

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DE LA MAÎTRISE EN INGÉNIERIE

par  
FLORENT CAYRÉ

**MÉTHODES VOLUMES FINIS  
SUR MAILLAGES NON STRUCTURÉS  
POUR LA SIMULATION NUMÉRIQUE  
DES ÉCOULEMENTS INCOMPRESSIBLES  
MONOPHASIQUES ET DIPHASIQUES**

Le 2 novembre 1999



### Mise en garde/Advice

Afin de rendre accessible au plus grand nombre le résultat des travaux de recherche menés par ses étudiants gradués et dans l'esprit des règles qui régissent le dépôt et la diffusion des mémoires et thèses produits dans cette Institution, **l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** est fière de rendre accessible une version complète et gratuite de cette œuvre.

Motivated by a desire to make the results of its graduate students' research accessible to all, and in accordance with the rules governing the acceptance and diffusion of dissertations and theses in this Institution, the **Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** is proud to make a complete version of this work available at no cost to the reader.

L'auteur conserve néanmoins la propriété du droit d'auteur qui protège ce mémoire ou cette thèse. Ni le mémoire ou la thèse ni des extraits substantiels de ceux-ci ne peuvent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

The author retains ownership of the copyright of this dissertation or thesis. Neither the dissertation or thesis, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

## Synthèse

On présente dans ce mémoire le travail de recherche qui a été effectué dans le cadre de la Maîtrise en Ingénierie de l'Université du Québec à Chicoutimi. Ce travail a été commandé par Électricité de France, en collaboration avec le Professeur SYLVAIN BOIVIN et le Groupe Interdisciplinaire de Recherche en Éléments Finis de l'Université Laval, dirigé par le Professeur MICHEL FORTIN.

Ce travail a tenté de contribuer à la recherche sur les méthodes de volumes finis sur maillages non structurés, encore peu utilisées malgré leurs qualités intrinsèques, comme la conservation numérique locale des quantités conservatives, et la capacité à traiter des géométries complexes.

En ce qui concerne la discrétisation en espace, un schéma récent pour la diffusion a été testé et a confirmé, au cours des nombreuses simulations effectuées, ses excellentes qualités de précision, de facilité de mise en oeuvre et de faible coût de calcul, qui en font un candidat extrêmement intéressant pour les applications industrielles. Les tests effectués d'autre part sur les schémas pour la convection, sur un système inconditionnellement hyperbolique de type Euler isentropique, ont montré l'extrême robustesse du schéma de RUSANOV. Ce schéma constitue donc une alternative aux schémas classiques (GODUNOV et ROE) et au plus récent schéma de VFRoe [27], en particulier pour les applications industrielles où ils ne peuvent être mis en oeuvre ou lorsque la robustesse est le facteur limitant. Ces schémas ont été testés ici dans un cadre bidimensionnel, mais la généralisation au cadre tridimensionnel est possible, et cette extension est d'ailleurs en cours à l'U.Q.A.C. en ce qui concerne les calculs monophasiques.

Concernant la discrétisation en temps, une méthode de prédiction-corrrection a été utilisée et s'est montrée parfaitement adaptée à la résolution des systèmes physiques considérés ici, qui modélisent des écoulements monophasiques et diphasiques où apparaît une contrainte stationnaire du fait des hypothèses d'incompressibilité. La flexibilité de cette méthode a permis de traiter avec succès de nombreux problèmes physiques monophasiques, des écoulements incompressibles d'un fluide visqueux au transport de polluant, en passant par la convection naturelle d'un fluide de BOUSSINESQ, etc.

Enfin, concernant la physique des écoulements diphasiques, les effets de compactage maximal ont été obtenus dans le système continu par l'utilisation d'une loi de pression granulaire présentant une asymptote verticale au taux de compactage maximal. Cette propriété permet la simulation de configurations industrielles du type lits fluidisés denses, où le taux de présence des particules varie d'une valeur quasi-nulle (au sein de bulles) aux alentours du taux de compactage maximal. Une telle simulation n'a pu être menée à terme dans le cadre de ce travail, mais chaque composante de la méthode a été testée et un test complet de compactage a été effectué, démontrant la faisabilité de ce calcul.

## Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire n'aurait pu être réalisé sans l'aide technique de tous les membres du *G.I.R.E.F.* dont l'accueil a été particulièrement chaleureux, et en particulier ÉRIC CHAMBERLAND, MARIO FAFARD, MONIQUE GAGNON, JEAN-JACQUES MAINE, DANIEL MARCEAU, CARL ROBITAILLE et SIMON TÊTU qui sont invités et attendus en France.

Je remercie bien sûr les professeurs SYLVAIN BOIVIN et ANDRÉ CHARETTE qui m'ont suivi tout au long de ma Maîtrise.

Enfin, je remercie JEAN-MARC HÉRARD d'Électricité de France pour son très précieux soutien technique, son intérêt pour ce travail et la confiance qu'il m'a témoignée, ainsi que pour son soutien, son aide et ses conseils tout au long de ma recherche d'emploi.

# Table des matières

<b>Partie préliminaire</b>	<b>I</b>
Synthèse . . . . .	II
Remerciements . . . . .	III
Table des matières . . . . .	IV
Table des figures . . . . .	VI
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Simulation numérique des écoulements monophasiques incompressibles</b>	<b>3</b>
Introduction - Modèle mathématique . . . . .	4
I.1 Discrétisation en temps . . . . .	5
I.2 Discrétisation en espace . . . . .	6
I.2.1 Le schéma pour la convection . . . . .	7
I.2.2 Le schéma pour la diffusion . . . . .	9
I.3 Méthode d'interpolation locale sur les maillages triangulaires . . . . .	14
I.3.1 Le problème . . . . .	14
I.3.2 La méthode . . . . .	14
I.4 Schéma global du résolveur NAVIER-STOKES . . . . .	17
I.4.1 Définition des opérateurs . . . . .	17
I.4.2 Résolution du système complet . . . . .	22
I.5 Expériences numériques . . . . .	23
I.5.1 Vitesse de convergence du schéma pour la diffusion . . . . .	23
I.5.2 Écoulement dans une cavité carrée entraînée . . . . .	26
I.5.3 Convection naturelle dans une cavité carrée . . . . .	27
Conclusion . . . . .	29

---

<b>II Simulation numérique des écoulements diphasiques à deux phases incompressibles</b>	<b>32</b>
Introduction . . . . .	33
II.1 Système d'équations . . . . .	35
II.2 Schéma global . . . . .	38
II.2.1 Prédicteur . . . . .	39
II.2.2 Correcteur . . . . .	47
II.3 Validations élémentaires . . . . .	52
II.4 Validation globale : cas-test de compactage . . . . .	53
Conclusion . . . . .	55
<b>Conclusion générale</b>	<b>57</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>59</b>
<b>Annexes</b>	<b>62</b>
A Les lits fluidisés denses . . . . .	63
B Propriétés du schéma de Rusanov . . . . .	64
B.1 Le système d'équations . . . . .	64
B.2 Schéma en temps explicite (schéma d'Euler) . . . . .	64
B.3 Schéma en temps implicite total . . . . .	65
<b>Figures</b>	<b>68</b>

# Table des figures

I.1	Conditions aux limites pour l'opérateur de convection . . . . .	69
I.2	Intersection des bissecteurs orthogonaux des côtés d'un triangle .	70
I.3	Différentes catégories de maillages . . . . .	71
I.4	Convergence de $u_3(x, y) = \sin(x + y)$ sur des maillages de catégorie $M_3$ . . . . .	72
I.5	Convergence de $u_1(x, y) = xy + y$ sur des maillages de catégorie $M_3$ . . . . .	72
I.6	Maillage non structuré pour les calculs d'écoulements dans la cavité carrée entraînée (1 872 éléments) . . . . .	73
I.7	Convergence des calculs : $\ u_h^{n+1} - u_h^n\ _{L^2}$ en fonction du nombre de pas de temps effectués . . . . .	74
I.8	Lignes de courant (a) et isobares (b) pour $Re = 400$ . . . . .	75
I.9	Lignes de courant (a) et isobares (b) pour $Re = 1000$ . . . . .	75
I.10	Profils de vitesse le long des médianes de la cavité pour $Re = 400$	76
I.11	Profils de vitesse le long des médianes de la cavité pour $Re = 1000$	76
I.12	Isovaleurs des composantes de la vitesse de notre solution à $Ra = 10^3$ . . . . .	77
I.13	Isobares (a) et isothermes (b) de la solution à $Ra = 10^3$ . . . . .	77

---

I.14 Isovaleurs des composantes de la vitesse de notre solution à $Ra = 10^6$ . . . . .	78
I.15 Isobares (a) et isothermes (b) de la solution à $Ra = 10^6$ . . . . .	78
II.16 Cas-test de type “rupture de barrage” . . . . .	79
II.17 Cas-test de type “rupture de barrage” . . . . .	80
II.18 Cas-test de type “rupture de barrage” . . . . .	81
II.19 Cas-test de double choc . . . . .	82
II.20 Cas-test de double détente . . . . .	83
II.21 Cas-test de type “rupture de barrage” avec traînée . . . . .	84
II.22 Maillage utilisé pour le cas-test de compactage . . . . .	85
II.23 Cas-test de compactage : taux de présence et vitesse de la phase solide . . . . .	86
II.24 Cas-test de compactage : pression mécanique $P$ , nombre de mach et célérité associés à la pression inter-granulaire $\alpha_2\Theta(\alpha_2)$ . . . . .	87



## Introduction générale

On présente dans ce mémoire le travail de recherche qui a été effectué dans le cadre de la Maîtrise en Ingénierie de l'Université du Québec à Chicoutimi. Ce projet de maîtrise se situe dans un contexte fortement industriel, puisque le travail a été commandé par le Laboratoire National d'Hydraulique (L.N.H.) de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France. Les différentes étapes de ce projet ont aussi été définies dans ce cadre, en collaboration avec le Professeur SYLVAIN BOIVIN. Enfin, la totalité du travail a été réalisée au sein du Groupe Interdisciplinaire de Recherche en Éléments Finis (G.I.R.E.F) de l'Université Laval à Québec, dirigé par le Professeur MICHEL FORTIN.

Le problème industriel qui a initialement motivé ce travail de recherche est la simulation numérique réaliste des lits fluidisés denses<sup>1</sup> par la méthode des volumes finis sur les maillages non structurés. Ce problème a déjà été abordé au L.N.H. dans une thèse de doctorat ([19]) avec un modèle eulérien d'écoulements gaz-particules à une phase compressible. Le présent projet reprend une partie de ces travaux, mais privilégie une approche incompressible, qui pose des difficultés numériques supplémentaires, mais est mieux adaptée aux faibles vitesses rencontrées au sein de la phase gazeuse dans les configurations envisagées. Cette approche bénéficie en effet des résultats encourageants des publications suivantes :

- [6] qui présente une méthode efficace de résolution du système couplé vitesse-pression par une méthode de projection (dans le cadre des équations de NAVIER-STOKES pour les écoulements incompressibles), et garantit l'unicité de la solution en pression (sans cependant fournir de preuve de convergence),
- [23] qui propose un schéma pour la convection-diffusion d'un scalaire sur

---

<sup>1</sup>Voir annexe A

les maillages non structurés, pour lequel on dispose d'une preuve de convergence en  $h$  (pas du maillage) dans le cas de maillages triangulaires assez réguliers<sup>2</sup>. Une convergence d'ordre 2 sur tous les types de maillages a même été constatée lors d'une étude numérique de ce schéma au L.N.H. ([12]).

Le projet a donc tout naturellement été organisé en deux parties :

- la mise en oeuvre du schéma proposé dans [23] pour la convection-diffusion au sein du schéma de résolution de [6] ;
- l'utilisation des deux méthodes dans un solveur pour les écoulements diphasiques gaz-particules à deux phases incompressibles.

Dans les deux cas, la réalisation a été effectuée dans un cadre bidimensionnel, mais la méthode se généralise simplement au cadre tridimensionnel, et cette extension est d'ailleurs en cours à l'U.Q.A.C. en ce qui concerne les calculs monophasiques.

Chacune de ces parties a fait l'objet d'un rapport pour Électricité de France et d'un article soumis à une revue internationale ou un congrès ([7], [8], [13], [9]). Ce mémoire reprend l'ensemble des éléments présentés dans ces rapports et articles.

Notons enfin que les développements informatiques ont été réalisés au sein du code *MEF++* du G.I.R.E.F., écrit en langage *C++*. Un rapport de synthèse associé à cette dernière composante a été rédigé pour Électricité de France ([14]), qui analyse l'apport, dans un contexte industriel, des outils de programmation modernes pour les calculs d'éléments ou de volumes finis.

---

<sup>2</sup>Les angles des triangles (cas bidimensionnel) doivent tous être aigus.

Première partie

Simulation numérique des  
écoulements monophasiques  
incompressibles

## Introduction - Modèle mathématique

Même s'il existe déjà plusieurs schémas numériques stables, convergents et globalement conservatifs pour résoudre les équations de Stokes, la plupart des problèmes industriels sont régis par les équations de NAVIER-STOKES, plus générales. De plus, elles sont souvent couplées avec une équation supplémentaire, afin de modéliser la convection-diffusion d'une quantité scalaire comme la température, la concentration d'un polluant ou l'énergie cinétique turbulente. Parmi les méthodes dédiées à la résolution de ces problèmes, seules quelques unes satisfont les principes physiques suivants :

- la conservation local de la masse et des quantités scalaires conservatives ;
- la préservation numérique du principe du maximum pour les quantités scalaires.

Quelques schémas numériques utilisant la méthode des volumes finis sur maillage structurés peuvent répondre à ces spécifications. Cependant, peu sont disponibles sur les maillages non structurés (voir [26], [23], [15] pour les systèmes hyperboliques, [24], [25], [26], [23], [3], [4], [10] pour les systèmes elliptiques, et [26], [23], [34] pour les systèmes paraboliques).

Le schéma présenté ci-après satisfait les deux principes précédents sur les maillages non structurés. Il est basé sur une méthode à pas de temps fractionnaire proposée initialement dans [6], mais intègre un schéma pour la diffusion intéressant proposé récemment dans [23], et qui a préalablement été testé séparément à E.D.F (voir [12]).

La méthode ne requiert aucun assemblage de matrice, et le nombre d'opérations arithmétiques à effectuer est faible.

On effectue tout d'abord un petit rappel du modèle mathématique.

L'écoulement d'un fluide incompressible dans un domaine  $\Omega \times [0, T]$  est régi par les équations suivantes, dites de NAVIER-STOKES :

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (\text{I.1})$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{u} \otimes \underline{u}) + \nabla p - \nabla \cdot (\nu \nabla \underline{u}) = \underline{f} \quad (\text{I.2})$$

où :

- $p$  représente  $\frac{P}{\rho_0}$ , avec  $\rho_0$  la densité et  $P$  la pression du fluide incompressible ;
- $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide supposée constante :  $\nu = \frac{\mu_0}{\rho_0}$ , avec  $\mu_0$  la viscosité dynamique (constante).

On adopte le modèle suivant pour la convection-diffusion d'une quantité scalaire passive dans l'écoulement :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \underline{u}) - \nabla \cdot (\kappa \nabla C) = s \quad (\text{I.3})$$

où  $\kappa$  représente la diffusivité constante de la quantité scalaire  $C$ .

