

**UNIVERSITÉ DU QUÉBEC**

**MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE**

**par**

**ÉRIC GAGNON**

**MODÉLISATION DE LA TURBULENCE DANS DES  
ÉCOULEMENTS DE PLASMA EN MILIEU INDUSTRIEL**

**24 octobre 1996**



### Mise en garde/Advice

Afin de rendre accessible au plus grand nombre le résultat des travaux de recherche menés par ses étudiants gradués et dans l'esprit des règles qui régissent le dépôt et la diffusion des mémoires et thèses produits dans cette Institution, **l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** est fière de rendre accessible une version complète et gratuite de cette œuvre.

Motivated by a desire to make the results of its graduate students' research accessible to all, and in accordance with the rules governing the acceptance and diffusion of dissertations and theses in this Institution, the **Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** is proud to make a complete version of this work available at no cost to the reader.

L'auteur conserve néanmoins la propriété du droit d'auteur qui protège ce mémoire ou cette thèse. Ni le mémoire ou la thèse ni des extraits substantiels de ceux-ci ne peuvent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

The author retains ownership of the copyright of this dissertation or thesis. Neither the dissertation or thesis, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

## Résumé.

Ce travail de recherche se situe dans le cadre de la modélisation de l'écoulement turbulent d'un jet de gaz plasma dans un four industriel. Le but principal est d'explorer et de comparer diverses approches pour le traitement de la turbulence dans un modèle d'écoulement basé sur les équations de Navier-Stokes compressibles. La comparaison est d'abord et avant tout qualitative et elle est réalisée via des expérimentations numériques.

La modélisation de cet écoulement complexe a pour but final de fournir aux ingénieurs un outil pour améliorer le procédé industriel. Dans ce contexte, il est important de pouvoir optimiser le transfert de chaleur, la génération de poussières, la vitesse de rotation du gaz, etc, en regard de paramètres physiques tels la position de la cheminée et la géométrie de l'enceinte.

La base du modèle est fournie par les équations de Navier-Stokes moyennes ou filtrées. Elles sont traitées par une approche éléments finis et résolues à l'aide d'un solveur pour les systèmes non-linéaires. La fermeture de ces équations est obtenue par deux approches pour la modélisation de la turbulence: soit l'approche écoulement moyen et l'approche simulation des grandes structures. Pour chacune d'elle, on met en œuvre un modèle algébrique et un modèle à une équation différentielle pour l'énergie cinétique turbulente.

Le modèle algébrique s'est avéré relativement efficace. L'ajout d'une équation pour le transport de l'énergie cinétique turbulente a permis de capter l'aspect instationnaire des moments des champs instantanés. L'approche par simulation des grandes structures s'est montrée trop coûteuse pour cet écoulement. Outre la complexité de l'écoulement, la nature fortement instationnaire des simulations a posé des problèmes numériques majeurs.

## **Remerciements.**

Ce mémoire est le résultat de deux années de travail consacrées à l'étude de la modélisation de la turbulence pour un jet de plasma. Je tiens à remercier infiniment le professeur Sylvain Boivin, pour le soutien et l'aide apportés lors de la direction de mon projet de recherche.

Je tiens également à souligner de façon particulière la collaboration précieuse de M. Guy Simard.

Ce travail de recherche a été rendu possible grâce au soutien financier du Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et Génie du Canada.

Finalement, je remercie les membres du Grips et de la Chaire industrielle pour m'avoir fourni l'environnement de travail nécessaire à la réalisation de mon travail.

## Table des matières.

Introduction .....	Page 1
Chapitre 1 - Position du problème .....	Page 3
1.1 Le procédé industriel à l'origine du problème .....	Page 4
1.2 La modélisation de la turbulence dans le four à plasma .....	Page 6
Chapitre 2 - Les équations de Navier-Stokes .....	Page 7
2.1 Forme conservative .....	Page 8
2.2 Tenseur des contraintes .....	Page 9
2.3 Forme non-conservative .....	Page 12
2.4 Équations adimensionnelles .....	Page 13
2.5 Conditions aux limites .....	Page 16
Chapitre 3 - Modélisation de la turbulence .....	Page 18
3.1 Principes de base de la modélisation de la turbulence .....	Page 19
3.2 Approche écoulement moyen .....	Page 23
3.2.1 Modèle algébrique .....	Page 25
3.2.2 Modèle à une équation pour l'énergie cinétique turbulente .....	Page 26
3.3 Approche simulation des grandes structures .....	Page 27
3.3.1 Modèle algébrique .....	Page 29
3.3.2 Modèle à une équation pour l'énergie cinétique turbulente .....	Page 30
3.4 Résumé des modèles de turbulence .....	Page 31
Chapitre 4 - Méthode des éléments finis et mise en œuvre .....	Page 32
4.1 Formulation variationnelle .....	Page 33
4.2 Discrétisation spatiale .....	Page 34
4.3 Discrétisation temporelle .....	Page 36
4.4 Discrétisation temporelle pour l'équation en $k$ .....	Page 37
4.5 Méthode de résolution .....	Page 38
4.6 Maillages adaptatifs .....	Page 39
Chapitre 5 - Présentation et discussion des résultats .....	Page 40
Conclusion .....	Page 46
Références .....	Page 47
Annexe: figure 1 à 13 .....	Page 50

## Principales notations.

$\rho$  : densité  
 $p$  : pression  
 $u$  : vitesse  
 $T$  : température  
 $e$  : énergie interne  
 $E$  : énergie totale  
 $C_p, C_v$  : chaleurs spécifiques  
 $Q$  : énergie calorifique  
 $R$  : tenseur de Reynolds  
 $Re, Pr$  : nombres adimensionnels de Reynolds et de Prandlt  
 $l_m$  : longueur de mélange  
 $\tau$  : tenseur des contraintes visqueuses et de pression  
 $\sigma$  : tenseur des contraintes visqueuses  
 $S$  : tenseur taux de déformation  
 $\sigma_{ij}$  : contrainte tangentielle ou de cisaillement  
 $\sigma_{ii}$  : contrainte normale  
 $\mu, \mu^*$  : viscosités  
 $\kappa, \kappa^*$  : coefficients de transfert de chaleur  
 $k$  : énergie cinétique turbulente  
 $h$  : dimension caractéristique des éléments  
 $\Gamma_F, \Gamma_1, \Gamma_2$  : frontières: sur la paroi, à l'entrée, à la sortie  
 $\Omega$  : domaine de calcul  
 $\langle \cdot \rangle$  : opérateur de moyenne statistique  
 $\ll \cdot \gg$  : opérateur de moyenne statistique pondérée par la masse  
 $\otimes$  : produit tensoriel  $[(u \otimes v)_{ij} = u_i v_j]$

Indices :

, : dérivée par rapport à  
t : turbulent  
l : laminaire  
r : référence

La notation  $\bar{\phi}$  est utilisée de manière générique afin de représenter la partie moyenne ou filtrée d'une variable  $\phi$ . On utilisera plutôt  $\tilde{\phi}$  lorsqu'elle est pondérée par la masse.

## Introduction.

L'évolution rapide des ordinateurs et des techniques de simulation numérique a transformé le travail de l'ingénieur. C'est le cas pour l'étude des procédés industriels complexes faisant intervenir des fluides. Des outils logiciels tels Patran, Fluent, Phoenic, etc, sont d'utilisation courante. Ces outils permettent de résoudre, dans la mémoire d'un ordinateur, des problèmes autrefois hors d'atteinte. Cependant, ils nous ont aussi amenés à tenir compte de problèmes autrefois négligés étant totalement inabordables. Parmi ces problèmes, il y a la turbulence et ses interactions avec les phénomènes physiques tels le transfert de chaleur, le rayonnement dans un milieu poussiéreux ou encore les phases d'un mélange. Notre compréhension des phénomènes cahotiques, et plus particulièrement de la turbulence, est très limitée, et par le fait même, les modèles dont nous disposons pour les écoulements turbulents sont aussi très limités. Ainsi, lorsque l'on désire modéliser un procédé industriel complexe dans lequel la turbulence joue un rôle important et interagit fortement avec l'environnement, il est souvent nécessaire de mettre au point des outils innovateurs et spécifiques à l'application considérée.

La modélisation des fours au gaz plasma pour la refonte de l'écume d'aluminium est un exemple typique de procédé industriel complexe dans lequel la turbulence joue un rôle clef. En effet, elle interagit fortement avec le jet de plasma, en plus d'influer sur le transfert de chaleur aux parois et avec le rayonnement via le transport des poussières. La mise au point d'un outil de simulation suffisamment précis pour servir au design du four et à l'optimisation du procédé est un défi de taille. L'objet de ce mémoire s'inscrit dans ce contexte et vise à explorer, dans un cadre simplifié, diverses approches pour modéliser la turbulence.

Le but principal est de comparer, via l'expérimentation numérique, deux approches différentes pour prendre en compte la turbulence dans cet écoulement caractérisé par un jet de gaz chaud, compressible et fortement turbulent. Dans l'une, on décompose le champ turbulent  $\rho$  en une partie moyenne  $\bar{\rho}$  et en une partie fluctuante  $\rho'$ . Dans l'autre, on le décompose en une partie filtrée  $\mathcal{F}(\rho)$  et en une partie fluctuante  $\rho'$ . Pour chacune des approches, un modèle algébrique et un modèle à une équation différentielle sont mis en œuvre dans un code de calcul résolvant les équations de Navier-Stokes compressibles.

Enfin, précisons que ce travail est exploratoire et que, par la nature même du problème, nous sommes confrontés à plusieurs problèmes intermédiaires. En effet, la complexité de la géométrie, la compressibilité de l'écoulement, les exigences particulières des modèles de sous-grilles en matière de pas de maillages et de pas de temps posent des problèmes auxquels nous devons trouver des réponses.

Le projet comporte plusieurs phases, la modélisation, la discrétisation des modèles par la méthode des éléments finis, la mise en œuvre des modèles dans un code Navier-Stokes déjà existant, et enfin, l'expérimentation numérique et l'évaluation des différentes approches. Les résultats obtenus mettent en évidence la nécessité de rechercher des modèles de turbulence plus généraux, et aussi d'améliorer la résolution numérique.



## CHAPITRE 1

### POSITION DU PROBLÈME

### 1.1- Le procédé industriel à l'origine du problème

Auparavant, le chauffage par combustibles fossiles était largement utilisé dans plusieurs procédés industriels. Cependant, les impératifs économiques de minimisation des coûts de production et d'amélioration de la qualité, combinés avec une sensibilisation grandissante envers la protection de l'environnement ont amené les industriels à s'intéresser à des alternatives. L'utilisation d'un gaz à l'état plasma dans la technologie du chauffage est justement une alternative qui permet d'obtenir des performances étonnantes. L'application industrielle de cette technologie est récente, et on peut croire que la modélisation mathématique permettra d'optimiser diverses phases des procédés. L'étude de la littérature scientifique montre qu'il y a encore passablement de travail de recherche à faire afin de mettre au point un modèle fiable pour simuler les processus physico-chimiques ayant lieu dans un four industriel chauffé au plasma.

Dans le cas particulier d'une fournaise à plasma pour la récupération de l'écume d'aluminium (voir la figure 1a pour la géométrie du four), un jet de gaz débouche à grande vitesse dans une enceinte chargée de rebuts riches en aluminium. Les gaz chauds circulent dans l'enceinte et font fondre l'aluminium qui peut alors être récupéré sous forme liquide. La modélisation de ce procédé présente plusieurs difficultés car il faut tenir compte de phénomènes tels: la recirculation de la flamme, la turbulence du gaz, le rayonnement, le transfert de chaleur, les réactions chimiques, le transport des poussières. Aussi, la source de chaleur que constitue le plasma est un milieu très particulier puisque les gradients radiaux de température sont considérables. De plus, il faut tenir compte de l'aspect tridimensionnel de l'écoulement et les effets dus à la compressibilité du gaz. Bien que l'on ait affaire à un écoulement

d'un fluide compressible, on a le choix de considérer l'écoulement comme compressible ou comme incompressible. Il existe des critères reconnus afin de faire ce choix. Par exemple, on peut utiliser une approche incompressible si le nombre de Mach de l'écoulement est petit<sup>1</sup>,  $M < 0.24$ . Or, puisque  $\Delta\rho/\rho \approx M^2$ , on peut réécrire le critère sous la forme  $\Delta\rho/\rho_0 < 0.04$ . Dans un four à plasma type, un calcul rapide basé sur le profil de la densité à l'entrée nous donne  $\Delta\rho/\rho_0 < 0.86$  et un nombre de Mach de 0.335. On peut donc considérer qu'il est nécessaire de tenir compte de la variation de la densité via une équation d'évolution caractérisant le bilan de masse, soit:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (1.1)$$

Cependant, une alternative existe et consiste à modifier le modèle incompressible pour considérer la faible variation de la densité. Cette approche, développée en France chez EDF<sup>2</sup>, est basée sur un découplage des équations de Navier-Stokes compressibles *stationnaires*. Ils en arrivent à utiliser les techniques de l'incompressible en écrivant l'équation de conservation de la quantité de mouvement sous la forme d'une équation pour le débit  $Q = \rho U$ , sous la contrainte stationnaire de conservation de la masse  $\nabla \cdot Q = 0$ . La validation expérimentale montre que cette approche est satisfaisante pour certains cas<sup>2</sup>: "L'accord calcul-mesure apparaît comme très satisfaisante lorsque le rapport des masses volumiques  $R$  est proche de 1, et se dégrade quelque peu lorsque ce rapport atteint des valeurs de l'ordre de 5." Cette approche est très intéressante car elle est peu coûteuse. De plus, il existe un logiciel commercial exploitant cette méthode dans un contexte éléments finis: Persephone distribué par Simulog, France. Cependant, dans le cas d'écoulement qui retient notre attention, on a  $R = 7.30$ . Par conséquent, on a plutôt considéré l'écoulement du gaz dans le four comme compressible et instationnaire.

Toutefois dans ce travail de recherche, c'est surtout l'aspect turbulence du gaz dans le four qui nous intéresse. On comparera différentes approches pour le traitement de la turbulence par l'entremise d'expérimentations numériques (se référer au chapitre 3, "Modélisation de la turbulence"). Pour les fins de l'étude, c'est plutôt un milieu hypothétique qui a été utilisé, c'est-à-dire un gaz chaud ayant les propriétés de l'air avec une température maximale de 8000 K. La fournaise à plasma a une longueur totale de 3 mètres (excluant la cheminée) et une hauteur de 1.5 mètre. Le jet de plasma pénètre dans le four avec une largeur de 0.05 mètre et un angle de 7°, tandis que la largeur de la cheminée laissant sortir le gaz est de 0.1 mètre. Bien que le four réel soit cylindrique et que l'écoulement soit tridimensionnel (du principalement à l'angle d'attaque), nous allons nous restreindre à des modèles bidimensionnels afin de limiter la complexité du problème.

## 1.2- La modélisation de la turbulence dans le four à plasma

Généralement, les modèles de turbulence sont validés sur des cas tests simples tels: plaque plane, jet libre, canal et marche. Les modèles comportant des équations différentielles, et même certains modèles algébriques, donnent des résultats précis, sauf pour le cas de la marche<sup>3</sup>. En effet, ce cas diffère des autres par la présence d'une zone de recirculation et c'est là que les prédictions diffèrent significativement des valeurs expérimentales. Il est bien connu<sup>3</sup> que la majorité des modèles de turbulence réagissent de manière non physique à la présence d'un gradient de pression adverse.

La modélisation de la turbulence dans le four à plasma pose plusieurs difficultés, la première étant que l'écoulement dans le four est caractérisé par un jet dans une grande enceinte munie d'une cheminée. Cet écoulement est fort différent des cas simples énumérés ci-dessus car il possède à la fois les caractéristiques d'un jet, de la marche et d'un canal. En outre, on y retrouve de grandes zones de recirculation qui, par leur confinement dans l'enceinte, interagissent entre elles, avec le jet, avec les parois et avec la cheminée. Dans 7, on trouve un exposé des problèmes inhérents à la modélisation de la turbulence pour ce type de géométrie appelé: "sudden expansion pipe", ainsi qu'une revue détaillée de la littérature. On y mentionne que l'essentiel de la difficulté réside dans les zones de recirculation qui apparaissent de chaque côté du jet et qu'elle dépend intimement de la taille de ces zones. Quelques ouvrages<sup>5,6</sup> présentent des résultats expérimentaux par rapport à l'effet de paroi et aux zones de recirculation. Cependant, il semble n'y avoir que Charturvedi<sup>7</sup> qui fait une évaluation détaillée sur la turbulence dans le cas "sudden expansion pipe flow".

Or, la taille des zones de recirculation est en relation directe avec le rapport entre le diamètre de l'enceinte sur celui du jet. Un rapport de 5 est considéré comme grand. Un rapport faible est utilisé pour les tests de Kline et Abbott<sup>8</sup>. Cependant de récents résultats<sup>9</sup>, expérimentent avec des rapports de 2 à 15, entre le diamètre de l'enceinte sur celui du jet. Dans le cas du four à plasma il est de  $(1.5/0.05) = 30$ , ce qui complique énormément la modélisation de la turbulence. Notons que le problème est rendu plus complexe par l'engouffrement des gaz dans la cheminée, qui produit des recirculations et des instabilités au voisinage de la sortie.

## CHAPITRE 2

### ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Un fluide est un corps contigu, sans rigidité, qui peut subir de grandes déformations, même sous l'action de forces faibles. Il n'a pas de forme propre et a la propriété caractéristique de pouvoir s'écouler. Les liquides et les gaz sont des fluides. Pour étudier un fluide hétérogène on est conduit à le décomposer en particules suffisamment petites. Entre chaque particule contiguë, il existe des échanges:

- de quantité de matière (transfert de masse);
- de quantité de mouvement (transfert d'énergie cinétique);
- d'énergie calorifique (transfert de chaleur).

