale sur la frontière⁽⁴⁴⁾. Afin de faire les calculs numériquement, la région occupée par la charge d'espace est divisée en cellules⁽⁴⁶⁾. Les cellules à l'intérieur du volume de la charge d'espace (région V_3 , figure 3.2) sont représentées à la figure 3.5. La formulation intégrale des coefficients du vecteur $\{f\}$ est donnée à l'équation (3.26)

et peut s'écrire comme suit:

$$f_\alpha = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{V_3} \ln \frac{1}{r(\underline{X}^\alpha, \underline{Y})} \rho(\underline{Y}) dV_y \quad (3.65)$$

où $\rho(\underline{Y})$ est la densité de charge des cellules à l'intérieur de la charge d'espace.

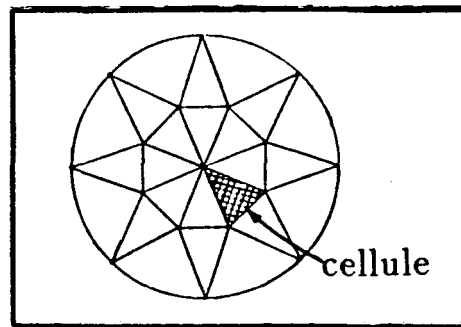


Figure 3.5: Division de la charge d'espace en cellules triangulaires

L'évaluation de l'équation (3.65) se fera sur un élément de référence triangulaire à trois noeuds (figure 3.6). Les fonctions d'interpolations relatives à un élément de référence triangulaire sont⁽⁴⁷⁾:

$$N_1 = L^{(1)}, \quad N_2 = L^{(2)}, \quad N_3 = L^{(3)} \quad (3.66)$$

Les valeurs de $L^{(i)}$ sont données au tableau II.

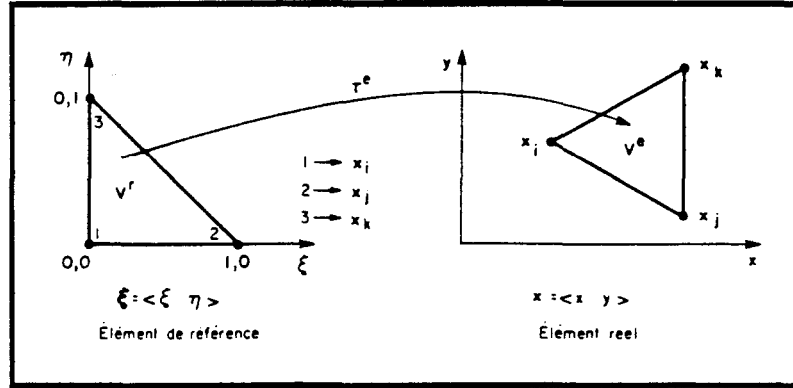


Figure 3.6: Élément de référence triangulaire

L'intégrale est de la forme:

$$I = \int_S f(\underline{X}, \underline{Y}) \rho(\underline{Y}) dS y \quad (3.67)$$

La géométrie de chaque cellule est représentée de façon approchée par:

$$\begin{aligned} \underline{X} &= L^{(1)} x_1 + L^{(2)} x_2 + L^{(3)} x_3 \\ \underline{Y} &= L^{(1)} y_1 + L^{(2)} y_2 + L^{(3)} y_3 \end{aligned} \quad (3.68)$$

et la fonction $\rho(\underline{Y})$ est représentée par:

$$\rho = L^{(1)} \rho_1 + L^{(2)} \rho_2 + L^{(3)} \rho_3 \quad (3.69)$$

Puisqu'on suppose que ρ est uniforme à l'intérieur de V_3 , c'est-à-dire $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$, l'évaluation de l'intégrale I (équation (3.67)) se ramène à solutionner l'expression:

$$I = \int_S f(L^{(1)}, L^{(2)}, L^{(3)}) \rho dS y \quad (3.70)$$

La formule d'intégration numérique s'écrit alors:

$$I = \sum_{i=1}^{NCEL} \rho \cdot A_i \left(\sum_{j=1}^{NG} f^i(L_j^{(1)}, L_j^{(2)}, L_j^{(3)}) \omega_j \right) \quad (3.71)$$

où NCEL est le nombre de cellules, A_i est l'aire de la cellule i . NG représente le nombre de points d'intégrations ($NG = 3$), ω_j sont les poids d'intégration et L_j sont les abscisses où la fonction est évaluée sur l'élément de référence (les valeurs de ω_j et L_j sont données au tableau II).

Il suffit maintenant d'évaluer l'équation (3.71) à l'aide du sous-programme conçu à cette fin.

TABLEAU II

Abscisses et poids d'intégration pour un élément de référence triangulaire⁽⁴⁷⁾

	j=1	j=2	j=3
$L_j^{(1)}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$L_j^{(2)}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
$L_j^{(3)}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
ω_j	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

3.4.5 Assemblage matriciel et résolution

Après avoir évalué les composantes des matrices $[G]$, $[G']$, $[H]$ et $\{f\}$ et après avoir fait les combinaisons nécessaires, on aboutit au système matriciel suivant:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}_{NNT*NNT} \begin{Bmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{q}_2 \\ \underline{q}_3 \end{Bmatrix}_{NNT} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi'_3 \end{Bmatrix}_{NNT} \quad (3.72)$$

où $P_{ij} = G_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, ϕ_1 , ϕ_2 sont les potentiels de la cage et du conducteur, et ϕ'_3 est le potentiel à la frontière de la charge d'espace estimé par l'équation (3.34).

L'évaluation numérique et l'assemblage des matrices précédentes ainsi que la résolution matricielle de l'équation (3.72) se font à l'aide d'un programme d'ordinateur appelé MEFF (Méthode des éléments finis de frontière)⁽⁴³⁾. La structure générale du programme principal et des sous-programmes est présentée sous forme d'organigramme à la section 3.7.

Lorsque la résolution de l'équation (3.72) est réalisée, la première étape du calcul numérique est terminée. La distribution de charges sur chacune des surfaces est alors connue. Ces charges seront utilisées pour faire le calcul du champ électrique dans le voisinage du bout de la pointe, et de la force électrostatique entre la charge d'espace et la pointe.

3.5 CHAMP ÉLECTRIQUE

La valeur de la charge en tous les points de la frontière étant maintenant connue, et ce en présence ou non de la charge d'espace, il est possible de déterminer la valeur du champ électrique en tous les autres points de la région homogène V_1 (figure 3.2). Il est principalement intéressant de connaître la distribution du champ électrique à proximité de la pointe dans l'espace entre celle-ci et la charge d'espace le long de l'axe de symétrie de la pointe.

Il est bien connu que le champ électrique est défini par⁽⁴⁸⁾:

$$\vec{E} = -(\nabla\phi) \quad (3.73)$$

Or, pour une région homogène, l'expression du potentiel ϕ est donnée sous forme discrétisée par l'équation (3.16), soit:

$$\phi(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{NEL} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_S \ln\left(\frac{1}{r(\underline{X}, \underline{Y})}\right) q(\underline{Y}) ds \quad (3.74)$$

où $\underline{X} = \vec{X}(x_1, x_2)$ est le point où le potentiel (champ électrique) est évalué, et $\underline{Y} = \vec{Y}(y_1, y_2)$ est le point d'influence sur la frontière. Le gradient du potentiel devient donc:

$$\begin{aligned} \nabla\vec{\phi}(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{NEL} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_S \left[\frac{\partial}{\partial Y_1} \left(\ln\left(\frac{1}{r(\underline{X}, \underline{Y})}\right) \right) \vec{i} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial Y_2} \left(\ln\left(\frac{1}{r(\underline{X}, \underline{Y})}\right) \right) \vec{j} \right] q(\underline{Y}) ds \end{aligned} \quad (3.75)$$

Mais comme:

$$\frac{\partial}{\partial Y_1} \left(\ln \left(\frac{1}{r(\underline{X}, \underline{Y})} \right) \right) = -\frac{1}{r(\underline{X}, \underline{Y})} \frac{\partial r(\underline{X}, \underline{Y})}{\partial Y_1} \quad (3.76)$$

où $r(\underline{X}, \underline{Y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, alors (3.76) devient:

$$\frac{\partial}{\partial Y_1} \left(\ln \left(\frac{1}{r(\underline{X}, \underline{Y})} \right) \right) = \frac{(x_1 - y_1)}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (3.77)$$

de même:

$$\frac{\partial}{\partial Y_2} \left(\ln \left(\frac{1}{r(\underline{X}, \underline{Y})} \right) \right) = \frac{(x_2 - y_2)}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad (3.78)$$

En insérant les valeurs des dérivées partielles (3.77) et (3.78) dans l'équation (3.75), on a finalement:

$$\nabla \vec{\phi}(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{NEL} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_S \left[\frac{(x_1 - y_1)\vec{i} + (x_2 - y_2)\vec{j}}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \right] q(\underline{Y}) ds \quad (3.79)$$

Donc, le champ \vec{E} est:

$$\vec{E} = - \sum_{i=1}^{NEL} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_S \left[\frac{(x_1 - y_1)\vec{i} + (x_2 - y_2)\vec{j}}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \right] q(\underline{Y}) ds \quad (3.80)$$

Sur un élément de référence, les deux composantes E_x et E_y du champ \vec{E} s'écrivent d'après l'équation (3.80):

$$\begin{aligned} E_x &= - \sum_{i=1}^{NEL} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 \frac{(x_1 - y_1(\xi))}{(r(\underline{X}, \underline{Y}(\xi)))^2} [N(\xi)] q(\xi) J(\xi) d\xi \\ E_y &= - \sum_{i=1}^{NEL} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 \frac{(x_2 - y_2(\xi))}{(r(\underline{X}, \underline{Y}(\xi)))^2} [N(\xi)] q(\xi) J(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.81)$$

Ces expressions sont utilisées pour l'intégration numérique selon les formules suivantes:

$$\begin{aligned}
 E_x &= - \sum_{i=1}^{NEL} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{NG} \frac{(x_1 - y_1(\xi_j))}{(r(\underline{X}, \underline{Y}(\xi_j)))^2} [N(\xi_j)]q(\xi_j)J(\xi_j)\omega_j \\
 E_y &= - \sum_{i=1}^{NEL} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{NG} \frac{(x_2 - y_2(\xi_j))}{(r(\underline{X}, \underline{Y}(\xi_j)))^2} [N(\xi_j)]q(\xi_j)J(\xi_j)\omega_j
 \end{aligned}
 \tag{3.82}$$

Une fois les composantes connues, l'intensité du champ électrique devient alors:

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \tag{3.83}$$

L'évaluation numérique des expressions (3.82) se fait en utilisant les fonctions d'interpolations, les jacobiens et les poids d'intégrations standards définis comme précédemment.

3.6 FORCE ÉLECTROSTATIQUE

Un avantage inhérent à l'utilisation de la méthode de simulation de charges de surface est que nous déterminons les charges sur chacune des surfaces du modèle géométrique. Connaissant ces charges, nous pouvons calculer la force électrostatique agissant entre la charge d'espace et la pointe en utilisant l'équation suivante:

$$\vec{F} = Q\vec{E} \tag{3.84}$$

Dû à la symétrie du modèle physique, le champ électrique sur l'axe de la pointe a une composante suivant l'axe y seulement (axe de symétrie de la pointe). En remplaçant \vec{E} de l'équation (3.84) par la valeur de sa composante E_y (cf. équation (3.82)), on obtient:

$$F_y = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{NELP} \sum_{j=1}^{NG} \frac{(x_2 - y_2(\xi_j))}{(r(\underline{X}, \underline{Y}(\xi_j)))^2} [N(\xi_j)]q(\xi_j)J(\xi_j)\omega_j \quad (3.85)$$

où NELP est le nombre d'éléments sur la pointe.

3.7 ORGANIGRAMMES DE CALCUL ET PROGRAMMATION

Le programme employé pour mettre en oeuvre sur ordinateur le modèle numérique présenté dans ce chapitre s'appelle MEFF⁽⁴³⁾ (Méthode des éléments finis de frontière). Ce programme a été conçu en premier lieu pour des problèmes d'élasticité. Sa structure est semblable à celle du logiciel MEF4 (Méthode des éléments finis) qui a été développé et présenté par Dhatt et Touzot⁽⁴⁵⁾. D'ailleurs, les deux programmes sont maintenant intégrés en un seul et partagent la même base de données.

En ce qui nous concerne, nous n'utilisons qu'une partie de MEFF, à savoir le programme principal et quelques-uns de ses sous-programmes adaptés à nos besoins. Nous n'avons alors construit que les blocs qui évaluent et assemblent les différentes matrices qu'on a besoin et qui effectuent le post-traitement requis par la situation présente. Le

bloc diagramme grossier, présentant les étapes importantes du logiciel, est donné à la figure 3.7. L'opération effectuée est indiquée dans chacune des cases, et le sous-programme correspondant (le cas échéant) est mentionné dans la colonne de droite.

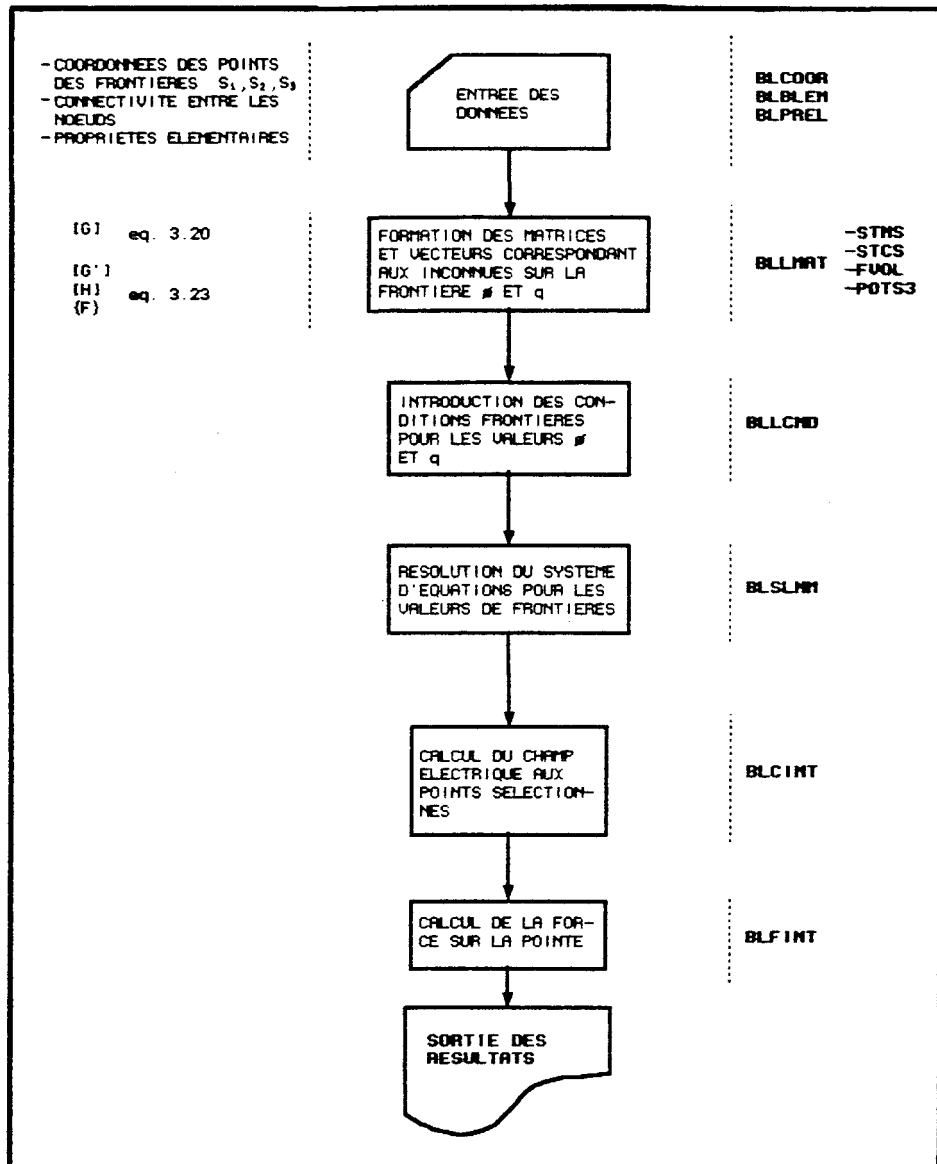


Figure 3.7: Organigramme général du programme MEFF

3.7.1 Programme principal MEFF⁽⁴³⁾

Le programme principal est composé de deux parties:

- a) La section de contrôle de l'enchaînement des blocs lit une carte de données contenant:
 - Le nom du bloc fonctionnel à exécuter (4 lettres): BLOC;
 - Le niveau d'impression désiré: M;
 - Les numéros de fichiers éventuellement utilisés par le bloc.

Cette section transfère ensuite le contrôle à l'un des sous-programmes appelés dans la deuxième section.

- b) Les appels des divers sous-programmes BLBLOC se font dans la section d'exécution et sont suivis du retour au début de la section de contrôle.

L'organigramme du programme principal MEFF est présenté à la figure 3.8.

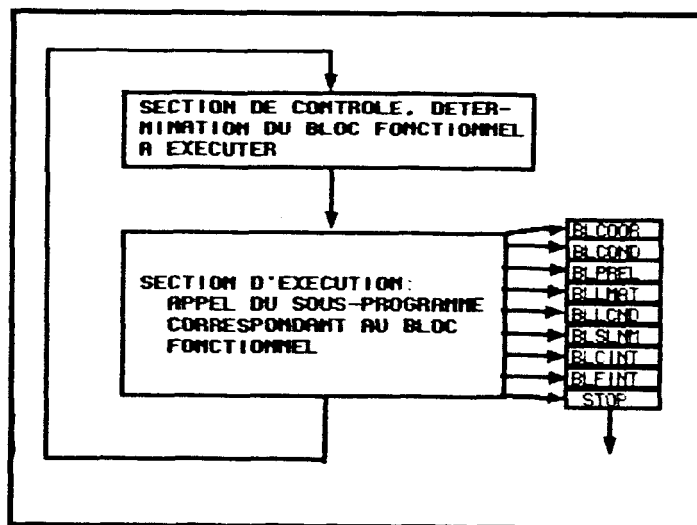


Figure 3.8: Organigramme du programme principal MEFF

3.7.2 Blocs de lecture

Le bloc BLCOOR lit les coordonnées et le nombre de degrés de liberté des noeuds, génère des noeuds par interpolation, et crée les tables utilisées.