Notons que ces équations sont accompagnées de conditions aux limites convenables afin que la solution du problème soit unique.

Le champ d'applications industrielles de ce modèle s'étend à la prédiction du transport de polluant et du transfert de chaleur, en ajustant le terme source au problème correspondant. Un exemple de cette polyvalence est illustrée dans la section I.5.3 par un calcul de convection naturelle d'air dans une cavité carrée.

## I.1 Discrétisation en temps

La discrétisation en temps utilisée ici est basée sur une variation du schéma de projection proposé initialement par CHORIN (voir [16]) :

- Prédiction :

$$\frac{\underline{u}^{n+\frac{1}{2}} - \underline{u}^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\underline{u}^{n+\frac{1}{2}} \otimes \underline{u}^n) - \nabla \cdot (\nu \nabla \underline{u}^{n+\frac{1}{2}}) + \nabla p^n = \underline{f}^n \quad (\text{I.4})$$

- Projection :

$$\frac{\underline{u}^{n+1} - \underline{u}^{n+\frac{1}{2}}}{\delta t} + \nabla (p^{n+1} - p^n) = 0 \quad (\text{I.5})$$

$$\nabla \cdot \underline{u}^{n+1} = 0 \quad (\text{I.6})$$

- Convection-Diffusion du scalaire passif  $C$  :

$$\frac{C^{n+1} - C^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\underline{u}^{n+1} C^{n+1}) - \nabla \cdot (\kappa \nabla C^{n+1}) = s^n \quad (\text{I.7})$$

Notons que les équations (I.5) et (I.6) sont utilisées par la suite sous la forme suivante :

$$\nabla \cdot \underline{u}^{n+\frac{1}{2}} - \delta t \Delta (p^{n+1} - p^n) = 0 \quad (\text{I.8})$$

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^{n+\frac{1}{2}} - \delta t \nabla (p^{n+1} - p^n) \quad (\text{I.9})$$

## I.2 Discrétisation en espace

On définit les espaces suivants :

$$V_h = \left\{ v \in [L^2(\Omega)]^2 \mid v|_{T_i} \in RT_0(T_i), \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \right\}$$

$$V_h^c = \left\{ v \in V_h \setminus v \mid_{T_i} \cdot \underline{n}_{ij} = -v \mid_{T_j} \cdot \underline{n}_{ji}, \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, N\}^2 \right\}$$

$$V_h^0 = \{v \in V_h^c \setminus \nabla \cdot v \mid_{T_i} = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}\}$$

$$Q_h = \{q \in L^2(\Omega) \setminus q \in P_0(T_i), \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

avec :

- $RT_0(T_i)$  l'espace associé à l'élément fini de RAVIAR-THOMAS de degré zéro qui contient les polynômes suivants (voir [30] and [10]) :

$$\left. \begin{array}{l} a + cx \\ b + cy \end{array} \right\}, \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

- $\underline{n}_{ij}$  le vecteur normal unitaire du côté  $\sigma_{ij}$ , commun aux triangles  $T_i$  et  $T_j$ , et orienté vers l'extérieur de  $T_i$ . Avec ces notations, on a :

$$V_h^0 \subset (Q_h)^2 \subset V_h^c \subset V_h$$

Dans cette partie, on suppose que l'approximation de la vitesse, notée  $\underline{u}_h$ , appartient à  $V_h^0$ . Les approximations de toutes les variables scalaires sont supposées appartenir à  $Q_h$ .

### I.2.1 Le schéma pour la convection

Le schéma pour la convection utilisé dans toute la suite est un schéma décentré amont. Le terme à approximer est le suivant :

$$\int \underline{u} \cdot \nabla \phi d\Omega = \int \nabla \cdot (\underline{u}\phi) d\Omega \quad (\text{I.10})$$

avec  $\phi$  la variable convectée et  $\underline{u}$  la vitesse, qui satisfait l'équation de continuité  $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ .

Une discrétisation de l'équation (I.10) peut être obtenue par intégration sur chaque triangle  $T$ , suivie de l'application du théorème de STOKES :

$$\int_T \nabla \cdot (\underline{u}\phi) d\Omega = \oint_{\partial T} \phi \underline{u} \cdot \underline{n} d\Gamma$$

avec  $\underline{n}$  le vecteur normal unitaire sortant et  $\partial T$  le bord du triangle.

### I.2.1.1 Définition à l'intérieur du domaine

En notant  $\phi_h(T_i)$  et  $\phi_h(T_j)$  les approximations<sup>3</sup> de la variable  $\phi$  dans les triangles adjacents  $T_i$  et  $T_j$ , le terme convectif au travers de leur côté commun  $\sigma_{ij}$  s'écrit :

$$\int_{\sigma_{ij}} \phi \underline{u} \cdot \underline{n} d\Gamma \simeq l_{\sigma_{ij}} (\underline{u}_h \cdot \underline{n})_{\sigma_{ij}} [(\alpha_{ij} \phi_h(T_i) + (1 - \alpha_{ij}) \phi_h(T_j))]$$

où  $l_{\sigma_{ij}}$  est la longueur du côté  $\sigma_{ij}$ ,  $\underline{n}$  le vecteur normal unitaire dirigé de  $T_i$  vers  $T_j$ , et :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (\underline{u}_h \cdot \underline{n})_{\sigma_{ij}} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

---

<sup>3</sup>Remarquons que  $\phi(T_i)$  et  $\phi(T_j)$  ne sont pas nécessairement les inconnues discrètes choisies pour la variable  $\phi$ , mais sont de bonnes approximations de la variable à l'intérieur des triangles  $T_i$  et  $T_j$ . Comme nous le verrons plus loin, l'inconnue discrète associée à un triangle peut en effet être une meilleure approximation de  $\phi$  à l'extérieur de ce triangle.



### I.2.1.2 Conditions aux limites

Pour un côté situé sur le bord du domaine  $\sigma_b$  (voir figure I.1) :

– si le fluide entre (*i.e.*  $(\underline{u} \cdot \underline{n})_{\sigma_b} < 0$ ) :

$$\int_{\sigma_b} \phi \underline{u} \cdot \underline{n} \, d\Gamma \simeq l_{\sigma_b} (\underline{u} \cdot \underline{n})_{\sigma_b} \phi_h^b$$

où  $(\underline{u} \cdot \underline{n})_{\sigma_b}$  et  $\phi_h^b$  représentent les valeurs prescrites de  $\phi$  et  $\underline{u} \cdot \underline{n}$  sur le bord d'entrée

– si le fluide sort (*i.e.*  $(\underline{u} \cdot \underline{n})_{\sigma_b} > 0$ ) :

$$\int_{\sigma_b} \phi \underline{u} \cdot \underline{n} \, d\Gamma \simeq l_{\sigma_b} (\underline{u} \cdot \underline{n})_{\sigma_b} \phi_h(T)$$

où  $T$  est le triangle contenant le côté  $\sigma_b$ .

### I.2.1.3 Résultats théoriques

La convergence de ce schéma décentré amont est analysée dans [15] avec un schéma en temps d'Euler explicite. Il y est montré que sous une certaine condition de type C.F.L., le schéma converge et le taux de convergence est 1/2.

## I.2.2 Le schéma pour la diffusion

Ce schéma a été proposé et analysé en profondeur dans [23]. Ce qui suit est un bref résumé de ses propriétés qui nous intéressent directement.

Considérons le problème elliptique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \\ \text{Conditions aux limites} \end{array} \right. \quad (\text{I.11})$$

où l'ensemble des conditions aux limites est supposé être tel que le problème

est bien posé.

Soit  $(T_i)_{i \in \{1,2,\dots,N\}}$  une triangulation du domaine  $\Omega$ . Pour chaque triangle  $T_i$ , soit  $S_i$  sa surface,  $E_i$  l'ensemble de ses côtés, et  $u_i$  son inconnue discrète associée.

L'intégration de (I.11) sur le triangle  $T_i$  suivie de l'application du théorème de STOKES donne :

$$-\sum_{\sigma \in E_i} F_{\sigma}^D(u_h) = S_i f_i \quad (\text{I.12})$$

où :

$f_i$  vaut  $\frac{1}{S_i} \int_{T_i} f(x) dx$ ,

$F_{\sigma}^D(u_h)$  est une approximation de  $\int_{\sigma} \nabla u \cdot \underline{n}_{\sigma, T_i} ds$ , avec  $\underline{n}_{\sigma, T_i}$  le vecteur normal unitaire sortant du côté  $\sigma$  de  $T_i$ .

L'expression de  $F_{\sigma}^D(u_h)$  doit être déterminée à la fois pour les côtés à l'intérieur et au bord du domaine de calcul.

### I.2.2.1 Définition à l'intérieur du domaine

Pour chaque triangle  $T_i$ , soit  $\underline{x}_i$  l'intersection des bisecteurs orthogonaux (I.D.B.O.) des côtés (voir figure I.2). Ce point est situé en dehors de  $T_i$  chaque fois que le triangle a un angle strictement plus grand que  $\pi/2$ . Il est sur le bord si  $T_i$  est un triangle rectangle.

Nous supposons ici que le côté  $\sigma_{ij}$  est commun aux deux triangles  $T_i$  et  $T_j$  et que  $\underline{x}_i \neq \underline{x}_j$ . Le cas particulier de l'égalité sera discuté dans la section I.5.1.

L'expression du flux numérique associé  $F_{\sigma_{ij}}^D(u_h)$  est :

$$F_{\sigma_{ij}}^D(u_h) = l_{ij} \frac{u_j - u_i}{(\underline{x}_j - \underline{x}_i) \cdot \underline{n}_{ij}} \quad (\text{I.13})$$

où  $\underline{n}_{ij} = \underline{n}_{\sigma_{ij}, T_i}$  est le vecteur normal unitaire du côté  $\sigma_{ij}$  du triangle  $T_i$ .

Le coefficient suivant, appelé *transmittivité* est introduit dans [23] pour chaque arête interne  $\sigma_{ij}$  sous la condition que  $\underline{x}_i \neq \underline{x}_j$  :

$$\tau_{\sigma_{ij}} = \frac{l_{ij}}{(\underline{x}_j - \underline{x}_i) \cdot \underline{n}_{ij}}$$

Avec cette définition, (I.13) peut être réécrite de la façon suivante :

$$F_{\sigma_{ij}}^D(u_h) = \tau_{\sigma_{ij}}(u_j - u_i)$$

### I.2.2.2 Conditions aux limites

Si la condition aux limites appliquée sur l'arête de bord  $\sigma$  est une condition de Neumann, le flux numérique  $F_\sigma$  est égal au flux exact.

Lorsqu'une condition aux limites de Dirichlet est appliquée, la valeur  $u_\sigma$  est donnée au milieu  $x_\sigma$  de l'arête de bord  $\sigma$ . Soit alors  $T_i$  le triangle du maillage qui contient  $\sigma$ , et  $\underline{x}_i$  son *I.D.B.O.* . En supposant que  $\underline{x}_\sigma \neq \underline{x}_i$ , le flux numérique vaut alors :

$$F_\sigma^D(u_h) = l_\sigma \frac{u_\sigma - u_i}{(\underline{x}_\sigma - \underline{x}_i) \cdot \underline{n}_{\sigma, T_i}} \quad (\text{I.14})$$

La transmittivité peut donc aussi être définie sur l'arête de bord  $\sigma$  (sous la condition  $\underline{x}_\sigma \neq \underline{x}_i$ ), de la façon suivante :

$$\tau_\sigma = \frac{l_\sigma}{(\underline{x}_\sigma - \underline{x}_i) \cdot \underline{n}_{\sigma, T_i}}$$

et alors :

$$F_\sigma^D(u_h) = \tau_\sigma(u_\sigma - u_i)$$

### I.2.2.3 Résultats théoriques

Les propriétés démontrées dans [23] dépendent de la qualité de la triangulation  $(T_i)_{i \in \{1, 2, \dots, N\}}$ . Trois différentes catégories de maillage sont introduits pour la suite (voir figure I.3) :

- La catégorie “ $M_1$ ” contient les “maillages admissibles” au sens de [23], qui sont des triangulations telles que :

$$x_i \in T_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (\text{I.15})$$

$$x_i \neq x_j, \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, N\}^2 / T_i \cap T_j \neq \emptyset \quad (\text{I.16})$$

$$x_i \neq x_\sigma, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} / T_i \cap \partial\Omega = \sigma \quad (\text{I.17})$$

Les conditions (I.16) et (I.17) sont nécessaires pour l’existence de transmittivité  $\tau_\sigma$  pour chaque arête  $\sigma$  du maillage. (I.16) assure que deux triangles adjacents ont des *I.D.B.O.* distincts (ils pourraient être tous deux sur l’arête commune des triangles). (I.15) implique que  $\tau_\sigma$  est positive.

- La catégorie “ $M_2$ ” est le sous-ensemble de l’ensemble des maillages non admissibles qui remplissent les conditions (I.16), (I.17) et la suivante :

$$\tau_\sigma > 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall \sigma \in E_i \quad (\text{I.18})$$

La seule différence avec la catégorie de maillages précédente est que l’*I.D.B.O.* d’un triangle peut être situé en dehors de celui-ci.

- Les maillages qui ne sont inclus dans aucune des deux catégories précédentes forment la catégorie “ $M_3$ ”. Un cas particulier de cette catégorie est constituée par les maillages dont la transmittivité n’est pas définie pour

toutes les arêtes. Ce cas sera abordé plus loin dans la section I.5.1. Le cas général correspond à la permutation de deux *I.D.B.O.* associés à deux triangles adjacents.

Les propriétés suivantes ont été démontrées dans [23] :

1. *Convergence* : si le maillage appartient à la catégorie  $M_1$ , le schéma précédent converge vers la solution unique du problème (I.11).
2. *Estimation d'erreur* : si le maillage  $\tau$  appartient à la catégorie  $M_1$  et que l'unique solution  $u$  du problème (I.11) est assez régulière ( $u \in C^2(\Omega)$ ), on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|e_\tau\|_{L^2(\Omega)} \leq C h \quad (\text{I.19})$$

où :

- $e_\tau(x) = u(x_i) - u_i, \forall x \in T_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$
  - $C$  est un nombre réel positif
  - $h$  est le pas du maillage (par exemple la longueur de la plus grande arête).
3. *Principe du maximum* : si le maillage appartient à l'une des catégories  $M_1$  ou  $M_2$ , le schéma respecte le principe du maximum discret (c.f. [23] pour des détails).

La convergence numérique du schéma de diffusion est décrite dans la section I.5.1.

Pour un équation de convection-diffusion telle que (I.3), la vitesse théorique de convergence obtenue avec les schémas des sections I.2.1 et I.2.2 est 1/2, à cause de la vitesse de convergence du schéma de convection (voir section I.2.1.3 et les références [26], [34] and [23]).

## I.3 Méthode d'interpolation locale sur les maillages triangulaires

### I.3.1 Le problème

Le schéma de convection décentré amont présenté ci-dessus (voir section I.2.1) nécessite de fournir une valeur de la variable convectée à l'intérieur de la cellule, afin de calculer un flux correct au travers des arêtes. Dans le cas contraire, le décentrage amont devient un décentrage aval sur chaque arête dont la transmittivité est négative, ce qui pourrait résulter dans un manque de stabilité du schéma convectif localement.