Dans le cas d'un fluide Newtonien, ces principes sont traduits par les équations de Navier-Stokes<sup>10</sup>.

## 2.1- Forme conservative

Soit  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ , le domaine considéré et soit  $\Gamma$  sa frontière. On peut écrire les équations de Navier-Stokes sous forme conservative comme suit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p - \nabla \cdot \sigma = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E u) + \nabla \cdot (p u) - \nabla \cdot (\sigma \cdot u) + \nabla \cdot Q = 0 \quad (2.3)$$

où  $\sigma =$  est le tenseur des contraintes (voir section 2.2).

La pression est donnée par la loi des gaz parfaits ( $p = (\gamma - 1)\rho e$ ), et les autres quantités par:

$$E = e + \frac{1}{2}u^2, \quad e = C_v T, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad Q = -\kappa \nabla T.$$

## 2.2- Tenseur des contraintes

On considère un élément de surface d'aire  $dS$  dans un fluide. On analyse la force exercée par la fraction de fluide située d'un côté de l'élément, sur celle située de l'autre côté: la contrainte est la valeur de la force qui s'exerce sur l'unité de surface. Dans un fluide au repos, elle est *normale* aux éléments de surface et sa norme est indépendante de l'orientation de ceux-ci. La contrainte étant isotrope, il suffit d'un seul nombre pour en caractériser la valeur en chaque point; c'est la *pression hydrostatique*.

Dans un fluide en mouvement, il apparaît en outre des contraintes *tangentes* à l'élément de surface  $dS$ . Celles-ci reflètent les forces de frottement entre des couches de fluide glissant les unes par rapport aux autres, et sont dues à la viscosité du fluide<sup>1</sup>. La viscosité étant un coefficient de transport qui traduit le transfert de quantité de mouvement des zones de plus grandes vitesses vers les zones de plus faibles vitesses. Pour préciser ces forces, il est nécessaire de connaître:

- l'orientation de la surface  $dS$  dans l'espace; celle-ci est définie à l'aide du vecteur unitaire  $n$  normale à la surface;
- les valeurs des trois composantes de la force par unité de surface suivant les axes  $Ox, Oy, Oz$  d'un trièdre de référence, pour trois orientations de surfaces unités perpendiculaires à ces axes.

Cela conduit à neuf coefficients  $\sigma_{ij}$  que l'on peut mettre sous forme d'un tableau à trois lignes et trois colonnes, qui représente le *tenseur des contraintes*  $[\sigma]$  dans le fluide considéré. Ce tenseur de rang deux s'écrit comme une matrice trois sur trois; l'élément  $\sigma_{ij}$  du tenseur ( $i = 1 \text{ à } 3, j = 1 \text{ à } 3$ ) représente la composante suivant  $i$  de la contrainte, ou force par unité de surface, exercée sur une surface dont la normale est orientée suivant  $j$ . Ainsi:

- $\sigma_{yx}$  est la composante suivant  $Oy$  de la force exercée sur une surface unité dont la normale est orientée suivant  $Ox$ ; c'est une *contrainte tangentielle ou de cisaillement*.

- $\sigma_{xx}$  est la composante suivant  $Ox$  de la force exercée sur une surface perpendiculaire à la même direction  $Ox$ ; c'est une *contrainte normale*.

On détermine maintenant la contrainte  $\sigma_n$  exercée sur une surface  $dS$  de normale  $n$  quelconque. Analysons pour cela les forces exercées sur un tétraèdre dont trois des arêtes sont parallèles aux directions  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , et de longueurs  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ ; la face bordée par les trois arêtes a une normale dirigée suivant le vecteur unitaire  $n$  de composantes  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ ;  $n$  est dirigée vers l'extérieur du volume du tétraèdre.

On note  $\sigma_{xn}dS$ ,  $\sigma_{yn}dS$  et  $\sigma_{zn}dS$  les composantes suivant  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  de la force de contrainte  $df$  exercée sur la surface  $dS$  de normale  $n$ . Déterminons par exemple  $\sigma_{xn}$  en écrivant l'équilibre de l'ensemble des forces exercées sur les faces du tétraèdre.

Les composantes suivant  $Ox$  des forces exercées sur les faces perpendiculaires à  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  sont respectivement:

$$(-\sigma_{xx})n_x dS, (-\sigma_{xy})n_y dS, (-\sigma_{xz})n_z dS.$$

On utilise les définitions des composantes de contrainte normale et de cisaillement, et le fait que les surface  $dS_x$ ,  $dS_y$ ,  $dS_z$ , auxquelles ces contraintes s'appliquent, sont égales au produit de  $dS$  par les cosinus directeurs  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  de  $n$  selon les trois axes. Les signes négatifs proviennent du fait que les normales à ces trois surfaces sont orientées extérieurement au volume du tétraèdre, et de la définition des contraintes. La contrainte totale sur l'ensemble des quatres faces du tétraèdre a donc pour composante suivant  $Ox$ :

$$\sigma_{xn}dS - \sigma_{xx}n_x dS - \sigma_{xy}n_y dS - \sigma_{xz}n_z dS = (\sigma_{xn} - \sigma_{xx}n_x - \sigma_{xy}n_y - \sigma_{xz}n_z)dS.$$

On écrit la loi de Newton en notant  $dV$  le volume de l'élément,  $\rho$  sa densité et  $d^2x/dt^2$  son accélération suivant  $Ox$ ; on trouve:

$$(\sigma_{xn} - \sigma_{xx}n_x - \sigma_{xy}n_y - \sigma_{xz}n_z)dS + f_x dV = \rho dV \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.4)$$

( $f_x$  représente la composante suivant  $Ox$  d'une force en volume-pesanteur par exemple). On fait maintenant tendre la taille de l'élément vers zéro en réduisant de manière homothétique chacune de ses dimensions. Les deux derniers termes qui contiennent  $dV$  dans l'équation (2.4) tendent vers zéro plus rapidement que le terme qui contient  $dS$ , et ne peuvent donc le compenser. Il en résulte que ce dernier doit être identiquement nul, ce qui conduit à l'égalité:

$$\sigma_{xn} = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z.$$



En utilisant la symétrie entre les indices, on trouve une relation équivalente pour les deux autres composantes  $\sigma_{yn}$  et  $\sigma_{zn}$ . On obtient ainsi l'égalité matricielle:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xn} \\ \sigma_{yn} \\ \sigma_{zn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

qui peut être réécrite sous la forme:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \sigma_n = \sigma \cdot n.$$

On peut également utiliser la notation:

$$\sigma_{in} = \sigma_{ij}n_j$$

où on effectue une sommation implicite sur l'indice  $j$ .

On précise maintenant la relation entre les contraintes de viscosité (tenseur  $\sigma$ ) apparaissant dans un fluide et les déformations de ce fluide. Ces contraintes s'annulent quand un élément du fluide se déplace sans se déformer et ne dépendent, de ce fait, ni de la vitesse (translation globale), ni de la rotation locale. Les composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes de viscosité, qui est lui-même symétrique, doivent donc dépendre uniquement des composantes  $S_{ij}$  de la partie symétrique du tenseur des gradients de vitesse, avec:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Les fluides newtoniens (c'est le cas qui nous intéresse) sont ceux pour lesquels on suppose que les composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes de viscosité dépendent linéairement des valeurs instantanées des déformations. Ceci se traduit par:

$$\sigma_{ij} = 2AS_{ij} + B\delta_{ij}S_{ll}$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes réelles caractéristiques du fluide considéré, et  $\delta_{ij}$  représente le tenseur de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ , et  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ).

Dans le cas du four plasma, le tenseur des contraintes visqueuses est exprimé au moyen de la loi de Newton et d'un coefficient de viscosité ( $\mu$ ). Il a la forme suivante:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij}. \quad (2.5)$$

### 2.3- Forme non-conservative

Le choix des variables indépendantes constitue un problème fondamental dans le processus de résolution des équations de Navier-Stokes. En effet, la forme conservative de l'équation de conservation de la masse suggère que  $\rho$  et  $\rho u$  doivent être choisies comme variables indépendantes. Or, dans les deux autres équations de conservation  $u$  apparaît aussi comme variable indépendante. Un raisonnement similaire sur la variable d'énergie nous incite à choisir  $\rho$ ,  $u$  et  $T$  comme variables indépendantes. Dès lors, il est souhaitable de n'introduire que ces variables et leurs dérivées dans les équations pour ainsi obtenir la forme non-conservative des équations (2.1)-(2.3).

Équation de la masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (\text{f. conservative})$$

De l'identité:  $\nabla \cdot (\rho u) = \rho \nabla \cdot u + u \cdot \nabla \rho$ , on obtient l'équation de la masse sous forme non-conservative:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot u = 0. \quad (2.6)$$

Équation de la quantité de mouvement:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \otimes u) + \nabla p - \nabla \cdot \sigma = 0 \quad (\text{f. conservative})$$

Des identités:

$$\nabla \cdot (\rho u \otimes u) = (u \otimes u) \cdot \nabla \rho + \rho u \nabla \cdot u + \rho u \cdot \nabla u$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \rho u \nabla \cdot u - (u \otimes u) \cdot \nabla \rho,$$

on obtient l'équation de la quantité de mouvement sous forme non-conservative:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho (u \cdot \nabla) u + \nabla p - \nabla \cdot \sigma = 0. \quad (2.7)$$

Équation de conservation de l'énergie:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E u) + \nabla \cdot (p u) - \nabla \cdot (\sigma \cdot u) + \nabla \cdot Q = 0 \quad (\text{f. conservative})$$

1) Développer le membre de gauche de la forme conservative en écrivant  $E$  par sa définition:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E u) = \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho u^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left( (\rho e + \frac{1}{2} \rho u^2) u \right)$$

2) Développer encore en utilisant l'équation (2.6):

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E u) = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla e + u \cdot \left( \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho (u \cdot \nabla) u \right)$$

3) Maintenant, utiliser l'équation (2.7) dans le dernier développement:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E u) = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla e - u \cdot \nabla p + u \cdot \nabla \cdot \sigma$$

On retrouve donc,

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla e - u \cdot \nabla p + u \cdot \nabla \cdot \sigma = -\nabla \cdot (p u) + \nabla \cdot (\sigma \cdot u) - \nabla \cdot Q.$$

Des identités:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\alpha \omega) &= \omega \cdot \nabla \alpha + \alpha \nabla \cdot \omega \\ \nabla \cdot (\omega \cdot M) &= \nabla \omega : M + \omega \cdot \nabla \cdot M, \end{aligned}$$

on obtient l'équation de conservation de l'énergie sous forme non-conservative:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla e + p \nabla \cdot u - \nabla u : \sigma + \nabla \cdot Q = 0. \quad (2.8)$$

## 2.4- Équations adimensionnelles

Pour des raisons d'ordre numérique (principalement pour faciliter la convergence des solveurs itératifs), on applique des changements d'échelles aux variables dépendantes et indépendantes. Ainsi, on remplace chaque variable dans les équations par:

$$\begin{aligned} \rho &= \hat{\rho} \rho_r, \quad u = |u_r| \hat{u}, \quad t = \hat{t} t_r, \quad x = \hat{x} L_r, \\ p &= \hat{p} \rho_r |u_r|^2, \quad \mu = \hat{\mu} \mu_r, \quad T = \frac{\hat{T} |u_r|^2}{C_v}, \quad e = \hat{e} |u_r|^2, \end{aligned}$$

où  $\rho_r$ ,  $|u_r|$ ,  $t_r$ ,  $L_r$ ,  $\mu_r$ , sont des valeurs de références pour la densité, la vitesse, le temps, la longueur et la viscosité.

Dans le cas du four industriel que l'on modélise, on a les caractéristiques physiques suivantes:

- $|u_r| = 600$  m/s,
- $\rho_r = 0.1708$  kg/cm,
- $\mu_r =$  viscosité de l'air à  $20^\circ C$ ,
- $L_r = 1$  mètre.

Équation (2.6) sous la forme sans dimension:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot u = 0$$

On remplace les variables dans cette équation en les écrivant avec les variables adimensionnelles:

$$\left(\frac{\rho_r}{t_r}\right) \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} + \left(\frac{\rho_r |u_r|}{L_r}\right) \hat{u} \cdot \nabla \hat{\rho} + \left(\frac{\rho_r |u_r|}{L_r}\right) \hat{\rho} \nabla \cdot \hat{u} = 0$$

Pour obtenir notre équation adimensionnelle, on multiplie la dernière équation par  $\left(\frac{L_r}{\rho_r |u_r|}\right)$ . Ensuite, on pose  $\left(\frac{L_r}{t_r |u_r|}\right) = 1$ , ce qui revient à prendre comme échelle de temps  $t_r = \frac{L_r}{|u_r|}$ . D'où l'équation de la masse adimensionnelle est:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \cdot \nabla \hat{\rho} + \hat{\rho} \nabla \cdot \hat{u} = 0. \quad (2.9)$$

Équation (2.7) sous la forme sans dimension:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u + \nabla p - \nabla \cdot \sigma = 0$$

On remplace les variables dans cette équation en les écrivant avec les variables adimensionnelles:

$$\left(\frac{\rho_r |u_r|}{t_r}\right) \hat{\rho} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \left(\frac{\rho_r |u_r|^2}{L_r}\right) \hat{\rho} (\hat{u} \cdot \nabla) \hat{u} + \left(\frac{\rho_r |u_r|^2}{L_r}\right) \nabla \hat{p} - \left(\frac{\mu_r |u_r|}{L_r^2}\right) \nabla \cdot (2\hat{\mu} \hat{S} - \left(\frac{2}{3}\hat{\mu} \nabla \cdot \hat{u}\right)) = 0$$

Pour obtenir notre équation adimensionnelle, on multiplie la dernière équation par  $(\frac{L_r}{\rho_r|u_r|^2})$ . Or nous avons déjà que  $(\frac{L_r}{t_r|u_r|}) = 1$ , d'où nous obtenons:

$$\hat{\rho} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{\rho}(\hat{u} \cdot \nabla) \hat{u} + \nabla \hat{p} - \nabla \cdot (2\hat{\mu}(\frac{\mu_r}{\rho_r|u_r|L_r})\hat{S} - (\frac{2}{3}\hat{\mu}(\frac{\mu_r}{\rho_r|u_r|L_r})\nabla \cdot \hat{u})) = 0$$

Si on pose  $Re = \frac{\rho_r|u_r|L_r}{\mu_r}$  (nombre de Reynolds) on obtient l'équation sans dimension

$$\hat{\rho} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{\rho}(\hat{u} \cdot \nabla) \hat{u} + \nabla \hat{p} - \nabla \cdot \hat{\sigma} = 0 \quad (2.10)$$

où

- $\hat{\sigma} = 2\mu^*\hat{S} - (\frac{2}{3}\mu^*\nabla \cdot \hat{u})I$  (se référer à la section 2.2 "Tenseur des contraintes"),
- $\hat{S} = \frac{1}{2}(\nabla \hat{u} + \nabla \hat{u}^t)$ ,
- $\mu^* = \frac{\hat{\mu}}{Re}$ ,
- $Re = \frac{\rho_r|u_r|L_r}{\mu_r}$ .

Équation (2.8) sous la forme sans dimension:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla e + p \nabla \cdot u - \nabla u : \sigma + \nabla \cdot (-\kappa \nabla T) = 0$$

On remplace les variables dans cette équation en les écrivant avec les variables adimensionnelles:

$$\begin{aligned} (\frac{\rho_r|u_r|^2}{t_r})\hat{\rho} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{t}} + (\frac{\rho_r|u_r|^3}{L_r})\hat{\rho}\hat{u} \cdot \nabla \hat{e} + (\frac{\rho_r|u_r|^3}{L_r})\hat{p}\nabla \cdot \hat{u} - (\frac{\mu_r|u_r|^2}{L_r^2})\nabla \hat{u} : (2\hat{\mu}\hat{S} - (\frac{2}{3}\hat{\mu}\nabla \cdot \hat{u})) \\ + (\frac{\kappa_r|u_r|^2}{L_r^2 C_v})\nabla \cdot (-\hat{\kappa}\nabla \hat{T}) = 0 \end{aligned}$$

Pour obtenir notre équation adimensionnelle, on multiplie la dernière équation par  $(\frac{L_r}{\rho_r|u_r|^3})$ . Ensuite, on pose encore une fois  $(\frac{L_r}{t_r|u_r|}) = 1$ , et on multiplie le dernier terme par  $(\frac{\mu_r C_p}{\mu_r C_p})$  et puisque  $(\frac{L_r}{t_r|u_r|}) = 1$  nous obtenons:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{t}} + \hat{\rho}\hat{u} \cdot \nabla \hat{e} + \hat{p}\nabla \cdot \hat{u} - \nabla \hat{u} : (2\hat{\mu}(\frac{\mu_r}{\rho_r|u_r|L_r})\hat{S} - (\frac{2}{3}\hat{\mu}(\frac{\mu_r}{\rho_r|u_r|L_r})\nabla \cdot \hat{u})) \\ - \nabla \cdot ((\frac{\kappa_r}{C_p \mu_r})(\frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{\mu_r}{\rho_r L_r |u_r|})\hat{\kappa}\nabla \hat{T}) = 0 \end{aligned}$$

En posant  $Re = \frac{\rho_r |u_r| L_r}{\mu_r}$  (nombre de Reynolds),  $Pr = \frac{C_p \mu_r}{\kappa_r}$  (nombre de Prandtl),  $\mu^* = \frac{\hat{\mu}}{Re}$ ,  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ ,  $\kappa^* = \left(\frac{\gamma}{Re}\right)\left(\frac{\hat{\kappa}}{Pr}\right)$ , on obtient l'équation de conservation de l'énergie sous sa forme sans dimension

$$\hat{\rho} \frac{\partial \hat{e}}{\partial \hat{t}} + \hat{\rho} \hat{u} \cdot \nabla \hat{e} + \hat{p} \nabla \cdot \hat{u} - \nabla \hat{u} : \hat{\sigma} + \nabla \cdot (-\kappa^* \nabla \hat{T}) = 0 \quad (2.11)$$

où

- $\hat{\sigma} = 2\mu^* \hat{S} - \left(\frac{2}{3}\mu^* \nabla \cdot \hat{u}\right) I$  (se référer à la section "Tenseur des contraintes"),
- $\hat{S} = \frac{1}{2}(\nabla \hat{u} + \nabla \hat{u}^t)$ ,
- $\mu^* = \frac{\hat{\mu}}{Re}$ ,
- $Re = \frac{\rho_r |u_r| L_r}{\mu_r}$ ,
- $\kappa^* = \left(\frac{\gamma}{Re}\right)\left(\frac{\hat{\kappa}}{Pr}\right)$ ,  $Pr = \frac{C_p \mu_r}{\kappa_r}$ ,  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

## 2.5- Conditions aux limites

On considère un jet de gaz chaud dans un four possédant une cheminée. Le domaine de calcul est décrit sur la figure 1a. À l'entrée du four sur  $\Gamma_1$ , on impose des conditions limites de Dirichlet à chacune des variables. Les conditions limites prescrites sur  $\Gamma_1$  sont basées sur des valeurs de référence. On pose:

- $\hat{\rho} = \rho_r$  alors  $\hat{\rho} = 1.0$ ,
- $\hat{u} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\alpha$  est l'angle d'attaque,
- $\hat{T} = T_r = 1/\gamma(\gamma - 1)M_r^2$ , où  $M_r$  est le nombre de Mach à l'entrée.