Le bloc BLLCND lit et interprète les cartes de conditions aux limites puis crée les tables nécessaires.

Le bloc BLPREL lit et imprime les cartes de propriétés élémentaires et crée une table qui les contient toutes.

Le bloc BLBLEM lit les cartes de connectivité des noeuds et crée le fichier des éléments.

Les sous-programmes de lecture n'ont subi aucune modification et sont utilisés tels que présentés dans la référence⁽⁴³⁾.

3.7.3 Blocs de calculs

Le bloc BLLMAT doit construire les matrices et vecteurs globaux à l'aide des résultats obtenus suite à l'évaluation des équations intégrales décrites dans les sections précédentes. Le bloc BLLMAT constitue le noyau de la simulation informatique. L'organigramme de ce bloc est présenté à la figure 3.9.

Le sous-programme STNS, appelé par le bloc BLLMAT, calcule individuellement chacune des composantes du système matriciel (3.35). Les termes $g_{\alpha k}$, $h_{\alpha k}$, et $g'_{\alpha k}$, donnés par les équations (3.38), (3.49) et (3.56), sont alors évalués dans le cas où il n'y a pas de singularité. Le bloc diagramme du sous-programme d'intégration numérique pour le cas non singulier STNS est présenté à la figure 3.10.

Le sous-programme STCS a la même fonction que STNS, mais par contre, il est conçu pour traiter exclusivement les cas où il y a une singularité dans l'intervalle d'intégration numérique. Le bloc diagramme

du sous-programme d'intégration numérique dans le cas singulier STCS est donné à la figure 3.11.

Le sous-programme FVOL est utilisé exclusivement pour effectuer l'intégration numérique de l'équation (3.65) déterminant les composantes du vecteur $\{f^3\}$ du système matriciel (3.35). Ce sous-programme, sous forme d'organigramme, apparaît à la figure 3.12.

Le sous-programme POTS3 est destiné à faire les manipulations nécessaires afin d'évaluer le terme ϕ_3 de l'équation matricielle (3.72). Il effectue les inversions et les multiplications de matrices nécessaires. L'organigramme du sous-programme POTS3 est donné à la figure 3.13.

Le bloc BLSLNM⁽⁴³⁾ résout le système d'équations linéaires puis imprime les résultats. Le bloc BLSLNM est conçu afin d'utiliser la méthode Gauss (élimination directe) avec interchange de ligne et/ou de colonne s'il y a pivot nul.

Le bloc BLCINT fait le calcul du champ électrique dans la région homogène (région V_1) aux emplacements désirés, et imprime les résultats. Il utilise la formulation développée à la section 3.5. L'organigramme du bloc BLCINT est donné à la figure 3.14.

Le bloc BLFINT fait le calcul de la force électrostatique agissant entre la pointe et la charge d'espace et imprime les résultats.

L'équation servant au calcul de la force est présentée à la section 3.6. L'organigramme correspondant au bloc BLFINT se retrouve à la figure 3.15.

Les blocs de calculs et les sous-programmes importants sont listés à l'annexe 2. On y retrouve les sous-programmes EXLMAT, FVOL, POTS3, EXCINT et EXFINT.

Le programme est entièrement écrit en FORTRAN IV et l'ordinateur utilisé est un VAX 11/780 de Digital. Le temps d'ordinateur nécessaire à l'exécution du programme pour la modélisation complète est d'environ 2 minutes 46 secondes CPU.

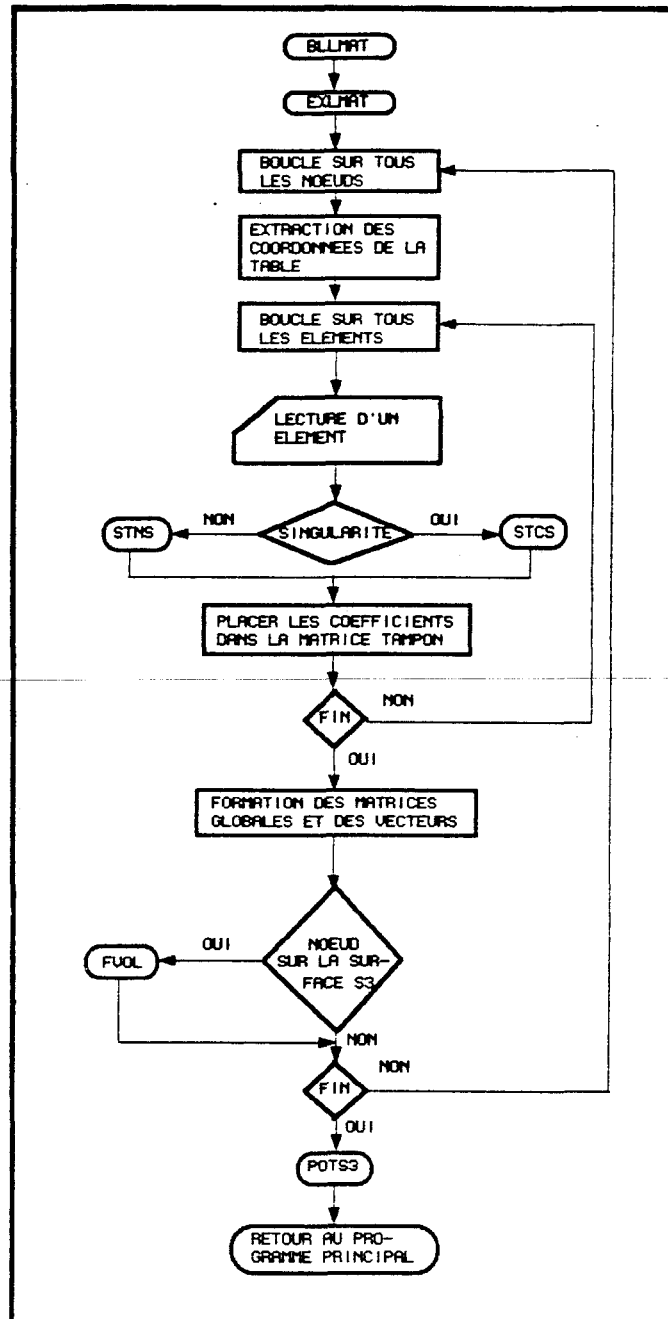


Figure 3.9: Organigramme du bloc BLLMAT

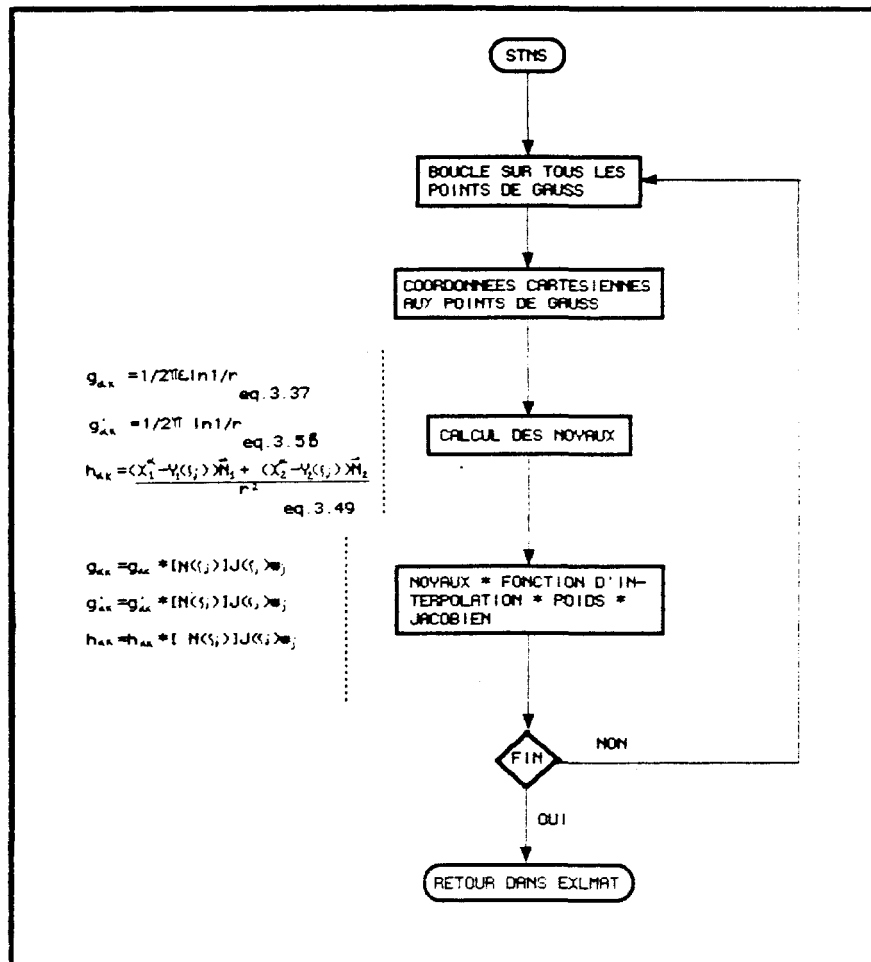


Figure 3.10: Organigramme du sous-programme STNS (cas non singulier)

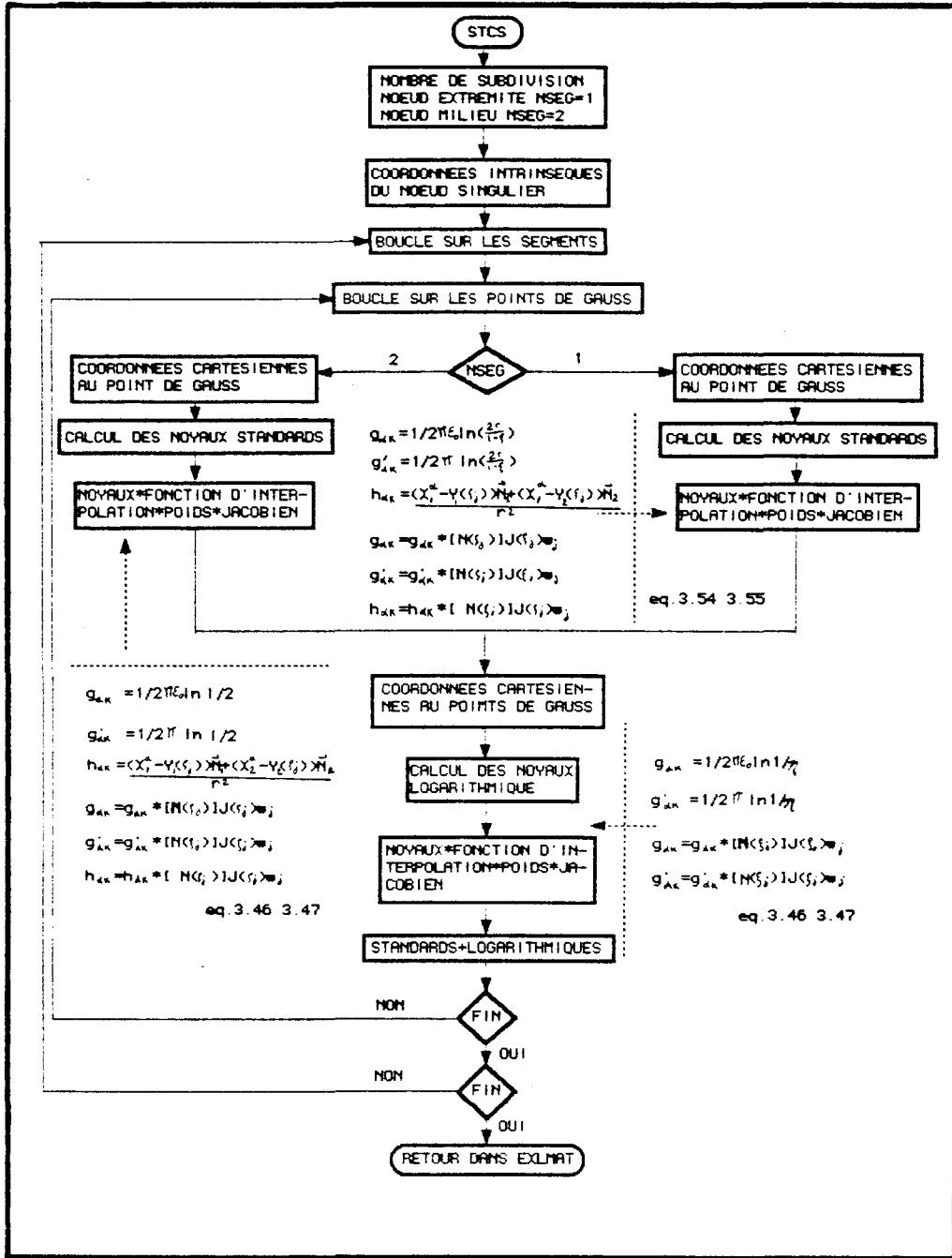


Figure 3.11: Organigramme du sous-programme STCS (cas singulier)