De plus, afin de calculer de bonnes approximations des intégrales sur les cellules, comme  $\int_{T_i} \frac{\partial w_h}{\partial t} d\Omega$ , les valeurs de l'inconnue discrètes  $w_h$  à l'intérieur des triangles doivent être connues.

### I.3.2 La méthode

La méthode décrite ci-dessous est basée sur l'observation suivante. Soit  $u_i$  l'approximation obtenue pour le triangle  $T_i$  avec le schéma pour la diffusion présenté plus haut. Soit  $x_i$  et  $x_i^G$  l'I.D.B.O. et le centre de gravité de  $T_i$  respectivement. Comme nous le verrons dans la section I.5.1,  $u_i$  est une approximation du second ordre de  $u(x_i)$  et par conséquent une approximation du premier ordre de  $u(x_i^G)$ . Ceci conduit à utiliser  $u_i$  comme une bonne représentation de la solution exacte à l'I.D.B.O. pour obtenir une approximation de  $u$  au centre de gravité, noté dans toute la suite  $G_i(u_h)$ . Pour calculer cette valeur, on calcule d'abord une approximation de  $u$  au milieu de chaque arête du maillage, de la façon exposée ci-après.

### I.3.2.1 Interpolation au milieu des arêtes internes

Soit une arête interne donnée  $\sigma_{ij}$ , commune aux deux triangles  $T_i$  et  $T_j$  dont les *I.D.B.O.* sont  $x_i$  et  $x_j$  respectivement (voir figure I.3). En notant  $x_{ij}$  le milieu de  $\sigma_{ij}$ , les trois points  $x_i$ ,  $x_j$  et  $x_{ij}$  sont alignés. C'est pourquoi  $x_{ij}$  peut être considéré comme le barycentre du système pondéré :

$$\{(x_i, t_{ij}) ; (x_j, 1 - t_{ij})\}, \text{ avec } t_{ij} = \frac{(x_j - x_{ij}) \cdot (x_j - x_i)}{(x_j - x_i)^2}$$

Supposons que le calcul conduit à des approximations du premier ou second ordre de la solution exacte à l'*I.D.B.O.* de  $T_i$  et  $T_j$ , notées  $u_i$  et  $u_j$  respectivement. Alors ce niveau de précision est préservé pour le milieu de l'arête  $\sigma_{ij}$ , si l'on fait le choix suivant pour l'approximation en ce point :

$$u_{ij} = t_{ij}u_i + (1 - t_{ij})u_j \quad (\text{I.20})$$

### I.3.2.2 Interpolation au milieu des arêtes de bord

Soit  $\sigma$  une arête de bord incluse dans le triangle  $T_i$ . Si une condition aux limites de Dirichlet est appliquée sur  $\sigma$ , aucune approximation n'est nécessaire pour la valeur de la solution exacte au milieu de  $\sigma$ , puisque cette valeur est fournie directement. Si par contre une condition aux limites de Neumann est appliquée, c'est la valeur exacte du flux au travers de  $\sigma$ ,  $F_\sigma$ , qui est fournie, et le choix naturel pour l'approximation au milieu de  $\sigma$  est la valeur  $u_\sigma$  telle que :

$$F_\sigma = \tau_\sigma(u_i - u_\sigma), \text{ i.e. : } u_\sigma = u_i - \frac{F_\sigma}{\tau_\sigma}$$

Si  $u_i$  est une approximation du second ordre de la solution exacte à l'*I.D.B.O.* de  $T_i$ , alors  $u_\sigma$  est aussi une approximation du second ordre de la solution exacte au milieu de  $\sigma$ .

### I.3.2.3 Cas d'une arête de bord sans conditions aux limites

Soit  $\sigma$  une arête de bord sur laquelle aucune condition aux limites n'est appliquée,  $x_\sigma$  son milieu,  $T_i$  le triangle qui la contient. Même dans ce cas, on peut généralement calculer une bonne approximation  $u_\sigma$  de la solution au point  $x_\sigma$ .

Cependant, si  $T_i$  n'a qu'un seul triangle adjacent (i.e. il possède deux côtés sur le bord du domaine), l'approximation choisie est simplement :  $u_\sigma = u_i$ , ce qui n'est qu'une approximation du premier ordre.

Dans le cas contraire, les valeurs  $u_j$  et  $u_k$  sur les deux triangles  $T_j$  et  $T_k$  adjacents avec  $T_i$ , peuvent être utilisées pour calculer une approximation plus précise :

$$u_\sigma = u_i + \frac{\tau_{\sigma_{ij}}(u_i - u_j) + \tau_{\sigma_{ik}}(u_i - u_k)}{\tau_\sigma}$$

Notons que si  $u_i$ ,  $u_j$  et  $u_k$  sont des approximations du second ordre de la solution exacte aux *I.D.B.O.* de  $T_i$ ,  $T_j$  et  $T_k$  respectivement, alors  $u_\sigma$  est une approximation du second ordre de la solution exacte au milieu de  $\sigma$ .

### I.3.2.4 Interpolation en tout point du domaine de calcul

Soit  $M$  un point du triangle  $T_i$  du maillage. Soient  $x_{\sigma_1}$ ,  $x_{\sigma_2}$ ,  $x_{\sigma_3}$  les milieux des arêtes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  de  $T_i$ , et soient  $u_{\sigma_1}$ ,  $u_{\sigma_2}$ ,  $u_{\sigma_3}$  des approximations du second ordre de la solution exacte en ces points. Notons  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels tels que  $M$  soit le barycentre du système pondéré  $\{(x_{\sigma_1}, \alpha); (x_{\sigma_2}, \beta); (x_{\sigma_3}, 1 - \alpha - \beta)\}$ <sup>4</sup>, une approximation du second ordre de la solution au point  $M$  est la suivante :

<sup>4</sup>C'est-à-dire tel que :

$$\alpha(x_M - x_{\sigma_1}) + \beta(x_M - x_{\sigma_2}) + (1 - \alpha - \beta)(x_M - x_{\sigma_3}) = \underline{0}$$



$$u_M = \alpha u_{\sigma_1} + \beta u_{\sigma_2} + (1 - \alpha - \beta) u_{\sigma_3}$$

Un important cas particulier pour  $M$  est celui le centre de gravité  $G_i$  du triangle  $T_i$  (i.e.  $\alpha = \beta = 1/3$ ) :

$$u_i^G = \frac{u_{\sigma_1} + u_{\sigma_2} + u_{\sigma_3}}{3} \quad (\text{I.21})$$

La combinaison des équations (I.20) et (I.21) nous donne un opérateur  $G$  d'une précision du second ordre localement. À partir d'un champ défini à l'*I.D.B.O.*, l'application de cet opérateur conduit à un champ défini aux centres de gravité des triangles du maillage. La valeur de ce dernier pour une variable discrète  $w_h$ , sur une triangulation  $T_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ ), est notée dans toute la suite  $G_i(w_h)$ .

## I.4 Schéma global du résolveur NAVIER-STOKES

Quelques opérateurs sont définis ci-dessous, qui seront utilisés dans la présentation du schéma complet de résolution des équations de NAVIER-STOKES.

### I.4.1 Définition des opérateurs

#### I.4.1.1 L'opérateur de convection -diffusion : $CD_s$

Dans cette section, on discrétise l'équation suivante sur le domaine  $\Omega$  :

$$\frac{w^* - w^n}{\delta t} + \nabla \cdot (\underline{u}^n w^*) - \nabla \cdot (\nu \nabla w^*) = s^n \quad (\text{I.22})$$

où :

–  $s^n$  est un terme source

- la variable  $w$  peut être soit  $u_x, u_y$  (les deux composantes de la vitesse  $\underline{u}$ )  
ou  $C$  (un scalaire passif) : voir les équations (I.4) et (I.7)
- $\underline{u}^n$  est telle que :  $\nabla \cdot \underline{u}^n = 0$

La forme discrète est obtenue par intégration sur chaque triangle  $T_i$ , et en prenant  $w$  dans  $Q_h$  et  $\underline{u}$  dans  $V_h^0$  :

$$\int_{T_i} \left( \frac{w_h^* - w_h^n}{\delta t} + \nabla_h \cdot (\underline{u}_h^n w_h^*) - \nabla \cdot (\nu \nabla_h w_h^*) \right) d\Omega = \int_{T_i} s_h^n d\Omega$$

où  $\underline{u}_h^n$  est un champ de vitesse à divergence nulle dans le sens suivant :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \sum_{\sigma \in E_i} l_\sigma (\underline{u}_h^n \cdot \underline{n})_\sigma = 0$$

Les termes convectifs et diffusifs sont calculés comme dans les sections I.2.1 et I.2.2 respectivement. Étant donné les résultats des sections I.2.2 et I.3, les inconnues discrètes sont choisies comme les approximations de leurs variables respectives à l'*I.D.B.O.* des triangles. Cependant, comme indiqué dans la section I.2.1, une approximation de la variable convectée  $w$  à l'intérieur du triangle doit être utilisée pour le terme convectif. C'est pourquoi la valeur choisie pour la convection est l'approximation de  $w$  au centre de gravité du triangle, et est calculée comme dans la section I.3.2.4. Cette valeur, notée  $G_i(w_h)$ , sera aussi utilisée pour le calcul de la dérivée en temps, afin d'augmenter la précision.

La forme discrète de l'équation (I.22) pour un triangle  $T_i$  est la suivante :

$$S_i \frac{G_i(w_h^*) - G_i(w_h^n)}{\delta t} + \sum_{\sigma \in E_i} l_\sigma \underline{u}_h^n \cdot \underline{n}_{\sigma, T_i} G_\sigma(w_h^*) - \nu \sum_{\sigma \in E_i} F_\sigma^D(w_h^*) = S_i s_i^n \quad (\text{I.23})$$

où :

- $S_i$  est la surface du triangle  $T_i$

- $G_\sigma(w_h^*)$  dépend du type d'arête :
  - si  $\sigma$  est une arête interne, commune à  $T_i$  et  $T_j$ , alors :

$$G_\sigma(w_h^*) = \alpha_{ij}G_i(w_h^*) + (1 - \alpha_{ij})G_j(w_h^*),$$

$$\text{avec } \alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\underline{u}_h \cdot \underline{n})_{\sigma_{ij}} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- si  $\sigma$  est une arête de bord où le fluide entre (*i.e.*  $\underline{u}_h^n \cdot \underline{n}_{\sigma, T_i} < 0$ ), alors :

$$G_\sigma(w_h^*) = w_h^b$$

- si  $\sigma$  est une arête de bord où le fluide sort (*i.e.*  $\underline{u}_h^n \cdot \underline{n}_{\sigma, T_i} > 0$ ), alors :

$$G_\sigma(w_h^*) = w_i^*$$

- $F_\sigma^D(w_h^*)$  est le flux diffusif calculé comme dans la section I.2.2.

Le système (I.23) est linéaire mais non symétrique. La matrice associée est une M-matrice à diagonale dominante. Le système peut être résolu par une méthode itérative comme *Newton-G.M.R.E.S.* . Cette méthode n'utilise que les résidus du système, de sorte qu'il n'est pas nécessaire d'assembler la matrice. De plus, cette méthode permet de prendre en compte les termes source non linéaires, ce qui est souvent très utile dans les applications industrielles.

La solution  $w_h^*$  du système sera notée  $CD_s(w_h^n)$ . La convection-diffusion de l'approximation de la vitesse  $\underline{u}_h^n$  elle-même, peut être considérée comme la convection-diffusion de ses deux composantes indépendamment. C'est pourquoi on peut aussi utiliser la notation :  $\underline{u}_h^* = CD_s(\underline{u}_h^n)$ . Remarquons que  $\underline{u}_h^n$  est dans  $V_h^0$ , mais que  $\underline{u}_h^*$  est dans  $(Q_h)^2$ . C'est pourquoi les deux opérateurs qui suivent

corrigent la vitesse pour qu'elle appartienne d'abord à  $V_h^c$ , puis à  $V_h^0$ .

#### I.4.1.2 L'opérateur d'extension : $E$

Cet opérateur s'applique sur une approximation de la vitesse appartenant à  $(Q_h)^2$ , notée  $\underline{u}_h^*$ . Son résultat, noté  $\underline{u}_h^{**} = E(\underline{u}_h^*)$ , appartient à  $V_h^c$  et est tel que, pour une arête quelconque  $\sigma$  du maillage :

- si  $\sigma$  est une arête interne, commune aux triangles  $T_i$  et  $T_j$ , alors :

$$\underline{u}_h^{**} \cdot \underline{n}_{\sigma, T_i} = t_{ij} \times (\underline{u}_i^* \cdot \underline{n}_{\sigma, T_i}) + (1 - t_{ij}) \times (\underline{u}_j^* \cdot \underline{n}_{\sigma, T_i})$$

Le coefficient  $t_{ij}$  a été introduit dans la section I.3.2.1. L'expression ci-dessus est une interpolation sur l'arête des projections sur  $\underline{n}_{\sigma, T_i}$  de la vitesse dans les triangles  $T_i$  et  $T_j$ .

- si  $\sigma$  est une arête de bord sur laquelle la valeur  $g_\sigma$  de la vitesse normale est fournie, alors :

$$\underline{u}_h^{**} \cdot \underline{n}_{\sigma, T_i} = g_\sigma$$

Ce cas correspond à celui d'une paroi ou d'un bord où le fluide rentre.

- si  $\sigma$  est une arête de bord où la vitesse normale n'est pas fournie, alors :

$$\underline{u}_h^{**} \cdot \underline{n}_{\sigma, T_i} = \underline{u}_i^* \cdot \underline{n}_{\sigma, T_i}$$

Ce cas correspond à un bord où le fluide sort.

Ces valeurs de  $\underline{u}_h^{**} \cdot \underline{n}_{\sigma, T_i}$  définissent la vitesse  $\underline{u}_h^{**}$  sur tout le domaine  $\Omega$ , puisque  $\underline{u}_h^{**}$  a été choisie dans  $V_h^c$ .

### I.4.1.3 L'opérateur de projection : $P$

Cet opérateur s'applique à la fois sur la pression et la vitesse :

$$P : Q_h \times V_h^c \longrightarrow Q_h \times V_h^0$$

$$(p_h^n, \underline{u}_h^{**}) \longmapsto (p_h^{n+1}, \underline{u}_h^{n+1})$$

Cette opération est effectuée en deux étapes, correspondant à la discrétisation des équations (I.8) et (I.9). Si l'on note  $\delta p = p^{n+1} - p^n$ , on a :

$$\nabla \cdot \underline{u}^{**} - \delta t \Delta (\delta p) = 0 \quad (\text{I.24})$$

$$\underline{u}^{n+1} = \underline{u}^{**} - \delta t \nabla (\delta p) \quad (\text{I.25})$$

L'équation (I.24) est un problème de diffusion pour l'incrément de pression  $\delta p$  avec un terme source. Il est résolu comme dans la section I.2.2. Par intégration sur le triangle  $T_i$ , dont l'ensemble des arêtes est  $E_i$ , on obtient :

$$- \sum_{\sigma \in E_i} F_\sigma^D (\delta p) = - \frac{1}{\delta t} \sum_{\sigma \in E_i} l_\sigma \underline{u}_h^{**} \cdot \underline{n}_{\sigma, T_i}$$

qui a la même forme que l'équation (I.12), et peut donc être résolue de la même façon. Comme la matrice du système correspondant est symétrique et positive, on peut utiliser un gradient conjugué et il n'est pas nécessaire d'assembler la matrice.