Sur la paroi du four  $\Gamma_F$ , on impose une condition d'adhérence pour la vitesse,  $\hat{u} = 0$ , et une condition adiabatique pour la température,  $\frac{\partial \hat{T}}{\partial n} = 0$ .

Une analyse plus détaillée doit être faite à la sortie de la cheminée du four,  $\Gamma_2$ . En effet, dans le cas d'un écoulement externe, on impose une condition unilatérale pour la densité sur la partie du bord où  $u_\infty \cdot n > 0$ , ce qui n'est pas applicable aux écoulements internes. On essaie plutôt une méthode, usuelle dans les schémas aux différences finies<sup>11</sup>, qui consiste à extrapoler, à chaque pas de temps, la valeur au bord à partir des quelques valeurs internes. Cette méthode n'est pas suffisante car l'écoulement est réfléchi à l'intérieur. Pour corriger la situation, on doit conserver le profil de la densité à partir d'une position donnée dans la cheminée, et le reproduire jusqu'à la sortie. La valeur de la densité pour tous les noeuds en aval de la position, est obtenue à l'aide d'une formule d'extrapolation quadratique

sur les noeuds précédents. On répète cette extrapolation à intervalle de temps régulier. L'expérience montre qu'il est suffisant de l'appliquer à la densité afin d'obtenir des profils raisonnables pour les autres variables. Toutefois, mentionnons que l'extrapolation dégrade le conditionnement du système, ce qui entraîne une augmentation du temps de calcul. On peut constater l'efficacité de la méthode en comparant les figures 3 et 4. La figure 3a, montre la recirculation ralentie de l'écoulement dans le four. Cette diminution de vitesse est causée par le refoulement du fluide à la sortie de la cheminée comme montré sur la figure 3b (la quantité de fluide qui entre et qui sort par la cheminée est presque nulle). Tandis que sur la figure 4, après seulement quelques pas de temps avec la technique d'extrapolation de la densité, l'écoulement est qualitativement correct (figure 4a) et on obtient un profil de sortie raisonnable (figure 4b).

Finalement, on utilise des conditions initiales:  $\hat{\rho} = \rho_r$ ,  $\hat{T} = T_r$ ,  $\hat{u} = 0$  (alors  $\hat{\rho} = 1$ ,  $\hat{T} = \frac{T_r C_v}{|u_r|^2}$ ,  $\hat{u} = 0$ ) partout dans le four. Mais, pour accélérer la convergence, on pose  $\hat{u} = 1$  dans une bande horizontale qui commence à l'entrée du four et qui se termine à la sortie de la cheminée.

Remarque: Afin de simplifier l'écriture, les variables instantanées et sans dimension seront notées  $\rho$ ,  $u$ ,  $T$  plutôt que  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{u}$ ,  $\hat{T}$ . □

## **CHAPITRE 3**

### **MODÉLISATION DE LA TURBULENCE**



Le but de ce chapitre est de présenter deux approches différentes pour le traitement de la turbulence. Les deux orientations reposent sur des décompositions des champs instationnaires: décomposition de Reynolds ( $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ ) et décomposition basée sur le filtrage des fluctuations ( $\rho = \mathcal{F}(\rho) + \rho'$ ). On présente dans les deux cas, un modèle algébrique (zéro équation) et un modèle à une équation différentielle aux dérivées partielles pour l'énergie cinétique turbulente (une équation). Finalement, on fait ressortir les ressemblances des équations obtenues avec les deux approches.

### 3.1- Principes de base de la modélisation de la turbulence

L'expérience de Reynolds, réalisée vers 1886, a permis de mettre en évidence l'étroite relation entre la quantité  $(\frac{\rho_r |u_r| L_r}{\mu_r})$ , aujourd'hui appelée nombre de Reynolds ( $Re$ ), et la structure d'un écoulement. En effet, lorsqu'un fluide est injecté dans un courant de dilution de manière que  $Re < Re_c (\approx 2500)$ , il forme un filet régulier (écoulement laminaire). Mais lorsque  $Re > Re_c$ , il forme une multitude de petits tourbillons qui provoquent un mélange rapide avec le courant de dilution. Un des aspects fondamentaux de cette expérience est la non-reproductibilité de l'écoulement turbulent.

La présence de tourbillons est attribuable à l'aspect non-linéaire de la conservation de la quantité de mouvement. Des perturbations du champ de vitesse sont amplifiées par le terme non-linéaire  $\nabla \cdot (u \otimes u)$  et éventuellement dissipées par les contraintes visqueuses lorsque leur taille atteint l'échelle de dissipation par la viscosité physique du fluide. Dans un écoulement turbulent, on peut trouver des structures tourbillonnaires de toutes tailles situées entre l'échelle de dissipation et le plus

gros tourbillon pouvant exister dans la configuration géométrique de l'écoulement (échelle géométrique).

La turbulence peut donc être caractérisée par une échelle continue pour la taille des tourbillons dont le minimum et le maximum dépendent du nombre de  $Re$  et de la configuration géométrique. En outre, il y a absence de séparation nette des échelles de la turbulence<sup>12</sup>. Le spectre d'énergie typique d'un écoulement turbulent est donné à la figure 2.

Notons que, outre les échelles, il y a une différence fondamentale entre le mouvement brownien, dû à l'agitation moléculaire, et la turbulence: les déplacements successifs d'une particule sous l'action de l'agitation des molécules sont des événements indépendants, ce qui n'est pas le cas pour une particule sous l'action de la turbulence. On dit, symboliquement, que la turbulence a une mémoire de son passé.

Dans l'approche statistique de la turbulence, toutes les variables de l'écoulement sont considérées comme des variables stochastiques. C'est-à-dire comme des variables aléatoires qui dépendent du temps. La turbulence est alors vue comme un processus stochastique et le fait qu'elle possède une mémoire de son passé se traduit par une corrélation des variables dans l'espace et le temps. Considérons, à titre d'exemple, la vitesse du fluide  $u(x, t)$ . C'est une variable stochastique qui peut être caractérisée de deux manières<sup>13</sup>:

- par sa distribution de probabilité  $p(u, x, t)$ ,
- ou par l'ensemble (à priori infini) de ses moments.

Lorsque  $u(x, t)$  correspond à un champ de vitesse d'un écoulement turbulent, on s'intéresse généralement à son premier moment, c'est-à-dire sa moyenne. On peut la définir par:

$$\langle u(x, t) \rangle = \int u(x, t) p(u, x, t) du ,$$

ou encore, par

$$\langle u(x, t) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u^{(i)}(x, t) .$$

La seconde formule définit la moyenne via une limite sur une moyenne d'ensemble de  $n$  réalisations de la même expérience *au même point*  $(x, t)$ .

À priori,  $\langle u(x, t) \rangle$  est une fonction de  $x$  et  $t$ , tout comme  $u(x, t)$  elle-même. Il y a cependant des cas particuliers d'écoulement pour lesquels cette dépendance se simplifie:

- turbulence stationnaire:  $p$  est indépendant du temps de sorte que tous les moments sont eux-même indépendants du temps. En particulier, la moyenne est stationnaire  $\langle u(x) \rangle$ . Le processus est dit ergodique et on a :

$$\langle u(x) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(x, t) dt$$

Les exemples de turbulence stationnaire sont rares, mais il en existe et on sait les reproduire. La turbulence derrière une grille en est un exemple.

- turbulence homogène: toutes les grandeurs moyennes formées à partir des fluctuations de vitesse ou de pression sont invariantes par translation. Les cas de turbulence homogène sont plus rares que les cas de turbulence stationnaire. Dans ce cas

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x, t) dx.$$

La turbulence derrière une grille est un cas classique de turbulence homogène, mais seulement dans le plan de la grille.

- turbulence isotrope: lorsque le tenseur de Reynolds  $R = \langle u'_i u'_j \rangle$  où  $u'_i = u_i(x, t) - \langle u_i(x, t) \rangle$ , est invariant par rotation.

Bien qu'on ne connaisse aucun cas physique de turbulence qui soit à la fois stationnaire, homogène et isotrope, on sait la simuler numériquement par résolution des équations de Navier-Stokes pour les variables instantanées. Ce cas "fictif" de turbulence constitue d'ailleurs un des outils fondamentaux afin de développer et d'évaluer de nouveaux modèles de turbulence. De plus, mentionnons que dans ce cas:

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(x, t) dt \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x, t) dx \\ &= \text{constante.} \end{aligned}$$

Dans le cas général, c'est-à-dire pour la quasi-totalité des écoulements liés à des procédés industriels,  $\langle u(x, t) \rangle$  est fonction de l'espace et du temps. La moyenne d'ensemble  $\langle u(x, t) \rangle$  n'étant pas équivalente<sup>12</sup> à la moyenne temporelle, ni à la moyenne spatiale, il convient de faire un choix. Or, la moyenne d'ensemble est la seule à satisfaire les axiomes de Reynolds<sup>12</sup>, nécessaire pour fermer le système:

- linéarité:

$$\langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle, \langle \lambda a \rangle = \lambda \langle a \rangle, \forall \lambda \in \mathbf{R}$$

- idempotence:

$$\langle \langle a \rangle b \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle$$

- commutativité avec les opérateurs intégrro-différentiels:

$$\left\langle \frac{\partial a}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial \langle a \rangle}{\partial x}, \quad \left\langle \frac{\partial a}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle a \rangle}{\partial t}, \quad \left\langle \int_D a dx \right\rangle = \int_D \langle a \rangle dx.$$

En conséquence, le seul opérateur de moyenne utilisé dans le présent travail est la moyenne statistique et il convient de garder à l'esprit qu'elle varie en fonction de la *position* et du *temps*.

Outre l'approche écoulement moyen, qui consiste à caractériser et à simuler l'évolution des grandeurs moyennes, il y a l'approche basée sur le filtrage<sup>14</sup>. Cette approche est plus récente<sup>12</sup> et consiste à retirer (filtrer) des champs instantanés, une partie des fluctuations et tenir compte de leurs effets sur les variables filtrées via des termes d'échange énergétique.

Un filtre doit satisfaire les axiomes de Reynolds, sauf l'idempotence. Les filtres les plus classiques sont basés sur des transformées de Fourier tronquées, ce qui les rends assez difficile à manipuler car cela nous force à travailler dans l'espace de phase plutôt que dans l'espace euclidien<sup>12</sup>. Il y a cependant des filtres plus simples basés directement sur la taille des mailles.

Le principe de base de la simulation des grandes structures est lié au fait que la taille des plus petites structures simulées par le calcul sera environ  $2\Delta x$ , si  $\Delta x$  est le pas de maillage. Si cette échelle est bien plus grande que l'échelle de dissipation, on sait que l'effet de la viscosité moléculaire sera trop faible pour que ces structures puissent dissiper l'énergie. C'est le modèle de fermeture qui augmentera artificiellement la viscosité de manière à dissiper l'énergie devant normalement être dissipée par les plus petites structures.

L'idée est très attirante car on calcule l'écoulement turbulent avec le maximum de détails que les techniques et la puissance des ordinateurs nous permettent, ce qu'on ne peut capter, on le modélise. Cependant, la complexité inhérente à l'aspect instationnaire des simulations de ce type limite leur utilisation. C'est donc à titre expérimental et exploratoire que nous allons considérer ces modèles de turbulence.

### 3.2- Approche écoulement moyen

Afin de connaître l'état du fluide au temps  $t$ , on traite le problème avec les équations de Naviers-Stokes que l'on résout à  $n$  reprises à partir d'un même état  $E(t_0, x)$ . A priori, chaque répétition nous donne un nouveau résultat:  $E_i(t, x)$ :

$$E(t_0, x) \longrightarrow E_1(t, x)$$

$$E(t_0, x) \longrightarrow E_2(t, x)$$

$$E(t_0, x) \longrightarrow E_3(t, x)$$

...

$$E(t_0, x) \longrightarrow E_n(t, x)$$

---


$$\langle E(t, x) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i(t, x) \right)$$

On en déduit une moyenne statistique  $\langle E(t, x) \rangle$  (que l'on notera aussi  $\overline{E(t, x)}$ ), obtenue à partir d'un grand nombre d'expériences effectuées dans les mêmes conditions. Pour simplifier l'écriture, utilisons  $\phi$  au lieu de  $E(t, x)$ . On considère la décomposition classique de Reynolds (on décompose  $\phi$  en une partie moyenne et en une partie fluctuation):

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'$$

où

- $\bar{\phi}$ : moyenne statistique,
- $\phi'$ : partie fluctuation défini par  $\phi' \triangleq \phi - \bar{\phi}$ .

Afin de simplifier l'écriture des équations, on définit aussi l'opérateur de moyenne pondérée par la masse (décomposition de Favre):

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'' \text{ avec } \tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}}.$$

On réécrit les équations (2.9)-(2.11) en appliquant la décomposition de Reynolds à  $\rho$ ,  $p$ , et la décomposition de Favre à  $u$ ,  $T$ . On obtient les équations de Reynolds compressibles<sup>15,16</sup>:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \nabla \bar{\rho} + \bar{\rho} \nabla \cdot \tilde{u} = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{\rho}(\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{u} + \nabla(\bar{\rho}u'' \widetilde{\otimes} u'') + \nabla \bar{p} - \nabla \cdot \tilde{\sigma} &= 0 \\ \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \bar{\rho}\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{E} + \nabla \cdot (\gamma C_v \bar{\rho}u'' \widetilde{T}'') + \bar{\rho}\tilde{u}u''u'' + \bar{\rho} \frac{u''u''u''}{2} + \bar{p}\nabla \cdot \tilde{u} - \nabla \tilde{u} : \tilde{\sigma} \\ &+ \nabla \cdot (-\kappa^* \nabla \tilde{T}) = 0. \end{aligned}$$

Le système ci-dessus contient des corrélations d'ordre deux et trois entre les diverses fluctuations, il s'agit donc d'un système incomplet. Afin de le compléter, on fait quelques hypothèses pour modéliser ces termes de corrélations.

- 1) Tenseur de Reynolds  $R$ : L'hypothèse de Boussinesq<sup>3,17</sup> émise en 1877 est la suivante: par analogie avec le tenseur des contraintes visqueuse, on suppose que les corrélations  $-\bar{\rho}u''u''$  se comportent comme les contraintes visqueuses. C'est-à-dire qu'on les suppose alignées sur le tenseur taux de déformation de l'écoulement moyen:

$$R = -\bar{\rho}u''u'' = -\frac{2}{3}(\bar{\rho}k + \mu_t \nabla \cdot \tilde{u})I + \mu_t(\nabla \tilde{u} + \nabla \tilde{u}^t)$$

où  $\mu_t$  est un coefficient de viscosité attribuable à la turbulence et  $k$  est l'énergie cinétique turbulente définie par

$$k = \frac{1}{2}tr(u'' \widetilde{\otimes} u'') = \frac{1}{2}u''_i u''_i.$$

Cette variable mesure l'énergie contenue dans les fluctuations des particules de fluides.

- 2) Corrélation température-vitesse: L'utilisation d'une analogie avec la loi de Fourier pour la corrélation température-vitesse nous amène à poser:

$$\bar{\rho}u'' \widetilde{T}'' = \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} = \frac{\mu_t}{Pr_t} \nabla \tilde{T}$$

où  $Pr_t$  est le nombre de Prandlt turbulent.

- 3) Corrélation triple: On néglige cette corrélation, en supposant que son apport est moindre par rapport au tenseur de Reynolds et à la corrélation température-vitesse.

L'introduction de ces hypothèses dans le système d'équations précédent nous permet d'obtenir la forme non-conservative et sans dimension des équations de Navier-Stokes pour les variables moyennes:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \nabla \bar{\rho} + \bar{\rho} \nabla \cdot \tilde{u} = 0. \quad (3.1)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{\rho}(\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{u} + \nabla \bar{\theta} - \nabla \cdot \tilde{\sigma}_t = 0 \quad (3.2)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{T} + \bar{\theta} \nabla \cdot \tilde{u} - \nabla \tilde{u} : \tilde{\sigma}_t + \nabla \cdot (-\kappa_t^* \nabla \tilde{T}) = 0 \quad (3.3)$$

où

- $\bar{\theta} = \bar{p} + \frac{2}{3} \bar{\rho} k$ ;
- $\tilde{\sigma}_t = 2\mu^* \tilde{S} - \frac{2}{3}(\mu^* \nabla \cdot \tilde{u})I$ ;
- $\tilde{S} = \frac{1}{2}(\nabla \tilde{u} + \nabla \tilde{u}^t)$ ;
- $\mu^* = \frac{\mu + \mu_t}{Re}$ ;
- $Re = \frac{\rho_r |u_r| L_r}{\mu_r}$ ;
- $\kappa_t^* = \left(\frac{\gamma}{Re}\right) \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}\right)$ ;  $Pr = \frac{C_p \mu_r}{\kappa_r}$ ,  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

On voit apparaître  $Pr_t$  qui est une constante appelée nombre de Prandlt turbulent (par analogie avec le nombre de Prandlt laminaire) et est ajustée pour que le rapport  $\mu_t/Pr_t$  représente bien le taux moyen de transfert de chaleur.