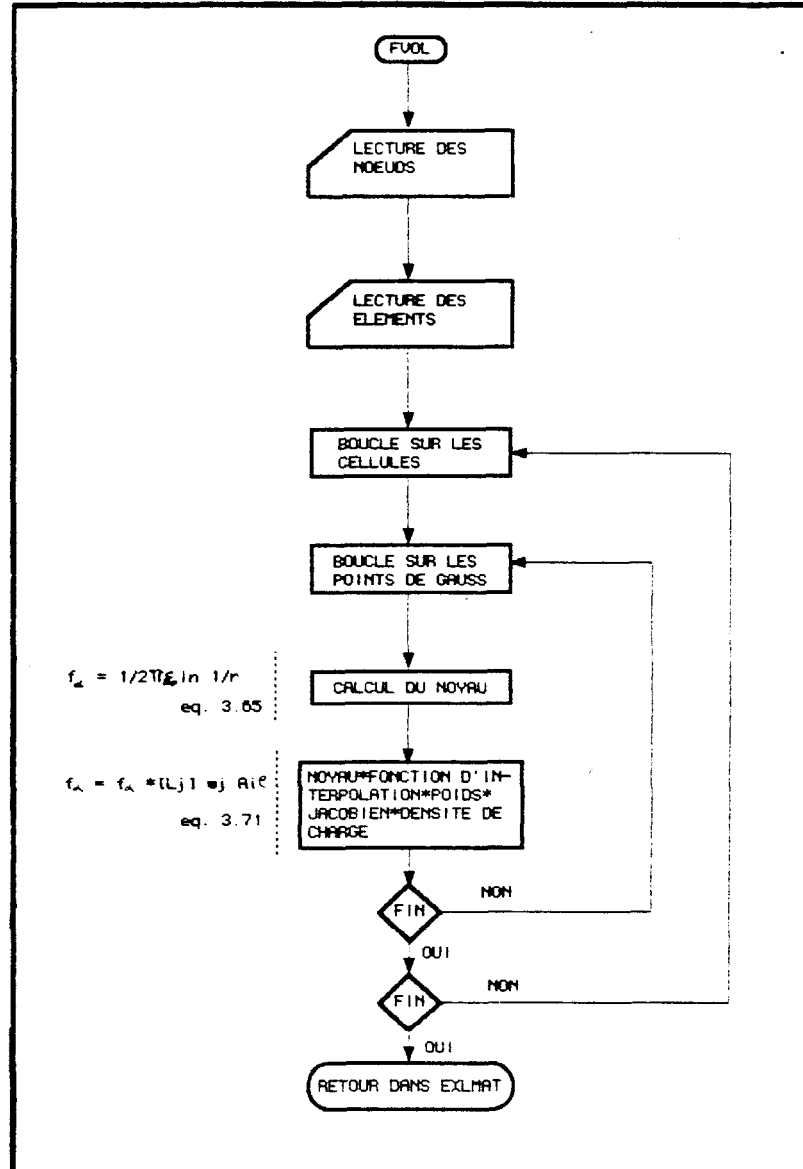


Figure 3.12: Organigramme du sous-programme FVOL

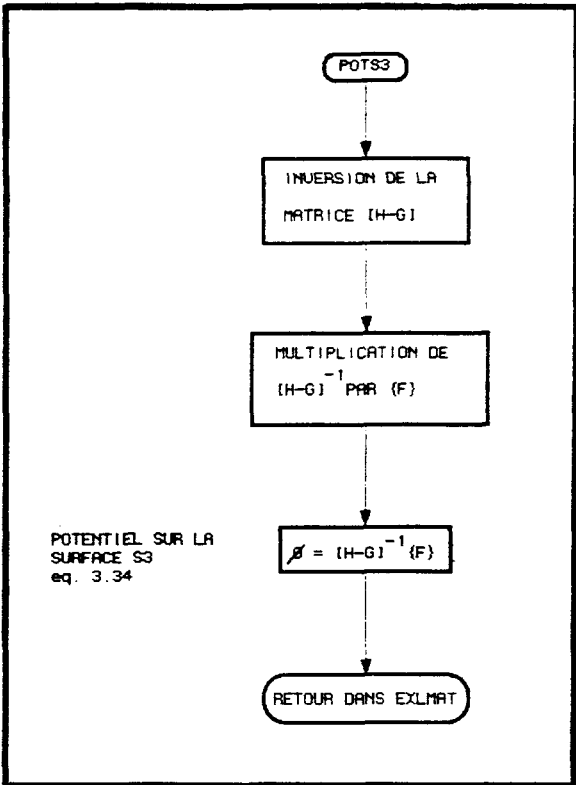


Figure 3.13: Organigramme du sous-programme POTS3

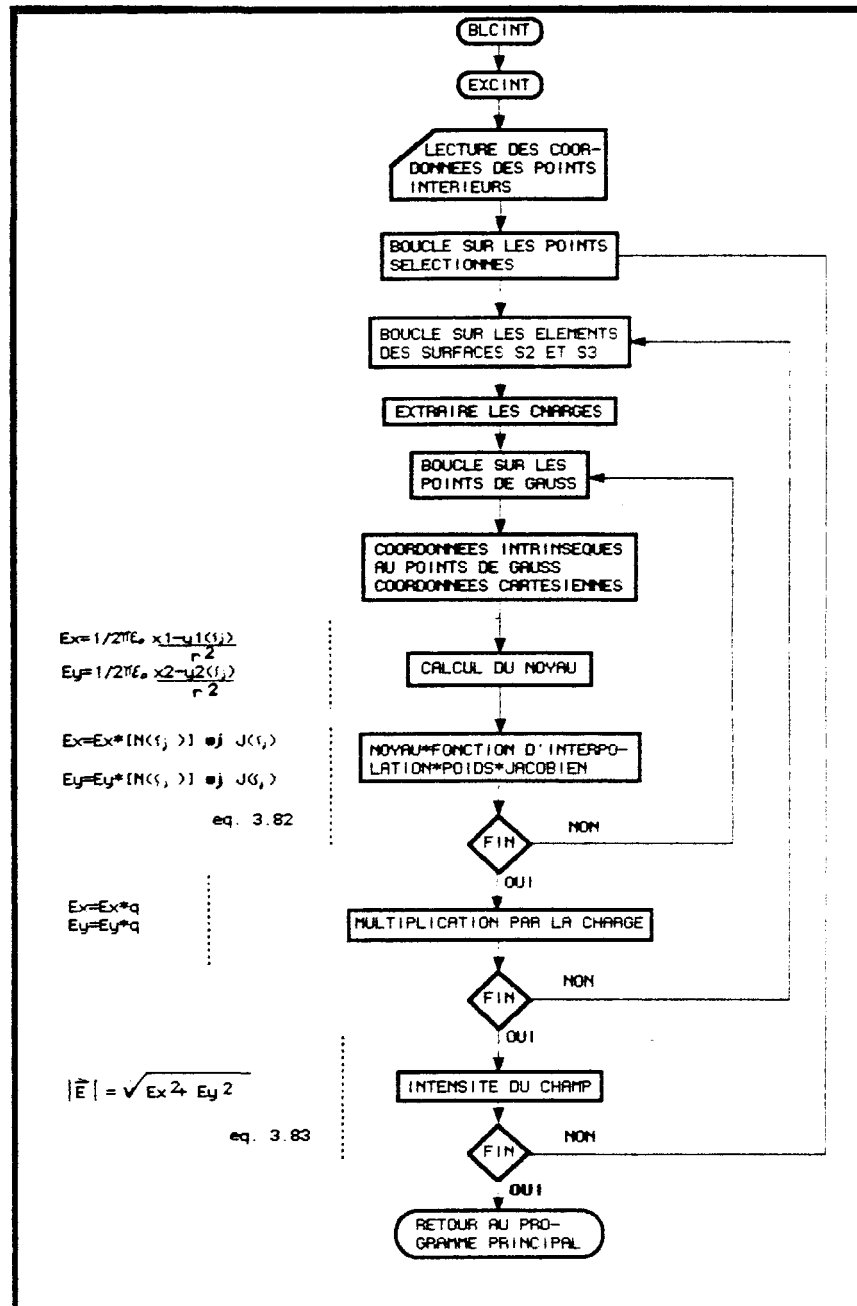


Figure 3.14: Organigramme du bloc BLCINT

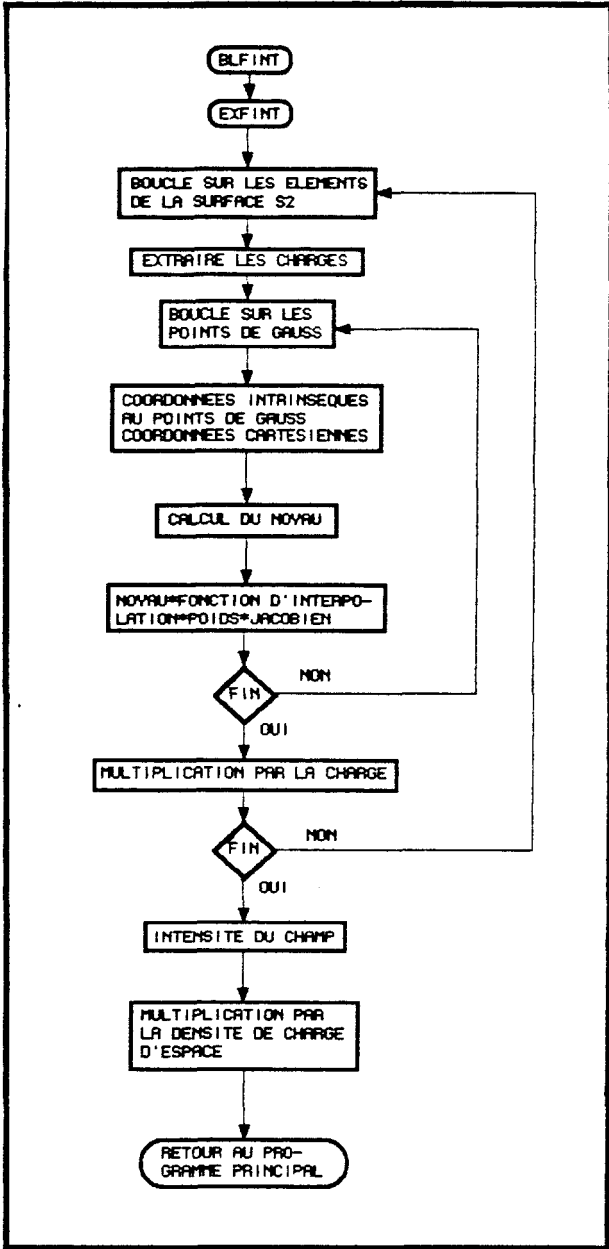


Figure 3.15: Organigramme du bloc BLFINT

3.8 VALIDATION ET RÉSULTATS

3.8.1 Validation du modèle numérique

Afin de valider le modèle numérique, nous avons choisi de simuler avec notre programme deux arrangements physiques dont les résultats analytiques sont connus. Les calculs effectués sur ceux-ci aideront à déterminer l'erreur commise dans la solution numérique, et à choisir un nombre optimum d'éléments permettant d'obtenir des résultats ayant une précision acceptable.

Le premier arrangement est un condensateur cylindrique constitué de deux cylindres métalliques concentriques très longs (figure 3.16). Le cylindre intérieur a un diamètre de 3.2 cm et le cylindre extérieur a un diamètre de 1 m. Les diamètres des cylindres intérieur et extérieur sont identiques à ceux du conducteur et de la cage cylindrique du modèle géométrique qui est à la base de la simulation numérique décrite dans ce chapitre. Le cylindre intérieur a un potentiel de 50 kv et le cylindre extérieur est relié à la terre. Le diélectrique employé dans le condensateur est l'air.

Le second arrangement représente deux conducteurs cylindriques parallèles (diamètre de 3.2 cm chacun) distants de 1 m (figure 3.17). Le potentiel d'un des conducteurs est de 50 kv en polarité positive et

l'autre est de 50 kv en polarité négative.

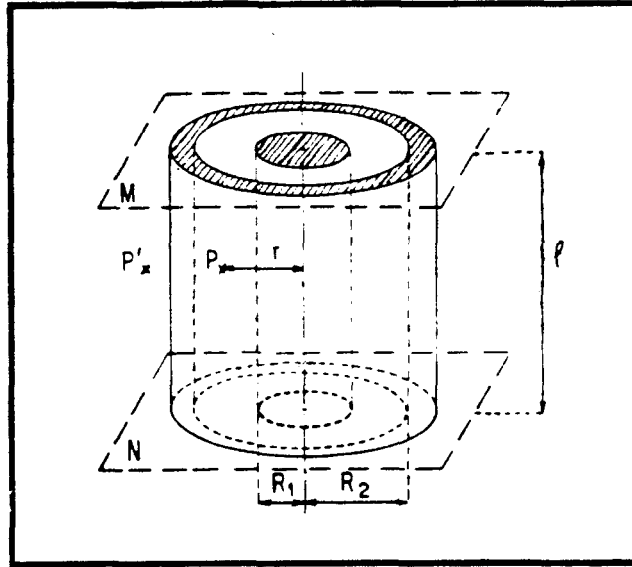


Figure 3.16: Configuration condensateur cylindrique

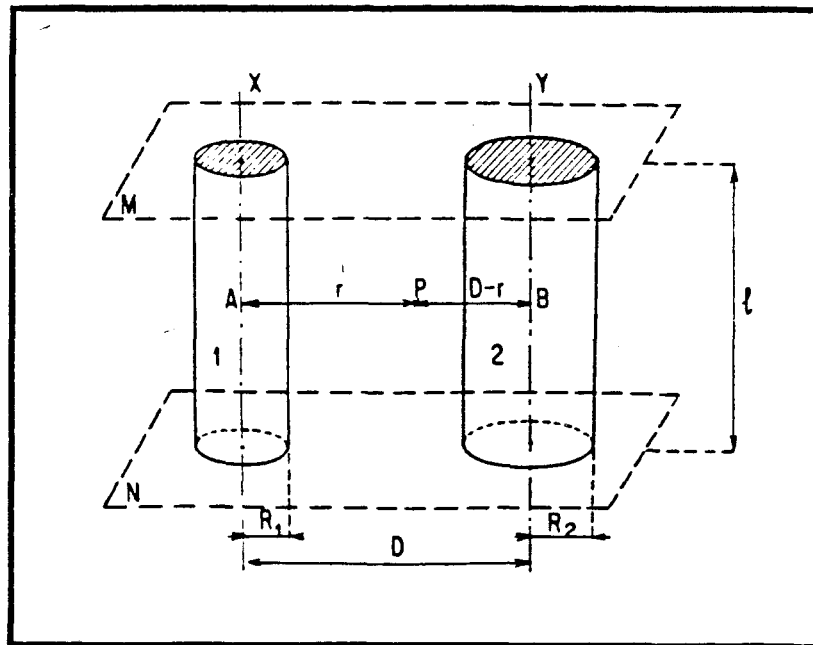


Figure 3.17: Configuration conducteurs parallèles

Les calculs analytiques de la charge des conducteurs et du champ électrique entre les conducteurs se font aisément à l'aide de formules appropriées. Dans le cas du condensateur cylindrique, nous pouvons utiliser l'équation (3.86)⁽⁴⁹⁾ pour le calcul de la charge sur des cylindres de 1 m de long (portion du condensateur limitée par les plans M et N distants de 1 m l'un de l'autre (figure 3.16)):

$$q = \frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (3.86)$$

où ε_0 est la permittivité du vide ($8.854 \cdot 10^{-12} F/m$), U est la différence de potentiel entre les 2 cylindres, R_1 est le rayon du cylindre intérieur, et R_2 est le rayon du cylindre extérieur. Si r est la distance entre P (le point d'intérêt où l'on désire déterminer la grandeur du champ électrique) et l'axe des cylindres (figure 3.16), le champ en P a pour valeur⁽⁴⁹⁾:

$$E = \frac{U}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (3.87)$$

Selon la référence (49), la charge sur chacun des deux conducteurs parallèles de même rayon limités par des plans parallèles M et N distants de 1 m (figure 3.17) est donnée par:

$$q = \frac{\pi\varepsilon_0 U}{\ln\left(\frac{D-R}{R}\right)} \quad (3.88)$$

où D est la distance entre les deux conducteurs et R le rayon des conducteurs. Prenons un point P (figure 3.17) situé entre les conducteurs,

et à la distance r de l'un des conducteurs. Le champ électrique produit par les deux conducteurs en P est⁽⁴⁹⁾:

$$E = \frac{U}{2 \ln \left(\frac{D-R}{R} \right)} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{D-r} \right) \quad (3.89)$$

La charge est calculée sur chaque conducteur, et le champ électrique à quelques points entre les conducteurs en utilisant le programme d'ordinateur MEFF, et avec les formules analytiques citées dans cette section. Les calculs numériques sont faits pour des configurations de 8, 16 et 32 éléments quadratiques à 3 noeuds. Les figures 3.18 et 3.19 montrent la division des deux arrangements en 8 éléments et l'emplacement des points où le champ est calculé. Les résultats obtenus sont présentés aux figure 3.20 à 3.23.

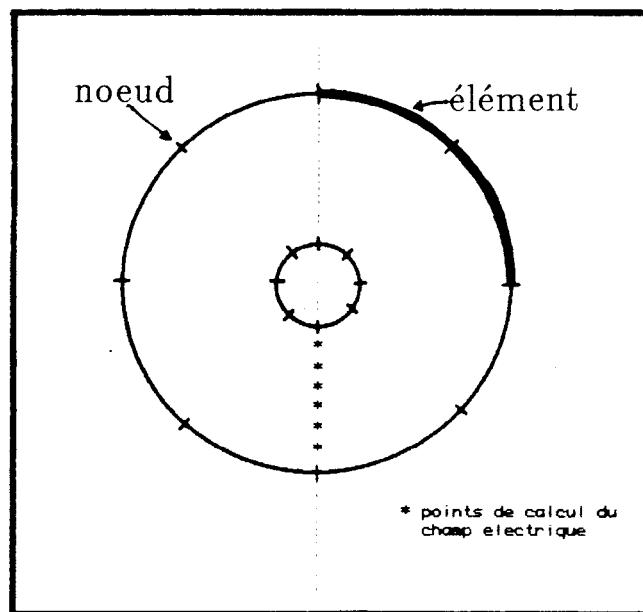


Figure 3.18: Configuration condensateur cylindrique divisée en 8 éléments

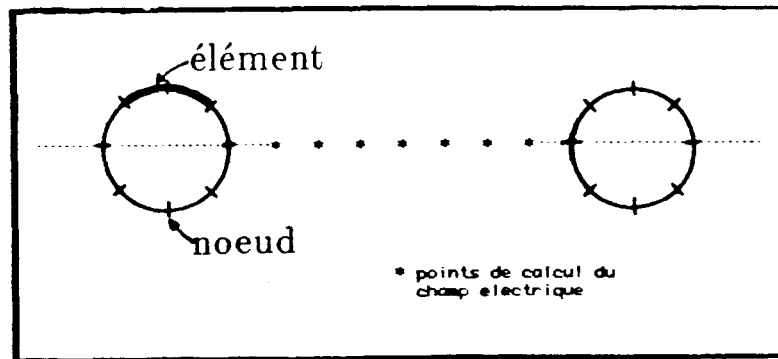


Figure 3.19: Configuration conducteurs parallèles divisée en 8 éléments

Sur les graphiques présentant la charge d'un conducteur en fonction du nombre d'éléments pour les deux configurations étudiées (figure 3.20 a et b), nous observons que la précision augmente lorsque le nombre d'éléments est plus grand. Ainsi, le niveau de charge calculé numériquement se rapproche de celui évalué analytiquement (équation (3.86) et (3.88)). Les figures 3.21 a et b, représentant le pourcentage d'erreur sur le calcul de la charge sur un conducteur, montrent clairement la chute de l'erreur en fonction de l'augmentation du nombre d'éléments. Selon la configuration, l'erreur commise sur la charge pour un domaine divisé en 32 éléments se situe à 0.16% (condensateur cylindrique) ou 0.6% (conducteurs parallèles).

Les graphiques de la figure 3.22 présentent les courbes analytique et numérique (8, 16 et 32 éléments) du champ électrique en fonction de la distance à l'axe de symétrie. On remarque que les courbes sont

presque confondues. Le pourcentage d'erreur sur le champ électrique en fonction de la distance à l'axe de symétrie est donné pour chacune des configurations à la figure 3.23. L'erreur moyenne sur le champ est environ de 0.3% pour un domaine de 32 éléments, ce qui est très satisfaisant. Le calcul du champ électrique est donc d'une bonne précision.

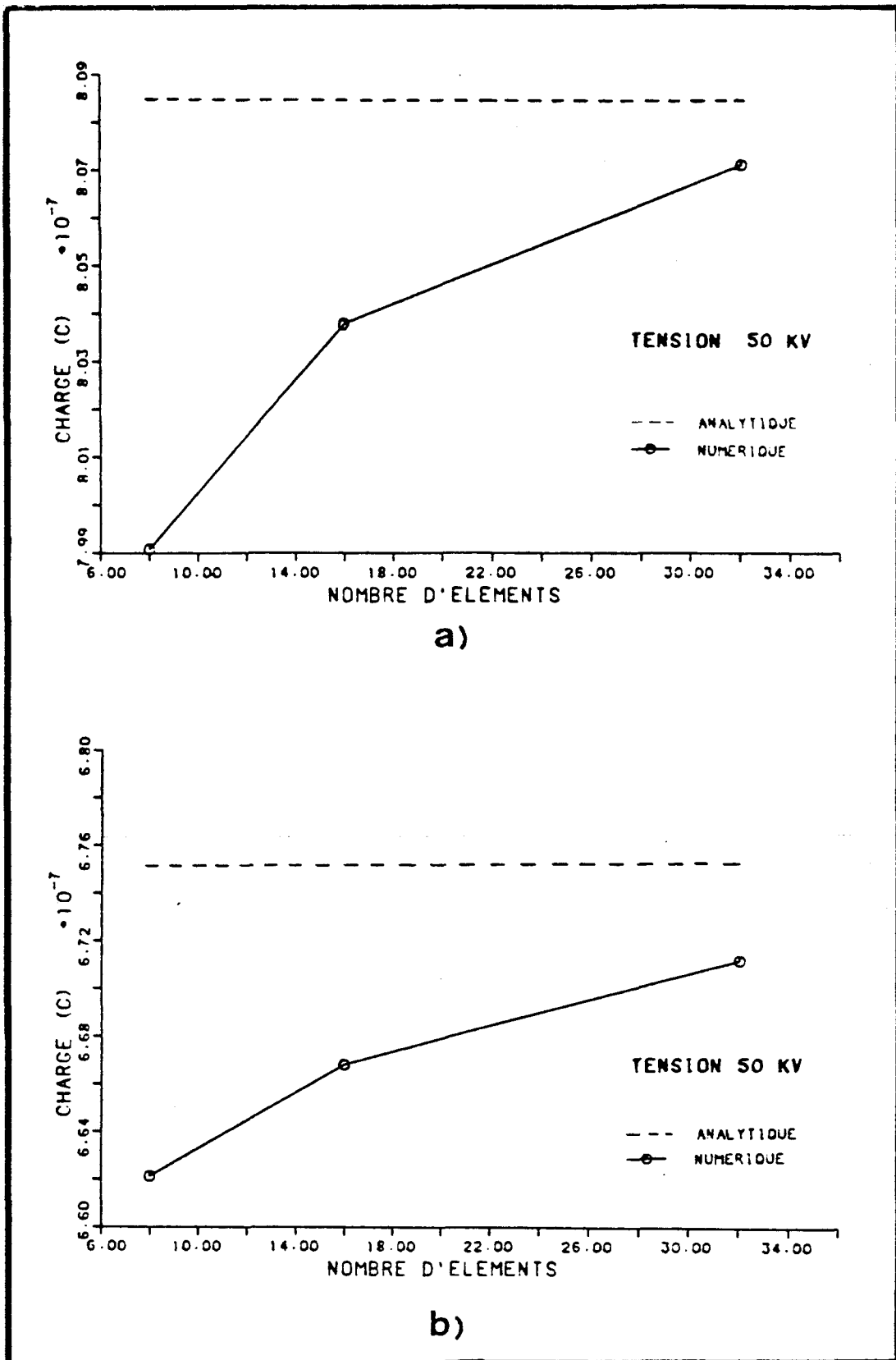


Figure 3.20: Comparaison entre la valeur numérique et analytique de la charge électrique:

- a) configuration condensateur cylindrique
- b) configuration conducteurs parallèles

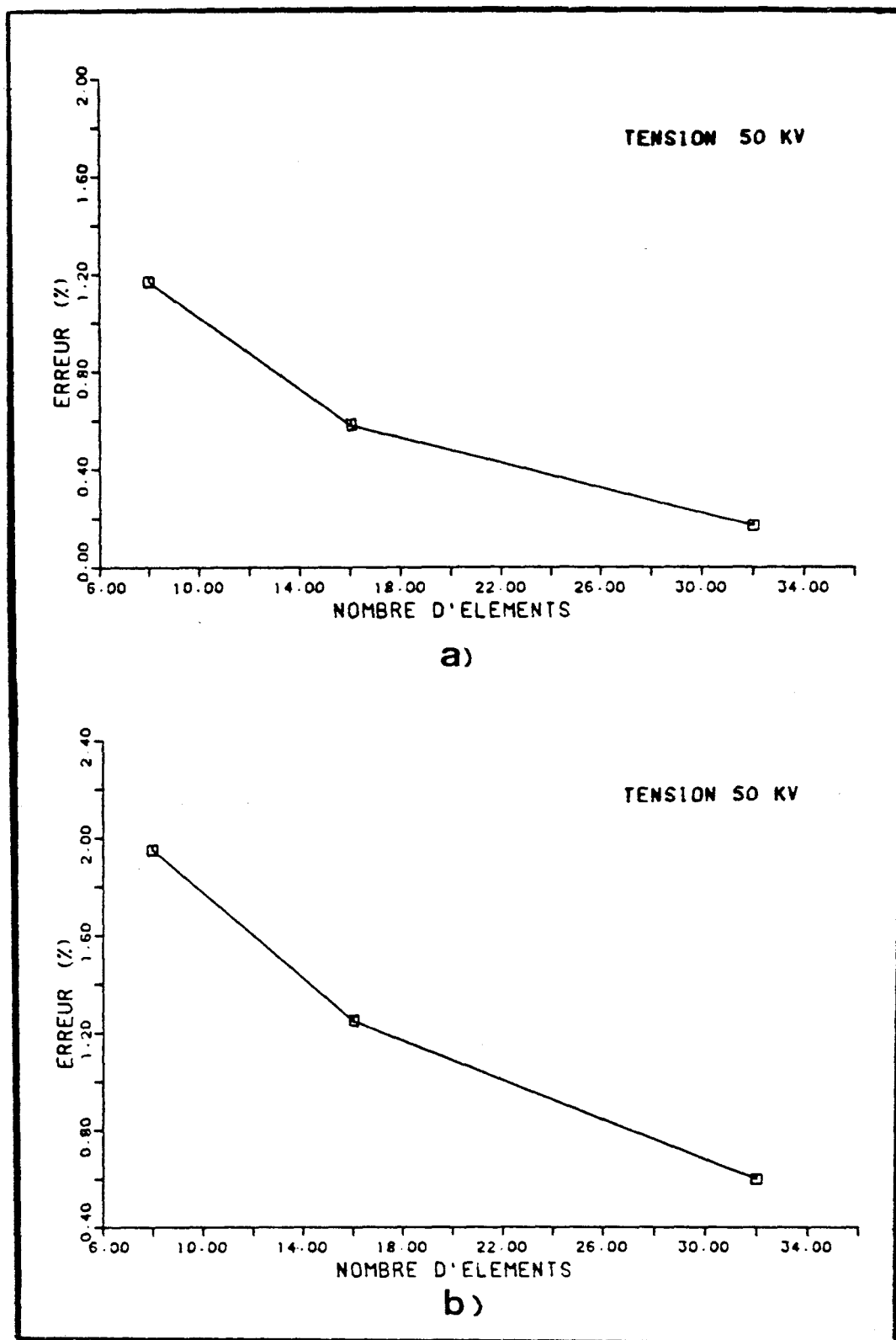


Figure 3.21: Pourcentage d'erreur sur la valeur numérique de la charge électrique:

- a) configuration condensateur cylindrique
- b) configuration conducteurs parallèles

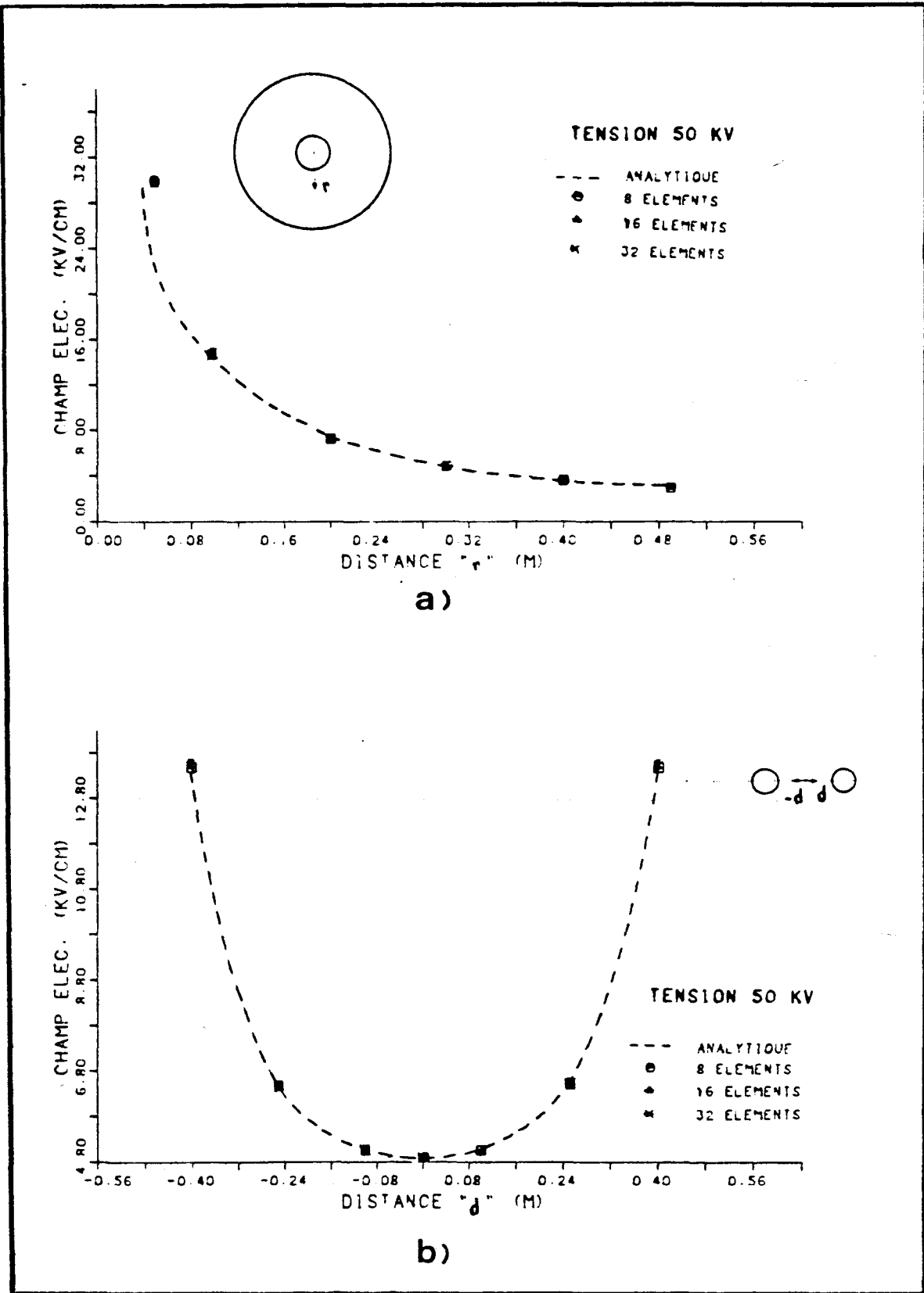


Figure 3.22: Comparaison entre la valeur numérique et analytique du champ électrique:

- a) configuration condensateur cylindrique
- b) configuration conducteurs parallèles

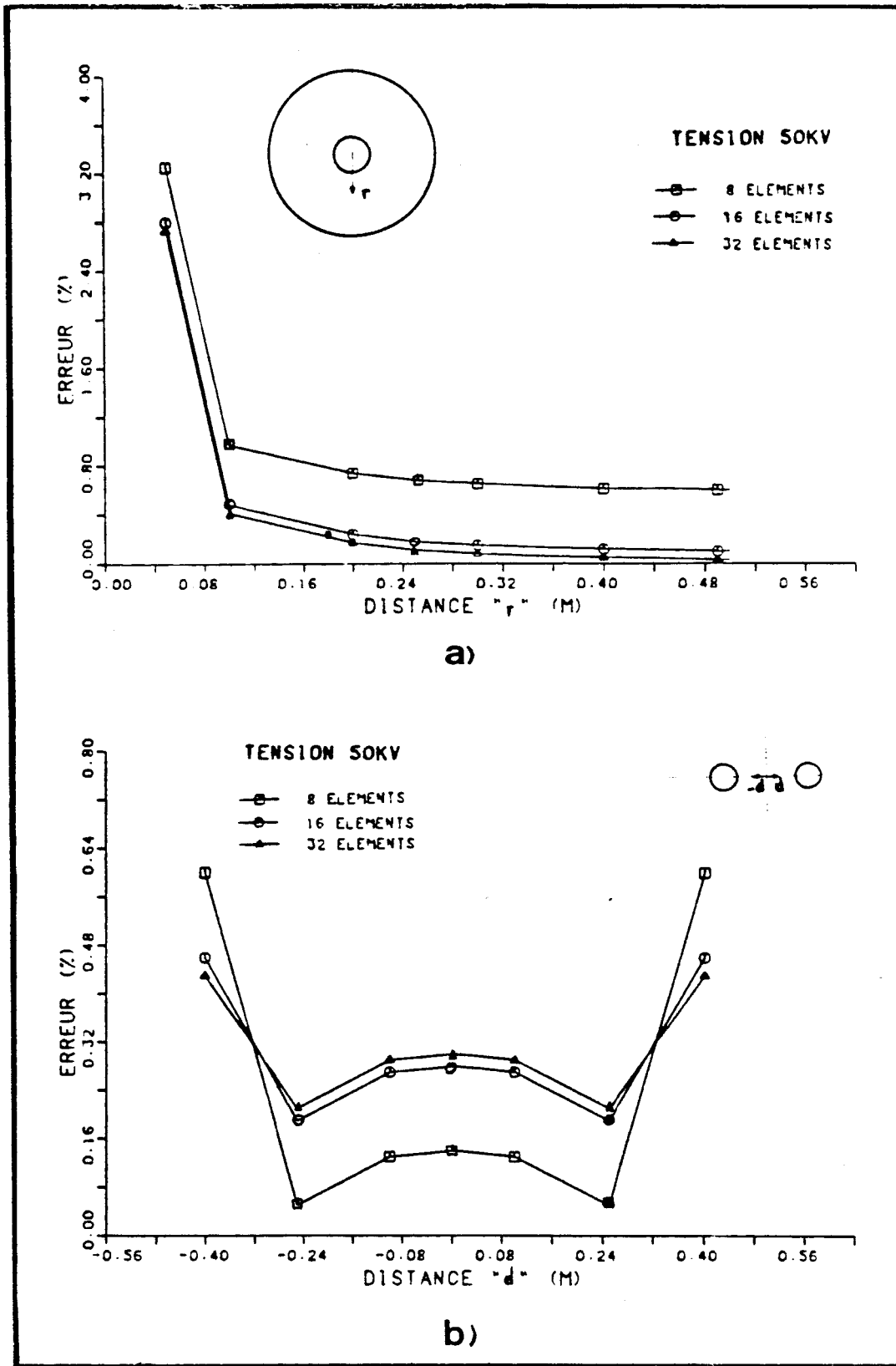


Figure 3.23: Pourcentage d'erreur sur la valeur numérique du champ électrique:
 a) configuration condensateur cylindrique
 b) configuration conducteurs parallèles

Les résultats de la validation démontrent bien l'importance du nombre d'éléments utilisés sur le domaine. Les résultats des essais faits avec le modèle géométrique de la figure 3.2 divisé en 28, 40, 49 et 56 éléments, montrent que le nombre d'éléments influence davantage le champ électrique dans le voisinage immédiat de la pointe que pour des points plus éloignés (figure 3.24).

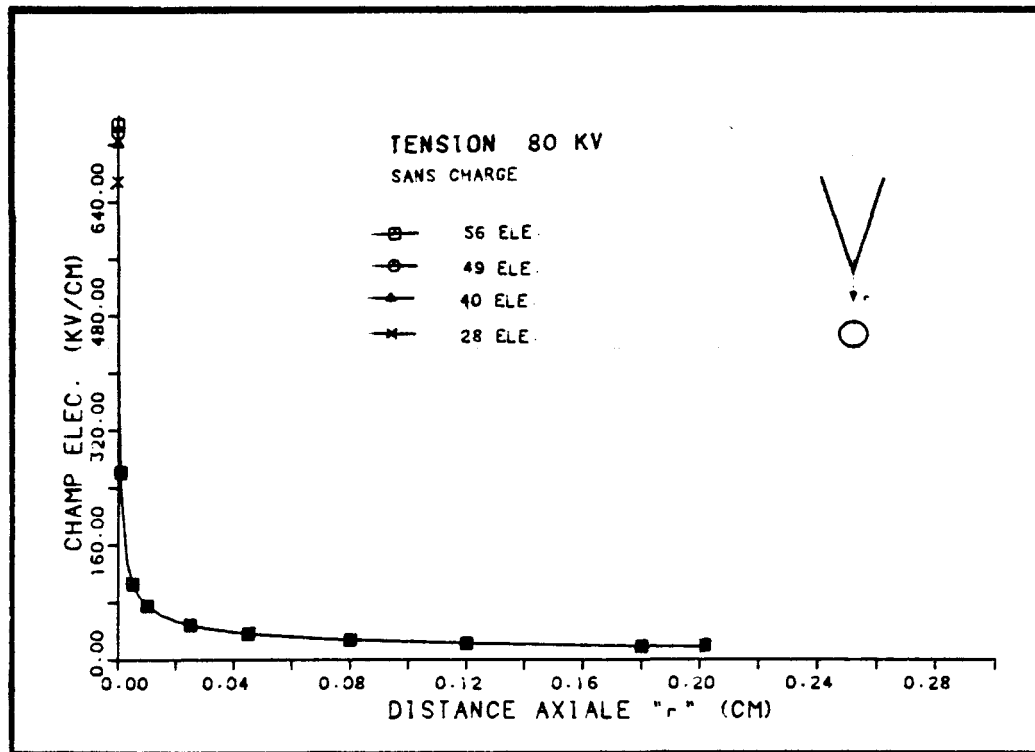


Figure 3.24: Champ électrique pour 28, 40, 49 et 56 éléments

Ainsi, les surfaces S_1 et S_2 sont représentées à l'aide de 56 éléments, le contour de la charge d'espace est divisé en 12 éléments, et la surface intérieure de la charge d'espace est divisée en 40 cellules.

Afin de valider le modèle de la figure 3.2. il est possible de calculer l'erreur sur le potentiel à l'aide de la matrice des coefficients et des charges calculées et selon l'énoncé (3.90).

$$\% \text{ Erreur} = \frac{(\phi_{\text{imposé}} - \phi_{\text{calculé}})}{\phi_{\text{imposé}}} * 100 \quad (3.90)$$

Le potentiel calculé ($\phi_{\text{calculé}}$) est évalué en utilisant le système matriciel (3.72). Le potentiel imposé ($\phi_{\text{imposé}}$) correspond aux conditions limites (3.3). Si le conducteur a un potentiel de 70 kv, le pourcentage d'erreur est inférieur ou égal à 0.003%. Donc, l'emplacement et la valeur des charges semblent bien représenter la situation désirée.

3.8.2 Limites d'application du modèle numérique

Des calculs ont été faits à l'aide du programme développé et du modèle physique présenté dans ce chapitre. Selon la grandeur de la charge d'espace, inférieure, égale ou supérieure à 10^{11} ions, nous observons trois situations distinctes. Ces situations sont présentées à l'aide de trois simulations où la valeur de la charge d'espace est de 10^{10} , 10^{11} ou 10^{12} ions. Pour chacune de ces valeurs, le potentiel du conducteur est imposé à 70 kv et la distance de la charge à la pointe à 0.1 cm.

Dans le premier cas (figure 3.25 a) où la quantité de charge d'espace est inférieure à 10^{11} ions (ex: 10^{10} ions positifs), les charges calculées

q_1 à la surface de la cage et q_2 à la surface du conducteur-pointe sont respectivement négatives et positives, ce à quoi on s'attendait. Le potentiel calculé ϕ^3 (cf. équation (3.33)) de la frontière de la charge d'espace est de 3.25 kv en polarité positive. Par contre, les charges calculées q_3 (équation (3.35)) sont de polarité négative, ce qui n'est pas en accord avec les charges positives imposées. De plus, la charge totale de la charge d'espace, calculée avec les charges de surface q_3 , ne correspond pas en grandeur à la charge d'espace totale imposée.