L'équation (I.25) est alors discrétisée dans  $V_h^c$  :

$$(\underline{u}^{n+1} \cdot \underline{n})_\sigma = (\underline{u}^{**} \cdot \underline{n})_\sigma - \frac{\delta t}{l_\sigma} F_\sigma^D (\delta p)$$

pour chaque arête  $\sigma$  du maillage. Notons que  $\underline{u}^{n+1}$  appartient à  $V_h^0$  grâce à l'équation (I.6). Afin de calculer  $\underline{u}_i^{n+1}$  sur un triangle  $T_i$  donné à l'aide des trois valeurs  $(\underline{u}_i^{n+1} \cdot \underline{n})_\sigma$ ,  $\forall \sigma \in E_i$ , on résout le système de trois équations à deux inconnues  $a_i$  et  $b_i$  qui suit :

$$\begin{cases} \underline{u}_i^{n+1} = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \\ \forall \sigma \in E_i, \underline{u}_i^{n+1} \cdot \underline{n}_\sigma = (\underline{u}_i^{n+1} \cdot \underline{n})_\sigma \end{cases}$$

Ce problème est bien posé grâce à la combinaison linéaire suivante basée sur une propriété des triangles :

$$0 = \underline{u}_i^{n+1} \cdot \sum_{\sigma \in E_i} l_\sigma \underline{n}_\sigma = \sum_{\sigma \in E_i} l_\sigma \underline{u}_i^{n+1} \cdot \underline{n}_\sigma = \sum_{\sigma \in E_i} l_\sigma (\underline{u}_i^{n+1} \cdot \underline{n})_\sigma$$

## I.4.2 Résolution du système complet

### I.4.2.1 Terme source pour la convection-diffusion de la vitesse

Le terme source pour la convection-diffusion de la vitesse est le suivant :

$$\underline{s}^n = \underline{f}^n - \nabla p^n$$

Étant donné un triangle  $T_i$  du maillage, une intégration de cette expression sur  $T_i$  donne :

$$\int_{T_i} \underline{s}^n dS = \int_{T_i} \underline{f}^n dS - \oint_{\partial T_i} p^n \underline{n} d\Gamma$$

Une forme discrète de ce terme source peut alors être obtenue en calculant des approximations de  $p^n$  au milieu des arêtes. Ceci est réalisé grâce à la méthode exposée dans la section I.3. Si l'on note  $p_\sigma^n$  la valeur calculée de cette façon, la

forme discrète du terme source obtenue est :

$$S_i \underline{z}_i = S_i \underline{f} - \sum_{\sigma \in E_i} l_\sigma p_\sigma^n \underline{n} \quad (\text{I.26})$$

#### I.4.2.2 L'algorithme complet

- Étant donné une solution initiale  $\underline{u}_h^{-1} \in V_h^c$  et  $C_h^0 \in Q_h$
- Posons  $p_h^{-1} = 0$
- On applique l'opérateur de projection :  $(p_h^0, \underline{u}_h^0) = P(p_h^{-1}, \underline{u}_h^{-1})$
- À partir de  $(\underline{u}_h^n, p_h^n)$ , on obtient  $(\underline{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1})$  par :
  - Prédiction du champ de vitesse  $\underline{u}_h^*$  :
    - On calcule le terme source de  $CD_s$  grâce à l'équation (I.26)
    - On applique l'opérateur de convection-diffusion :  $\underline{u}_h^* = CD_s(\underline{u}_h^n)$
    - On applique l'opérateur d'extension :  $\underline{u}_h^{**} = E(\underline{u}_h^*)$
    - On applique l'opérateur de projection :  $(p_h^{n+1}, \underline{u}_h^{n+1}) = P(p_h^n, \underline{u}_h^{**})$
  - Étant donné  $C_h^n$ , on applique l'opérateur de convection-diffusion :  $C_h^{n+1} = CD_0(\underline{u}_h^{n+1})$ , où  $CD_0$  représente l'opérateur de convection-diffusion avec un terme source nul.

## I.5 Expériences numériques

### I.5.1 Vitesse de convergence du schéma pour la diffusion

L'objectif principal de cette section est de vérifier les résultats théoriques présentés dans la section I.2.2.3, et d'analyser la convergence sur des maillages des catégories  $M_2$  and  $M_3$ . Cette étude a été présentée à l'origine dans [12], et ce qui suit est un court résumé des résultats.

### I.5.1.1 Résultats numériques

Sur des maillages de la catégorie  $M_1$ , la vitesse mesurée de convergence pour les solutions régulières testées (voir les expressions de  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$  dans le tableau I.1 p. 30) est 2. Pour une solution irrégulière solution (comme  $u_5$  avec une point source de DIRAC à l'intérieur du domaine), la vitesse de convergence mesurée est 1.

Notons que  $u_5$  est une fonction de GREEN centrée à l'intérieur du domaine. Cette solution n'est pas assez régulière pour la démonstration de l'estimation d'erreur (I.19) proposée dans [23]. Cependant,  $u_4$ , qui a la même forme, est assez régulière puisque son point source est situé en dehors du domaine de calcul.

Aucune violation du principe du maximum n'a été observée, ce qui est en accord avec la troisième propriétés exposée dans la section I.2.2.3.

Des tests ont été effectués avec les deux types de conditions aux limites (Dirichlet et Neumann), montrant que le type de condition aux limites n'a pas d'influence sur ces résultats.

Les vitesses de convergence mesurées sur les maillages des catégories  $M_2$  et  $M_3$  sont les mêmes qu'avec ceux de la catégorie  $M_1$ . De plus, le principe du maximum est toujours satisfait avec les maillages de la catégorie  $M_2$ , ce qui est toujours en accord avec les résultats théoriques rappelés dans la section I.2.2.3.

Un problème de définition de la transmittivité apparaît dès que deux triangles adjacents ont le même *I.D.B.O.*. Cependant, l'utilisation simple d'un seuil strictement positif pour la distance entre deux *I.D.B.O.* (pour éviter une division par zéro) résout ce problème, comme le montrent nos calculs effectués sur des maillages de rectangles découpés en deux triangles.



### I.5.1.2 Conclusions

Les résultats des expériences numériques sont bien meilleurs que les résultats théoriques obtenus dans [23]. Il n'y a cependant pas de contradiction ; cela signifie simplement que, d'après les résultats numériques, l'estimation d'erreur (I.19) obtenue dans [23] n'est probablement pas optimale.

Un autre point intéressant est que l'approximation calculée est plus proche de la valeur de la solution exacte à l'*I.D.B.O.* qu'au centre de gravité des triangles, comme on peut le voir sur la figure I.4, où deux courbes ont été tracées :

- La première est la courbe de convergence définie par la quantité suivante en fonction du pas du maillage  $h$  :

$$\log \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i (u_i - u(x_i))^2} \right) \quad (\text{I.27})$$

- La deuxième fournit une comparaison entre l'approximation calculée pour chaque triangle  $T_i$  et la valeur de la solution exacte au centre de gravité  $x_i^G$  de  $T_i$  :

$$\log \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i (u_i - u(x_i^G))^2} \right) \quad (\text{I.28})$$

Dans le cas des maillages de la catégorie  $M_3$ , le principe du maximum n'est apparemment plus satisfait si on associe la valeur en chaque *I.D.B.O.* avec son triangle associé lui-même, ce qui n'est pas adapté au cas où l'*I.D.B.O.* est situé en dehors de celui-ci. Cependant, grâce à la méthode présentée dans la section I.3, une approximation de la variables au centre de gravité de chaque triangle peut être calculée. Avec ces valeurs, aucune violation du principe du maximum discret n'a pu être détectée dans nos tests. Comme on peut le voir sur la figure I.5, les différentes valeurs interpolées dans les tests (non seulement les valeurs au centre de gravité mais aussi celles au milieu des arêtes) sont aussi

du second ordre par rapport au pas du maillage  $h$  pour les solutions régulières (et du premier ordre pour les solutions irrégulières comme  $u_5$ ). Sur cette figure, les erreurs suivantes ont été tracées en fonction du pas du maillage  $h$  :

$$\log \left( \sqrt{\frac{\sum_{\sigma \in E} l_{\sigma} (u_{\sigma} - u(x_{\sigma}))^2}{\sum_{\sigma \in E} l_{\sigma}}} \right) \quad (\text{I.29})$$

$$\log \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i (u_i^G - u(x_i^G))^2} \right) \quad (\text{I.30})$$

avec :

- $E$  l'ensemble de toutes les arêtes du maillage
- $x_{\sigma}$  le milieu de l'arête  $\sigma$
- $u_{\sigma}$  la valeur de l'approximation au milieu de l'arête  $\sigma$ , calculée comme dans la section I.3.2.2
- $u_i^G$  la valeur de l'approximation au centre de gravité du triangle  $T_i$ , calculée comme dans la section I.3.2.4

Notons que l'erreur (I.30) est différente de (I.27) et (I.28).

## I.5.2 Écoulement dans une cavité carrée entraînée

Plusieurs prédictions d'écoulements incompressibles d'un fluide visqueux ont été effectués pour valider la méthode : des écoulements de POISEUILLE, des écoulements sur une marche descendante et des écoulements dans une cavité carrée entraînée. Tous ces calculs sont en bon accord avec les résultats attendus. On ne présente ici que les calculs d'écoulements dans une cavité carrée entraînée.

### I.5.2.1 Description de l'expérience numérique

La géométrie du problème est une cavité carrée de côté  $L = 1$ . Les bords de la cavité sont des parois, sauf le bord supérieur pour lequel on prescrit une

vitesse tangentielle uniforme ( $u_x = 1$  et  $u_y = 0$ ). Des résultats numériques de ce problème sont disponibles dans la littérature (voir [28] et [18]). Deux calculs ont été effectués dans la présente étude, avec des nombres de REYNOLDS de 400 et 1000 respectivement.

### **I.5.2.2 Les résultats**

Dans ce cas, un maillage non structuré de 1 872 éléments a été utilisé (voir figure *I.6*).

Les deux calculs ont été réalisés avec le même pas de temps  $\tau = 1$ . Une solution convergée a été obtenue après une centaine de pas de temps (voir figure *I.7*).

Les figures *I.8* et *I.9* représentent des lignes de courant et des isobares pour  $Re = 400, 1000$  respectivement. Les résultats sont en bon accord avec les solutions présentées dans [18], pour lesquelles les auteurs utilisent des schémas du premier ordre en espace.

Les caractéristiques locales sont aussi en bon accord avec ceux de [18], comme le montrent les figures *I.10* et *I.11*, qui représentent les profils de vitesse le long des axes de symétrie vertical et horizontal de la cavité.

## **I.5.3 Convection naturelle dans une cavité carrée**

### **I.5.3.1 Le problème et les équations**

Le problème considéré ici a été étudié en détails dans [21] et [22]. Il s'agit du problème d'un écoulement bidimensionnel d'un fluide de BOUSSINESQ de nombre de PRANTL  $\theta, 71$  dans une cavité carrée fermée de côté  $L$ . Les deux composantes de la vitesse sont nulles sur les parois. Les bords horizontaux sont thermiquement isolés, et les faces gauche et droite sont à des températures de  $T_h$  et  $T_c$  respectivement.

Les quantités  $L$ ,  $\frac{L^2}{\kappa}$  (avec  $\kappa$  la diffusivité thermique supposée constante) et  $\rho \frac{\kappa^2}{L^2}$  sont utilisées comme variables d'adimensionnement pour la longueur, le temps et la pression respectivement. On note  $\theta = \frac{T-T_c}{\Delta T}$  avec  $\Delta T = T_h - T_c$  et  $T$  la température locale du fluide. Les équations adimensionnelles obtenues sont alors :

$$\nabla^* \cdot \underline{v}^* = 0$$

$$\frac{\partial \underline{v}^*}{\partial t^*} + (\underline{v}^* \cdot \nabla^*) \underline{v}^* + \nabla^* p^* - Pr \Delta^* \underline{v}^* = Ra Pr \theta \underline{k} \quad (\text{I.31})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^*} + (\underline{v}^* \cdot \nabla^*) \theta - \Delta^* \theta = 0$$

avec :

- $Ra = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\kappa \nu}$  le nombre de RAYLEIGH,  $\beta$  le coefficient d'expansion volumétrique,  $g$  la gravité et  $\nu$  viscosité cinématique ;
- $Pr = \nu / \kappa$  le nombre de PRANTL ( $Pr = 0,71$  dans notre cas) ;
- $\underline{k}$  le vecteur unitaire descendant.

Comme on peut le voir, le système d'équations (I.31) est formellement identique à {(I.1), (I.2), (I.3)}.

Le terme source  $\underline{s} = Ra Pr \theta \underline{k}$  de la seconde équation est approximé, pour un triangle donné  $T_i$  et à la date  $t^{n+1}$ , par :

$$\underline{s}_i^{n+1} = S_i Ra Pr \theta^n \underline{k}$$

avec  $S_i$  la surface du triangle  $T_i$ .

Les calculs ont été effectués avec des nombres de RAYLEIGH de  $10^3$  et  $10^6$  sur des maillages non structurés de 1 872 éléments et 11 434 éléments respectivement.

### I.5.3.2 Les résultats

On présente ici les résultats comparés avec la solution de référence obtenue dans [22]. Dans le but d'une comparaison qualitative, on donne les tracés des isovalues des composantes de la vitesse, de la pression et de la température (voir figures *I.12*, *I.13*, *I.14* et *I.15*).

De plus, quelques valeurs numériques caractéristiques sont fournies pour une comparaison quantitative (voir les tableaux I.2 et I.3 p. 30) :

- le maximum de la vitesse verticale sur le plan médian horizontal ( $u_{max}^{x=1/2}$ ) et son lieu ( $y_{max}$ )
- le maximum de la vitesse verticale sur le plan médian vertical ( $v_{max}^{y=1/2}$ ) et son lieu ( $x_{max}$ )
- le nombre de NUSSELT moyen sur le plan médian vertical :

$$Nu_{1/2} = \int_0^1 \left( u(y) T(y) - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=1/2} (y) \right) dy$$

Ces résultats sont en bon accord avec les solutions de référence. Notons que le manque de précision du schéma pour la convection utilisé peut être responsable de petites différences (en particulier pour le cas  $Ra = 10^6$ ). Ceci pourrait être facilement amélioré en utilisant une méthode *M.U.S.C.L.* par exemple.

## Conclusion partielle

Un résolveur pour les équations de NAVIER-STOKES a été proposé pour simuler les écoulements incompressibles d'un fluide visqueux et la convection-diffusion d'une quantité scalaire passive. Ce résolveur est basé sur un schéma à pas de temps fractionnaire et la méthode des volumes finis sur les maillages non structurés.