Dans le contexte du système (3.1)-(3.3), la mise au point de modèles de turbulence vise la fermeture du système d'équations via l'hypothèse de Boussinesq. Le problème fondamental est de construire un modèle, algébrique ou différentiel, qui soit simple et précis. Notons que l'utilisation de l'hypothèse de Boussinesq implique le calcul d'une viscosité turbulente. Que l'on utilise un modèle à 0, 1 ou 2 équations différentielles, le but premier reste le calcul de cette variable. Or sur le plan fondamental, accepter le concept de viscosité turbulente revient à conférer aux contraintes turbulentes, grandeurs ayant une origine convective non-linéaire, un caractère diffusif de type gradient, donc de nature linéaire. Par suite, il faut s'attendre à ce que les effets de la turbulence stabilisent les mécanismes instationnaires issus de la non-linéarité des équations de Navier-Stokes<sup>18</sup>.

### 3.2.1- Modèle algébrique

Pour simplifier l'écriture, on omet les symboles  $\bar{x}$  et  $\tilde{x}$  des variables moyennes. Un modèle de base en turbulence est le modèle algébrique, connu aussi sous le nom de modèle à zéro équation. Dans ce modèle, on néglige l'effet de l'énergie cinétique turbulente, c'est-à-dire que l'on pose  $k = 0$ . Il nous reste à modéliser la variable  $\mu_t$  (viscosité turbulente).

On constate avec des expériences numériques que sans modèle de turbulence, l'écoulement était laminaire jusqu'à un nombre de Reynolds approximatif de  $Re_c =$

4000. Donc, au-delà de cette valeur, il faut appliquer un modèle de turbulence pour faire la transition vers un régime turbulent. Ainsi, si  $Re > 4000$ , le modèle algébrique<sup>4</sup> est donné par:

$$\mu_t = \alpha \mu_t^2 + (1 - \alpha) \mu_t^1. \quad (3.4)$$

On utilise une combinaison de deux modèles, le premier est un modèle algébrique ( $\mu_t^1$ ) et le second ( $\mu_t^2$ ), est un modèle introduit pour faciliter le passage de l'écoulement laminaire à un écoulement turbulent. Les deux variables ont la forme suivante:

$$\mu_t^1 = \rho l_{mix}^2 (S : S)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \mu_t^2 = \left( \frac{Re}{Re_c} - 1 \right)$$

où

- $\alpha = 1/(Re - Re_c)$ ;
- $l_{mix} = \beta \delta(x)$  (Wilcox<sup>3</sup>);
- $\beta$  est entre 0.1 et 0.2 (Wilcox<sup>3</sup>);
- $\delta(x)$  = largeur du four à  $x$  (voir figure 1a).

La quantité  $\alpha$  tend à donner de plus en plus d'importance à  $\mu_t^1$ , au fur et à mesure que  $Re$  croît.

La principale difficulté dans l'utilisation d'un modèle de type algébrique réside dans l'approximation des constantes pour les effets de paroi et aussi pour la plume du jet de plasma. La présence simultanée de parois, de grandes zones de recirculation et d'un jet présentant de forts gradients pose des complications dans le cas particulier de cette enceinte. Cependant, la simplicité du modèle facilite son ajustement sur la base de raisonnement sur la physique des phénomènes présents.

### 3.2.2- Modèle à une équation pour l'énergie cinétique turbulente

Dans ce modèle, il faut ajouter au système d'équation (3.1)-(3.3), une équation différentielle aux dérivées partielles pour l'énergie cinétique turbulente ( $k^2 = \frac{1}{2} u_i'' u_i''$ ). Cette équation<sup>3,16</sup> pour  $k$  à la forme suivante:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla k = \tau : \nabla u - C_D \rho \frac{k^{3/2}}{l} + \nabla \cdot (\mu^* \nabla k) \quad (3.5)$$

où



- $\tau = \sigma_t - \frac{2}{3}\rho kI$ ;
- $\mu_t = \rho k^{1/2}l$ ;
- $C_D$  est entre 0.07 et 0.09 selon Wilcox<sup>3</sup>;
- $l \propto l_{mix}$ .

A priori, cette approche semble être un bon compromis pour le coût et la précision des calculs. La dépendance du modèle par rapport aux paramètres d'ajustement est plus faible qu'avec les modèles algébriques. Le paramètre d'ajustement ayant la plus grande influence est le coefficient de proportionnalité entre  $l$  et  $l_{mix}$ . Dans la littérature, le calcul de ce coefficient a été fait seulement près d'une paroi et est défini par Glushko<sup>19</sup> comme étant égale à  $1/K$ ,  $K$  étant la constante de von Karman ( $K = 0.41$ ). C'est pourquoi, on doit faire très attention dans l'application de ce modèle au jet confiné.

D'autres modèles<sup>3,16</sup> existent en deux dimensions, notamment des modèles à deux et quatre équations différentielles, mais ne seront pas discutés dans ce projet. Ces modèles, plus complexes, sont supérieurs sur le plan conceptuel mais comportent plus de termes à modéliser, sont instables et leur efficacité par rapport au modèle à une équation n'est pas démontrée pour le type de problème qui nous intéresse.

### 3.3- Approche simulation des grandes structures

La simulation des grandes structures (LES) pour un fluide turbulent est une méthode médiane entre les simulations numériques directes et l'approche écoulement moyen. Le principe de base de la méthode est de calculer explicitement les grandes structures de l'écoulement et modéliser l'effet des petites sans les calculer. Cela se réalise en 3 étapes distinctes. Premièrement, on applique un filtre aux équations de Navier-Stokes afin d'explicitement les structures turbulentes de plus petite échelle. Les équations résultantes décrivent l'évolution spatio-temporelle des grandes structures, mais possèdent un tenseur caractérisant l'effet des petites structures. La seconde étape est de remplacer ce tenseur par un modèle. Celui-ci dépend essentiellement de la grille de calcul, du filtre et des grandes échelles. L'étape finale est la simulation du système fermé via le modèle.

On peut dire que la LES est encore une méthode expérimentale et pose des difficultés majeures, notamment du point de vue numérique. Notons d'abord qu'il faut utiliser un filtre pour faire la distinction entre les grandes et les petites structures. On utilise généralement des filtres de la forme suivante:

$$\mathcal{F}(w(t)) = \int_{\Omega} G(d(x, y)) w(y, t) dy$$

avec  $\int_{\Omega} G(y) dy = 1$ . Un exemple classique de filtre est donné par

$$\mathcal{F}(w(t)) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\text{supp}(\psi_i)} w(t) d\Omega \right) \psi_i$$

où  $w(t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) \psi_i$ . Or on ne sait interpréter le résultat des simulations que si la grille de calcul est uniforme. Dans le cas contraire, des études récentes<sup>37</sup> montrent que le gradient de taille de mailles crée un effet diffusif (croissance de la taille) ou anti-diffusif (décroissance de la taille). Cet effet modulateur sur la diffusion entre en conflit avec le transport des structures turbulentes et rend difficile l'interprétation des résultats.

Outre les questions théoriques que suscite la LES, son potentiel en tant qu'alternative au calcul d'écoulements moyens justifie que l'on s'y intéresse. On considère donc un découplage d'une fonction générique  $\phi$  par un filtre:

$$\phi = \mathcal{F}(\phi) + \phi',$$

où

- $\mathcal{F}(\phi)$ : partie filtrée,
- $\phi'$ : fluctuations résiduelles (par définition  $\phi' = \phi - \mathcal{F}(\phi)$ ).

On définit aussi l'opérateur  $\tilde{\phi}$  (filtre pondéré par la masse):

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi''$$

où

- $\phi'' \triangleq \phi - \tilde{\phi}$ ,
- $\tilde{\phi} = \frac{\mathcal{F}(\rho\phi)}{\mathcal{F}(\rho)}$ .

On réécrit les équations de Navier-Stokes avec cette approche de découplage, et on obtient les mêmes équations de Reynolds compressibles et les mêmes corrélations qu'avec l'écoulement moyen mais pour les variables filtrées plutôt que moyennes. Cette fois-ci pour le tenseur de Reynolds  $R$ , on utilise une hypothèse semblable à l'hypothèse de Boussinesq pour les écoulements moyens:

$$R = -\bar{\rho} \widetilde{u'' u''} = -\frac{2}{3}(\bar{\rho}k + \mu_t \nabla \cdot \tilde{u})I + \mu_t(\nabla \tilde{u} + \nabla \tilde{u}^t)$$

où

- $\mu_t$  est un coefficient de viscosité attribuable aux fluctuations résiduelles,
- $k$  est l'énergie cinétique associée aux fluctuations résiduelles ( $k^2 = \frac{1}{2} u_i'' u_i''$ ).

Cette hypothèse nous permet d'écrire la forme non-conservative et sans dimension des équations de Navier-Stokes pour l'écoulement filtré:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \tilde{u} \cdot \nabla \bar{\rho} + \bar{\rho} \nabla \cdot \tilde{u} = 0. \quad (3.6)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \bar{\rho} (\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u} + \nabla \bar{\theta} - \nabla \cdot \tilde{\sigma}_t = 0 \quad (3.7)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{T} + \bar{\theta} \nabla \cdot \tilde{u} - \nabla \tilde{u} : \tilde{\sigma}_t + \nabla \cdot (-\kappa_t^* \nabla \tilde{T}) = 0 \quad (3.8)$$

où

- $\bar{\theta} = \bar{p} + \frac{2}{3} \bar{\rho} k$ ;
- $\tilde{\sigma}_t = 2\mu^* \tilde{S} - (\frac{2}{3} \mu^* \nabla \cdot \tilde{u}) I$ ;
- $\tilde{S} = \frac{1}{2} (\nabla \tilde{u} + \nabla \tilde{u}^t)$ ;
- $\mu^* = \frac{\mu + \mu_t}{Re}$ ;
- $Re = \frac{\rho_r |u_r| L_r}{\mu_r}$ ;
- $\kappa_t^* = (\frac{\gamma}{Re}) (\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t})$ ;  $Pr = \frac{C_p \mu_r}{\kappa_r}$ ,  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

Les termes à modéliser sont analogues à ceux des équations en écoulement moyen, et les mêmes hypothèses de modélisation peuvent être utilisées dans les deux cas, mais en remplaçant les variables moyennes par les variables filtrées.

### 3.3.1- Modèle algébrique

Ici encore, on omet les symboles  $\bar{x}$  et  $\tilde{x}$  des variables filtrées afin de simplifier l'écriture. Dans ce modèle, on néglige l'effet de l'énergie cinétique turbulente imputable aux fluctuations résiduelles, c'est-à-dire, on pose  $k = 0$  et il reste seulement à modéliser la variable  $\mu_t$  (viscosité attribuable aux fluctuations résiduelles). Comme dans le cas du modèle algébrique pour les écoulements moyens, on utilise  $\mu_t^1$  et  $\mu_t^2$  pour faciliter le passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent (transitoire). Maintenant, la variable  $\mu_t^1$  est une fonction reliée au maillage et prend la forme suivante:

$$\mu_t^1 = \rho l_{mix}^2 (S : S)^{\frac{1}{2}} \text{ où } l_{mix} = C_0 * \bar{h}.$$

La constante  $\bar{h}$  est un paramètre caractérisant la taille des mailles. Normalement, les calculs en LES sont faits sur des grilles (maillages) uniformes ( $\Delta x \Delta y = \text{constante}$ ). Mais le maillage utilisé (voir figure 4b) n'étant pas régulier, il faut calculer une

constante pour  $\bar{h}$ . On choisit de calculer une longueur moyenne de toutes les mailles. Donc, si  $Re > 4000$ , on applique dans les calculs, le modèle algébrique<sup>3</sup> qui a la forme suivante:

$$\mu_t = \alpha \mu_t^2 + (1 - \alpha) \mu_t^1 \quad (3.9)$$

où

- $\mu_t^1 = \rho l_{mix}^2 (S : S)^{\frac{1}{2}}$ ;
- $\mu_t^2 = (\frac{Re}{Re_c} - 1)$ ;
- $\alpha = 1 / (Re - Re_c)$ ;
- $l_{mix} = C_0 * \bar{h}$ ;
- $C_0 = 0.4$ ;
- $\bar{h}$ : taille caractéristique des mailles du maillage.

La modélisation par simulation des grandes structures est une méthode dont le potentiel est élevé. Cependant, les contraintes de coût en temps de calcul et des difficultés de validation rendent cette approche difficile à utiliser.

### 3.3.2- Modèle à une équation pour l'énergie cinétique turbulente

Ce modèle à une équation est semblable au modèle de l'approche écoulement moyen (à la valeur des constantes près), mais encore en remplaçant les variables moyennes par les variables filtrées. Il faut alors ajouter au système d'équation (3.6)-(3.8), une équation différentielle aux dérivées partielles pour l'énergie cinétique associée aux fluctuations résiduelles ( $k^2 = \frac{1}{2} u_i'' u_i''$ ). Cette équation<sup>20</sup> est semblable à l'équation (3.5):

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla k = \tau : \nabla u - C_\epsilon \rho \frac{k^{3/2}}{h} + \nabla \cdot (\mu^* \nabla k) \quad (3.10)$$

où

- $\tau = \sigma_t - \frac{2}{3} \rho k I$ ;
- $\mu_t = C_\mu \rho k^{1/2} h$ ;
- $C_\epsilon = 0.91$ ;
- $C_\mu = 0.086$ .

Encore dans ce modèle, on utilise à la place du  $h$ , une constante  $\bar{h}$  qui est proportionnelle à la taille moyenne de toutes les mailles.

### 3.4- Résumé des modèles de turbulence

Modèle algébrique:

$$\mu_t = \alpha \mu_t^2 + (1 - \alpha) \mu_t^1$$

(EM)

(LES)

- |  |  |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\mu_t^1 = \rho l_{mix}^2 (S : S)^{\frac{1}{2}}</math>;</li> <li>• <math>\mu_t^2 = (\frac{Re}{Re_c} - 1)</math>;</li> <li>• <math>\alpha = 1/(Re - Re_c)</math>;</li> <li>• <math>l_{mix} = \beta \delta(x)</math>;</li> <li>• <math>\beta</math> est entre 0.1 et 0.2;</li> <li>• <math>\delta(x)</math> = largeur du four à <math>x</math>;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\mu_t^1 = \rho l_{mix}^2 (S : S)^{\frac{1}{2}}</math>;</li> <li>• <math>\mu_t^2 = (\frac{Re}{Re_c} - 1)</math>;</li> <li>• <math>\alpha = 1/(Re - Re_c)</math>;</li> <li>• <math>l_{mix} = C_0 * \bar{h}</math>;</li> <li>• <math>C_0 = 0.4</math>;</li> <li>• <math>\bar{h}</math>: taille caractéristique des mailles.</li> </ul> |
|--|--|

Modèle à une équation pour l'énergie cinétique turbulente:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla k = \tau : \nabla u - C_x \rho \frac{k^{3/2}}{l} + \nabla \cdot (\mu^* \nabla k)$$

(EM)

(LES)

- |   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\tau = \sigma_t - \frac{2}{3} \rho k I</math>;</li> <li>• <math>\mu_t = \rho k^{1/2} l</math>;</li> <li>• <math>C_x = C_D</math> entre 0.07 et 0.09;</li> <li>• <math>l \propto l_{mix}</math>;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\tau = \sigma_t - \frac{2}{3} \rho k I</math>;</li> <li>• <math>\mu_t = \rho k^{1/2} l</math>;</li> <li>• <math>C_x = C_\epsilon = 0.91</math>;</li> <li>• <math>l \propto \bar{h}</math>.</li> </ul> |
|---|--|

## CHAPITRE 4

### MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS ET MISE EN ŒUVRE

Dans ce chapitre, on présente la méthode des éléments finis utilisée pour la résolution des équations de Navier-Stokes et du modèle de turbulence à une équation. Plus particulièrement, on présente la formulation variationnelle associée à la méthode des éléments finis, la discrétisation spatio-temporelle, et la résolution des systèmes d'équations algébriques.

#### 4.1- Formulation variationnelle

On obtient une formulation variationnelle<sup>21</sup> du problème en multipliant chaque équation différentielle par des fonctions tests. Ces fonctions tests sont éléments de l'espace  $V$  qui a la forme suivante:

$$V = \{\phi \in H^1(\Omega) \mid \phi|_{\Gamma_D} = 0\},$$

où  $\Gamma_D$  est la partie du bord de  $\Omega$  où l'on impose des conditions de Dirichlet. Les conditions aux limites à imposer aux fonctions tests sont à mettre en relation avec les conditions aux limites pour les variables correspondantes. Ensuite, on intègre chacune des équations sur le domaine  $\Omega$ . On intègre par partie les termes d'ordre deux afin d'en réduire l'ordre, ceci revient à utiliser une formule de Green. Notons que l'imposition de conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann homogènes fait disparaître les termes de bord provenant de la formule de Green.