Dans le deuxième cas (figure 3.25 b) où la quantité de charge d'espace est égale à 10^{11} ions positifs, les charges calculées q_1 et q_2 sont respectivement négatives et positives. Les charges calculées q_3 sont positives et le potentiel ϕ_3 est de 68.46 kv en polarité positive. Ces quantités sont toutes en accord avec les valeurs imposées. La charge totale de la charge d'espace, calculée avec les charges de surface q_3 , est environ la même que la charge d'espace totale imposée.

Dans le troisième cas (figure 3.35 c) où la quantité de charge d'espace est supérieure à 10^{11} ions (ex: 10^{12} ions positifs), les charges calculées q_1 et q_2 sont négatives. Les charges calculées q_3 sont positives et le potentiel ϕ_3 est de 325.27 kv en polarité positive. La charge totale de la charge d'espace, calculée avec les charges de surface q_3 , ne correspond pas à la charge d'espace totale imposée.

Physiquement, les trois situations obtenues ne semblent pas toutes

possibles, mais nous pouvons expliquer ainsi les résultats numériques que nous avons observés. Si le potentiel calculé $\underline{\phi}^3$ (équation (3.33)) de la frontière de la charge d'espace est plus faible que celui créé ($\underline{\phi}_3$) par le système conducteur-pointe et la cage sur cette même frontière, alors les charges calculées \underline{q}_3 doivent être négatives pour diminuer le potentiel $\underline{\phi}_3$ au même niveau que $\underline{\phi}^3$ afin de respecter la condition de continuité imposée sur le potentiel (équation (3.32)). C'est ce que nous observons dans le premier cas. La situation inverse peut être observée, c'est-à-dire que si la charge d'espace est trop importante, elle crée un potentiel $\underline{\phi}_2$ trop élevé sur le conducteur. Ainsi, l'apparition de charges négatives \underline{q}_2 à la surface du conducteur-pointe sont nécessaires afin de diminuer ce potentiel au niveau imposé. C'est ce que nous observons dans le troisième cas.

Selon ces observations, il existerait donc un petit intervalle de variation (ou même une seule valeur) de la densité de la charge d'espace, pour chacune des positions de celle-ci et chacun des potentiels imposés au conducteur, pouvant satisfaire les conditions physiques de la configuration géométrique du montage (deuxième cas). On voit qu'un critère doit être ajouté à la procédure. Le critère étant celui de la conservation de la valeur de la charge d'espace. Si la charge totale de la charge d'espace calculée diffère de celle imposée, la simulation doit être recommencée, et ce jusqu'à ce que le critère de conservation soit satisfait. Pour les conditions imposées précédemment ($\underline{\phi}_2 = 70$ kv et

distance entre la charge d'espace et la pointe 0.1 cm). la grandeur de charge d'espace correspondant à ce critère est de $2 * 10^{11}$ ions.

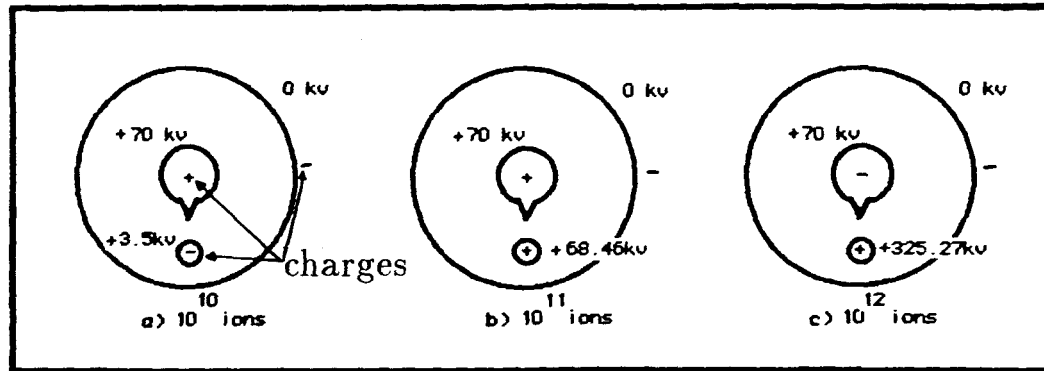


Figure 3.25: Polarité des charges et potentiel des surfaces pour trois grandeurs de charge d'espace:
a) 10^{10} ions b) 10^{11} ions c) 10^{12} ions

Le modèle employé nous limite donc à l'utilisation d'une seule et unique grandeur de charge d'espace pour des conditions données. L'influence de la grandeur de charge d'espace sur le champ électrique ne peut donc pas être évaluée.

3.8.3 Application à l'étude du mécanisme des vibrations

La formulation présentée dans ce chapitre permet d'évaluer les paramètres désirés pour la configuration décrite à la section 3.3. L'application à l'étude du mécanisme des vibrations révélera quelques éléments de solution supplémentaires.

Les calculs à l'aide du programme informatique devaient être faits selon les données fournies au tableau I. Toutefois, nous avons démontré à la section précédente que la seule densité de charge d'espace qui peut être utilisée dans notre modèle est environ $2 * 10^{11}$ ions. Ainsi, les seuls paramètres que nous pouvons faire varier sont le potentiel du conducteur (70, 80 et 90 kv) et la distance de la charge d'espace à la pointe (0.02, 0.05, 0.1 et 0.2 cm). L'étude de l'influence de ces paramètres sur la distribution du champ électrique dans l'espace situé sur l'axe de symétrie entre l'extrémité de la pointe et les charges d'espace, ainsi que la force électrostatique agissant entre la pointe et la charge d'espace, a permis d'arriver à certains résultats.

3.8.3.1 Champ électrique

Les résultats obtenus à l'aide de notre programme ont permis d'obtenir des données utiles à l'identification de l'ampleur de la modification de la distribution du champ électrique au voisinage du bout de la pointe. L'évaluation du champ électrique en absence de la charge d'espace a été faite à l'aide de la formulation homogène présentée à la section 3.3.1. Ces données sont comparées à celles obtenues par la formulation tenant compte de la présence de la charge d'espace entre la pointe et la terre (section 3.4.5). Les courbes obtenues pour trois tensions (70, 80 et 90 kv) sont présentées à la figure 3.26. Elles

représentent la variation de la grandeur du champ électrique sur l'axe de symétrie de la pointe en présence ou non de la charge d'espace, en fonction de la distance r du bout de la pointe. La charge d'espace, lorsqu'elle est présente, est distante de 0.02, 0.05, 0.1 ou 0.2 cm de la pointe. La densité varie de $2 * 10^{11}$ à $3.5 * 10^{11}$ ions. Le champ électrique, dans tous les cas, est maximum à la pointe et décroît rapidement pour un point situé au voisinage immédiat de la pointe. Il tend à s'annuler près de la frontière de la charge d'espace.

La figure 3.27 présente la variation du champ électrique à l'extrémité de la pointe en fonction de la tension appliquée pour chacune des positions de la charge d'espace. Le champ électrique à la pointe augmente en fonction de la tension appliquée sur le conducteur. Cette augmentation est d'autant plus considérable que la charge est loin de la pointe. On peut aussi remarquer que la valeur du champ électrique à la pointe est plus grande lorsque la charge d'espace s'éloigne de la pointe.

Les résultats présentés dans cette section concordent avec ceux obtenus avec la méthode des éléments finis classique pour la même configuration que celle utilisée dans cette approche⁽²⁹⁾.

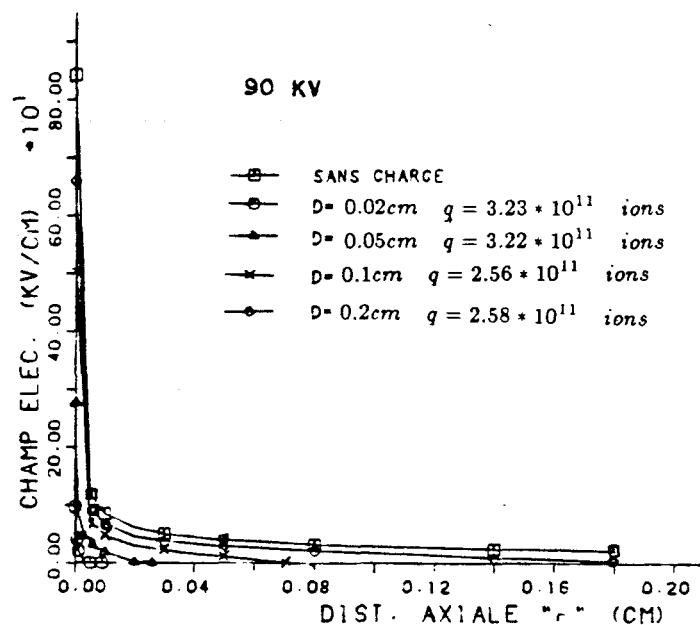
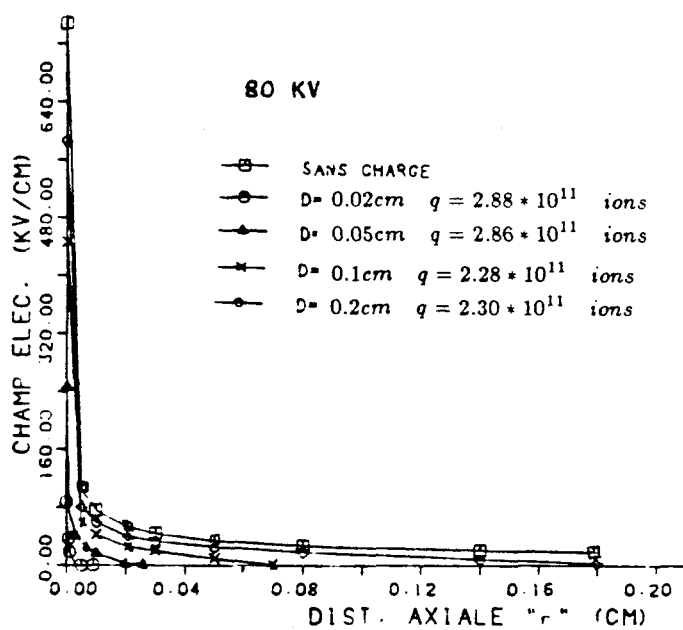
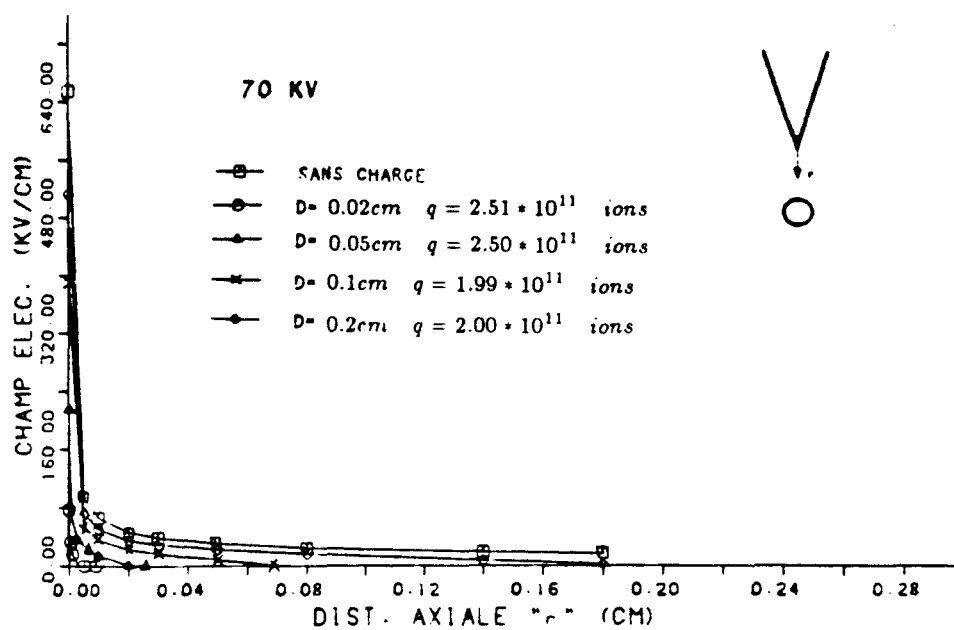


Figure 3.26: Distribution du champ électrique sur l'axe de symétrie au voisinage de la pointe en fonction de la distance à la pointe r pour différents potentiels:

a) 70 kv b) 80 kv c) 90 kv

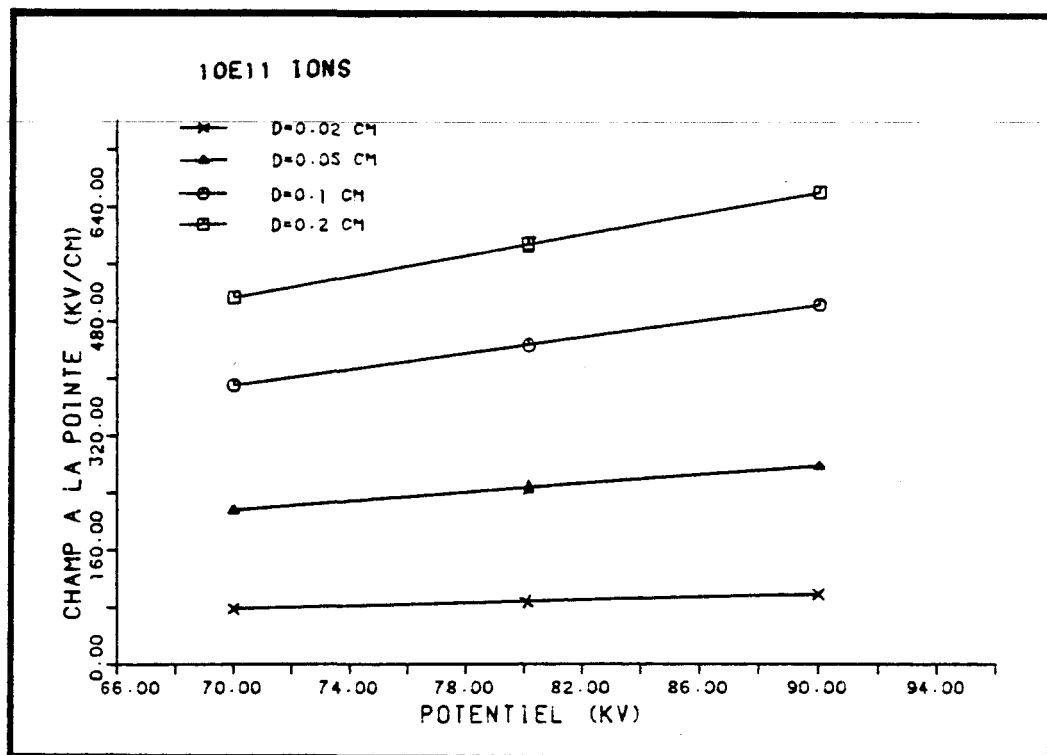


Figure 3.27: Intensité du champ électrique à la pointe en fonction de la tension appliquée

3.8.3.2 Force électrostatique

L'étude de la force électrostatique, en fonction de la position de la charge d'espace et du potentiel appliqué au conducteur, est réalisée à l'aide de la formulation décrite à la section 3.6.

Si la tension est fixée et que la distance de la charge à la pointe varie, il est possible de déterminer la variation de la grandeur de la force électrostatique en fonction de la position de la charge d'espace pour différentes tensions. Les résultats obtenus (figure 3.28) montrent que cette force diminue lorsque la distance entre la charge d'espace et la pointe augmente. Elle est toujours plus grande pour une tension supérieure.

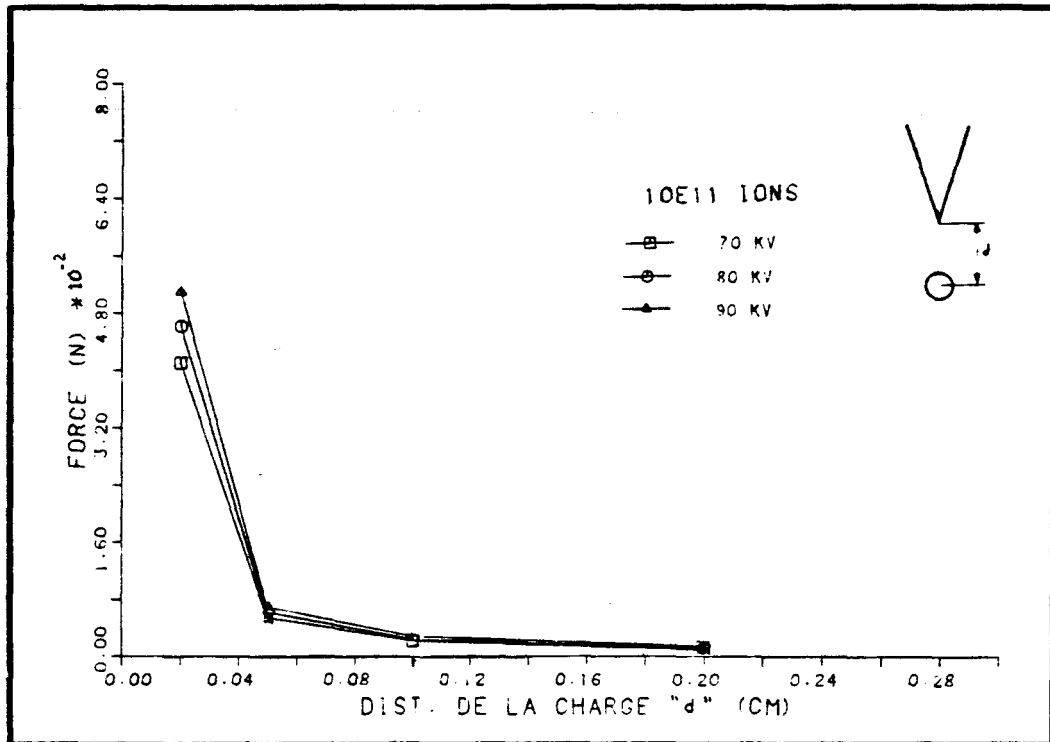


Figure 3.28: Force électrostatique en fonction de la distance de la charge d'espace à la pointe

3.9 DISCUSSION DES RÉSULTATS

L'approche numérique, basée sur la combinaison de la méthode de simulation de charges de surface et la méthode des éléments finis de frontière, a montré que la valeur du champ électrique à la pointe d'une électrode conique en métal fixée à la surface du conducteur, peut être diminuée par la charge d'espace. Cette approche a démontré également la possibilité de déterminer numériquement la force électrostatique agissant entre la charge d'espace et la pointe métallique.