La méthode numérique est simple et constitue un bon compromis entre coût

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y) &= xy + y & \Delta u_1 &= 0 \\
 u_2(x, y) &= x^2 + y^2 & \Delta u_2 &= 4 \\
 u_3(x, y) &= \sin(x + y) & \Delta u_3 &= -2 \sin(x + y) \\
 u_4(x, y) &= \frac{1}{2} \ln \left( (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \right) & \Delta u_4 &= \delta_{(1,1)} \\
 u_5(x, y) &= \frac{1}{2} \ln \left( (x - 1/7)^2 + (y - 10/7)^2 \right) & \Delta u_5 &= \delta_{(1/7, 10/7)}
 \end{aligned}$$

TAB. I.1 – Expression des solutions testées lors des simulations numériques du problème de diffusion de la section I.2.2

	$u_{max}^{x=1/2}(y_{max})$	$v_{max}^{y=1/2}(x_{max})$	$Nu_{1/2}$
Solution de référence	3.649 (0.813)	3.697 (0.178)	1.118
Notre solution	3.603 (0.814)	3.646 (0.174)	1.106

TAB. I.2 – Comparaison entre notre solution et celle de référence à  $Ra = 10^3$

	$u_{max}^{x=1/2}(y_{max})$	$v_{max}^{y=1/2}(x_{max})$	$Nu_{1/2}$
Solution de référence	64.63 (0.850)	219.36 (0.0379)	8.799
Notre solution	67.96 (0.854)	219.20 (0.0405)	9.467

TAB. I.3 – Comparaison entre notre solution et celle de référence à  $Ra = 10^6$

de calcul et précision, en particulier grâce à son schéma pour la diffusion. La précision du schéma de convection pourrait être facilement améliorée en utilisant une méthode de reconstruction comme *M.U.S.C.L.* .

L'extension tridimensionnelle de la méthode est faisable à l'aide de tétraèdres. De plus, une extension aux écoulements des fluides à viscosité variable et aux modèles de turbulence comme  $k - \epsilon$  peut être réalisée. Cependant, cela nécessite de fournir une approximation précise du gradient d'une grandeur scalaire sur chaque interface, et pas seulement de la dérivée normale. En effet, dans le cas général  $\nabla \cdot (\mu_{eff} (\nabla \underline{u} + \nabla^t \underline{u})) \neq \nabla \cdot (\mu_{eff} \nabla \underline{u})$ , bien que l'égalité soit vraie ici puisque  $\nabla \underline{u} = 0$  et  $\mu_{eff} = \mu_0$  est constante. Une proposition pour une telle approximation est fournie et analysée dans [12].

## Deuxième partie

# Simulation numérique des écoulements diphasiques à deux phases incompressibles



## Introduction

On présente ici une méthode de discrétisation volumes finis pour la résolution de systèmes diphasiques comportant deux phases incompressibles. Ce travail est le complémentaire de celui effectué dans le cadre du solveur commun au L.N.H. (voir rapport [1]), qui ne traite pas le cas particulier présenté ci-après, où le système comporte une contrainte stationnaire représentant un bilan de masse volumique (le champ de vitesse  $\alpha_1 \underline{U}_1 + \alpha_2 \underline{U}_2$  est solénoïdal). Comme dans le cas des équations de NAVIER-STOKES en situation isovolume présenté ci-dessus, il est clair que l'algorithme de résolution global doit prendre en compte cette particularité. La pression moyenne associée n'a pas de sens thermodynamique et n'est pas une variable d'évolution. Le système à quatre équations considéré permet de représenter certains écoulements de type gaz-particules (ou éventuellement eau-bulles), lorsque les effets de turbulence peuvent être négligés. Il importe de noter que les effets de pression granulaire doivent être pris en compte si l'on souhaite pouvoir préserver le principe du maximum sur la variable taux de présence.

L'algorithme global est basé sur une méthode de résolution de type prédicteur-correcteur. Dans la première phase, le prédicteur permet de faire évoluer en temps les composantes taux de présence volumique de phase particulaire et quantité de mouvement pour chaque phase, les effets de gradient de pression étant assimilés à ceux de termes sources tels que les effets de pesanteur. Les effets de traînée statique sont stabilisés dans cette étape par implicitation linéaire, tandis que les flux convectifs sont décentrés en espace. Il est ensuite nécessaire d'effectuer une étape de projection dans l'algorithme à l'issue de la phase de prédiction. Cette opération est réalisée en se basant sur l'approche dite "RT0", conformément à l'algorithme de résolution des équations de NAVIER-STOKES en situation incompressible décrit dans la partie précédente.

Dans un premier temps, on rappelle le système d'équations considéré qui permet de représenter les écoulements à deux phases incompressibles lorsque l'on retient le modèle à deux fluides. Les fermetures sont données, et la forme de pression granulaire retenue est précisée. Le schéma en temps est ensuite décrit, et les schémas en espace considérés sont précisés, dans la phase de prédiction, puis dans la phase de correction des champs pression-débit de phase. La mise en oeuvre est réalisée sur maillage non structuré de type triangulaire, les schémas de diffusion associés étant issus des propositions formulées dans [23], et par ailleurs testés dans [12] et [13].

Les cas de validation rapportés ici sont de deux types. Dans un premier temps une validation élémentaire du schéma de convection permet de confirmer le bon comportement du schéma de Rusanov, sur la base de simulations de problèmes de Riemann comportant une structure de type détente-choc, choc-choc, détente-détente. Un cas-test de compactage permet ensuite de prendre en compte l'ensemble des phénomènes physiques, incluant donc en outre les effets de pesanteur, de traînée statique et de pression.

## II.1 Système d'équations

On écrit tout d'abord les équations eulériennes de bilan valables à l'intérieur de chaque région purement monophasique, puis par des processus de moyennes, on étend les équations à tout le domaine :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \underline{U}_k) + \Gamma_k = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k \underline{U}_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \underline{U}_k \otimes \underline{U}_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \langle \underline{u}'_k \otimes \underline{u}'_k \rangle_k) \\ + \alpha_k \nabla P_k - \nabla \cdot (\alpha_k \underline{\tau}_k) + \underline{I}_k = \alpha_k \rho_k \underline{F} \end{aligned}$$

où :

- $\alpha_k$  désigne la fraction volumique de la phase  $k$ ,
- $\underline{U}_k$  la vitesse moyenne de la phase  $k$ ,
- $\underline{u}'_k$  la fluctuation de vitesse de la phase  $k$ ,
- $\Gamma_k$  la densité volumique des apports de masse à la phase  $k$ , résultant des échanges aux interfaces,
- $P_k$  la pression phasique de la phase  $k$ ,
- $\underline{\tau}_k$  le tenseur des contraintes visqueuses de la phase  $k$ ,
- $\underline{I}_k$  le terme de transfert de quantité de mouvement interfacial de la phase  $k$ .

On modélise ensuite les transferts qui ont lieu aux interfaces de chaque phase par des lois de fermeture spécifiques aux écoulements gaz-particules. Dans toute la suite, on désigne la phase gazeuse par l'indice  $k = 1$  et la phase solide par  $k = 2$ . Naturellement on a par définition :  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . On suppose de plus que les deux phases sont incompressibles :  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont deux constantes.

Les lois de fermeture pour les écoulements de type gaz-particules utilisées ici sont :

- Terme d'échange de masse nul :

$$\Gamma_k = 0$$

- Pas de déséquilibre de pression entre les phases :

$$P_1 = P_2 = P$$

- Tenseur turbulent de la phase gazeuse négligé :

$$\langle \underline{u}'_1 \otimes \underline{u}'_1 \rangle_1 = 0$$

- Tenseur des contraintes visqueuses pour la phase gazeuse :

$$\underline{\underline{\tau}}_1 = \mu_1 (\nabla \underline{u}_1 + {}^T \nabla \underline{u}_1 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{u}_1) \underline{\underline{Id}})$$

- Pour la phase solide dispersée :

$$\rho_2 \langle \underline{u}'_2 \otimes \underline{u}'_2 \rangle_2 - \underline{\underline{\tau}}_2 = \rho_2 \Theta(\alpha_2) \underline{\underline{Id}} + \mu_2 (\nabla \underline{u}_2 + {}^T \nabla \underline{u}_2 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{u}_2) \underline{\underline{Id}})$$

$$\text{où : } \alpha_2 \Theta(\alpha_2) = \langle q_2^2 \rangle_0 \left( \alpha_2 + 2 (\alpha_2)_{max} \ln \left( \frac{\alpha_{2max} - \alpha_2}{\alpha_{2max}} \right) - \frac{\alpha_2 \alpha_{2max}}{\alpha_2 - \alpha_{2max}} \right).$$

La forme de la pression inter-granulaire  $\Theta(\alpha_2)$  choisie permet de prendre en compte les écoulements dilués comme les écoulements denses en particules (car  $\Theta(\alpha_2)$  tend vers l'infini quand  $\alpha_2$  tend vers  $\alpha_{2max}$ ). Le carré de la célérité associée à cette pression est :

$$c_2^2 = (\alpha_2 \Theta(\alpha_2))' = \langle q_2^2 \rangle_0 \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_{2max} - \alpha_2} \right)^2$$

- Terme de quantité de mouvement interfacial :

$$\underline{\underline{I}}_1 = -\underline{\underline{I}}_2 = \underline{\underline{I}} = -\alpha_1 \alpha_2 K_T \underline{\underline{U}}_r$$

$$\text{où } K_T = \begin{cases} \frac{3}{4} \frac{C_d}{d_2} \rho_1 \alpha_1^{-2,7} \|\underline{U}_r\| & \text{si } \alpha_2 < 0,2 \\ \frac{\rho_1}{\alpha_1 d_2} \left( \alpha_2 \frac{150}{Re} + 1,75 \|\underline{U}_r\| \right) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{avec } Re = \alpha_1 \frac{d_2}{\nu_1} \|\underline{U}_r\|$$

$$\text{et } C_d = \begin{cases} \frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,7}) & \text{si } Re < 1000 \\ 0,44 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\underline{U}_r = \underline{U}_2 - \underline{U}_1$  désigne la vitesse relative entre les deux phases, et  $C_d$  un coefficient de traînée. L'expression de  $K_T$  provient de la modélisation de la traînée d'une sphère isolée pour les écoulements dilués (si  $\alpha < 0,2$ ), de la loi d'Ergun pour les écoulements denses. Elle s'écrit en fonction du nombre de Reynolds moyen  $Re$  associé aux particules, de même diamètre  $d_2$ .

Finalement, le système à résoudre est le suivant :

$$\nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{U}_1) = 0 \quad (\text{II.32})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0 \quad (\text{II.33})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) + \frac{\alpha_1}{\rho_1} \nabla P + \frac{I}{\rho_1} \\ - \nabla \cdot \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\rho_1} (\nabla \underline{U}_1 + {}^T \nabla \underline{U}_1 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{U}_1) \underline{Id}) \right) = -\alpha_1 \underline{g} \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P - \frac{I}{\rho_2} \\ - \nabla \cdot \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\rho_2} (\nabla \underline{U}_2 + {}^T \nabla \underline{U}_2 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{U}_2) \underline{Id}) \right) + \nabla (\alpha_2 \Theta (\alpha_2)) = -\alpha_2 \underline{g} \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

auquel on adjoint la relation :  $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$ . On se référera à [2], [5], [17], [19], [20], [29], [32], [33], [36], [37] pour plus de détails concernant la modélisation des effets de compactage par la pression granulaire.

## II.2 Schéma global

Les forces effectivement prises en compte dans les développements sont la convection, le gradient de pression, la traînée et les effets de pesanteur. Les effets visqueux notamment n'ont pas été codés. On cherche en effet dans un premier temps à s'assurer de la stabilité numérique du schéma global en l'absence de ces effets physiques stabilisants.

Le schéma global est scindé en deux parties :

- un prédicteur qui intègre les contributions de la convection (y compris la pression inter-granulaire), de la traînée, le gradient de pression et les termes-sources volumiques ;
- un correcteur de pression (sans sens thermodynamique) prenant notamment en compte la contrainte stationnaire  $\nabla \cdot (\alpha_1 \underline{U}_1 + \alpha_2 \underline{U}_2) = 0$ , qui doit être traitée séparément.

Dans toute la suite, on utilise le vecteur d'état dans  $\mathfrak{R}^5$  suivant :

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 U_{2_x} \\ \alpha_2 U_{2_y} \\ \alpha_1 U_{1_x} \\ \alpha_1 U_{1_y} \end{bmatrix}$$

La prise en compte des effets de diffusion sur les composantes de vitesse contraint à prendre comme valeur de référence la valeur de maille à l'*I.D.B.O.* (voir [26], [23], [34], [12], [4]). De surcroit, le correcteur de pression impose de considérer la valeur de pression en ce même lieu géométrique. En ce qui concerne l'approximation des flux convectifs, on se base dans cette première approche sur le flux de Rusanov ([38]), qui, pour les systèmes sous-jacents considérés ici, qui sont de la classe Euler ou Euler isentropique, possède des propriétés structurelles de préservation de la positivité de maille pour la variable densité (ou ici le taux de présence volumique) intéressantes dans le cas explicite pur ou implicite pur (voir annexe B).

### II.2.1 Prédicteur

Pour cette étape, les équations continues sont les suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P - \frac{\underline{I}}{\rho_2} + \nabla (\alpha_2 \Theta (\alpha_2)) = -\alpha_2 \underline{g}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) + \frac{\alpha_1}{\rho_1} \nabla P + \frac{\underline{I}}{\rho_1} = -\alpha_1 \underline{g}$$

La solution  $\underline{W}^*$  obtenue sera alors la condition initiale de l'étape de correction.

### II.2.1.1 Discrétisation en temps

Dans le prédicteur, on choisit a priori de stabiliser la traînée en implicitant le coefficient  $\alpha_1 \alpha_2 K_T$ . Par contre, la convection n'a pas pu être implicitée en raison du choix de la méthode de résolution du système<sup>5</sup>.

La discrétisation en temps est donc la suivante :

---

<sup>5</sup>La méthode *GMRES*, qui a été choisie, présente l'avantage de ne pas nécessiter d'assemblage de matrice. Dans cette méthode, le solveur fournit des vecteurs d'état sur lesquels on applique les différents opérateurs implicites du schéma, afin de déterminer des directions de descente. Malheureusement, le domaine de définition des opérateurs (en particulier celui de  $\Theta(\alpha_2)$  qui nécessite  $0 \leq \alpha_2 < \alpha_{2,max}$ ) n'est généralement pas respecté dans les étapes intermédiaires de calcul, ce qui nous oblige à garder une convection explicite.



$$\begin{aligned}
\underline{W}^* + \Delta t (\alpha_1 \alpha_2 K_T)^n \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_1}{\rho_2} \\ -\frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_1}{\rho_1} \end{pmatrix}^* &= \underline{W}^n \\
-\Delta t \left[ \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) \\ \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2 + \alpha_2 \Theta_2 (\alpha_2) \underline{Id}) \\ \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) \end{pmatrix}^n}_{convection} \right] & \\
-\Delta t \left[ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha_2}{\rho_2} (\nabla P) \\ \frac{\alpha_1}{\rho_1} (\nabla P) \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \underline{g} \\ \alpha_1 \underline{g} \end{pmatrix}^n}_{sources} \right] &
\end{aligned} \tag{II.36}$$

### II.2.1.2 Discrétisation en espace des flux convectifs : le schéma de Rusanov

Dans toute la suite, on utilise pour la convection les valeurs de maille. Afin d'augmenter la précision en espace et de conserver le respect du principe du maximum sur tous les types de maillages (voir [12]), ces valeurs peuvent être reconstruites à partir des valeurs des variables aux points de co-localisation, les *I.D.B.O.*, grâce à une méthode du type de celle présentée dans [7] et [8]. Ceci n'a cependant pas été implémenté et les tests ont tous été effectués sur des maillages suffisamment réguliers (de type  $M_2$  au sens de [12]). Ainsi, la valeur de maille est approximée (à l'ordre un) par la valeur à l'*I.D.B.O.*.