Par exemple, pour l'équation de l'énergie cinétique turbulente, on aura la formulation variationnelle suivante:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial k}{\partial t} \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho u \cdot \nabla k \phi \, d\Omega - \int_{\Omega} \tau : \nabla u \phi \, d\Omega + C_D \int_{\Omega} \rho \frac{k^{3/2}}{l} \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \mu^* \nabla k \cdot \nabla \phi \, d\Omega = 0 .$$

## 4.2- Discrétisation spatiale

La formulation variationnelle de la section précédente, nous amène à travailler dans des espaces vectoriels de dimension finie pour lesquels on peut assez facilement expliciter une base. Cela nous permet d'écrire la solution comme combinaison linéaire des éléments de la base. Pour construire ces sous-espaces de dimension finie, on utilise la méthode des éléments finis. Les espaces d'approximation sont générés par des fonctions ayant un support restreint à quelques éléments adjacents.

Pour mettre en œuvre la méthode, on commence donc par trianguler le domaine, c'est-à-dire à le partitionner en triangles. On appelle  $T$  (ne pas confondre avec la température, aussi notée  $T$ ) un élément générique de cette triangulation, et  $T_h$  la triangulation. L'élément retenu pour l'étude est le  $P_1 - P_1isoP_2$  (voir la figure 1b). On construit une triangulation  $T_{h/2}$  à partir de  $T_h$  de la façon suivante: chaque élément est sous-divisé en quatre sous-éléments par les milieux des arêtes. On définit les espaces d'approximation<sup>1</sup> suivant:

$$V_h = \{\rho_h \in V \mid \rho_h \in C^0(\Omega), \forall T \in T_h, \rho_h|_T \in P^1(T)\} \subset V;$$

$$Z_h = \{T_h \in Z \mid T_h \in C^0(\Omega), \forall T \in T_h, T_h|_T \in P^1(T)\} \subset Z;$$

$$U_h = \{u_h \in U \mid u_h \in (C^0(\Omega))^2, \forall T \in T_{h/2}, u_h|_T \in (P^1(T))^2\} \subset U;$$

$$K_h = \{k_h \in K \mid k_h \in C^0(\Omega), \forall T \in T_h, k_h|_T \in P^1(T)\} \subset K;$$

où  $P^1(T)$  désigne l'espace des polynômes de degré au plus 1 sur  $T$ . Ces espaces d'approximation sont utilisés dans la formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes, avec les espaces  $V$ ,  $Z$ ,  $U$ ,  $K$ , associés aux variables  $\rho$ ,  $T$ ,  $u$ ,  $k$  respectivement. Mais on restreint l'approximation aux sous-espaces  $V_h$ ,  $Z_h$ ,  $U_h$ ,  $K_h$ , pour chaque variable, respectivement.



De ces espaces, on peut alors définir des fonctions de base sur chaque triangle du maillage  $(\phi_i)_{i=1,2,3}$ . On a, à chaque noeud du triangle, une fonction de base valant 1 en ce noeud et s'annulant aux autres noeuds. L'intérêt de la formulation en éléments finis provient du caractère local des fonctions de base  $\phi_i$ , dont le support est construit sur le maillage et s'étend à quelques éléments adjacents seulement. Un autre avantage important de ces fonctions est de s'adapter sans difficulté aux géométries les plus complexes et de permettre de raffiner les calculs dans les zones sensibles.

Les fonctions de  $V_h, Z_h, U_h$  et  $K_h$  sont des combinaisons linéaires des fonctions de base et leur valeur en un point d'un triangle est définie par interpolation<sup>1</sup>. Ainsi, si on note  $(f_i), i = 1, 2, 3$  les valeurs d'une fonction  $f$  aux 3 sommets d'un triangle, sa valeur en un point  $(x, y)$  du triangle est obtenue en 2 étapes:

- 1) déterminer les coordonnées barycentriques du point  $(x, y)$  en résolvant:

$$\begin{aligned}\phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 &= x \\ \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 &= y \\ \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 &= 1\end{aligned}\tag{4.1}$$

où  $(x_i, y_i)$  sont les coordonnées des sommets du triangle.

- 2) calculer  $f$  par interpolation:

$$f = \phi_1 f_1 + \phi_2 f_2 + \phi_3 f_3.$$

La résolution du système dont les équations sont données par la forme variationnelle restreinte aux espaces d'approximation, nécessite le calcul de résidus. Afin d'obtenir les résidus, il faut évaluer les intégrales de la forme variationnelle. Puisque les approximations de  $\rho, u$  et  $k$  sont des combinaisons linéaires des fonctions de base, calculer ces intégrales est relativement simple. À titre d'exemple, détaillons le calcul de  $\int_{\Omega} \rho_h u_h \cdot \nabla k_h \phi_h d\Omega$  pour des approximations  $\rho_h, u_h, k_h$ , et la fonction de base  $\phi_h$ . On a

$$\int_{\Omega} \rho_h u_h \cdot \nabla k_h \phi_h d\Omega = \sum_{T \in \Omega} \int_T \rho_h u_h \cdot \nabla k_h \phi_h dT$$

et

$$\int_T \rho_h u_h \cdot \nabla k_h \phi_h dT = \int_T \rho_h u_h^1 \frac{\partial k_h}{\partial x} \phi_h dT + \int_T \rho_h u_h^2 \frac{\partial k_h}{\partial y} \phi_h dT.$$

Nous allons détailler le calcul d'une des 2 intégrales, l'autre étant identique. Mais auparavant, voyons comment calculer  $\frac{\partial k_h}{\partial x}$ . On a  $k_h|_{t=(n+1)\Delta t} = k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + k_3\phi_3$  où  $\phi_i$  et  $k_i$  sont les fonctions de base et les valeurs de  $k_h$  pour les 3 sommets du triangle  $T$  et donc,

$$\frac{\partial k_h}{\partial x} = k_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + k_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial x}.$$

On obtient les dérivées des fonctions de base via l'équation 4.1. En effet, ce système s'écrit:

$$A \phi = (x \ y \ 1)^t$$

d'où  $\phi = A^{-1} (x \ y \ 1)^t$  et donc  $\frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial y}$ ,  $i = 1, 2, 3$  car on a une relation linéaire explicite entre  $x, y$  et  $\phi$ .

Revenons maintenant au calcul de  $\int_T \rho_h u_h^1 \frac{\partial k_h}{\partial x} \phi_h dT$ . Puisque  $\rho_h, u_h^1, k_h, \phi_h$ , sont tous de polynômes de degré 1 sur  $T$ , le produit  $\rho_h u_h^1 \frac{\partial k_h}{\partial x} \phi_h$  est un polynôme de degré 3 en  $\phi_i$ . Or, on peut montrer<sup>10,21</sup> que

$$\int_T \phi_1^{n_1} \phi_2^{n_2} \phi_3^{n_3} dT = 2 |T| \frac{n_1! n_2! n_3!}{(n_1 + n_2 + n_3 + 2)!},$$

ce qui nous permet de compléter le calcul. Il convient de remarquer que la valeur ainsi obtenue est la valeur exacte de l'intégrale.

### 4.3- Discrétisation temporelle

Soit  $\Delta t$  le pas de temps, on note  $\omega^n$  la valeur de  $\omega$  au temps  $t = n\Delta t$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), et on approxime les dérivées temporelles apparaissant dans les équations de la formulation variationnelle à l'aide du schéma d'Euler implicite

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} |_{t=(n+1)\Delta t} = \frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

Afin d'accélérer les calculs dans les cas stationnaires, on introduit un faux pas de temps. C'est un vecteur  $\Delta t[i]$  (pas de temps local), dont les valeurs sont données à partir d'une analyse de stabilité pour une équation de convection-diffusion discrétisée à l'aide d'un schéma d'Euler explicite. Le schéma temporel doit alors être vu comme une méthode de relaxation dont le but est d'améliorer le conditionnement du système d'équations, et donc réduire le temps de résolution. Il convient d'insister sur le fait que ceci n'est valide que pour le calcul de solutions stationnaires.

Dans le cas contraire, toutes les entrées du vecteur  $\Delta t[i]$  doivent être égales à une constante  $\Delta t$ . Cependant, le conditionnement est si élevé pour un grand système d'équations qu'il est nécessaire de recourir à une méthode de sous-pas afin de faire converger les solveurs itératifs pour les systèmes d'équations non-linéaires.

La méthode utilisée consiste à se donner un pas de temps global, une constante  $\Delta t_g$ , un vecteur de pas de temps locaux  $\Delta t[i]$  et avancer d'un pas  $\Delta t_g$  par petits pas proportionnels à  $\Delta t[i]$ . L'algorithme a la forme suivante:

- 1- Fixer la constante  $\Delta t_g$ , le vecteur  $\Delta t[i]$  et le facteur  $\alpha$
- 3- Boucle de temps globale
  - 3.1- Initialisation du temps local cumulé  $\Delta t_{cum}[i] = 0$
  - 3.2- Initialisation du temps local  $\Delta t_{loc}[i] = \Delta t[i]$
  - 3.3- Boucle de temps locale
    - 3.3.1- Poser  $d[i] = \Delta t_{cum}[i] + \Delta t_{loc}[i]$
    - 3.3.2- Projeter  $d[i]$  dans l'intervalle  $[0, \Delta t_g]$
    - 3.3.3- Poser  $\Delta t_{loc}[i] = d[i] - \Delta t_{cum}[i]$
    - 3.3.4- Incrémenter  $\Delta t_{cum}[i]$  de  $\Delta t_{loc}[i]$
    - 3.3.5- Résolution du système avec  $\Delta t_{loc}[i]$
    - 3.3.6- Augmenter  $\Delta t_{loc}[i]$  d'un facteur  $\alpha$
    - 3.3.7- Fin de la boucle locale interne si  $\Delta t_{cum}[i] = \Delta t_g, \forall i$ .

Cette méthode nous permet de contrôler le conditionnement du système et donc de faciliter la convergence. De plus, le paramètre  $\alpha$  offre la possibilité de diminuer de façon significative le temps de résolution en augmentant le pas de temps local de concert avec la diminution du nombre effectif d'équations à résoudre dans la boucle interne.

#### 4.4- Discrétisation temporelle pour l'équation en $k$

L'équation pour l'énergie cinétique turbulente  $k$ , est résolue d'une manière indépendante des quatre équations formant le système de Navier-Stokes. Il est justifié de faire un tel découplage car, d'une part, il y a peu d'interaction entre  $k$  et les autres variables, et d'autre part, le terme de dissipation,  $[C_D k^{3/2}/l]$ , pose des difficultés numériques qu'il convient d'isoler.

On résout l'équation en  $k$  par une méthode de type pas fractionnaire<sup>22,23</sup>. Elle consiste à séparer la résolution en deux étapes, après l'application du schéma d'Euler

implicite:

$$\rho\left(\frac{k^{n+1} - k^n}{\Delta t}\right) + \rho u \cdot \nabla k^n - \tau : \nabla u + C_D \rho \frac{k^{n3/2}}{l} - \nabla \cdot (\mu^* \nabla k^n) = 0.$$

On introduit une variable temporaire  $\tilde{k}$ :

$$\rho\left(\frac{(k^{n+1} - \tilde{k}) + (\tilde{k} - k^n)}{\Delta t}\right) + \rho u \cdot \nabla k^n - \tau : \nabla u + C_D \rho \frac{k^{n3/2}}{l} - \nabla \cdot (\mu^* \nabla k^n) = 0.$$

Maintenant, on résout cette équation en deux étapes.

1- Étape de convection:

$$\frac{(\tilde{k} - k^n)}{\Delta t} + u \cdot \nabla k^n = 0 \quad (4.2)$$

2- Étape de diffusion:

$$\rho\left(\frac{(k^{n+1} - \tilde{k})}{\Delta t}\right) - \tau : \nabla u + C_D \rho \frac{k^{n3/2}}{l} - \nabla \cdot (\mu^* \nabla k^n) = 0 \quad (4.3)$$

L'étape de convection est résolue par la méthode des caractéristiques explicites, tandis que l'étape de diffusion est résolue à l'aide d'un schéma d'Euler implicite.

La méthode des caractéristiques<sup>24</sup> appliquée à l'équation (4.2), revient à résoudre:

$$\frac{dX}{dt^n} = g(x) \quad \text{où} \quad g(x) = \begin{pmatrix} -u(x, y) \\ -v(x, y) \end{pmatrix}$$

avec  $x(t^n = 0) = x_0$  et  $y(t^n = 0) = y_0$ .

Le point  $(x_0, y_0)$  est le point de départ de la remontée de la caractéristique. La résolution de ce système fournit l'accroissement des variables le long de la caractéristique (voir figure 1c). Les coordonnées des points résultants  $(x(\Delta t), y(\Delta t))$  sont les coordonnées du pied de la caractéristique. Ensuite, on cherche dans quel élément se retrouve le point  $(x(\Delta t), y(\Delta t))$ , et à l'aide d'un polynôme d'interpolation, on calcule une valeur approchée pour chaque variable remontée par la caractéristique.

#### 4.5- Méthode de résolution

La méthode utilisée est du type Newton inexacte. Elle est appelée Newton-GMRES<sup>25</sup> (Generalized Minimum Residual) et a pour objet de résoudre les systèmes d'équations non-linéaires:

$$F(u) = 0, \quad u \in \mathbf{R}^n.$$

Le principe de la méthode Newton-GMRES est de minimiser la norme quadratique du résidu  $F(u)$  sur un sous-espace. Le résultat est une “boîte noire” pour la résolution du système d’équations qui ne nécessite qu’un sous-programme de calcul de  $F(\tilde{u})$  connaissant  $\tilde{u}$ . L’expérience montre que cette méthode est très performante et robuste, et elle a l’intérêt de ne demander que des résidus. En effet, le processus itératif de base est du type Newton

$$J_n v_n = -F_n$$

où  $F_n = F(u_n)$ ,  $v_n = (u_{n+1} - u_n)$ , et  $J_n$  est la matrice Jacobienne de  $F$  en  $u_n$ . La solution est approximée en résolvant le problème de minimisation

$$\min_{v_n \in K_n} \|J_n v_n - r^0\|^2$$

où  $r^0 = -F(v^0) - J_n v^0$ ,  $v^0$  étant une approximation initiale, et  $K_n$  l’espace de Krilov de dimension  $k$  généré par les vecteurs  $r^0, J_n r^0, \dots, J_n^{k-1} r^0$ . Or en utilisant une technique itérative de minimisation, tout ce qu’il est nécessaire de calculer est le résidu  $F(v^0)$  et  $J_n w$ . Afin de ne pas avoir à construire la matrice jacobienne  $J_n$ , on l’approxime par une formule aux différences

$$J_n w = \frac{\partial F(v_n)}{\partial w} \approx \frac{F(v_n + hw) - F(v_n)}{h}.$$

#### 4.6- Maillages adaptatifs

On utilise un mailleur adaptatif anisotrope développé par M.-G. Vallet<sup>26</sup>, pour augmenter la précision et pour améliorer l’écoulement du fluide dans le four à plasma (principalement l’allongement de la flamme et l’entrée du fluide dans la cheminée). Ce mailleur automatique bidimensionnel contrôle localement la taille et la forme des éléments de la triangulation. Les mailles sont générées par une méthode de type Delauney-Voronoi. La taille et l’étirement des triangles est gouverné par un changement de métrique et le maillage résultant est caractérisé par des arêtes de longueur presque constante dans la métrique donnée. Le mailleur adaptatif se réfère également à une solution du maillage et le critère d’adaptation est basé sur le champ de Mach.

On voit sur la figure 5a, le premier maillage utilisé pour recouvrir la géométrie du four. Ce maillage possède 997 noeuds, et il a été construit avec l’utilitaire Emc2. Après plusieurs calculs et quelques utilisations du mailleur adaptatif, il est facile de remarquer l’amélioration du maillage sur la figure 5b. Ce nouveau maillage a 5815 noeuds, et on voit bien l’entrée du fluide qui est dessinée dans le maillage même. Ce nouveau maillage améliore la convergence, corrige les problèmes liés à l’entrée de la cheminée et facilite l’allongement de la flamme.

## CHAPITRE 5

### PRÉSENTATION ET DISCUSSION DES RÉSULTATS

L'écoulement dans le four a été simulé, sous diverses conditions d'expérimentations, à partir des modèles décrits dans les chapitres précédents.

Les calculs des cas tests sont basés sur les caractéristiques physiques suivantes, proches des propriétés de l'air:

- $C_v = 717.5 \text{ J/kg.K}$ ;
- $\gamma = 1.4$ ;
- $|u_r| = 600 \text{ m/s}$ ;
- $\rho_r = 0.1708 \text{ kg/cm}$ ;
- $T = 8000 \text{ K}$ , température du gaz à l'entrée;
- l'angle d'attaque est de 7 degrés;
- le nombre de Mach est de 0.34.

Sur les parois du four,  $\Gamma_F$ , on impose une condition d'adhérence pour la vitesse et une condition adiabatique pour la température.

Bien qu'une partie de ces conditions aux limites soit proche des conditions physiques, rappelons que le modèle d'écoulement ne représente pas la situation physique du four chauffé au plasma. Outre l'absence de modèle pour le transfert de chaleur aux parois et pour le bilan radiatif, le présent code de calcul ne tient pas compte de la nature très particulière du jet. Mentionnons aussi que l'aspect bidimensionnel du modèle en limite beaucoup la représentativité. Cependant, rappelons aussi que le but du travail était d'explorer diverses approches afin de prendre en compte la turbulence dans des conditions qui permettent d'orienter le choix en vue d'un outil de simulation plus élaboré. En celà, le code de calcul et les modèles utilisés sont tout à fait valables. Nous y reviendrons après avoir exposé les principaux résultats.

Afin de mettre en évidence les différentes méthodes de modélisation de la turbulence, on sépare les résultats numériques en trois groupes. Le tableau suivant résume les caractéristiques des cas tests:

Cas	Éléments	Re	Simulation
Groupe A:			
A1	1835	1000	directe
A2	11174	4000	directe
Groupe B (Écoulement moyen):			
B1	11174	15000	turb. alg.
B2	11174	50000	turb. alg.
B3	11174	15000	turb. 1 éq
B4	11174	15000	turb. 1 éq
Groupe C (LES):			
C1	11174	15000	turb. alg.