Cependant, la méthode utilisée pour modéliser la configuration employée dans ce travail ne nous a pas permis d'imposer une densité de charge d'espace quelconque. En effet, il a été observé que le niveau de charge permis, pour une configuration donnée, était déterminé par les paramètres initiaux et par des critères de conservation de la charge d'espace et de continuité du potentiel. Des études ultérieures devraient être entreprises pour clarifier cette situation.

CHAPITRE IV

CONCLUSION GÉNÉRALE ET RECOMMANDATIONS

Les études théoriques et expérimentales des vibrations induites par effet de couronne présentées dans ce mémoire, ont permis d'évaluer l'importance des principales forces pouvant être à l'origine des vibrations induites par effet de couronne des conducteurs à haute tension. Les résultats obtenus indiquent que la force de réaction due au vent électrique est de l'ordre de 10^{-4} N par pointe, et qu'elle représente environ 10% de la force totale produisant les vibrations qui est de l'ordre de 10^{-3} N par pointe. Nous avons démontré qu'un conducteur H.T., suspendu à l'aide de ressorts au-dessus d'une plaque métallique reliée à la terre, peut vibrer lorsqu'on injecte des charges d'espace intermittentes entre le conducteur et la plaque, le taux de répétition des charges injectées étant égal à la fréquence naturelle du conducteur. Ceci confirme l'importance de l'effet d'écran de la charge d'espace.

Ces informations ont conduit à la nécessité de mettre au point un modèle informatique (basé sur les méthodes de simulations de charges de surface et des éléments finis de frontière). Il nous a permis d'étudier l'influence de la charge d'espace sur le champ électrique, et de détermi-

ner la force électrostatique agissant entre la charge d'espace et la pointe, ce qui semble être la principale cause des vibrations. Les résultats numériques ont montré que la présence de la charge d'espace cause une diminution du champ électrique à l'extrémité d'une pointe métallique simulant une goutte d'eau suspendue. Ces résultats mettent en valeur l'hypothèse selon laquelle la présence intermittente de la charge d'espace, produite par les décharges à l'extrémité des gouttes d'eau suspendues en-dessous des conducteurs à haute tension, crée un effet d'écran et est la cause principale des vibrations. L'approche numérique a démontré également la possibilité de déterminer numériquement la force électrostatique agissant entre la charge d'espace et la pointe métallique.

Toutefois, les limitations du modèle, observées au cours de la présente étude, suggèrent de poursuivre encore des travaux de recherche afin de déterminer plus exactement l'influence de chacun des facteurs (géométrie, méthode numérique ...). Ainsi, des études sur différents domaines ouverts et fermés et dont les résultats analytiques sont connus devront être réalisées. Le potentiel appliqué et la géométrie de l'électrode sont deux facteurs importants influençant la distribution du champ électrique, mais en présence de la décharge de couronne, la localisation et la forme de la charge d'espace jouent également un grand

rôle. Ainsi, un modèle numérique plus adéquat devra tenir compte d'une distribution de charge d'espace variable dans l'espace et dans le temps. Ce modèle plus réaliste requiert une formulation mathématique beaucoup plus complexe et exige une programmation beaucoup plus sophistiquée et plus exigeante en temps de calcul, il offre par contre plus de flexibilité.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) LOEB L.B. , Electrical Corona, University of California Press, Berkely and Los Angeles, 1965.
- (2) ARAINY A.A. , The effects of Rain on Electromagnetic Characteristics of Corona, M. A. Sc. Thesis, University of Toronto, Toronto, Canada, 1977.
- (3) JANISCHEWSKYJ W. , ARAINY A.A. , Corona Characteristics of Simulated Rain, IEEE PES Winter meeting, pp. 1-10, 1980.
- (4) SIGMOND R.S. , GOLDMAN M. , Corona Discharge Physics and Applications, Journées d'études Les Arcs, France, p. 38, 1981
- (5) GARY C. , MOREAU M. , L'effet de couronne en tension alternatives, Edition Eyrolles, Paris, pp. 283-302, 1976.
- (6) EL-DEBIEKY S. , KHALIFA M. , Calculating the Corona Pulses Characteristics and its Radio Interference, IEEE Trans. on PAS, Vol. 90, No. 1, p. 165, Jan/Fev, 1971.
- (7) BOULET L. , et al. , Environmental Studies of Radio Interference from Conductors and Hardwares, CIGRE, papier No. 408, Paris, France, pp 1-30, Juin 1966.
- (8) JUETTE G.W. , Evaluation of Television Interference from High-Voltage Transmission Lines, IEEE Trans. on PAS, Vol. 91, No. 3, pp. 865-873, Mai/Juin 1972.
- (9) DILLARD E.W. , Discussion on "Transmission Line Vibration due to Sleet" by J.P. Den Hartog, AIEE Trans. pp. 1082-1083, Déc. 1932.
- (10) NEWELL H.H. , LIAD T.W. , WARBURTON F.W. , Corona and RI Caused by Particules on or Near EHV Conductors: II- Foul Weather, IEEE Trans. Power App. & Syst., Vol. PAS-87, No. 4, pp. 911-927, Avril 1968.

- (11) EDWARDS A.T., Conductor Galloping, *Electra*, Vol. 12, pp. 31-48, 1970.
- (12) LEMANZYK G.M., MORRIS P.M., WARDLAW R.L., Corona- Induced Vibration of High Voltage Conductor, Proc. 5th Can. Conf. App. Mech., pp. 237-238. Fredericton N.B., Mai 1975.
- (13) YOSHIDA S., MATSUBAYASHI Y., Corona Vibration and Galloping of Transmission Line, Jour. of Sumitomo Elect., pp. 74-83, Mars 1958.
- (14) SHAH K.S., MORGAN J.D., Analytical Study of High Voltage Transmission Line Oscillations Induced by Electrostatic Forces, IEEE PES Winter Power Meeting, papier No. A-78, pp. 168-167, New-York, Février 1978.
- (15) ADACHI T., PHAN L.C., A Laboratory Study of Corona- induced Vibration of High-Voltage Smooth Aluminium Conductors in a Mass-Spring Configuration, J. Electrostatique, Vol. 9, pp. 273-288, 1981.
- (16) PHAN L.C., ADACHI T., ALLAIRE M.A., Experimental Investigations of Corona-Induced Vibration on High Voltage Conductors with Different Types of Supports, IEEE Trans. on Power App. & Syst., Vol. PAS-100, No. 4, pp. 1975-1984, 1981.
- (17) PHAN L.C., ALLAIRE M.A., Effects of Atmospheric Parameters upon Corona-Induced Vibration of High Voltage Conductors, 4th Inter. Sym. on H.V. Eng., Athens, papier NO. 45.09, pp. 1-4, Sept. 1983.
- (18) FARZANEH M., PHAN L.C., Vibration of High Voltage Conductors Induced by Corona from Water Drops or Hanging Metal Points, IEEE Trans. PAS-103, No. 9, Sept. 1984.
- (19) PHAN L.C., FARZANEH M., ALLAIRE M.A., Effect of Traverse Wind upon the Corona-Induced Vibration of High Voltage Conductors, Japan-VS Science seminar on detection and control of electric field and space charge in electrical environmental problems, Fukuoka, Japan, pp. 133 - 140,

Oct. 1984.

- (20) FARZANEH M., PHAN L.C., AI Bui, On the Role of the Space Charge Produced by Hanging Water Drops in the Mechanism of the Corona-Induced Vibration of H.V. Conductor, J. of electrostatics, Vol. 17, pp. 235-244, 1985.
- (21) FARZANEH Masoud, Contribution à l'étude des mécanismes de vibrations induites par effet de couronne, Thèse de doctorat d'état ès Sciences Physiques, présentée à l'Université Paul Sabatier Toulouse, le 23 juin 1986.
- (22) SHIMIZU Noriyuki, Treeing Phenomena of Polymeric Materials at Low Temperature, Faculty of Engineering, Nagoya University, chapitre 3, 1979.
- (23) VERESHCHAGIN I.P., GOLOVIN G.T., LITVINOV V.E., ARTAMONOV A.F., Numerical Method of Field Calculation at Unipolar Corona Discharge, Moscow Power Engineering Institute, URSS, pp. 107-109.
- (24) SINGER H., STEINBIGLER H., WEISS P., A Charge Simulation Method for the Calculation of High Voltage Fields, IEEE PAS-93, pp. 1160-1168, 1974.
- (25) ABOU-SEADA M.S., MASSER E., Digital Computer Calculation of the Electric Potential and Field of a Rod Gap, IEEE Proc., Vol. 56, pp. 813-820, 1968.
- (26) IRAVANI M.R., RAGHUVeer M.R., Accurate Field Solution in the Entire Interelectrode Space of a Rod-Plane Gap Using Optimized Charge Simulation, IEEE Trans. Vol. EI-17, pp. 333-337, 1982.
- (27) MISAKI T., et al., Computation of Three Dimensional Electric Field Problems by a Surface Charge Method and its Application to Optimum Insulator Design, IEEE Trans. PAS-101, Vol. 3, pp. 627-634, 1982.
- (28) OKUBO H., et al., Electric Field Analysis by Combination Method, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-101, No. 10, pp. 4039-4048, Oct. 1982.

- (29) GAKWAYA A. , FARZANEH M. , Modelling and Simulation of a Space Charge in the Vicinity of a H.V. Conductor, presented at 16th annual conference on Modelling and Simulation, Univ. of Pittsburg, Avril 1985.
- (30) JANISCHEWSKYJ W. , GELA G. , Finite Element Solution for Electric Field of Coronating D.C. Transmission Lines, IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-19, No. 3, pp. 1000-1012, 1979.
- (31) MCDONALD B.H. , WEXLER A. , Finite Element Solution of Unbounded Field Problems, IEEE Trans. Vol. MTT-20, pp. 841-847, 1972.
- (32) LEAN M.H. , FRIEDMAN M. , WEXLER A. , Application of the Boundary Element Method in Electrical Engineering Problems, chap. 9 in Developments in Boundary Element Method I.P.K. Banerjee, R. Butterfield (eds.) Applied Science Publishers, London, 1979.
- (33) ADACHI Takayoshi , The Analysis of Ionic Wind for the Model Electrostatic Precipitator, Faculty of engineering, Yamaguchi University, Japan, pp. 300-310, 1973.
- (34) ALLEN N.L. , TEISSEYRE Y. , BALLEREAU P. , GOLDMAN M. , Electrical Wind and Ionic Species Formed by Point-Plane Corona, congrès I.E.E., Edimbourg, pp. 150-152, septembre 1980.
- (35) BALLEREAU Patrick, Etude du vent électrique, contribution à l'étude et à la réalisation d'un détecteur de pollution, Université Paris-sud, Centre d'Orsay, p. 101, 1980.
- (36) LAWTON J. , MAYO P.J. , Ionic Winds with Restricted Entrainement and a Gauze Electrode, Combustion and flame 17, pp. 243-252, 1971.
- (37) ROBINSON M. , Movement of Air in the Electric Wind of the Corona Discharge, AIEE, pp. 143-150, 1961.
- (38) THANH L.C. , Similitude between Ionic Wind. Discharge Pattern and Corona Current, Electron ETT, Vol. 15, No. 2, pp. 57-58, 1979.

- (39) VERESHCHAGIN I.P., ZHUKOV V.A., Electric Wind in a System of Electrodes Corona Needle-Plane, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Energetica; Transport*, Vol. 18, No. 2, pp. 108-116, 1980.
- (40) SHAMES I.H., Mechanics of Fluids, McGraw Hill Book Company, New-York, p. 692, 1982.
- (41) KIND Dieter, An Introduction to High-Voltage Experimental Technique, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, p. 212, 1978.
- (42) CALDWELL J., Boundary Element Method, Proc. of 3rd lit. seminar, Irvine California, pp. 504-507, 1981.
- (43) GAKWAYA A., Méthode des éléments finis de frontière en mécanique des milieux continus: traitements numériques et techniques de programmation, Rap. scient. no 84-07-01, GRIEA, UQAC, p.138, 1984.
- (44) BREBBIA C.A., TELLES J.C.F., WROBEL L.C., Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, New-York, p. 464, 1984.
- (45) DHATT G., TOUZOT G., Une présentation de la méthode des éléments finis, Maloine, Paris, 1981.
- (46) BREBBIA C.A., WALKER S., Boundary Element Techniques in Engineering, Newnes-Butterworths, London, chapitre 2.
- (47) LIGGETT James A., LIU Philip L-F, The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow, George Allen & Unwin, London, 1983.
- (48) SIMONYI K., Foundations of Electrical Engineering, Pergamon Press, New-York, p. 848, 1963.
- (49) BUSSON A., Lois générales de l'électrotechnique, tome 1, Masson et cie, Paris, p. 433, 1962.

ANNEXE 1

Formulation par équation intégrale directe⁽⁴⁴⁾

Nous cherchons à exprimer une solution pour l'équation de Poisson dans un domaine V à l'intérieur duquel il existe une source de charge:

$$\nabla^2 \phi(\underline{Y}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = b(\underline{Y}) \quad (A1.1)$$

avec les conditions frontières suivantes (figure A1.1):

$$\phi(\underline{Y}) = g(\underline{Y}) \quad \text{sur la partie } S' \text{ de la frontière } S \text{ de } V$$

$$\frac{\partial \phi(\underline{Y})}{\partial n} = \frac{q(\underline{Y})}{\varepsilon_0} = h(\underline{Y}) \quad \text{sur } S'' \text{ de } S, (S=S'+S'') \quad (A1.2)$$

où n est la normale unitaire de la surface S pointant vers l'extérieur. $g(\underline{Y})$ et $h(\underline{Y})$ sont des valeurs connues. Nous utilisons la méthode des résidus pondérés pour transformer l'équation (A1.1) en équation intégrale équivalente.

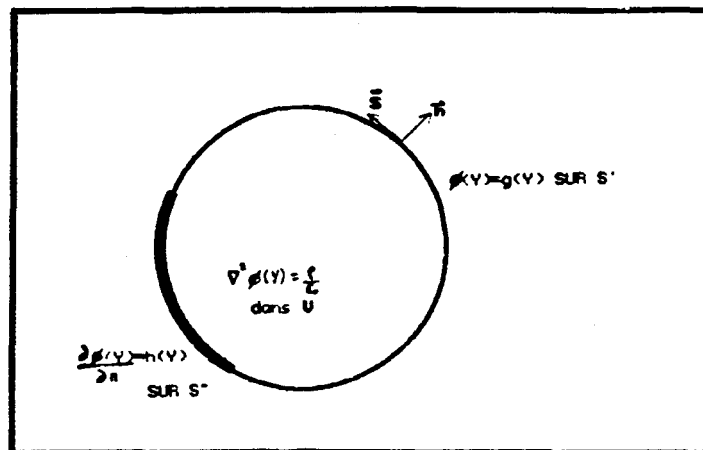


Figure A1.1: Description du domaine V

Nous pouvons écrire l'énoncé de la méthode des résidus pondérés

suisant:

$$\int_V (\nabla^2 \phi(\underline{Y}) - b(\underline{Y})) G(\xi, \underline{Y}) dV_y = \int_{S_{II}} \left[\frac{\partial \phi(\underline{Y})}{\partial n} - h(\underline{Y}) \right] G(\xi, \underline{Y}) dS_y \\ - \int_{S_I} [\phi(\underline{Y}) - g(\underline{Y})] \frac{\partial G(\xi, \underline{Y})}{\partial n} dS_y, \quad (A1.3)$$

$$\xi \in V$$

où $G(\xi, \underline{Y})$ est la solution fondamentale de l'équation de Laplace et correspond à la fonction de Green pour un espace infini. À deux dimensions nous avons:

$$G(\xi, \underline{Y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r(\xi, \underline{Y})} \right) \quad (A1.4)$$

L'intégration par parties de l'équation (A1.3) donne:

$$\int_V \frac{\partial \phi(\underline{Y})}{\partial n} \frac{\partial G(\xi, \underline{Y})}{\partial n} dV_y - \int_V b(\underline{Y}) G(\xi, \underline{Y}) dV_y = \\ \int_{S_I} \frac{\partial \phi(\underline{Y})}{\partial n} G(\xi, \underline{Y}) dS_y + \int_{S_{II}} h(\underline{Y}) G(\xi, \underline{Y}) dS_y \quad (A1.5) \\ + \int_{S_I} [\phi(\underline{Y}) - g(\underline{Y})] \frac{\partial G(\xi, \underline{Y})}{\partial n} dS_y$$

En intégrant par parties une seconde fois on trouve:

$$\int_V \nabla^2 G(\xi, \underline{Y}) \phi(\underline{Y}) dV_y + \int_V b(\underline{Y}) G(\xi, \underline{Y}) dV_y = \\ - \int_{S_I} \frac{\partial \phi(\underline{Y})}{\partial n} G(\xi, \underline{Y}) dS_y - \int_{S_{II}} h(\underline{Y}) G(\xi, \underline{Y}) dS_y \quad (A1.6) \\ + \int_{S_{II}} \phi(\underline{Y}) \frac{\partial G(\xi, \underline{Y})}{\partial n} dS_y + \int_{S_I} g(\underline{Y}) \frac{\partial G(\xi, \underline{Y})}{\partial n} dS_y$$

Sous forme générale on a:

$$\int_V \nabla^2 G(\xi, \underline{Y}) \phi(\underline{Y}) dV_y + \int_V b(\underline{Y}) G(\xi, \underline{Y}) dV_y = \\ - \int_S \frac{\partial \phi(\underline{Y})}{\partial n} G(\xi, \underline{Y}) dS_y + \int_S \phi(\underline{Y}) \frac{\partial G(\xi, \underline{Y})}{\partial n} dS_y \quad (A1.7)$$

Puisque $G(\xi, \underline{Y})$ est la solution fondamentale de l'équation de Laplace, alors:

$$\nabla^2 G(\xi, \underline{Y}) = -\alpha \Delta(\xi, \underline{Y}) \quad (\text{A1.8})$$

où $\alpha = 1$ pour les problèmes à deux dimensions, et la fonction delta de Dirac $\Delta(\xi, \underline{Y})$ a les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta(\xi, \underline{Y}) &= 0 && \text{pour } \xi \neq \underline{Y} \\ \Delta(\xi, \underline{Y}) &= \infty && \text{pour } \xi = \underline{Y} \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

et:

$$\int_V \phi(\underline{Y}) \Delta(\xi, \underline{Y}) dV_y = \phi(\xi) \quad (\text{A1.10})$$

En substituant l'équation (A1.8) dans l'équation (A1.7) on obtient:

$$\begin{aligned} \phi(\xi) + \int_S \phi(\underline{Y}) \frac{\partial G(\xi, \underline{Y})}{\partial n} dS_y + \int_V b(\underline{Y}) G(\xi, \underline{Y}) dV_y = \\ \int_S \frac{\partial \phi(\underline{Y})}{\partial n} G(\xi, \underline{Y}) dS_y \end{aligned} \quad (\text{A1.11})$$

Lorsque $\xi \rightarrow \underline{X} \in S$ (A1.11) devient:

$$\begin{aligned} C(\underline{X}) \phi(\underline{X}) + \int_S \phi(\underline{Y}) \frac{\partial G(\underline{X}, \underline{Y})}{\partial n} dS_y + \int_V b(\underline{Y}) G(\underline{X}, \underline{Y}) dV_y = \\ \int_S \frac{\partial \phi(\underline{Y})}{\partial n} G(\underline{X}, \underline{Y}) dS_y \end{aligned} \quad (\text{A1.12})$$

où $C(\underline{X})$ est une fonction caractéristique de la frontière S au point \underline{X} par rapport à l'opérateur de Laplace.