**Schéma de Rusanov unidimensionnel** On traite tout d'abord le problème unidimensionnel hyperbolique et conservatif suivant :

$$\underline{W}_{,t} + (\underline{F}(\underline{W}))_{,x} = \underline{0}$$

On le discrétise en temps avec un simple schéma d'Euler explicite, et en espace avec le schéma de Rusanov :

$$\underline{W}^{n+1} = \underline{W}^n - \Delta t \nabla \cdot \underline{F}^{Rus}(\underline{W}^n)$$

Par hypothèse, la jacobienne des flux  $\underline{F}_{,W}(\underline{W})$  est diagonalisable dans  $\mathfrak{R}^N$ . Ses valeurs propres classées par ordre croissant sont notées :  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ .

Le flux de Rusanov à l'interface des éléments  $i$  et  $i + 1$  est alors :

$$\underline{F}^{Rus}(\underline{W}_i, \underline{W}_{i+1}) = \frac{1}{2} (\underline{F}(\underline{W}_i) + \underline{F}(\underline{W}_{i+1})) - \frac{1}{2} \rho_{Rus} (\underline{W}_{i+1} - \underline{W}_i)$$

où :

$$\rho_{Rus} = \max_{k \in \{i, i+1\}} \{|\lambda_1^k|, |\lambda_2^k|, \dots, |\lambda_N^k|\}$$

**Extension au cadre bidimensionnel** Le problème est le suivant :

$$\underline{W}_{,t} + (\underline{F}(\underline{W}))_{,x} + (\underline{G}(\underline{W}))_{,y} = \underline{0}$$

On définit pour un vecteur normal  $\underline{n}(n_x, n_y)$  quelconque :

$$\mathcal{F}(\underline{W}, \underline{n}) = n_x \underline{F}(\underline{W}) + n_y \underline{G}(\underline{W}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{,W}(\underline{W}, \underline{n}) = n_x \underline{F}_{,W}(\underline{W}) + n_y \underline{G}_{,W}(\underline{W})$$

On suppose que  $\mathcal{F}_{,W}$  est diagonalisable. On note alors :

$$\rho_{Rus}(\underline{W}_i, \underline{n}) = \max \{ |\lambda_1^i|, |\lambda_2^i|, \dots, |\lambda_N^i| \}$$

où les  $\lambda_l^i$ ,  $l \in \{1, 2, \dots, N\}$  sont les valeurs propres de  $\mathcal{F}_{\underline{W}}(\underline{W}_i, \underline{n})$ .

Le flux de Rusanov vaut alors :

$$\begin{aligned} \underline{F}^{Rus}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{F}(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) + \mathcal{F}(\underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \max_{k \in \{i, j\}} \{ \rho_{Rus}(\underline{W}_k, \underline{n}_{ij}) \} (\underline{W}_j - \underline{W}_i) \end{aligned}$$

**Application au prédicteur du système diphasique (II.32)-(II.35)** On note  $V(i)$  l'ensemble des voisins de l'élément  $i$ . Soit  $i$  un élément de volume  $\Omega_i$  du domaine de calcul  $\Omega$  qui n'est pas en contact avec le bord  $\partial\Omega$  (le schéma d'intégration pour les éléments touchant le bord est formellement identique, si ce n'est que le flux sur l'arête de bord est traité à l'aide d'un état  $j$  extérieur au domaine  $\Omega$  - voir section II.2.1.3). L'intégration de l'équation (II.36) sur l'élément  $i$  donne alors :

$$\begin{aligned} \underline{W}_i^* + \Delta t (\alpha_1 \alpha_2 K_T)_i^n \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_1}{\rho_2} \\ -\frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_1}{\rho_1} \end{pmatrix}_i^* &= \underline{W}_i^n \\ -\frac{\Delta t}{\Omega_i} \sum_{j \in V(i)} l_{ij} \left[ \underline{F}^{Rus}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha_{2i}}{\rho_2} P_{ij} \\ \frac{\alpha_{1i}}{\rho_1} P_{ij} \end{pmatrix}^n \right] \\ -\Delta t \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{2i} \underline{g} \\ \alpha_{1i} \underline{g} \end{pmatrix}^n & \end{aligned}$$

avec :

– comme expression du flux de Rusanov :

$$\underline{F}^{Rus}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) = \frac{1}{2} \begin{cases} \alpha_{2_i}^n \underline{U}_{2_i}^n \cdot \underline{n}_{ij} + \alpha_{2_j}^n \underline{U}_{2_j}^n \cdot \underline{n}_{ij} - (\rho_{Rus})_{ij}^n (\alpha_{2_j}^n - \alpha_{2_i}^n) \\ (\alpha_{2_i}^n \underline{U}_{2_i}^n \cdot \underline{n}_{ij}) \underline{U}_{2_i}^n + (\alpha_{2_j}^n \underline{U}_{2_j}^n \cdot \underline{n}_{ij}) \underline{U}_{2_j}^n \\ + (\alpha_{2_i}^n \Theta(\alpha_{2_i}^n) + \alpha_{2_j}^n \Theta(\alpha_{2_j}^n)) \underline{n}_{ij} \\ - (\rho_{Rus})_{ij}^n (\alpha_{2_j}^n \underline{U}_{2_j}^n - \alpha_{2_i}^n \underline{U}_{2_i}^n) \\ (\alpha_{1_i}^n \underline{U}_{1_i}^n \cdot \underline{n}_{ij}) \underline{U}_{1_i}^n + (\alpha_{1_j}^n \underline{U}_{1_j}^n \cdot \underline{n}_{ij}) \underline{U}_{1_j}^n \\ - (\rho_{Rus})_{ij}^n (\alpha_{1_j}^n \underline{U}_{1_j}^n - \alpha_{1_i}^n \underline{U}_{1_i}^n) \end{cases}$$

où le rayon spectral  $(\rho_{Rus})_{ij}^n$  vaut :

$$(\rho_{Rus})_{ij}^n = \max_{k=i,j} \{ |\underline{U}_{2_k}^n \cdot \underline{n}_{ij}| + c_{2_k}^n, 2 |\underline{U}_{1_k}^n \cdot \underline{n}_{ij}| \}$$

– comme pression à l'interface :

$$P_{ij}^n = t_{ij} P_i^n + (1 - t_{ij}) P_j^n$$

où  $t_{ij} = \frac{(x_j - x_{ij}) \cdot (x_j - x_i)}{(x_j - x_i)^2}$ , avec  $x_i$  l'I.D.B.O. de la maille  $i$ ,  $x_j$  celui de la maille  $j$ , et  $x_{ij}$  le milieu de l'arête.

Le nombre de CFL considéré dans les applications est basé sur la définition suivante :

$$CFL = \frac{\Delta t \sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^n l_{ij}}{2\Omega_i}$$

Cette définition est basée sur le respect de la positivité de la variable  $\alpha_2$

dans le schéma de Rusanov (voir annexe B).

### II.2.1.3 Les conditions aux limites pour la phase de prédiction

**Conditions de paroi** Les conditions aux limites de paroi ont été traitées de façon simple grâce à l'introduction d'un état miroir (comme dans [19]). On calcule alors le flux convectif à l'interface de la même façon qu'à l'intérieur du domaine.

Soit  $\sigma_i$  une arête de bord, connectée à la maille  $i$  de vecteur d'état associé  $\underline{W}_i$ . On note  $\underline{n}_{i\hat{i}}$  le vecteur unitaire normal à la paroi dirigé vers l'extérieur du domaine, et  $\underline{t}_{i\hat{i}}$  un vecteur unitaire tangent à la paroi. Alors l'état miroir  $\underline{W}_{i\hat{i}}$  est lié à  $\underline{W}_i$  par les relations :

$$\underline{W}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{2_i} \\ \underline{U}_{2_i} = (\underline{U}_{2_i} \cdot \underline{t}_{i\hat{i}}) \underline{t}_{i\hat{i}} + (\underline{U}_{2_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{i}}) \underline{n}_{i\hat{i}} \\ \underline{U}_{1_i} = (\underline{U}_{1_i} \cdot \underline{t}_{i\hat{i}}) \underline{t}_{i\hat{i}} + (\underline{U}_{1_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{i}}) \underline{n}_{i\hat{i}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{W}_{i\hat{i}} = \begin{bmatrix} \alpha_{2_{i\hat{i}}} = \alpha_{2_i} \\ \underline{U}_{2_{i\hat{i}}} = (\underline{U}_{2_i} \cdot \underline{t}_{i\hat{i}}) \underline{t}_{i\hat{i}} - (\underline{U}_{2_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{i}}) \underline{n}_{i\hat{i}} \\ \underline{U}_{1_{i\hat{i}}} = (\underline{U}_{1_i} \cdot \underline{t}_{i\hat{i}}) \underline{t}_{i\hat{i}} - (\underline{U}_{1_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{i}}) \underline{n}_{i\hat{i}} \end{bmatrix}$$

Le flux de Rusanov vaut alors :

$$\underline{F}^{Rus}(\underline{W}_i, \underline{W}_{i\hat{i}}, \underline{n}_{i\hat{i}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \left\{ \alpha_{2i} \Theta(\alpha_{2i}) + (\alpha_{2i} \underline{U}_{2i} \cdot \underline{n}_{i\hat{i}}) (\underline{U}_{2i} \cdot \underline{n}_{i\hat{i}} + \rho_{Rus_{i\hat{i}}}) \right\} \underline{n}_{i\hat{i}} \\ (\alpha_{1i} \underline{U}_{1i} \cdot \underline{n}_{i\hat{i}}) (\underline{U}_{1i} \cdot \underline{n}_{i\hat{i}} + \rho_{Rus_{i\hat{i}}}) \underline{n}_{i\hat{i}} \end{bmatrix}$$

en notant  $(\rho_{Rus})_{i\hat{i}} = \max \{ \rho_{Rus}(\underline{W}_i, \underline{n}_{i\hat{i}}), \rho_{Rus}(\underline{W}_{i\hat{i}}, \underline{n}_{i\hat{i}}) \} = \rho_{Rus}(\underline{W}_i, \underline{n}_{i\hat{i}})$ .

La forme du flux de Rusanov est intéressante puisque l'approximation de pression de paroi est conforme à celle issue de l'analyse du problème de Riemann adjoint. En effet, la pression particulière en paroi est approximée par :

$$\alpha_{2_{paroi}} \Theta(\alpha_{2_{paroi}}) = \left\{ \alpha_{2i} \Theta(\alpha_{2i}) + (\alpha_{2i} \underline{U}_{2i} \cdot \underline{n}_{i\hat{i}}) (\underline{U}_{2i} \cdot \underline{n}_{i\hat{i}} + \rho_{Rus_{i\hat{i}}}) \right\}$$

Puisque :

$$\underline{U}_{2i} \cdot \underline{n}_{i\hat{i}} + \rho_{Rus_{i\hat{i}}} \geq 0$$

l'approximation de pression en paroi est plus grande que la pression de maille adjacente dans le cas d'une configuration de double choc, où :

$$\underline{U}_{2i} \cdot \underline{n}_{i\hat{i}} \geq 0$$

et plus faible dans le cas d'une double détente ( $\underline{U}_{2i} \cdot \underline{n}_{i\hat{i}} \leq 0$ ). La réponse du schéma est donc sensiblement la même que celle du schéma de Godunov[20], et plus physique que celle issue de l'approximation du schéma de Roe.

**Conditions d'entrée-sortie** La méthode utilisée est celle de l'état réservoir. On fournit un état de référence  $\underline{W}_{\tilde{i}}$  à l'extérieur du domaine, qui sert directement pour le calcul du flux convectif  $\underline{F}^{Rus}(\underline{W}_i, \underline{W}_{\tilde{i}}, n_{i\tilde{i}})$  au travers de l'arête de bord.

**Condition mixte paroi-fluide** Ce type de condition aux limites se rencontre notamment dans le calcul des lits fluidisés denses : en bas du lit, où le fluide rentre, se trouve une grille qui empêche les particules de sortir. Numériquement, on simule cet effet en calculant le flux de Rusanov entre l'état  $\underline{W}_i$  de la maille interne  $i$  et l'état  $\underline{W}_{\tilde{i}}$  suivant, obtenu en mixant l'état miroir  $\underline{W}_{\tilde{i}}$  pour la partie solide et un état réservoir  $\underline{W}_{\tilde{i}}$  fourni pour la partie fluide :

$$\underline{W}_{\tilde{i}} = \begin{bmatrix} \alpha_{2_{\tilde{i}}} = \alpha_{2_i} = \alpha_{2_i} \\ \underline{U}_{2_{\tilde{i}}} = \underline{U}_{2_{\tilde{i}}} \\ \underline{U}_{1_{\tilde{i}}} = \underline{U}_{1_{\tilde{i}}} \end{bmatrix}$$

**Cas de la pression** Il faut calculer une valeur de la pression au milieu de l'arête de bord. Celle-ci peut être obtenue par une extrapolation locale grâce aux *I.D.B.O.* des mailles voisines (voir [7] et [8]). Par souci de simplicité, la valeur retenue est simplement la valeur à l'*I.D.B.O.* de la maille connectée à l'arête de bord (rappelons que nos applications, les maillages utilisés sont tous de type  $M_2$  au sens de [12]).

## II.2.2 Correcteur

La solution  $\underline{W}^*$  de l'étape précédente est la condition initiale du correcteur. Les équations continues retenues pour cette étape sont les suivantes :

$$\nabla \cdot \underline{V} = 0 \quad (\text{II.37})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \underline{U}_1) + \frac{\alpha_1}{\rho_1} \nabla \phi = \underline{0} \quad (\text{II.38})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \underline{U}_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla \phi = \underline{0} \quad (\text{II.39})$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.40})$$

en notant  $\underline{V} = \alpha_1 \underline{U}_1 + \alpha_2 \underline{U}_2$  et  $\phi$  l'incrément de pression.

Les équations II.38, II.39 et II.40 peuvent être combinées pour obtenir :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + K \nabla \phi = 0 \quad (\text{II.41})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 \underline{U}_1 - \rho_2 \underline{U}_2) = \underline{0} \quad (\text{II.42})$$

avec  $K = \left( \frac{\alpha_1}{\rho_1} + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \right)$ .

### II.2.2.1 Discrétisation en temps

Pour cette étape, la discrétisation en temps est la suivante :

$$\nabla \cdot \underline{V}^{n+1} = 0 \quad (\text{II.43})$$

$$\underline{V}^{n+1} - \underline{V}^* + K^* \Delta t \nabla \phi^{n+1} = 0 \quad (\text{II.44})$$

$$\rho_1 \underline{U}_1^{n+1} - \rho_2 \underline{U}_2^{n+1} = \rho_1 \underline{U}_1^* - \rho_2 \underline{U}_2^* \quad (\text{II.45})$$



où  $\phi^{n+1} = P^{n+1} - P^n$ .