Le groupe A fait référence à des simulations directes, c'est-à-dire une résolution des équations de Navier-Stokes pour les variables instantanées. Le groupe B présente les résultats obtenus avec une modélisation de la turbulence par l'approche écoulement moyen (section 3.2). Tandis que le groupe C présente les résultats obtenus avec une modélisation de la turbulence via l'approche simulation des grandes structures (section 3.3).

Tous les calculs ont été effectués avec le même maillage adapté qui possède 5815 sommets et 11174 éléments (figure 5b), sauf pour le cas A1, où un maillage plus grossier s'est avéré suffisant (figure 5a). Dans chacun des cas, on présente une page contenant deux figures. Une figure montrant les vecteurs vitesses, et l'autre montrant les iso-valeurs de température. Celles-ci donnent une bonne indication de la dispersion de la chaleur dans le four à plasma.

Remarque: Puisque les simulations ne représentent aucun cas réel et que seul les aspects numériques et qualitatifs nous importent, aucune information quantitative n'a été introduite sur les figures.  $\square$



## Groupe A

La simulation numérique de l'écoulement à  $Re = 1000$  (cas A1) donne un résultat laminaire (figure 6) où l'on distingue deux zones de recirculation. Elles sont confinées près des parois supérieure et inférieure de la géométrie et la vitesse du fluide  $y$  est très faible. Lorsque l'on augmente le nombre de Reynolds de 1000 à 4000, en prenant soin d'adapter le maillage en conséquence, l'écoulement devient plus complexe. Les zones de recirculation s'agrandissent, la vitesse du fluide s'accroît et les tourbillons commencent à interagir entre eux et avec la cheminée. Lorsque l'on approche de  $Re = 4000$ , l'état stationnaire devient difficile à atteindre numériquement. Outre les deux tourbillons principaux, des tourbillons secondaires sont apparus dans les coins. Le résultat obtenu à  $Re = 4000$  (cas A2) nous servira de condition initiale pour les autres calculs (figure 7).

## Groupe B

Dans ce groupe de cas tests, la modélisation de la turbulence est réalisée via l'approche écoulement moyen. On compare deux modèles de turbulence, un modèle algébrique et un modèle à une équation aux dérivées partielles.

Les cas B1 (figure 8) et B2 (figure 9) correspondent à des simulations avec un modèle de turbulence algébrique et ne diffèrent que par le nombre de Reynolds. Il est de 15000 pour le cas B1 et de 50000 pour le cas B2. Comparativement au cas A2, le jet d'entrée est beaucoup plus allongé et il va frapper la paroi supérieure du four. Sur ces figures, les deux tourbillons principaux sont encore présents, mais ils se sont déplacés dans la même direction que le jet. Les tourbillons secondaires ont pris de l'amplitude et tendent à interagir avec les tourbillons principaux, le jet et la cheminée. Nous avons atteint un état stationnaire pour ces deux simulations.

Les cas B3 (figure 10) et B4 (figure 11) correspondent à deux temps différents d'une même simulation avec un modèle de turbulence à une équation aux dérivées partielles. Le nombre de Reynolds est de 15000 et l'écoulement obtenu numériquement est instationnaire. En fait, cela n'est pas surprenant car rien n'indique que l'écoulement moyen doit être stationnaire. Bien au contraire, la complexité du problème physique laisse plutôt entrevoir une solution instationnaire. Cependant, rien ne nous assure que cette situation représente un phénomène réel. En effet, le modèle de turbulence utilisé a été développé pour des écoulements à fort cisaillement et rien ne nous indique qu'il soit raisonnable de l'utiliser pour un écoulement caractérisé par d'importantes zones de recirculation. Remarquons que cela n'est pas spécifique à ce modèle, c'est aussi le cas pour la majorité des modèles de turbulence pour les écoulements moyens.

Sur la figure 12, on remarque que l'énergie cinétique turbulente est très élevée aux abords de la cheminée. Cela indique qu'il y a une forte interaction entre l'écoulement à l'intérieur du four et la cheminée. Cette interaction crée de l'instabilité et est peut-être à l'origine du comportement instationnaire de l'écoulement moyen.

En remplaçant la cheminée par des conditions limites de sortie, les possibilités d'interactions seraient grandement limitées. Bien que cela diminuerait le réalisme du modèle, ça permettrait d'obtenir un type d'écoulements pour lequel les modèles de turbulence donnent des résultats plus réaliste. Il nous a été impossible de vérifier cette assertion car l'imposition de tels conditions n'est pas possible avec le schéma de résolution utilisé. En effet, comme on ne connaît pas la solution à la sortie du four (base de la cheminée), il devient très difficile d'en imposer une car le système peu facilement correspondre à un problème mal posé. Notons que pour plusieurs modèles simplifiés, tel les équations d'Euler compressibles, ou encore, les équations de Navier-Stokes incompressibles, on sait comment remplacer la cheminée par des conditions aux limites qui correspondent à un problème bien posé. Cet aspect du modèle pourrait justifier l'abandon de l'approche compressible pour une approche basée sur les équations de Navier-Stokes incompressibles.

### Groupe C

Il nous a été impossible de réaliser une simulation complète avec un modèle pour la simulation des grandes structures. Nous avons largement sous-estimé la complexité des calculs nécessaires pour une telle simulation. En effet, avec une approche écoulement moyen, on postule généralement que l'état final est stationnaire et on utilise des techniques de résolution spécifique à la recherche d'un état stationnaire. La technique usuelle consiste à voir les dérivées temporelles pour le modèle instationnaire comme un terme de relaxation pour lequel le temps est un paramètre local. On parle alors de "faux pas de temps" ou de "pas de temps local". Cette technique revient à ajuster les échelles des équations du système afin d'améliorer le conditionnement. Pour le système non-linéaire associé aux équations de Navier-Stokes compressible, l'effet de cette astuce est draconien. Évidemment, cette technique n'a de sens que si la solution finale est stationnaire, ce qui n'est pas le cas lorsque l'on simule les grandes structures d'un écoulement turbulent.

Dans le cas précis de la simulation que nous avons tantée à  $Re = 15000$ , avec le modèle algébrique, le conditionnement était si mauvais qu'il fut nécessaire d'introduire une technique de sous-pas (voir section 4.3). Voici quelques données permettant d'apprécier l'accroissement de la complexité lorsque l'on passe d'une simulation d'écoulement moyen à une simulation des grandes structures (les calculs ont été réalisés sur HP9000-735):

cas B1:

- il faut 10 secondes cpu pour un “faux pas de temps”;
- il faut 8 heures cpu pour la simulation complète (figure 8);

cas C1:

- il faut 86 secondes cpu pour un pas de “temps réel”;
- il faut 320 heures cpu pour une simulation incomplète (figure 13).

La simulation des grandes structures est présentée à la figure 13. Elle est incomplète dans le sens que l'écoulement n'est pas encore pleinement développé. Néanmoins, on voit clairement que le tourbillon inférieur s'est scindé en deux, signe que des structures plus fines apparaissent progressivement.

## Conclusion.

Nous avons développé un modèle numérique pour simuler des écoulements turbulents dans un four. La géométrie et les conditions physiques sont inspirées d'un procédé industriel de récupération de l'écume d'aluminium par chauffage au plasma.

Le but premier du travail était d'étudier le comportement numérique et de comparer, via l'expérimentation numérique, deux approches différentes pour tenir compte de la turbulence: l'approche par simulation de l'écoulement moyen et l'approche par simulation des grandes structures.

L'écoulement étant caractérisé par un jet de gaz chaud à grande vitesse, compressible et fortement turbulent, nous avons opté pour une modélisation basée sur les équations de Navier-Stokes pour les fluides compressibles. La simulation de ce modèle par la méthode des éléments finis nécessite la prise en compte de la cheminée de sortie des gaz.

Les écoulements moyens obtenus via un modèle de turbulence algébrique et un modèle à une équation semblent montrer que l'on est hors de leur domaine de validité. Les expériences réalisées avec un modèle de simulation des grandes structures nous a permis d'évaluer les exigences de cette approche en regard des techniques numériques de résolution et de la complexité des calculs à réaliser. En outre, nous pouvons conclure que cette approche n'est pas encore applicable à des problèmes industriels. Des méthodes numériques efficaces pour les simulations d'écoulements instationnaires et des ordinateurs plus puissants sont des prérequis pour rendre cette approche utilisable.

Terminons par quelques recommandations:

- choisir un modèle de base plus simple que les équations de Navier-Stokes pour les fluides compressibles afin de remplacer la cheminée par des conditions aux limites. L'effet stabilisateur de ces conditions devrait être suffisant pour que les modèles de turbulence usuels donnent des résultats raisonnables;
- modéliser la turbulence via une approche écoulement moyen, avec un modèle algébrique adapté aux particularités de l'écoulement dans le four. Cela demande un travail de recherche important, mais semble nécessaire puisque les modèles usuels ont été développés pour des écoulements beaucoup plus simples.

### Références.

- 1- D.J. Tritton: "Physical fluid dynamics.", Oxford University Press (1988).
- 2- P.L. Violette, F. Baron, F. Lana, M. Kanniche: "Modélisation d'écoulements à masse volumique variable.", EDF HE-44/89-02 (1989).
- 3- D.C. Wilcox: "Turbulence modeling for CFD", DCW Industries Inc. (1993).
- 4- P. Bradshaw Ed. : "Turbulence, topics in applied physics", v.12, Springer-Verlag (1976).
- 5- V. de Brederode, P. Bradshaw: "Aero Rep. 72-19." , Imperial college London (1972).
- 6- A.F. Charwat (ed.): "Heat transfer and fluid mechanics Institute.", Stanford: University press (1965).
- 7- M.C. Chaturvedi: "ASCE J. Hydraulics division 89,61." (1963).
- 8- D.E. Abbott, S.J. Kline: "Trans. ASME 84D,317." (1962).
- 9- P.H. Rothe, J.P. Johnston: "Thermosciences division, Mech. Engg.", Dept., Stanford University (1975).
- 10- O. Pironneau: "Méthodes des éléments finis pour les fluides", Masson (1988).
- 11- P.J. Roache: "Computational fluid dynamics", Hermosa Publisher, ISBN 0-913478-05-9 (1972).
- 12- D. Laurence: "Tendance actuelles en modélisation statistique de la turbulence.", École de printemps de mécanique des fluides numériques, Carcans-Maubuisson (1995).
- 13- C.W. Gardiner: "Handbook of stochastic methods.", Second Edition, Springer-Verlag (1988).
- 14- A. Yoshizawa: "Statistical theory for compressible turbulent shear flows, with the application to subgrid modeling.", Physics Fluids, Vol. 29, No. 7, July (1986).

- 15- B. Escande: "Modélisation de l'interaction onde de choc/couche limite turbulente", Thèse de doctorat de l'École Centrale de Lyon (1986).
- 16- C. Benocci: "Introduction to the modeling of turbulence.", Von Karma Institute for fluid dynamics (1987).
- 17- C. Bègue, B. Cardot, O. Pironneau: "Simulation d'écoulements turbulents à moyenne instationnaire."
- 18- H.M. Hieu: "Physique et modélisation de la turbulence en écoulements de fluide.", École de printemps de mécanique des fluides numériques, Aussois (1991).
- 19- G.S. Glushko: "Turbulent boundary layer on a flat plate in a incompressible fluid.", Bull. Acad. Sci. URSS, Mech. Ser., No. 4, p. 13 (1965).
- 20- A. Yoshizawa: "Eddy-viscosity-type subgrid-scale model with a variable Smagorinsky coefficient and its relationship with the one-equation model in large eddy simulation.", Physics Fluids A, Vol. 3, No. 8, August (1991).
- 21- J.P. Chabard: "Analyse numérique en mécanique des fluides - méthodes d'éléments finis -.", EDF HE-41/88.02 (1988).
- 22- A. Caruso, N. Mechtoua: "Résolution par la méthode des éléments finis des équations de Navier-Stokes à masse volumique variable avec prise en compte de la turbulence.", EDF HE-44/92.03 (1992).
- 23- J.P. Chabard: "Projet N3S de mécanique des fluides.", EDF HE-41/88.09 (1989).
- 24- P. Esposito: "Résolution bidimensionnelle des équations de transport par la méthode des caractéristiques.", EDF HE/41/81.16 (1981).
- 25- Y. Saad, M.H. Schultz: "GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, SIAM J. Sci. Stat. Comp., 7 (1986).
- 26- M.G. Vallet: "Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs.", Thèse de doctorat de l'Université de Paris VI (1992).
- 27- A.H. Shapiro: "The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow.", The Ronald press company (1953).

- 28- J.S. Chan: "Multizone Navier-Stokes computations of viscous transonics flows around airfoils.", AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting, january 11-14 (1989).
- 29- S. Boivin: "Simulation d'écoulements compressibles à nombre de Reynolds élevé.", Thèse de doctorat de l'Université Laval (1990).
- 30- H. Schlichting: "Boundary-Layer theory.", McGraw Hill series in mechanical engineering, seventh edition (1979).
- 31- J.P. Leroux, P. Bauduin: "Mécanique des fluides.", Dunod (1972).
- 32- J.R. Viegas, T.J. Coakley: "Numerical investigation of turbulence models for shock separated boundary-layer flows.", AIAA 15th Aerospace Sciences Meeting, january 24-26 (1977).
- 33- Wen-Hsiung Li, Sau-Hai Lam: "Principles of fluid mechanics.", Addison-Wesley (1964).
- 34- J.P. Benque: "Modélisations d'écoulements turbulents isothermes.", EDF HE041/78/12 (1978).
- 35- D. Laurence, P.L. Viollet: "Cours de simulation numérique du LNH turbulence, thermohydraulique et stratifications.", Tome 1 et 2, EDF HE-41/91.13A (1991).
- 36- P.L. Viollet, M. Gabillard, N. Mechtoua: "Modélisation tridimensionnelle des plasmas thermiques en écoulements.", EDF HE-44/89.29B (1989).
- 37- S. Ghosal, P. Moin: "The basic equations for the large eddy simulation of turbulent flows in complex geometry.", J. Comput. Physics, 118 (1995).

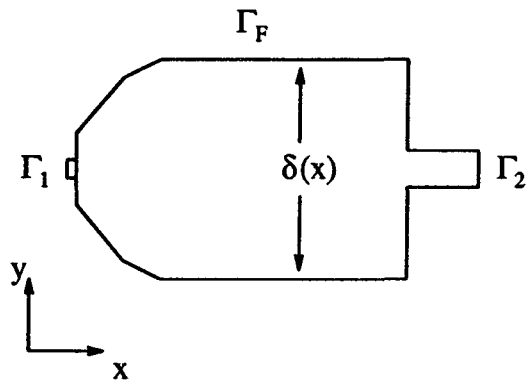


Figure 1a: domaine de calcul.

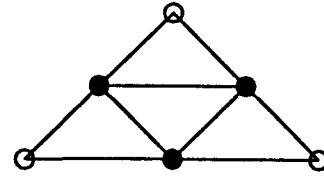


Figure 1b: element P1isoP2.

○ : ddl en  $U, T, k, p, \rho$

● : ddl en  $U$

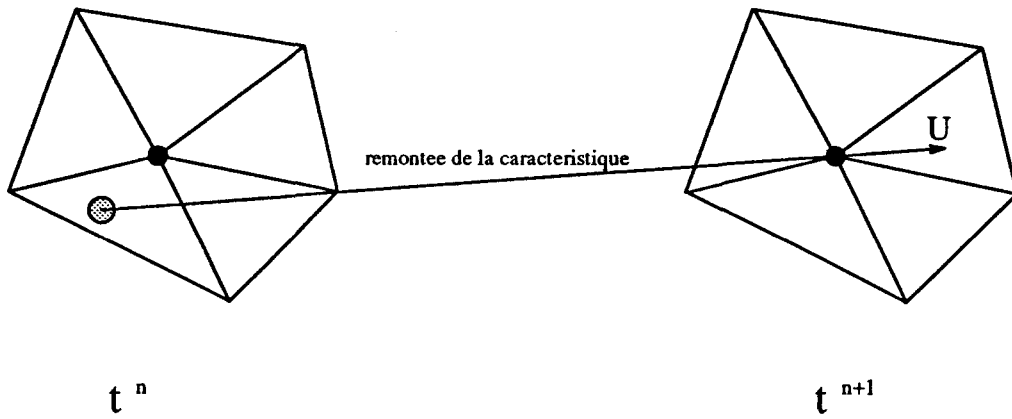


Figure 1c: methode des caracteristiques.



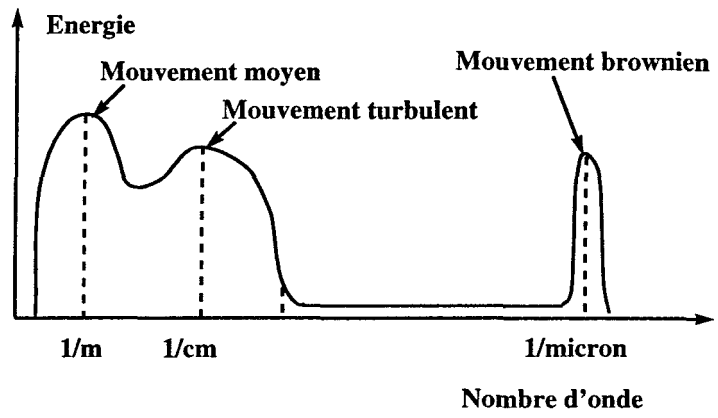


Figure 2: niveau d'énergie associe aux mouvements instationnaires.