ANNEXE 2

Liste des sous-programmes de calculs

```

1          SUBROUTINE EXLMAT(VCORB,KDLNC,KKODE,VCL,KLOCE,VCORE,KNE,VPRNE,
2          1          VFREE,VTH,VUG,VKGB,VFGB)
3      C *****
4      C *
5      C * EXECUTION DU BLOC 'LMAT'
6      C * CALCUL DES COEFFICIENTS DES MATRICES VKGB , VFGB , TVH ET VFGB
7      C * GLOBALES OBTENUES PAR ASSEMBLAGE DIRECT DES VECTEURS VTH , VUG
8      C * ET VFG CALCULEES POUR CHAQUE NOEUD GLOBAL DU SYSTEME
9      C *
10     C *****
11     C
12     C -----
13     C I I
14     C I LA SIGNIFICATION DES VARIABLES NON PRESENTEES CI-DESSOUS I
15     C I EST DONNEE DANS LA REFERENCE "UNE PRESENTATION DE LA ME- I
16     C I THODE DES ELEMENTS FINIS" DE DHATT ET TOUZOT (REF.45) OU I
17     C I DANS LE RAPPORT TECHNIQUE DE GAKWAYA PRESENTE AU GRIEA I
18     C I (REF.43) I
19     C I I
20     C I VCL : TABLE DES CONDITIONS LIMITEES I
21     C I VCORE : COORDONNEES DES NOEUDS I
22     C I XA : COORDONNEES DU NOEUD ACTUEL I
23     C I VTH,VUG : VECTEURS GLOBAUX POUR UN NOEUD I
24     C I ATH,BUG : VECTEURS ELEMENTAIRES I
25     C I VKGB : MATRICE [G] I
26     C I VFGB : VECTEUR DES POTENTIELS I
27     C I TVH : MATRICE [H-G] I
28     C I VFGC : VECTEUR <F> I
29     C I NNSH : NOMBRE DE NOEUDS SUR LA SURFACE HOMOGENE I
30     C I NNSC : NOMBRE DE NOEUDS SUR LA SURFACE DE LA CHARGE I
31     C I D'ESPACE I
32     C I NESH : NOMBRE D'ELEMENTS SUR LA SURFACE HOMOGENE I
33     C I NELC : NOMBRE D'ELEMENTS SUR LA SURFACE DU CONDUCTEUR I
34     C I I
35     C I ----- I
36     C
37     IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
38     COMMON/COOR/NDIM,NNT,NDLN,NDLT
39     COMMON/ELEM/NELT,NNEL,NTPE,NGRE
40     COMMON/RGDT/IEL,ITPE,ITPE1,IGRE,ILE,ICE,IPRNE,IPREE,INEL
41     COMMON/ES/M,MR,MP,M1,M2
42     COMMON/GAUSQ/NGAUS
43     COMMON/DIMAX/HMAX
44     COMMON/NICH/NNSH,NNSH1,NNSC,NESH,NESH1,NELC
45     DIMENSION VCORB(1),KDLNC(1),KKODE(1),VCL(1),KLOCE(1),VCORE(1),
46     1          KNE(1),VFREE(1),VTH(NDLT),VUG(NDLT),VPRNE(1),
47     2          VKGB(NNT,NNT),VFGB(1),VEGCE(180)
48     DIMENSION TVH(200,200),VFGB(200),VHIE(200),XA(3),ATH(3),BUS(3)
49     DATA ZERO/0.,E0/
50     C -----
51     C
52     C *****
53     C
54     C----- PARAMETRES UTILISES -----
55     C

```

```

56      NNSH=112
57      NNSH1=NNSH+1
58      NNSC=24
59      NESH=56
60      NESH1=NESH+1
61      NELC=48
62      INEL=3
63      ICODE = 0
64      C
65      C-----  LECTURE DES INFORMATIONS NECESSAIRES  -----
66      C
67      IF(M1.EQ.0) M1=MR
68      IF(M2.EQ.0) M2=ME
69      READ(M1,1000) IVAR,PRIN,HMAX
70      1000      FORMAT(I5,2F10.0)
71      C
72      IF(M.GE.0) WRITE(MP,1010) HMAX,PRIN,IVAR
73      1010      FORMAT(//3X,'DIMENSION MAXIMUM DU DOMAINE=',E12.5/,
74      1          10X,'PRECISION D INTEGRATION DESIRE PRIN = ',E12.5/
75      2          ,10X,'INTEGRATION NUM. FIXE DU VARIABLE IVAR=',I5,/)
76      C
77      C-----  BOUCLE SUR TOUS LES NOEUDS  -----
78      C
79      DO 200 IN=1,NNT
80      I1= (IN-1)*NDIM+1
81      IC3= NDIM*IN
82      C
83      C-----  EXTRAIRE COORD. GLOBALES DU NOEUD IN DE LA TABLE VCOORDS  -----
84      C
85      DO 110 I=I1,IC3
86      I3= I-(I1-1)
87      XA(I3)= VCOORDS(I)
88      110      CONTINUE
89      C
90      IF(M.GE.3) WRITE(MP,1020)IN,XA
91      1020      FORMAT(/// NOEUD GLOBALE IN=',I5,2X,'COORD. GLOBALES'//20X,3E12.5)
92      C
93      C-----  POSITIONNER LE FICHIER DES ELEMENTS (M2) A SON DEBUT  -----
94      C
95      REWIND M2
96      C
97      C-----  BOUCLE SUR TOUS LES ELEMENTS  -----
98      C
99      DO 170 IEM=1,NELT
100     C
101     C-----  LIRE SUR LE FICHIER ME LES DONNEES RELATIVES  -----
102     C-----  A L ELEMENT CONSIDERE  -----
103     C-----  LIRE UN ELEMENT  -----
104     C
105     CALL ROBLEM(M2,XNODE,VCOORDS,VPRNE,VPREE,XNE,VECBE,VNIE)
106     C
107     C-----  VERIFIER SI LE NOEUD IN APPARTIENT A L ELEMENT IEL  -----
108     C
109     DO 120 IJ=1,INEL
110     KONEC=XNE(IJ)

```

```

111         IF(IN.EQ.KONEC) GO TO 130
112     120     CONTINUE
113     C
114     C----- CAS NON SINGULIER -----
115     C
116         CALL STNS2(IN,XA,VCORE,VNIE,VECSE,ATH,BUG)
117         JCOD=0
118         GO TO 140
119     C
120     C----- CAS SINGULIER -----
121     C
122     130     CALL STCSD(IN,XA,VCORE,VFREE,KNE,KLOCE,ATH,BUG,VNIE,VECSE,ICODE)
123         JCOD=1
124     140     IF(IEM.GT.1)GOTO 150
125     C
126     C----- EVALUATION DU VECTEUR (f) -----
127     C
128         IF(IN.GT.NNSH) CALL FVOL(IN,XA,VFG)
129     C
130     C----- PLACER LES COEFFICIENTS DANS MATRICES VTH ET VUG -----
131     C
132     150     IF(ICODE.EQ.5)RETURN
133         CONTINUE
134         DO 160 IG=1,INEL
135         KONEC=KNE(IG)
136         VTH(KONEC)=VTH(KONEC)+ATH(IG)
137         VUG(KONEC)=VUG(KONEC)+BUG(IG)
138     160     CONTINUE
139     C
140     C----- FIN BOUCLE SUR TOUS LES ELEMENTS -----
141     C
142     170     CONTINUE
143     C
144     C----- EVALUATION DU TERME DIAGONAL -----
145     C
146         VTH(IN)=VTH(IN)+0.5D0
147     C
148     C----- FORMATION DE LA MATRICE GLOBALE VKGB, DU VECTEUR SECOND -----
149     C----- MEMBRE VFGB, DE LA MATRICE TVH ET DU VECTEUR VFBC -----
150     C
151         DO 180 I=1,NDLT
152         VKGB(IN,I)=VUG(I)
153         VFGB(IN)=VCL(IN)
154         TVH(IN,I)=VTH(I)
155     180     CONTINUE
156         VFBC(IN)=VFG
157     C
158     C----- REMISE A ZERO -----
159     C
160         DO 190 III=1,NDLT
161         VTH(III)=ZERO
162         VUG(III)=ZERO
163     190     CONTINUE
164         VFG=ZERO
165     C

```



```
166 C----- FIN BOUCLE SUR TOUS LES NOEUDS -----
167 C
168 200 CONTINUE
169 C
170 C----- CALCUL DU POTENTIEL SUR LA SURFACE S3 DE LA CHARGE D'ESPACE ----
171 C
172 CALL POTS3(TVH,VFGC,VFGB)
173 C
174 C----- ON PEUT MAINTENANT RESOUDRE VKGB*Q=VFGC -----
175 C----- POUR TROUVER LES INCONNUES Q -----
176 C
177 RETURN
178 END
```

```

1      SUBROUTINE FVOL(IN,XA,VFG)
2      C *****
3      C *
4      C * CALCUL DE L'INFLUENCE DES CELLULES INTERIEURES SUR LES POINTS *
5      C * DE LA FRONTIERE DE LA CHARGE D'ESPACE
6      C *
7      C * EVALUATION DU VECTEUR {F}
8      C *
9      C *****
10     C
11     C
12     C I I I
13     C I IN : NUMERO DU NOEUD ACTUEL I
14     C I XA : COORDONNEES DU NOEUD ACTUEL I
15     C I VFG : VECTEUR {F} I
16     C I DCC : DENSITE DE CHARGE A L'INTERIEUR DE LA I
17     C I DE LA CHARGE D'ESPACE I
18     C I DIST : DISTANCE DE LA CHARGE D'ESPACE A LA POINTE I
19     C I NDN : NOMBRE DE NOEUDS SUR LA CHARGE D'ESPACE I
20     C I VALX,VALY : COORDONNEES (X,Y) DES NOEUDS DES ELEMENTS I
21     C I NDC : NOMBRE DE CELLULES DANS LA CHARGE D'ESPACE I
22     C I NDCC1,... : NUMERO DES NOEUDS AU SOMMET DES CELLULES I
23     C I W : POIDS D'INTEGRATION I
24     C I FL1,... : ABCISSES DES POINTS D'INTEGRATION I
25     C I CYR : COORDONNEES DES POINTS D'INTEGRATION I
26     C I RA : DISTANCE DU POINT D'INTEGRATION AU NOEUD I
27     C I AU NOEUD DE SURFACE I
28     C I CNOY : NOYAU I
29     C I AIR : AIRE DE LA CELLULE I
30     C I I
31     C I I
32     C
33     C IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
34     C COMMON/MIKE/DCC,DIST
35     C DIMENSION NDN(50),VALX(50),VALY(50)
36     C DIMENSION NDC(50),NDCC1(50),NDCC2(50),NDCC3(50)
37     C DIMENSION W(3),FL1(3),FL2(3),FL3(3),CYR(2),XA(3)
38     C DATA W/.33333333D0,.33333333D0,.33333333D0/
39     C DATA FL1/.666666667D0,.1666666667D0,.1666666667D0/
40     C DATA FL2/.1666666667D0,.6666666667D0,.1666666667D0/
41     C DATA FL3/.1666666667D0,.1666666667D0,.6666666667D0/
42     C DATA DENI/0.5D0/
43     C *****
44     C
45     C *****
46     C
47     C----- LECTURE DES CARTES DE DONNEES -----
48     C
49     C DATA ZERO/0.0D0/,UN/1.0D0/,SEUPI/6.2831853D0/,EFSI/5.854E-12/
50     C READ(27,100,END=140)NDC,DIST
51     C 100 FORMAT(I5,E12.5)
52     C READ(27,110)((NDN(I),VALX(I),VALY(I)),I=1,NDN)
53     C 110 FORMAT(I5,2F20.9)
54     C READ(28,120)NCS,DCC
55     C 120 FORMAT(I5,E12.5)

```

```

56         READ(28,130)((NDC(I),NDCC1(I),NDCC2(I),NDCC3(I)),I=1,NCS)
57     130         FORMAT(4I5)
58     C
59     C-----  CALCUL DE L'INTEGRALE  -----
60     C
61     140         DO 160 J=1,NCS
62     C
63     C-----  INITIALISATION  -----
64     C
65         CNOY=ZERO
66     C
67     C-----  AIRE DE LA CELLULE  -----
68     C
69         AIR1=(VALX(NDCC1(J))*VALY(NDCC2(J))-VALY(NDCC1(J))*VALX(NDCC2(J)))
70         AIR2=- (VALX(NDCC1(J))*VALY(NDCC3(J))-VALY(NDCC1(J))*VALX(NDCC3(J)))
71         AIR3=(VALX(NDCC2(J))*VALY(NDCC3(J))-VALY(NDCC2(J))*VALX(NDCC3(J)))
72         AIR=DEMI*(AIR1+AIR2+AIR3)
73         AIR=OABS(AIR)
74     C
75     C-----  COORDONNEES DES POINTS D'INTEGRATION  -----
76     C
77         DO 150 K=1,3
78         CYR(1)=VALX(NDCC1(J))*FL1(K)+VALX(NDCC2(J))*FL2(K)
79         CYR(1)=CYR(1)+VALX(NDCC3(J))*FL3(K)
80         CYR(2)=VALY(NDCC1(J))*FL1(K)+VALY(NDCC2(J))*FL2(K)
81         CYR(2)=CYR(2)+VALY(NDCC3(J))*FL3(K)
82     C
83     C-----  NOYAU  -----
84     C
85         RA=(XA(1)-CYR(1))**2+(XA(2)-CYR(2))**2
86         RA=DSQRT(RA)
87         CNOY=CNOY+DLOG(UN/RA)*AIR*W(K)/(DEUPI*EPSI)
88     150         CONTINUE
89         VFG=VFG+CNOY
90     160         CONTINUE
91     C
92     C-----  MULTIPLICATION PAR LA CHARGE  -----
93     C
94         VFG=VFG*DCC
95     C-----  RETOUR DE VFG DANS EXLMAT  -----
96     C
97         RETURN
98         END

```

```

1      SUBROUTINE POTS3(TVH,VFGC,VFGB)
2      C *****
3      C *
4      C * EVALUATION DU POTENTIEL DE LA SURFACE S3 DE LA CHARGE D'ESPACE *
5      C *
6      C *
7      C *****
8      C
9      C
10     C
11     C I TVH,TKVH : MATRICE [H-G'] I
12     C I VFGC,TVFGC : VECTEUR {F} I
13     C I VFGB : VECTEUR REPONSE I
14     C I HVFGC : RESULTAT DE [H-G']/{F} I
15     C I POTXOY : POTENTIEL MOYEN I
16     C I I
17     C I-----I
18     C
19     IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
20     DIMENSION TVH(200,200),TKVH(24,24),VFGC(200),VFGB(1),HVFGC(24)
21     DIMENSION TKK(24),TVFGC(24)
22     COMMON/MICH/NNSH,NNSH1,NNSC,NESH,NESH1
23     COMMON/COOR/NNT
24     DATA EPSI/B.854D-12/,UN/1.0D0/
25     DATA EPS/1.0D-20/,ZERO/0.0D0/
26     C*****
27     C
28     C*****
29     C
30     C----- PREPARATION DES MATRICES -----
31     C
32     INDIC=-1
33     IN1=0
34     DO 20 IM1=NNSH1,NNT
35     IN2=0
36     DO 10 IM2=NNSH1,NNT
37     IN2=IN2+1
38     10 TKVH(IN1,IN2)=TVH(IM1,IM2)
39     IN1=IN1+1
40     20 TVFGC(IN1)=VFGC(IM1)
41     LM=NNT-NNSH
42     C
43     C----- INVERSION DE [H-G'] -----
44     C
45     CALL INVERS(LM,TKVH,TKK,EPS,INDIC,LM)
46     C
47     C----- MULTIPLICATION DE LA MATRICE INVERSEE TKVH -----
48     C----- PAR LE VECTEUR VC -----
49     C
50     C----- LE RESULTAT EST DANS HVFGC -----
51     C
52     CALL MATMPY(TKVH,TVFGC,HVFGC,LM,LM,1)
53     IN1=0
54     POTXOY=ZERO
55     DO 30 I=NNSH1,NNT

```

```

56          IN1=IN1+1
57          C
58          C-----  FORMATION DU VECTEUR REPONSE FINAL VFGB  -----
59          C
60          POTMOY=POTMOY+HVFGC(IN1)/(NNT-NNSH1)
61          30          CONTINUE
62          DO I=NNSH1,NNT
63          VFGB(I)=-POTMOY
64          END DO
65          WRITE(17,1000)((VKGB(I,J),J=1,NNT),I=1,NNT)
66          1000          FORMAT(1X,6E12.5)
67          C
68          C-----  RETOUR DU VECTEUR REPONSE VFGB DANS EXLMAT  -----
69          C
70          RETURN
71          END