### II.2.2.2 Correction de la pression

En appliquant un opérateur de divergence sur l'équation (II.44) et en utilisant la condition stationnaire (II.43), on obtient une équation elliptique qui permet de corriger la pression et la vitesse :

$$\nabla \cdot \underline{V}^{n+1} = -\nabla \cdot \underline{V}^* + K^* \Delta t \Delta \phi^{n+1} = 0$$

Après intégration sur une maille interne  $i$ , on obtient en effet :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in V(i)} l_{ij} (\underline{V}^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij} &= -\sum_{j \in V(i)} l_{ij} (\underline{V}^* \cdot \underline{n})_{ij} \\ &\quad + \Delta t \sum_{j \in V(i)} l_{ij} (K^* \nabla \phi^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij} \quad (\text{II.46}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On utilise le schéma introduit dans [23] pour résoudre cette équation, avec :

$$l_{ij} (K^* \nabla \phi^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij} = \frac{K_i^* K_j^* \mu_{ij}}{t_{ij} K_i^* + (1 - t_{ij}) K_j^*} (\phi_j - \phi_i)$$

où  $\mu_{ij} = \frac{l_{ij}}{(x_j - x_i) \cdot \underline{n}_{ij}}$  désigne la transmittivité de l'arête  $ij$ , et  $t_{ij} = \frac{(x_j - x_{ij}) \cdot (x_j - x_i)}{(x_j - x_i)^2}$  ( $x_k$  est l'I.D.B.O. de la maille  $k$ ,  $x_{ij}$  le milieu de l'arête  $ij$ , et  $\underline{n}_{ij}$  la normale à l'arête  $ij$  dirigée vers l'extérieur de la maille  $i$ ).

Les valeurs d'interface  $(\underline{V}^* \cdot \underline{n})_{ij}$  sont obtenues grâce à un opérateur d'extension du type de celui utilisé dans [6], [7] et [8] :

$$(\underline{V}^* \cdot \underline{n})_{ij} = t_{ij} \underline{V}_i^* \cdot \underline{n}_{ij} + (1 - t_{ij}) \underline{V}_j^* \cdot \underline{n}_{ij}$$

### II.2.2.3 Reconstruction des vitesses

On calcule les valeurs de  $\underline{V}^{n+1} \cdot \underline{n}$  sur chaque interface grâce à l'équation II.44 projetée sur les normales aux arêtes :

$$(\underline{V}^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij} = (\underline{V}^* \cdot \underline{n})_{ij} - \Delta t (K^* \nabla \phi^{n+1})_{ij}$$

La valeur de  $\underline{V}_i^{n+1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  peut alors être reconstruite sur chaque maille grâce à une technique "RT0" en résolvant pour  $a$  et  $b$  le système de trois équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \underline{n}_{ij} = (\underline{V}^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij}, \quad \forall j \in V(i)$$

Ce système admet une solution unique puisque les trois équations sont liées par la combinaison linéaire triviale suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in V(i)} l_{ij} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \underline{n}_{ij} &= \sum_{j \in V(i)} l_{ij} (\underline{V}^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\sum_{j \in V(i)} l_{ij} \underline{n}_{ij}}_0 &= \underbrace{\sum_{j \in V(i)} l_{ij} (\underline{V}^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij}}_0 \end{aligned}$$

Les variables  $(\alpha_1 \underline{U}_1)_i^{n+1}$  et  $(\alpha_2 \underline{U}_2)_i^{n+1}$  sont obtenues au final par inversion du système d'équations issu de la définition de  $\underline{V}$  et de l'équation II.45 :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1_i}^{n+1} & \alpha_{2_i}^{n+1} \\ \rho_1 & -\rho_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_{1_i}^{n+1} \\ \underline{U}_{2_i}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{V}_i^{n+1} \\ \rho_1 \underline{U}_{1_i}^* - \rho_2 \underline{U}_{2_i}^* \end{pmatrix}$$

#### II.2.2.4 Conditions aux limites

L'objet principal de l'étape de correction consiste à reconstruire un champ  $\underline{V} = \alpha_1 \underline{U}_1 + \alpha_2 \underline{U}_2$  à divergence nulle. Il faut donc connaître les vitesses normales au bord du domaine. En paroi et en entrée, ces variables sont le plus souvent connues et on peut utiliser directement les valeurs fournies. Dans le système en pression, ces conditions aux limites sont alors assimilables à des conditions de Neumann sur l'incrément de pression  $\phi$ .

En sortie de domaine, les vitesses normales sont rarement connues à l'instant (n+1), et on donne alors une valeur (typiquement 0) à la dérivée normale de l'incrément de pression  $\phi$ , ainsi qu'à la vitesse normale d'interface  $\underline{V}^* \cdot \underline{n}$  par extension. Cette dernière extension peut être effectuée soit par simple projection de la valeur de maille sur la normale de bord, soit par extrapolation linéaire basée sur les valeurs de maille adjacentes. Il faut donc veiller à fournir une condition de Dirichlet sur la pression au bord afin d'éliminer le mode constant du système elliptique en pression (la pression étant définie à une constante près ne dépendant que du temps). La prise en compte de ces conditions de Dirichlet est identique à celle utilisée dans [12]. Il est clair que ce problème disparaît si les conditions de sortie sont données par affectation du champ de pression au bord de sortie.

### II.3 Validations élémentaires

Les cas-test qui suivent ont pour but de valider le calcul des flux convectifs du prédicteur, et de tester le comportement du schéma de Rusanov sur un système similaire à celui décrivant les écoulements d'Euler isentropiques. Voici donc le système d'équations continu considéré ici :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + \nabla (\alpha_2 \Theta (\alpha_2)) - \frac{I}{\rho_2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) + \frac{I}{\rho_1} = 0$$

On examine en fait ainsi le comportement du prédicteur dans un contexte où le champ de pression  $P$  est uniforme, et en l'absence d'effets de pesanteur. Tous les calculs ont été effectués sur un maillage régulier de 4 000 triangles ( $4 * 500$  rectangles coupés en deux). Les valeurs retenues pour les densités sont pour tous les calculs :  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 2500$ . Le coefficient de compactage retenu est :  $\alpha_{2max} = 0,64$ . La constante  $\langle q_2^2 \rangle_0$  est prise égale à un.

Rappelons que le système d'équations sur lequel on travaille n'inclut pas le traitement de la pression, qui n'a ici aucun sens thermodynamique. Les cas-test qui suivent n'ont donc pas de signification physique, mais sont effectués uniquement pour valider le calcul des flux convectifs avec le schéma de Rusanov.

Dans un premier temps, on se place dans les conditions des écoulements d'Euler isentropique en ne prenant en compte aucune traînée ( $K_T = 0$ ) et en initialisant :  $\underline{U}_1 = \underline{0}$ . Les trois premières figures (figures II.16, II.17, II.18) re-

présentent des cas-test de type “rupture de barrage” de difficulté croissante, le dernier conduisant à des vitesses supersoniques. Les deux figures qui suivent sont des cas-test de double choc et de double détente (figures II.19 et II.20 respectivement). La double détente conduit pour les conditions initiales retenues à l’apparition théorique du vide. Ces derniers cas-test confirment la robustesse du schéma de Rusanov, qui ne nécessite pas de correction entropique aux points de détente sonique, préserve la positivité du taux de présence volumique, même dans le cas de l’apparition du vide. Si l’on n’impose pas une contrainte supplémentaire sur le pas de temps, on rappelle néanmoins qu’il n’assure pas le non dépassement de la borne supérieure  $\alpha_{2max}$ , sans avoir recours à un artifice (licite!) supplémentaire sur le pas de temps.

Dans un second temps, on inclut les effets de traînée ( $K_T \neq 0$ ), qui créent un couplage entre la partie solide et la partie fluide, mettant en mouvement la phase fluide (figure II.21). Le diamètre des particules est fixé à  $d_2 = 5\text{ mm}$ , et la viscosité de l’air considérée pour cette simulation est :  $\nu_1 = 10^{-5}$ . On note que l’effet d’entraînement des particules est assez faible, le diamètre de celles-ci étant élevé.

## II.4 Validation globale : cas-test de compactage

On simule ici un lâcher de particules pesantes dans un fluide. La géométrie du problème est celle d’une enceinte rectangulaire ouverte en haut. Les conditions aux limites sont donc des parois en bas et sur les côtés, et une condition d’entrée-sortie avec état réservoir en haut. L’état réservoir est défini par :

$$\underline{W}_{haut} = \begin{pmatrix} \alpha_{2_{haut}} = 10^{-6} \\ \underline{U}_{2_{haut}} = \underline{0} \\ \underline{U}_{1_{haut}} = \underline{0} \end{pmatrix}$$

Le diamètre des particules est  $d_2 = 5\text{ mm}$ . Les conditions initiales du calcul sont les suivantes :

	$y \leq 1$	$y > 1$
$\alpha_2$	0,3	$10^{-6}$
$\underline{U}_2$	$\underline{0}$	$\underline{0}$
$\underline{U}_1$	$\underline{0}$	$\underline{0}$

Le nombre CFL tel que défini plus haut vaut 0,8 tout au long du calcul. Le maillage utilisé est non structuré, de taille de maille assez uniforme, de type  $M_2$  au sens de [12], et possède 4 004 éléments (voir figure II.22). Le calcul n'a pas été effectué jusqu'à la convergence en temps. La solution n'étant pas définie dans le modèle continu (car  $\alpha_2$  ne peut atteindre  $\alpha_{2_{max}}$ ), il est de toute façon impossible de converger complètement, même sur un maillage structuré à cellules rectangulaires (voir [1]). Sur l'état intermédiaire obtenu à la fin du calcul présenté sur les figures II.23 et II.24, on distingue cependant nettement sur les graphes de toutes les variables l'interface entre une partie compacte et une partie diluée en particules. La vitesse de chute des particules au dessus du lit dense n'est pas encore atteinte à ce stade du calcul. La courbe d'isovaleur un du nombre de Mach, au sens de la phase particulaire dans un vide d'air, est bien localisée à l'interface séparant la zone très dense de la zone plus diluée. La pression mécanique est presque uniforme dans le lit dense, et décroît jusqu'à la

valeur de référence de zéro fixée sur le bord supérieur du domaine de calcul. Le niveau de compactage obtenu à ce stade du calcul, voisin de 0.57, et donc assez éloigné de 0.64, est lié au choix de la constante associée à la pression granulaire, qui physiquement est dans ce calcul trop élevée.

## Conclusion partielle

On a présenté ici le développement d'un prototype de résolution par la méthode des volumes finis d'un système diphasique de type gaz-solide comportant deux phases incompressibles. Le système à quatre équations considéré, qui tient compte des bilans de masse et de quantité de mouvement dans chaque phase, modélise les effets de compactage maximal. La méthode numérique fait appel à une phase de prédiction suivie d'une phase de correction implicite du champ de pression et du champ de débit dans chaque phase. L'étape de projection est effectuée à l'aide d'une reconstruction "RT0" du champ de vitesse volumique. Les cas-test retenus ont pour but d'évaluer la stabilité d'ensemble du schéma. A l'heure de la rédaction, le bilan algorithmique ne peut être complet dans la mesure où le cas de calcul de lit fluidisé dense n'a pas pu être mené à son terme. On peut néanmoins être relativement optimiste à ce stade, si l'on se base sur les expériences précédentes associées ([1], [7], [8], [20]).



## Conclusion générale

Ce travail a tenté de contribuer à la recherche sur les méthodes de volumes finis sur maillages non structurés. Ces méthodes sont encore peu utilisées malgré leurs qualités intrinsèques, comme la conservation numérique locale des quantités conservatives, et la capacité à traiter des géométries complexes.

En ce qui concerne la discrétisation en espace, le schéma pour la diffusion proposé dans [23] a confirmé au cours des nombreuses simulations effectuées dans le cadre de ce travail, ses excellentes qualités de précision, de facilité de mise en oeuvre et de faible coût de calcul, qui en font un candidat extrêmement intéressant pour les applications industrielles.

Les tests effectués d'autre part sur les schémas pour la convection, sur un système inconditionnellement hyperbolique de type Euler isentropique, ont montré l'extrême robustesse du schéma de RUSANOV (voir [38]), dont la mise en oeuvre est encore une fois fort simple. Ce schéma constitue donc une alternative aux schémas classiques (GODUNOV [31] et ROE [35]) et au plus récent schéma de VFROE [27], alternative qui est fort intéressante pour les applications industrielles où ces schémas ne peuvent être mis en oeuvre ou lorsque la robustesse est le facteur limitant.

D'autre part, la discrétisation en temps de type prédiction-corrrection s'est montrée parfaitement adaptée à la résolution des systèmes considérés ici pour la modélisation des écoulements monophasiques et diphasiques, où apparaît une contrainte stationnaire du fait des hypothèses d'incompressibilité.

La flexibilité de cette méthode a permis de traiter de nombreux problèmes physiques monophasiques, des écoulements incompressibles d'un fluide visqueux au transport de polluant, en passant par la convection naturelle d'un fluide de BOUSSINESQ, etc. D'autres extensions sont envisageables grâce à la possibilité de calculer des gradients d'interface complets, par exemple pour les fluides à

viscosité variables ou les modèles de turbulence du type  $k - \epsilon$ .

Cette méthode permet de plus d'obtenir des propriétés intéressantes pour les sous-systèmes, telles que l'hyperbolicité inconditionnelle du sous-système convectif, et le respect du principe du maximum discret, auquel une attention toute particulière a été portée tout au long des travaux présentés ici. Dans le cas des écoulements diphasiques à deux phases incompressibles, on démontre, avec le schéma de RUSANOV, la positivité de la variable taux de présence volumique de la phase particulaire, sous une condition de type *C.F.L.* généralement peu contraignante.

Du point de vue de la physique, les effets de compactage maximal et le principe du maximum qui en découle ( $\alpha_2 < \alpha_{2,max}$ ) ne peuvent être obtenus dans le système continu que par l'utilisation d'une loi de pression granulaire du type de celle utilisée ici, qui présente une asymptote verticale au taux de compactage maximal. On ne peut cependant démontrer que le principe du maximum est préservé au niveau discret, même si aucune violation n'a été observée dans nos simulations (des tests supplémentaires peuvent être effectués afin de vérifier ceci plus avant). Ces propriétés des systèmes continu et discret sont extrêmement importantes pour les applications industrielles du type lits fluidisés denses, où le taux de présence des particules varie d'une valeur quasi-nulle (au sein des bulles) aux alentours du taux de compactage maximal. Il serait bien entendu intéressant de mener à terme un calcul de lit fluidisé dense, mais on peut doré et déjà être optimiste étant donnée la robustesse démontrée par les tests effectués à ce stade des développements.