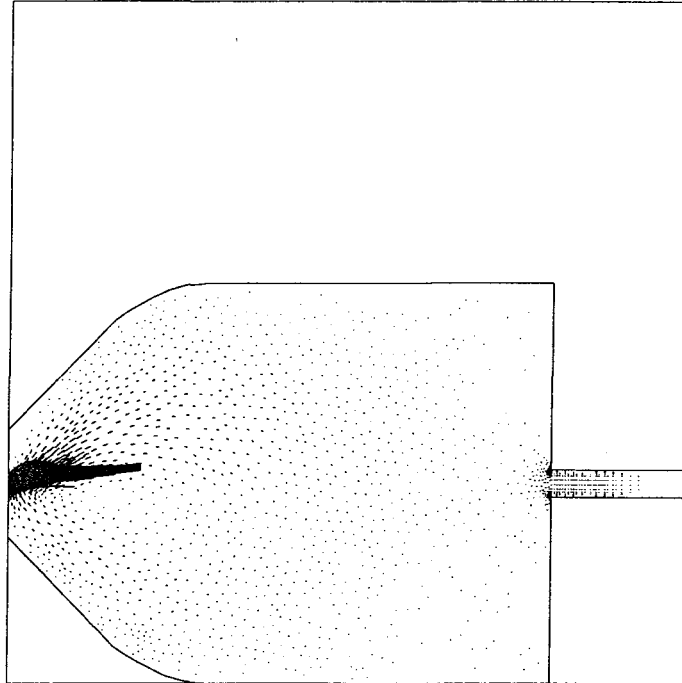


Figure 3a: vecteurs vitesses,  $Re=2000$ , avant correction.

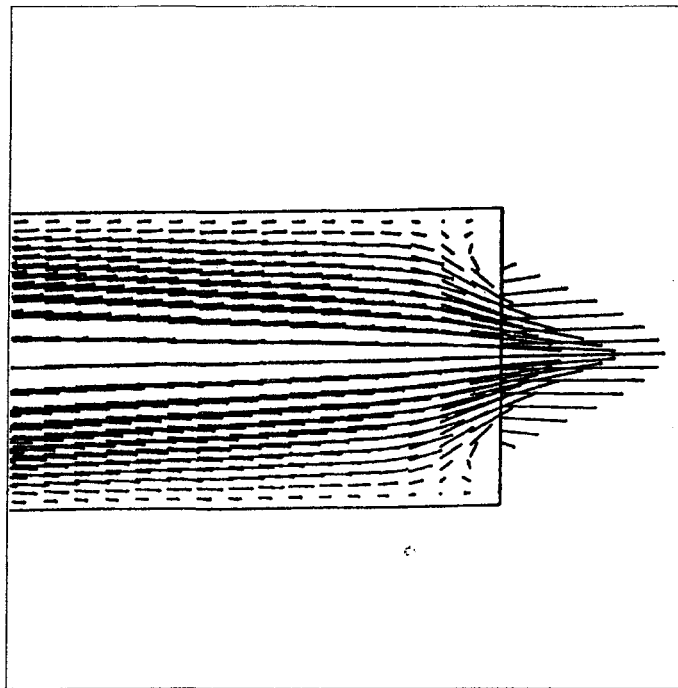
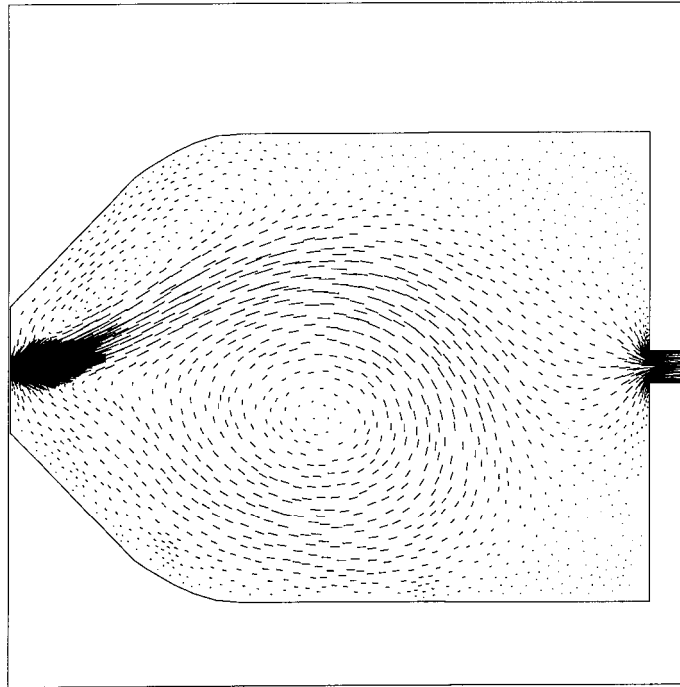
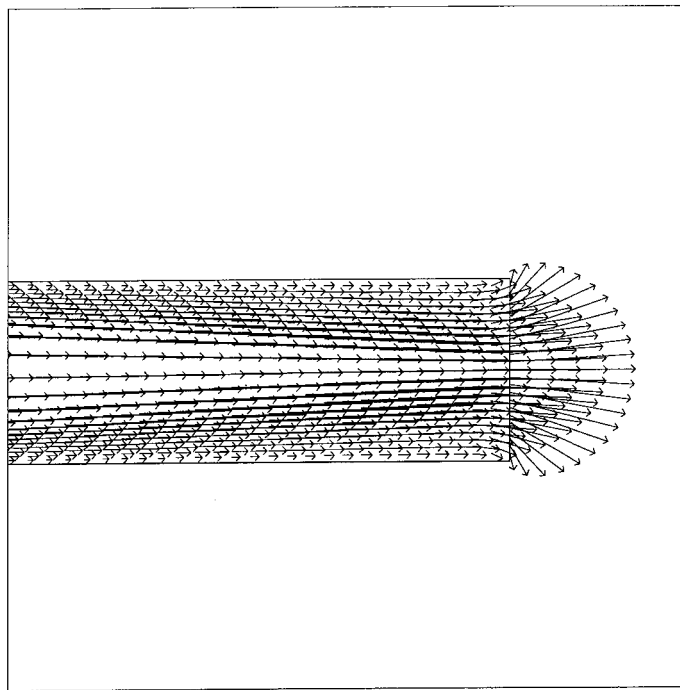


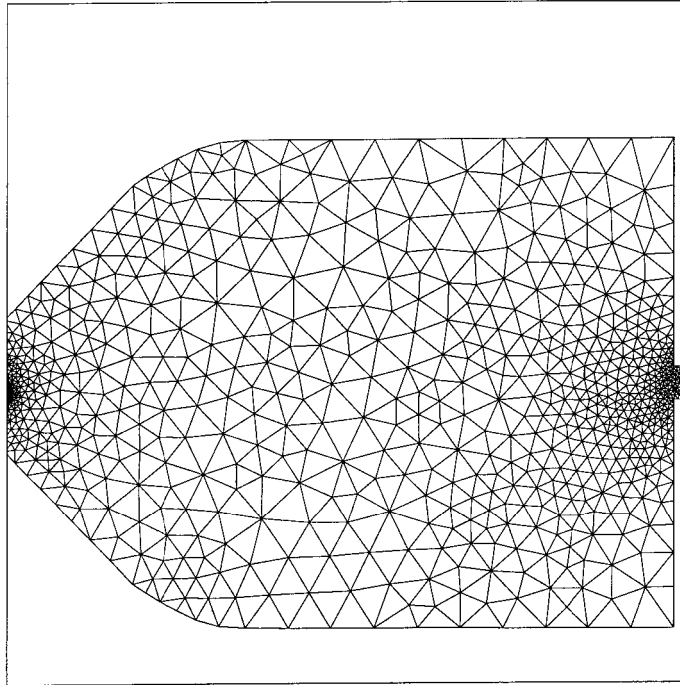
Figure 3b: vecteurs vitesses,  $Re=2000$ , avant correction, zoom de la sortie.



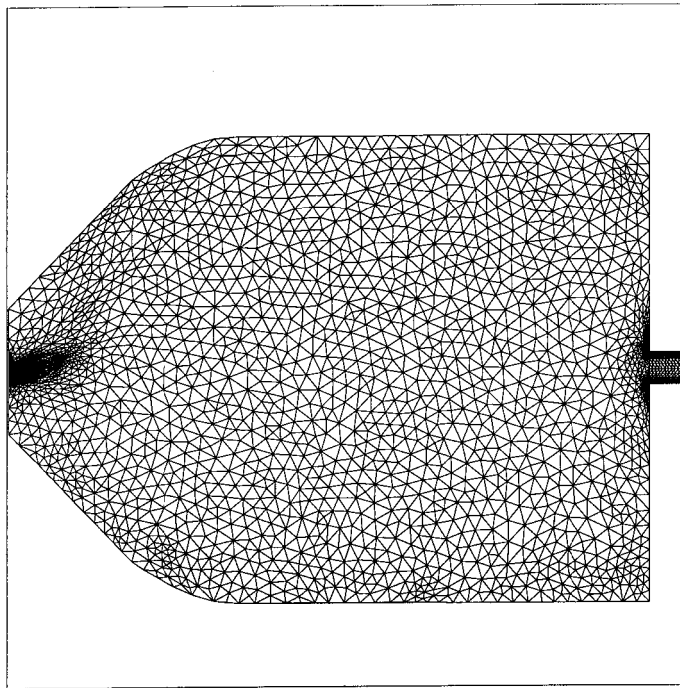
**Figure 4a: vecteurs vitesses,  $Re=2000$ , apres correction.**



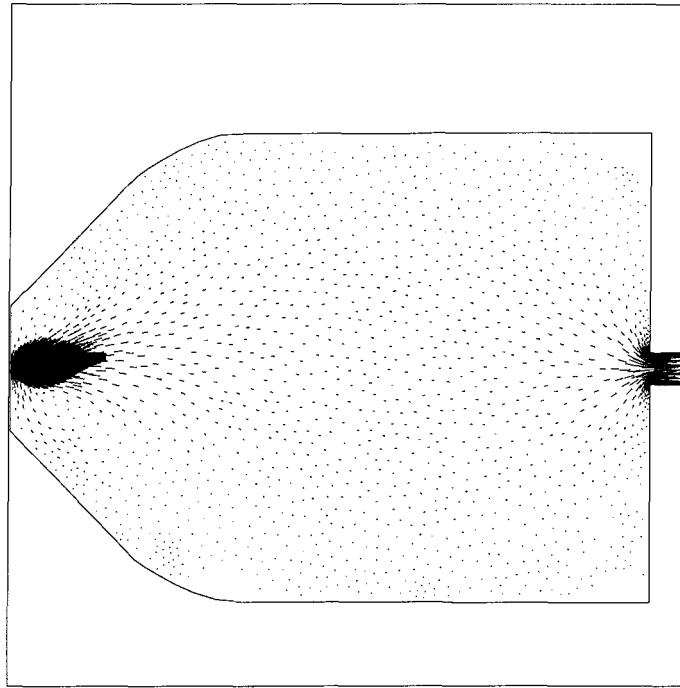
**Figure 4b: vecteurs vitesses,  $Re=2000$ , apres correction, zoom de la sortie.**



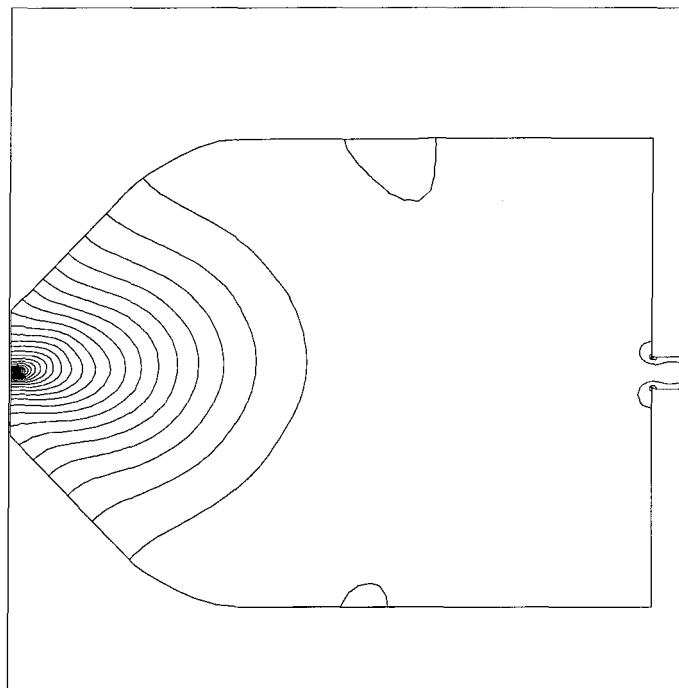
**Figure 5a: maillage avec Emc2, 997 noeuds .**



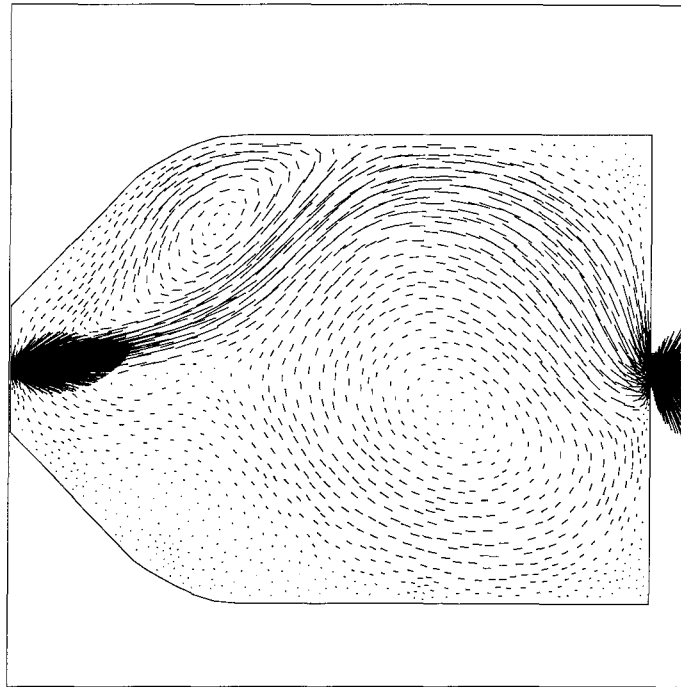
**Figure 5b: maillage avec mailleur adaptatif, 5815 noeuds.**



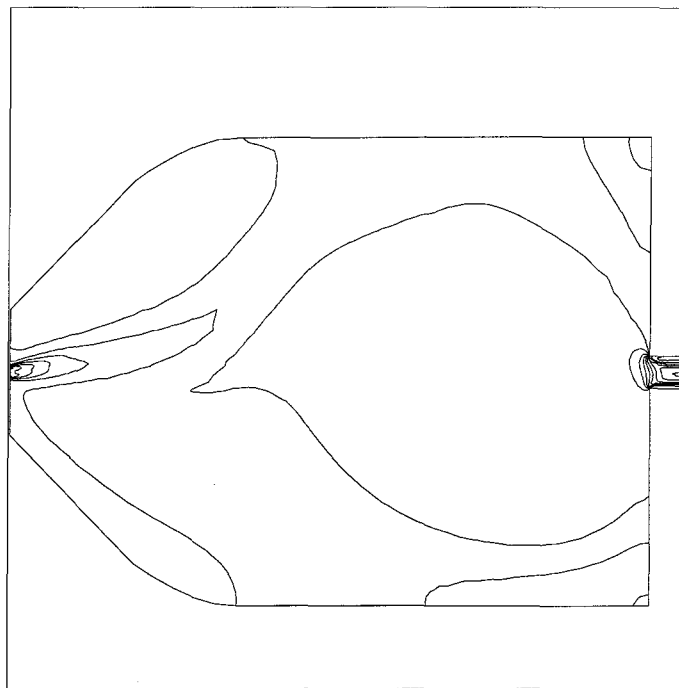
**Figure 6a: vecteurs vitesses,  $Re=1000$ , simulation directe, cas A1.**



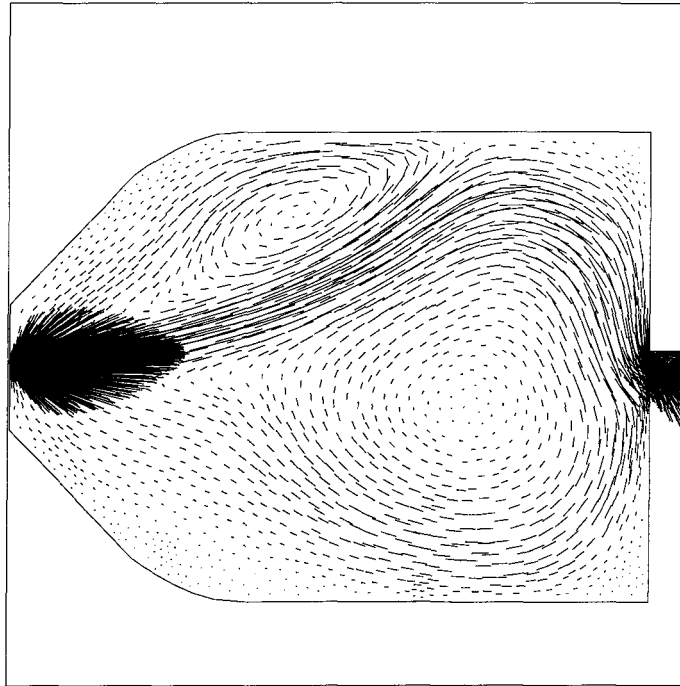
**Figure 6b: iso-valeurs de temperature,  $Re=1000$ , simulation directe, cas A1.**