```

```

1      SUBROUTINE EXCINT(VCL,KLOCE,VCORE,KNE,VFREE,VFGB)
2      C *****
3      C *
4      C * EVALUATION DU CHAMP ELECTRIQUE AUX POINTS SELECTIONNES
5      C * DANS LA REGION HOMOGENE V1
6      C *
7      C *****
8      C
9      C
10     C I
11     C I VCL          : TABLE DES CONDITIONS LIMITEES
12     C I VFGB        : VECTEUR DES CHARGES
13     C I CHAMP       : INTENSITE DU CHAMP ELECTRIQUE
14     C I CHAMPX,CHAMPY : COMPOSANTES EN X ET Y DU CHAMP
15     C I              : ELECTRIQUE
16     C I GX,GY       : NOYAUX
17     C I RA          : DISTANCE DU POINT SELECTIONNE AU POINT
18     C I              : D'INTEGRATION
19     C I YP          : COORDONNEES DU POINT D'INTEGRATION
20     C I AT,BU,ATL,BUL : VECTEURS ELEMENTAIRES
21     C I NINT        : NOMBRE DE POINTS SELECTIONNES
22     C I CHARNOD     : CHARGE AU NOEUD
23     C I
24     C I
25     C
26     C -----
27     C IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
28     C COMMON/COOR/NDIM,FAC(3)
29     C COMMON/ELEM/NELT,NNEL,NTPE,NGRE,ME
30     C COMMON/RODT/IEL,IBLE,INEL
31     C COMMON/ES/M,MR,MP,M1,M2
32     C DIMENSION X1(3),X2(3),FAC1(3),YP(3)
33     C DIMENSION VCL(1),VFGB(1),KLOCE(1),VCORE(1),KNE(1),VFREE(1),
34     C 1 VFREE(1),VECOE(180),YA(3),XIN(3),TANV(9),COSD(3)
35     C DIMENSION CHAMP(100),CHAMPY(250),CHAMPX(250)
36     C DIMENSION CHARNOD(24),ATL(24),BUL(24),AT(24),BU(24)
37     C DIMENSION VCORI(50),VNN(8),VNI(200)
38     C EQUIVALENCE (COSD(1),TANV(7))
39     C DATA ZERO/0.00/,UN/1.000/,DEUPI/6.28318530800/,EPSI/8.8540-12/
40     C *****
41     C
42     C
43     C IF(M1.EQ.0) M1=MR
44     C IF(M2.EQ.0) M2=ME
45     C
46     C ----- LIRE LES COORDONNEES DES POINTS INTERIEURS -----
47     C
48     C READ(M1,1000)IN,FAC1
49     C 1000 FORMAT(15,3F10.0)
50     C
51     C ----- OPTION PAR DEFALT -----
52     C
53     C IF(IN.GT.0) NINT=IN
54     C DO 10 I=1,3
55     C 10 IF(FAC1(I).NE.ZERO) FAC(I)=FAC1(I)

```

```

56 C
57 C----- IMPRESSION DES PARAMETRES DU BLOC -----
58 C
59 WRITE(MP,1010) M,NINT,NDIM,FAC
60 1010 FORMAT(/// LECTURE DES NOEUDS INTERIEURS (M=',I2,')'/' ',28('=')/
61 1 15X,'NOMBRE MAXIMUM DE NOEUDS INT. (NINT)=' ,IS/
62 2 15X,'NOMBRE DE DIM. DU PROBLEME (NDIM)=' ,IS/
63 33 15X,'#FACETE BR DE C BEELEEEESS000BB2. (#FCS)=',28(225))
64 C
65 C----- INITIALISATION DES COORDONNEES -----
66 C
67 I1=(NINT-1)*NDIM+1
68 DO 10 IA=1,I1,NDIM
69 10 VCORI(IA)=SPECL
70 C
71 C----- LECTURE DES CARTE DE NOEUDS -----
72 C
73 IF(M.ST.0) WRITE(MP,1020)
74 1020 FORMAT(/// CARTES DES NOEUDS INTERIEURS//)
75 20 READ(M1,1030) IN1,X1,IN2,X2,INCR
76 1030 FORMAT(2(I5,3F20.9),I5)
77 IF(M.GT.0) WRITE(MP,1040) IN1,X1,IN2,X2,INCR
78 1040 FORMAT('*****',2(I5,3E12.5),I5)
79 IF(IN1.LE.0) GO TO 60
80 C
81 C----- DECODAGE DE LA CARTE -----
82 C
83 IF(IN1.GT.NINT) CALL ERREUR(80,IN1,NINT,0)
84 IF(IN2.GT.NINT) CALL ERREUR(81,IN2,NINT,0)
85 IF(IN2.LE.0) IN2=IN1
86 IF(INCR.EQ.0) INCR=1
87 I1=(IN2-IN1)/INCR
88 I2=IN1+I1*INCR
89 IF(I1.EQ.0) I1=1
90 IF(IN2.NE.I2) CALL ERREUR(82,IN2,IN2,0)
91 GOTO 20
92 C
93 C----- IMPRESSION DES COORD. DES NOEUDS INTERIEURS -----
94 C
95 60 IF(M.LT.0) GO TO 80
96 WRITE(MP,1050)
97 1050 FORMAT(/10X,' NOEUD ',5X,' X ',11X,' Y ',11X,' Z '//)
98 I1=1
99 I2=NDIM
100 DO 70 IN=1,NINT
101 WRITE(MP,1060) IN,(VCORI(I),I=I1,I2)
102 1060 FORMAT(10X,I5,3E12.5)
103 I1=I1+NDIM
104 70 I2=I2+NDIM
105 80 CONTINUE
106 C
107 C----- CALCULS DU CHAMP ELECTRIQUE AUX POINTS INTERIEURS -----
108 C
109 C----- INITIALISATION -----
110 C

```

```

111          CALL ZEROA(CHAMPX,250)
112          CALL ZEROA(CHAMPY,250)
113          C
114          C----- BOUCLE SUR TOUS LES POINTS -----
115          CC
116          DO 180 IN=1,NINT
117          C
118          C----- COORDONNEES DU POINT SELECTIONNE -----
119          C
120          I1=NDIM*IN-2
121          I2=NDIM*IN-1
122          I3=NDIM*IN
123          XIN(1)=VCORI(I1)
124          XIN(2)=VCORI(I2)
125          XIN(3)=VCORI(I3)
126          C
127          C----- ON CONNAIT LES CHARGES A LA SURFACE -----
128          C----- (POUR CHAQUE ELEMENT DE SURFACE) -----
129          C
130          C----- BOUCLE SUR TOUS LES ELEMENTS -----
131          C
132          REWIND M2
133          DO 170 IEL=1,NELT
134          C
135          C----- LIRE UN ELEMENT -----
136          C
137          CALL ABLEEM(M2,KL0CE,VCORE,VPRNE,VFREE,KNE,VECBE,VNIE)
138          C
139          C----- EXTRAIRE LES CHARGES DE VFGB POUR L'ELEMENT -----
140          C----- CONSIDERE D APRES KLOCE -----
141          C-----
142          DO 100 IA=1,IDLE
143          ID=KLOCE(IA)
144          C
145          C----- EXTRAIRE LES CHARGES -----
146          C
147          100   CHARNOD(IA)=VFGB(ID)
148          C
149          C----- INITIALISATION -----
150          C
151          DO 110 IC=1,IDLE
152          AT(IC)=ZERO
153          SU(IC)=ZERO
154          110   CONTINUE
155          C
156          C----- DEBUT INTEGRATION NUMERIQUE -----
157          C----- (4 P.G. PARTOUT) -----
158          C
159          NCAUC=4
160          IFA=0
161          IFE=IFA/NCAUC
162          C
163          C----- CALCULO LES ABSCISSES ET POIDS DE GAUSS CORRESPONDANT -----
164          C
165          I00=0

```



```

166          IH=0
167      C
168      C----- ROUCLE SUR LES POINTS DE GAUSS -----
169      C
170          DO 150 JA=1,NGAUS
171          IGG=IGG+1
172      C
173      C----- COORD. INTRINSEQUE AU P. DE G. -----
174      C----- COORD. CART. YA, COSINUS DIR., JACOBIEN AU P.G. -----
175      C
176          DO 120 III=1,NDIM
177          K=NDIM-III
178          JN1=NDIM*IGG-K
179          YP(III)=VECGE(JN1)
180      120      COSD(III)=VECGE(IFB+JN1)
181      C
182      C----- CALCULS DES NOYAUX -----
183      C
184          RA1=(XIN(2)-YP(1))
185          RA2=(XIN(3)-YP(2))
186          RA=RA1**2+RA2**2
187          GX=RA1/(RA*DEUPI*EPSI)
188          GY=RA2/(RA*DEUPI*EPSI)
189          IF(IEL.GE.36.AND.IEL.LE.43)G=0.0
190      C
191      C----- NOYAU * FONCTION D'INTERPOLATION * JACOBIEN * POIDS -----
192      C
193          DO 130 JC=1,INEL
194          LE=JC+IH
195          VNN(JC)=VNIE(LE)
196          ATL(JC)=VNN(JC)*GX
197          BUL(JC)=VNN(JC)*GY
198      130      CONTINUE
199          DO 140 JE=1,INEL
200          AT(JE)=ATL(JE)+ATL(JE)
201      140      BU(JE)=BU(JE)+BUL(JE)
202          IH=IH+INEL
203      150      CONTINUE
204      C
205      C----- FIN INTEGRATION SUR UN ELEMENT -----
206      C
207      C----- CHAMP ELECTRIQUE AU POINT IN -----
208      C
209          KINEL=INEL
210          DO 160 JS=1,KINEL
211          CHAMPX(IN)=CHAMPX(IN)+AT(JS)*CHARNOD(JS)
212          CHAMPY(IN)=CHAMPY(IN)+BU(JS)*CHARNOD(JS)
213      160      CONTINUE
214      C
215      C----- FIN INTEGRATION SUR TOUS LES ELEMENTS -----
216      C
217      170      CONTINUE
218      C
219      C----- PASSER AU NOEUD SUIVANT -----
220      C

```

```
221     180     CONTINUE
222     C
223     C-----  IMPRESSIONS DES RESULTATS INTERIEURS  -----
224     C
225           WRITE(MP,1070)
226     1070     FORMAT(1X,72('*')//1X,' SOLUTION INTERIEURE')
227           WRITE(MP,1080)
228     1080     FORMAT(// '** CHAMP ELECTRIQUE INTERIEUR' //)
229     C
230     C-----  INTENSITE DU CHAMP ELECTRIQUE  -----
231     C
232           DO 190 IP=1,NINT
233           CHAMP(IP)=CHAMPX(IP)**2+CHAMPY(IP)**2
234           CHAMP(IP)=DSQRT(CHAMP(IP))
235           WRITE(MP,1090)IP,CHAMP(IP),CHAMPX(IP),CHAMPY(IP)
236     1090     FORMAT(5X,'NOEUD: ',I3,5X,'E= ',E12.5,5X,'EX= ',E12.5,5X,
237     1         'EY= ',E12.5)
238     190     CONTINUE
239           RETURN
240           END
```

```

1      SUBROUTINE EXFINT(VCL,KLOCE,VDCRE,KNE,VPREE,VFGB)
2      C *****
3      C *
4      C * CALCUL DE LA FORCE ELECTROSTATIQUE EN PRESENCE ENTRE *
5      C * LA CHARGE D'ESPACE ET LA POINTE *
6      C *
7      C *****
8      C
9      C
10     C I
11     C I VCL ; TABLE DES CONDITIONS LIMITE I
12     C I VFGB ; VECTEUR DES CHARGES I
13     C I CHAMP ; INTENSITE DU CHAMP ELECTRIQUE I
14     C I CHAMPX,CHAMPY ; COMPOSANTES EN X ET Y DU CHAMP I
15     C I ELECTRIQUE I
16     C I FORCE ; FORCE ELECTROSTATIQUE I
17     C I GX,GY ; NOYAUX I
18     C I RA ; DISTANCE DE LA CHARGE D'ESPACE AU I
19     C I POINT SELECTIONNE SUR LE CONDUCTEUR I
20     C I YP ; COORDONNEES DU POINT D'INTEGRATION I
21     C I AT,BU,ATL,BUL ; VECTEURS ELEMENTAIRES I
22     C I CHARNOD ; CHARGE AU NOEUD I
23     C I CHARG ; CHARGE DE LA CHARGE D'ESPACE I
24     C I
25     C I
26     C
27     IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
28     COMMON/COOR/NDIM
29     COMMON/ELEM/NELE,NNEL,NTPE,NGRE,NE
30     COMMON/ROBT/IDLE,INEL
31     COMMON/ES/M,HR,HP,M1,M2
32     COMMON/MIKE/DCC,DIST
33     COMMON/MICH/NNSH,NNSH1,NNSC,NESH,NESH1,NELC
34     DIMENSION VCL(1),VFGB(1),KLOCE(1),VDCRE(1),KNE(1),VPRNE(1),
35     1 VPREE(1),VEGGE(100),YA(3),YP(3),XIN(3),TANV(9),COSB(3)
36     DIMENSION CHAMP(100),CHARNOD(24),ATL(24),BUL(24),AT(24),BU(24)
37     DIMENSION VDCRE(50),VNN(8),VNIE(200)
38     EQUIVALENCE (COSB(1),TANV(7))
39     DATA ZERO/0.00/,UN/1.000/,DEUPI/6.28318530880/,EPSI/8.8540-12/
40     C *****
41     C
42     C *****
43     C
44     C
45     C ----- CHARGE TOTALE DE LA CHARGE D'ESPACE -----
46     C
47     CHARG=DCC*DEUPI/2.000*(2.00-04)**2
48     C
49     IF(N1,ER,0) M1=HR
50     IF(N2,ER,0) M2=HE
51     C
52     C ----- INITIALISATION -----
53     C
54     CHAMPX=ZERO
55     CHAMPY=ZERO

```

```

56          REWIND M2
57          C
58          C-----  ON CONNAIT LES CHARGES A LA SURFACE  -----
59          C-----  (POUR CHAQUE ELEMENT DE SURFACE)  -----
60          C
61          C-----  BOUCLE SUR TOUS LES ELEMENTS DU CONDUCTEUR  -----
62          C
63          DO 170 IEL=1,NELC
64          C
65          C-----  LIRE UN ELEMENT  -----
66          C
67          CALL RDBLEM(M2,KLOCE,VCORE,VPRNE,VFREE,KNE,VECGE,VNIE)
68          C
69          C-----  EXTRAIRE LES CHARGES DE VFGB POUR L'ELEMENT  -----
70          C-----  CONSIDERE D APRES KLOCE  -----
71          C
72          DO 100 IA=1,IDLE
73          IB=KLOCE(IA)
74          C
75          C-----  EXTRAIRE LES CHARGES  -----
76          C
77          100  CHANOD(IA)=VFGB(IB)
78          C
79          C-----  INITIALISATION  -----
80          C
81          DO 110 IC=1,IDLE
82          AT(IC)=ZERO
83          BU(IC)=ZERO
84          110  CONTINUE
85          C
86          C-----  DEBUT INTEGRATION NUMERIQUE  -----
87          C-----  (4 P.G. PARTOUT)  -----
88          C
89          NGAUS=4
90          IFA=8
91          IFB=IFA*NGAUS
92          C
93          C-----  CALCULS DES ABCISSES ET POIDS DE GAUSS CORRESPONDANT  -----
94          C
95          IGG=0
96          IH=0
97          C
98          C-----  BOUCLE SUR LES POINTS DE GAUSS  -----
99          C
100         DO 150 JA=1,NGAUS
101         IGG=IGG+1
102         C
103         C-----  COORD. INTRINSEQUE AU P. DE G.  -----
104         C-----  COORD. CART. YA, COSINUS DIR., JACOBIE AU P.G.  -----
105         C
106         DO 120 III=1,NDIM
107         K=NDIM-III
108         JM1=NDIM*IGG-K
109         YP(III)=VECGE(JM1)
110         120  COSD(III)=VECGE(IFB+JM1)

```

```

111 C
112 C----- CALCULS DES NOYAUX -----
113 C
114 RA1=(ZERO-YP(1))
115 RA2=(DIST-YP(2))
116 RA=RA1**2+RA2**2
117 GX=RA1/(RA*DEUPI*EPSI)
118 GY=RA2/(RA*DEUPI*EPSI)
119 C
120 C----- NOYAU * FONCTION D'INTERPOLATION * JACOBIEN * POIDS -----
121 C
122 DO 130 JC=1,INEL
123 LE=JC+IH
124 VNN(JC)=VNIE(LE)
125 ATL(JC)=VNN(JC)*GX
126 BUL(JC)=VNN(JC)*GY
127 130 CONTINUE
128 C
129 DO 140 JE=1,INEL
130 AT(JE)=AT(JE)+ATL(JE)
131 140 BU(JE)=BU(JE)+BUL(JE)
132 IH=IH+INEL
133 150 CONTINUE
134 C
135 C----- FIN INTEGRATION SUR UN ELEMENT -----
136 C
137 KINEL=INEL
138 DO 160 JS=1,KINEL
139 C
140 C----- CALCUL DU CHAMP ELECTRIQUE -----
141 C
142 C----- MULTIPLICATION PAR LA CHARGE DU NOEUD -----
143 C
144 CHAMPX=CHAMPX+AT(JS)*CHANGD(JS)
145 CHAMPY=CHAMPY+BU(JS)*CHANGD(JS)
146 160 CONTINUE
147 C
148 C----- FIN INTEGRATION SUR TOUS LES ELEMENTS -----
149 C
150 170 CONTINUE
151 C
152 C----- CALCUL DE LA FORCE ELECTROSTATIQUE -----
153 C
154 C----- MULTIPLICATION DU CHAMP ELECTRIQUE PAR LA VALEUR DE -----
155 C----- LA CHARGE D'ESPACE -----
156 C
157 CHAMP=CHAMPX**2+CHAMPY**2
158 CHAMP=DSQRT(CHAMP)
159 FORCE=CHAMP*CHARG
160 C
161 C----- IMPRESSIONS DES RESULTATS -----
162 C
163 WRITE(NP,1000)
164 1000 FORMAT(1X,72('#')//1X,' SOLUTION '//)
165 WRITE(NP,1010)

```

```
166      1010      FORMAT(/** FORCE ELECTROSTATIQUE/**)
167      WRITE(MP,1020)FORCE
168      1020      FORMAT(5X,'F= ',E12.5)
169      RETURN
170      END
```