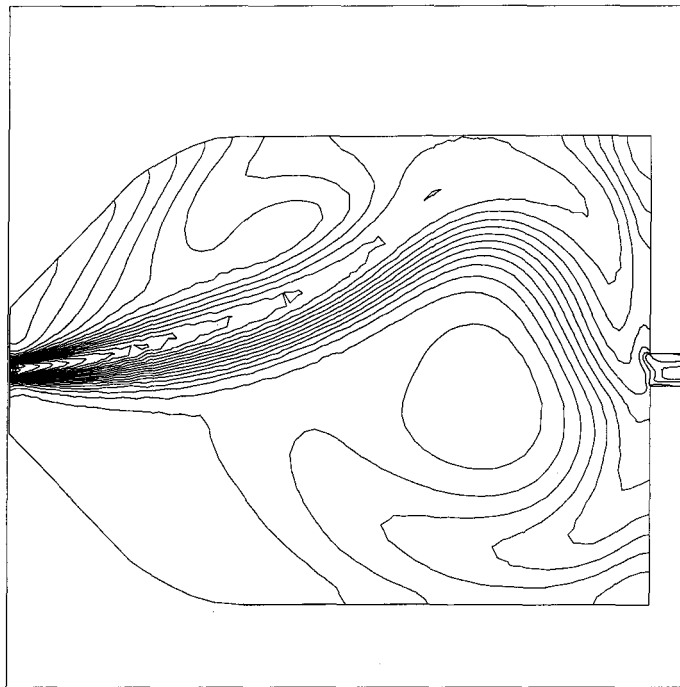
**Figure 7a: vecteurs vitesses,  $Re=4000$ , simulation directe, cas A2.**



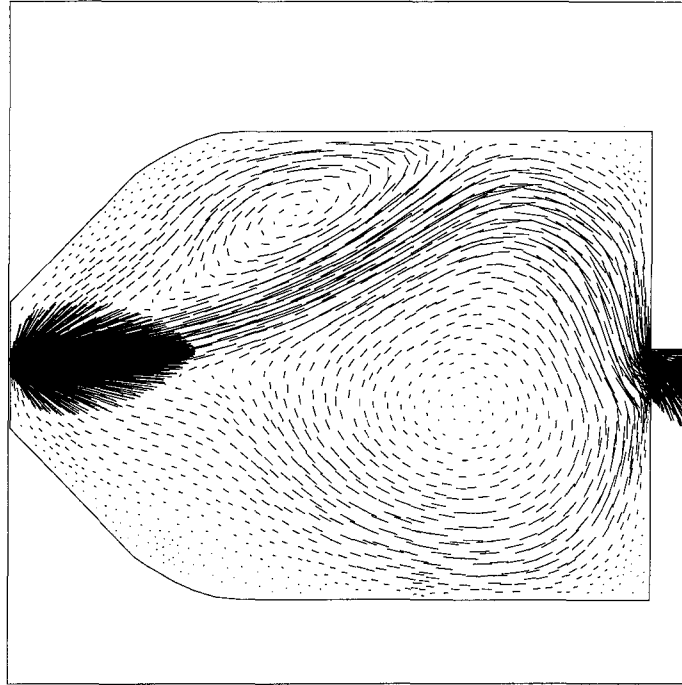
**Figure 7b: iso-valeurs de temperature,  $Re=4000$ , simulation directe, cas A2.**



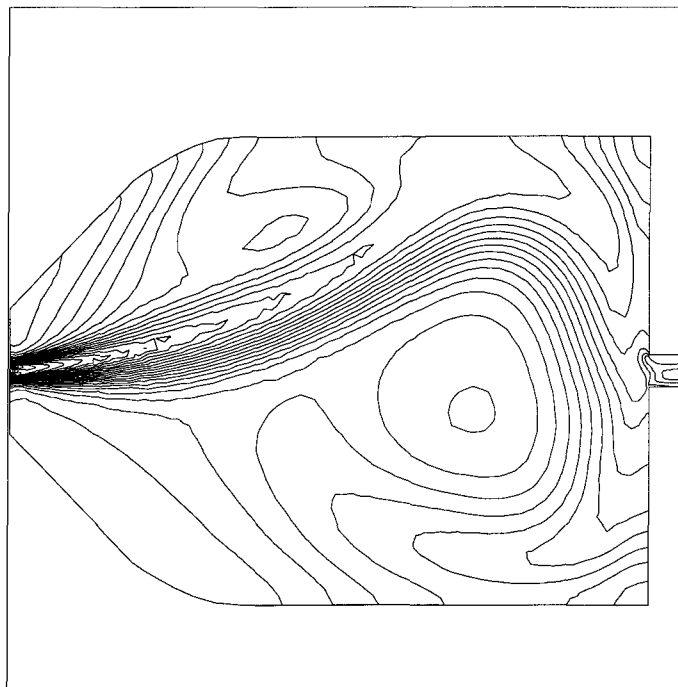
**Figure 8a: vecteurs vitesses,  $Re=15000$ , turbulence algébrique, cas B1.**



**Figure 8b: iso-valeurs de température,  $Re=15000$ , turbulence algébrique, cas B1.**

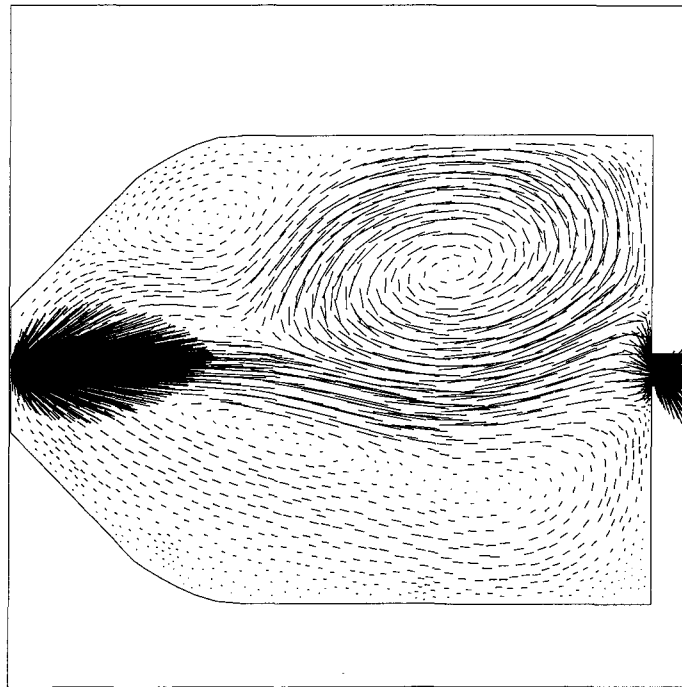


**Figure 9a: vecteurs vitesses,  $Re=50000$ , turbulence algebrique, cas B2.**

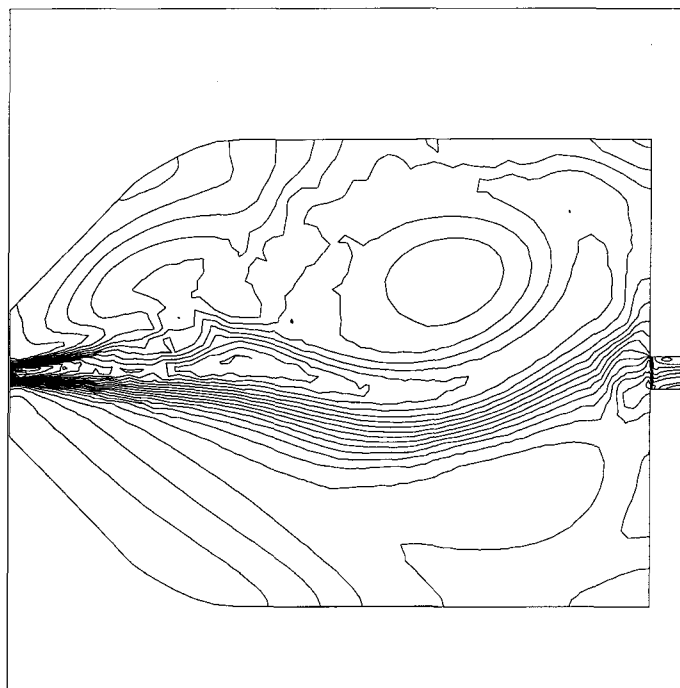


**Figure 9b: iso-valeurs de temperature,  $Re=50000$ , turbulence algebrique, cas B2.**

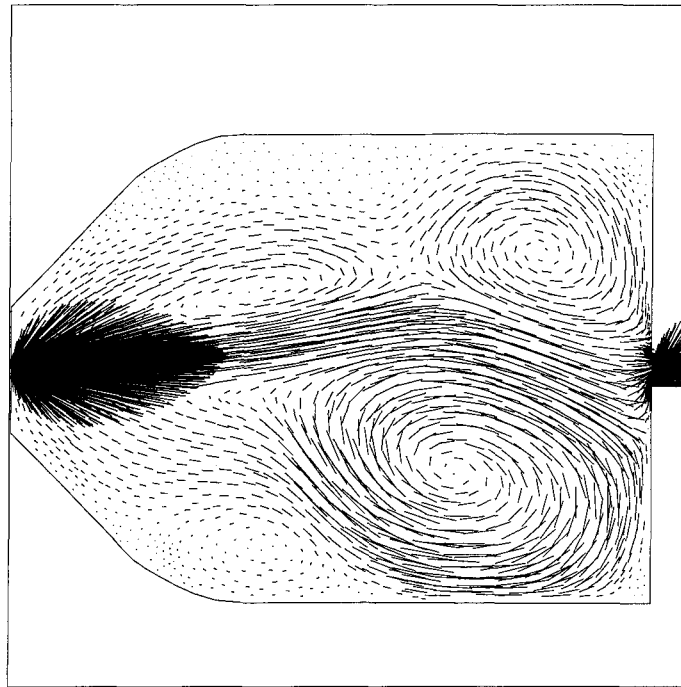




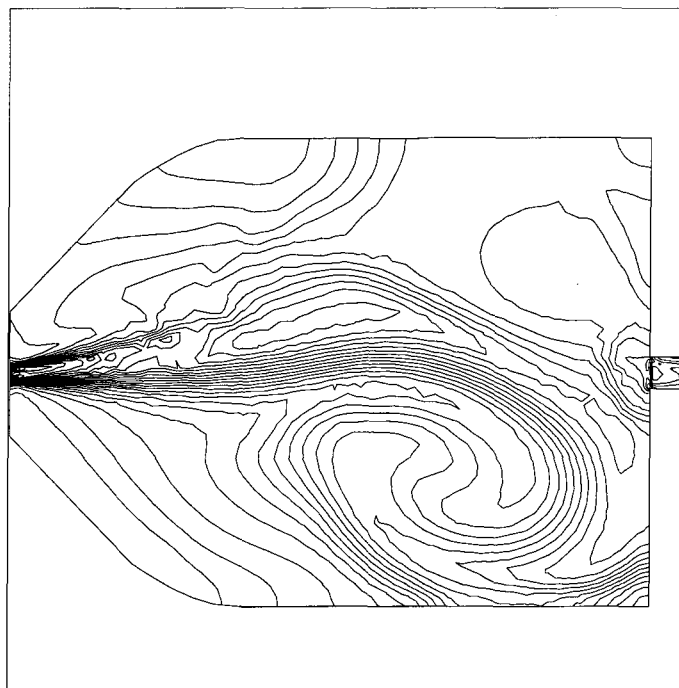
**Figure 10a: vecteurs vitesses,  $Re=15000$ , turbulence 1 equation, cas B3.**



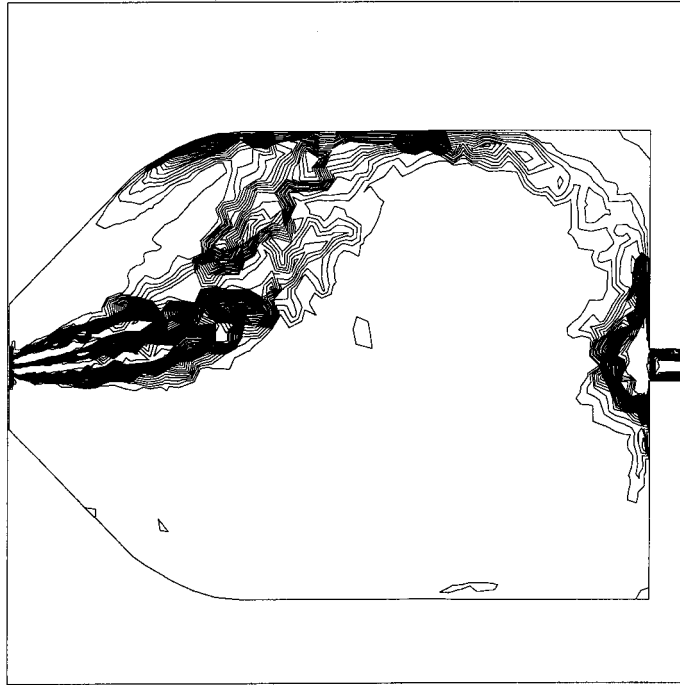
**Figure 10b: iso-valeurs de temperature,  $Re=15000$ , turbulence 1 equation, cas B3.**



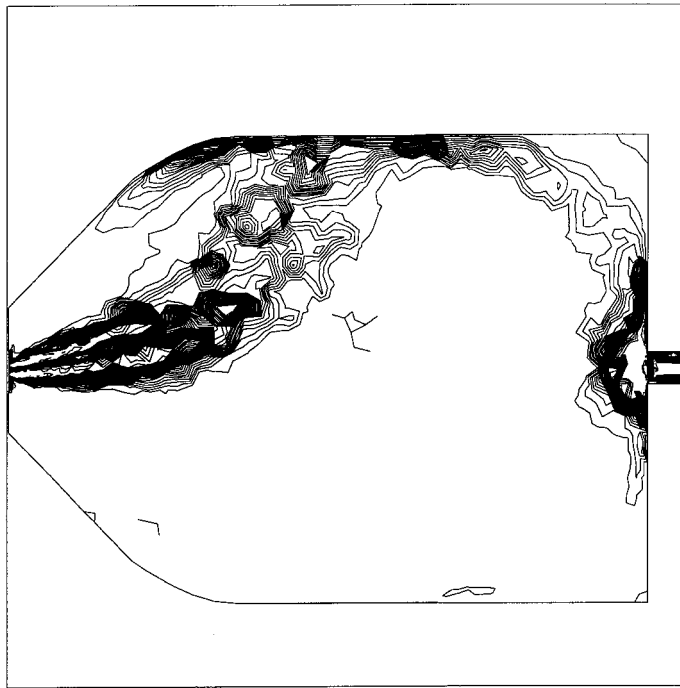
**Figure 11a: vecteurs vitesses,  $Re=15000$ , turbulence 1 equation, cas B4.**



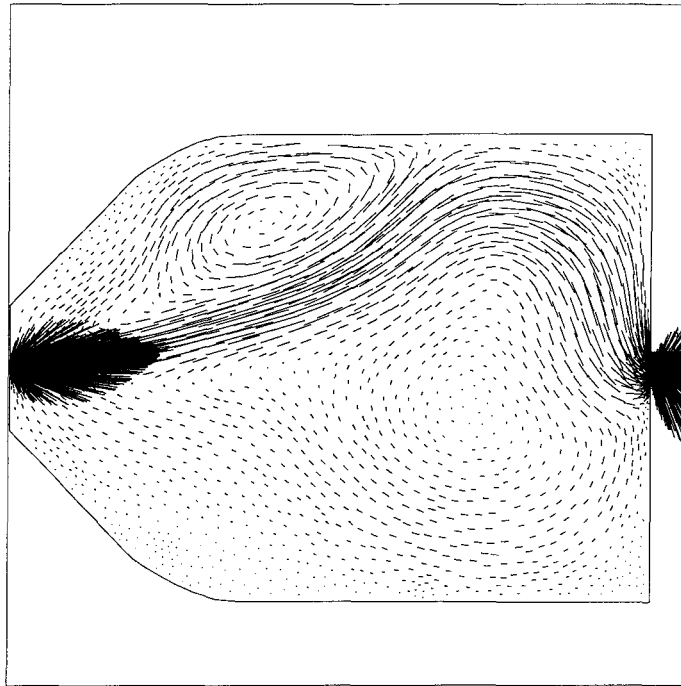
**Figure 11b: iso-valeurs de temperature,  $Re=15000$ , turbulence 1 equation, cas B4.**



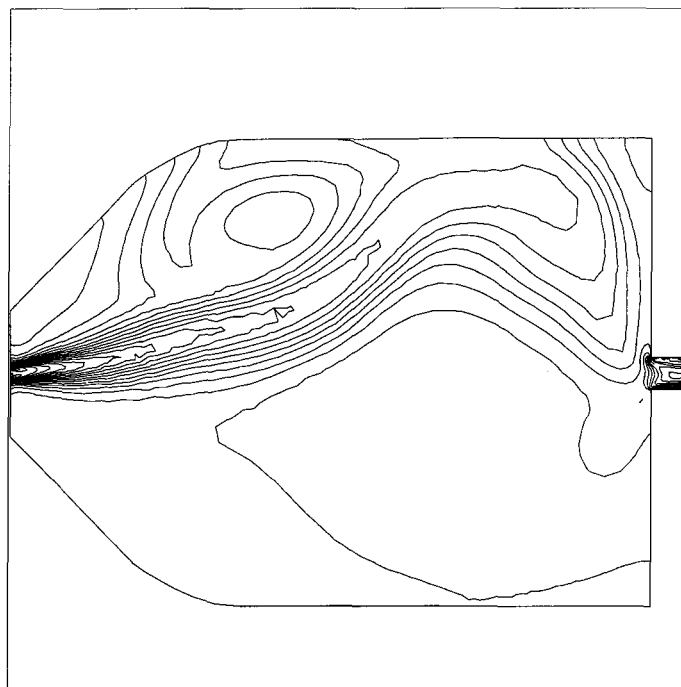
**Figure 12a: iso-valeurs de k, Re=15000, turbulence 1 equation, cas B3.**



**Figure 12b: iso-valeurs de k, Re=15000, turbulence 1 equation, cas B4.**



**Figure 13a: vecteurs vitesses,  $Re=15000$ , turbulence algebrique (LES), cas C1.**



**Figure 13b: iso-valeurs de temperature,  $Re=15000$ , turbulence algebrique (LES), cas C1.**