# Bibliographie

- [1] F. ARCHAMBEAU, C. BARS, J. M. HÉRARD, Prototype de solveur volumes finis colocalisé sur maillage non structuré pour la simulation de modèles bi-fluides gaz-solide, *Rapport EDF HE-41/99/021/A*, 1999.
- [2] G. BALZER, A. BOELLE, O. SIMONIN, Eulerian gas solid flow modelling of dense fluidized beds, *Proceedings of Fluidization VIII*, Tours, France, 1995.
- [3] J. BARANGER, J.F. MAÎTRE, F. OUDIN, Application de la théorie des éléments finis mixtes à l'étude d'une classe de schémas aux volumes différences finis pour les problèmes elliptiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 319, Série I, p. 401-404, 1994.
- [4] J. BARANGER, J.F. MAÎTRE, F. OUDIN, Connection between finite volume and mixed finite element methods, *Math. Mod. & Num. Anal.*, Vol. 30, nr 4, p. 445-465, 1996.
- [5] A. BOELLE, Validation d'un modèle à deux fluides appliqué à la simulation des lits fluidisés denses, Thèse de doctorat, Université Paris VI, Paris, France, 1997.
- [6] S. BOIVIN, J.M. HÉRARD, Résolution des équations de NAVIER-STOKES par la méthode des volumes finis sur maillage non structuré, *Rapport EDF HE-41/96/004/B*, 1996.
- [7] S. BOIVIN, F. CAYRÉ, J.M. HÉRARD, A finite volume method to solve the NAVIER-STOKES equations for incompressible flows on unstructured meshes, *Rapport EDF HE-41/99/002/A*, 1999.
- [8] S. BOIVIN, F. CAYRÉ, J.M. HÉRARD, A finite volume method to solve the NAVIER-STOKES equations for incompressible flows on unstructured meshes, *Soumis à publication dans Revue générale de thermique*.
- [9] S. BOIVIN, F. CAYRÉ, J.M. HÉRARD, A Finite Volume Scheme to Compute Incompressible Gas-solid Two-Phase Flows, *Soumis pour présentation à Fluids 2000*, Denver, Colorado, États-Unis d'Amérique, 19-22 juin 2000.
- [10] F. BREZZI, M. FORTIN, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, 1991.
- [11] Z. CAI, J. MANDEL, S. MCCORMICK, The finite volume element method for diffusion equations on general triangulations, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 28, nr 2, p. 392-402, 1991.

- [12] F. CAYRÉ, Schémas volumes finis pour un problème elliptique sur maillage triangulaire - Étude numérique de convergence, *Rapport EDF HE-41/97/057/A*, 1997.
- [13] F. CAYRÉ, J.M. HÉRARD, Un schéma Volumes Finis pour la simulation d'écoulement diphasiques à deux phases incompressibles, *Rapport EDF HE-41/99/039/A*, 1999.
- [14] F. CAYRÉ, Les outils de programmation modernes et la programmation orientée objet dans le cadre des codes de volumes finis et d'éléments finis, *Rapport EDF HE-41/99/036/A*, 1999.
- [15] S. CHAMPIER, T. GALLOUËT, Convergence d'un schéma décentré amont sur un maillage triangulaire pour un problème hyperbolique linéaire, *Mathematical Mod. and Numer. Anal.*, Vol 26, p 835-853, 1992.
- [16] A. J. CHORIN, Numerical solution of the NAVIER-STOKES equations, *Math. Comput.*, Vol. 22, 1968.
- [17] I. CHRISTIE, G. H. GANZER, J. W. WILDER, Numerical solution of a two-dimensional fluidized bed model, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 28, p. 381-394, 1998.
- [18] A. G. CHURBANOV, A. N. PAVLOV, P. N. VABISHCHEVICH, Operator-splitting methods for the incompressible NAVIER-STOKES equations on non-staggered grids, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 21, p. 617-640, 1995.
- [19] L. COMBE, *Simulation numérique d'écoulements gaz-particules sur maillage non structuré*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 1997.
- [20] L. COMBE, J.M. HERARD, Finite Volume algorithm to compute dense compressible gas-solid flows, *AIAA Journal*, Vol. 37, p. 335-342, 1999.
- [21] G. DE VAHL DAVIS, I. P. JONES, Natural convection in a square cavity : a comparison exercise, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 3, p. 227-248, 1983.
- [22] G. DE VAHL DAVIS, Natural convection of air in a square cavity : a benchmark solution, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 3, p. 249-264, 1983.
- [23] R. EYMARD, T. GALLOUËT, R. HERBIN, *Finite Volume Methods*, to appear in Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet and J.L. Lions eds, North-Holland, 1999.
- [24] I. FAILLE, *Modélisation bidimensionnelle de la genèse et de la migration des hydrocarbures dans un bassin sédimentaire*, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1992.
- [25] I. FAILLE, A control volume method to solve an elliptic equation on a two-dimensional irregular mesh, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, t. 100, p. 275-290, 1992.
- [26] T. GALLOUËT, *An introduction to finite volume methods*, Problèmes non linéaires appliqués : Méthodes de volumes finis, Écoles CEA-EDF-INRIA, 1992.

- [27] T. GALLOUËT, J.M. MASELLA, Un schéma de Godunov approché, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 323, Série I, p. 77-84, 1996.
- [28] U. GHIA, K. N. GHIA, C. T. SHIN, High-Re solutions for incompressible flow using the NAVIER-STOKES equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, p 387-411, 1982.
- [29] D. GIDASPOW, *Multiphase flow and fluidization*, Academic Press, 1994.
- [30] V. GIRAULT, P.A. RAVIART, *Finite element methods for NAVIER-STOKES equations*, Springer Verlag, 1986.
- [31] S. K. GODUNOV, A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics, *Math. Sb.*, Vol. 47, p. 217-300, 1959.
- [32] A. GOLDSTEIN, M. SHAPIRO, C. GUTFINGER, Mechanics of collisional motion of granular material. Part III : self similar shock wave propagation, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 316, p. 29-51, 1996.
- [33] J.T. JENKINS, S.B. SAVAGE., A theory for the rapid flow of identical smooth nearly elastic particles, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 130, p. 187-202, 1983.
- [34] R. HERBIN, An Error Estimate for a Finite Volume Scheme for a Diffusion-Convection Problem on a Triangular Mesh, *Num. Meth. Part. Diff. Eq.*, Vol. 11, p. 165-173, 1995.
- [35] P. L. ROE, Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *J. Comput. Phys.*, Vol. 43, 1981.
- [36] X. ROGUE, *Expériences et simulation numérique d'écoulements diphasiques en tube à choc*, Thèse de doctorat, Marseille, France, 1998.
- [37] X. ROGUE, G. RODRIGUEZ, J. F. HAAS, R. SAUREL, Experimental and numerical investigation of the shock induced fluidization of a particle bed, *Shock waves*, Vol. 8, p. 29-45, 1998.
- [38] V.V. RUSANOV, The calculation of the interaction of non stationary shock waves and obstacles, *J. of Comp. Math. Phys.*, Vol. 1, p. 267-279, 1961.

# Annexes

## A Les lits fluidisés denses

Le cadre de ces écoulements est une enceinte dans laquelle des particules subissent des réactions chimiques ou de combustion. Le principe des lits fluidisés denses est de soulever cette masse compacte de particules, appelée lit, par une circulation de gaz pour mélanger ces particules. Les lits fluidisés denses constituent notamment une partie de l'installation des chaudières à lit fluidisé circulant. Le régime de ces écoulements est très dense, le volume des particules pouvant occuper jusqu'à 64% du volume total. La simulation numérique de ces écoulements, outre son caractère prédictif, a pour objectif l'optimisation de la géométrie du foyer et du débit de gaz pour mélanger au mieux l'ensemble des particules (recherche de rentabilité et de réduction des émissions polluantes par exemple).

## B Propriétés du schéma de Rusanov

### B.1 Le système d'équations

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \\ (\rho \underline{u})_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \nabla P = 0 \end{cases}$$

Par hypothèse, la pression  $P$  ne dépend que de la masse volumique  $\rho$ , et  $P'(\rho)$  est positif pour les valeurs de  $\rho$  admissibles. On note :  $P'(\rho) = c^2$ .

Dans ce cas,  $\mathcal{F}_{\underline{W}}(\underline{W}, \underline{n})$  a pour valeurs propres :  $\underline{u} \cdot \underline{n} \pm c$  et  $\underline{u} \cdot \underline{n}$ , et le flux de Rusanov s'écrit :

$$\underline{F}^{Rus}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \rho_i \underline{u}_i \cdot \underline{n}_{ij} + \rho_j \underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij} \\ (\rho_i \underline{u}_i) \cdot \underline{n}_{ij} \underline{u}_i + (\rho_j \underline{u}_j) \cdot \underline{n}_{ij} \underline{u}_j + P_i \underline{n}_{ij} + P_j \underline{n}_{ij} \end{Bmatrix}$$

$$- \frac{1}{2} \max_{k \in \{i, j\}} \{ |\underline{u}_k \cdot \underline{n}_{ij}| + c_k \} \begin{Bmatrix} \rho_j - \rho_i \\ \rho_j \underline{u}_j - \rho_i \underline{u}_i \end{Bmatrix}$$

### B.2 Schéma en temps explicite (schéma d'Euler)

On adopte ici une discrétisation en temps de type Euler explicite :

$$\Omega_i (\underline{W}_i^{n+1} - \underline{W}_i^n) + \Delta t \sum_{j \in V(i)} \underline{F}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) l_{ij} = \underline{0}$$

L'équation correspondant à la masse volumique  $\rho$  est :



$$\begin{aligned} \Omega_i (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n) + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} (\rho_i \underline{u}_i \cdot \underline{n}_{ij} + \rho_j \underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij})^n l_{ij} \\ - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^n (\rho_j - \rho_i)^n l_{ij} = 0 \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que  $\sum_{j \in V(i)} \underline{n}_{ij} l_{ij} = \underline{0}$ , cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \Omega_i \rho_i^{n+1} - \left\{ \Omega_i - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^n l_{ij} \right\} \rho_i^n \\ - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} \rho_j^n ((\rho_{Rus})_{ij}^n - (\underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij})^n) l_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Comme  $(\rho_{Rus})_{ij}^n > (\underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij})^n$ ,  $\forall j \in V(i)$  on est assuré de la positivité de la variable  $\rho$  pour tout type d'écoulement si et seulement si la condition C.F.L. suivante est remplie :

$$\Omega_i - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^n l_{ij} \geq 0$$

Cette condition s'écrit aussi :

$$\Delta t \leq \frac{2\Omega_i}{\sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^n l_{ij}}$$

### B.3 Schéma en temps implicite total

On adopte dans ce paragraphe une discrétisation en temps totalement implicite :

$$\Omega_i (\underline{W}_i^{n+1} - \underline{W}_i^n) + \Delta t \sum_{j \in V(i)} \underline{F}(\underline{W}_i^{n+1}, \underline{W}_j^{n+1}, \underline{n}_{ij}) l_{ij} = \underline{0}$$

Dans ce cas, l'équation correspondant à la masse volumique s'écrit :

$$\begin{aligned} \Omega_i (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n) + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} (\rho_i \underline{u}_i \cdot \underline{n}_{ij} + \rho_j \underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij})^{n+1} l_{ij} \\ - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^{n+1} (\rho_j - \rho_i)^{n+1} l_{ij} = 0 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \left\{ \Omega_i + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^{n+1} l_{ij} \right\} \rho_i^{n+1} \\ - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} \rho_j^{n+1} ((\rho_{Rus})_{ij}^{n+1} - (\underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij})^{n+1}) l_{ij} = \Omega_i \rho_i^n \end{aligned}$$

et sous forme matricielle :

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\rho}}^{n+1} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\rho}}^n$$

avec les notations :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, N\}^2, \underline{\underline{D}}_{ij} = \Omega_i \delta_{ij}$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall j \in V(i), \begin{cases} \underline{\underline{A}}_{ii} = \Omega_i + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^{n+1} l_{ij} \\ \underline{\underline{A}}_{ij} = -\frac{\Delta t}{2} ((\rho_{Rus})_{ij}^{n+1} - (\underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij})^{n+1}) l_{ij} \end{cases}$$

La matrice  $\underline{\underline{A}}$  possède deux propriétés immédiates :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, N\}^2, j \neq i, \begin{cases} \underline{\underline{A}}_{ii} \geq 0 \\ \underline{\underline{A}}_{ij} \leq 0 \end{cases}$$

Une condition suffisante pour que la positivité de la masse volumique soit

assurée est que la matrice  $\underline{A}$  soit une M-matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad \left| \underline{A}_{ii} \right| \geq \sum_{j \in V(i)} \left| \underline{A}_{ij} \right|$$

Cette condition équivaut à :

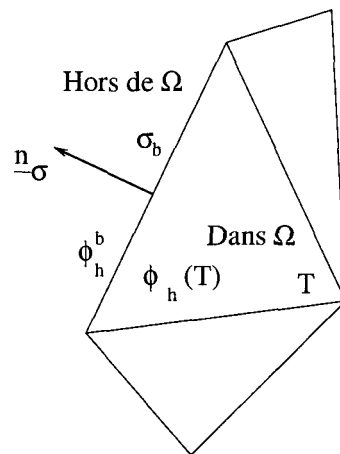
$$\Omega_i + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^{n+1} l_{ij} \geq \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} \left( (\rho_{Rus})_{ij}^{n+1} - (\underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij})^{n+1} \right) l_{ij}$$

soit plus simplement :

$$2\Omega_i \geq -\Delta t \sum_{j \in V(i)} (\underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij})^{n+1} l_{ij} \quad (47)$$

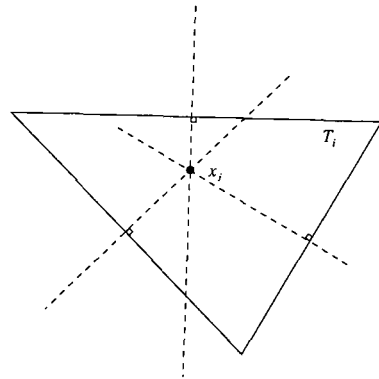
Finalement, pour que la masse volumique reste positive, il suffit que la condition (47) soit remplie. On voit que cette condition est contraignante uniquement lorsque la divergence de la vitesse sur l'élément  $i$  est fortement négative, soit typiquement dans le cas d'un violent double choc.

# Figures

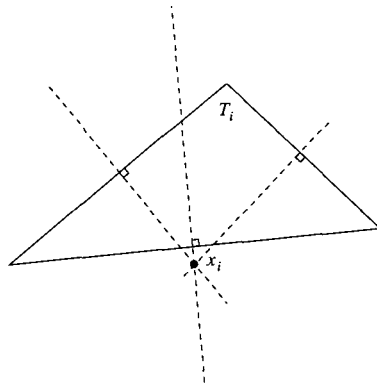


$\sigma_b$  une arête située sur le bord du domaine  $\Omega$   
 $\underline{n}_\sigma$  le vecteur normal unitaire sortant de l'arête  $\sigma_b$   
 $\phi_h^b$  la valeur de la variable  $\phi$  sur l'arête  $\sigma_b$   
 $\phi_h(T)$  la valeur de la variable  $\phi$  dans le triangle  $T$

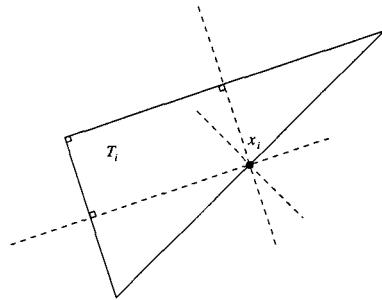
FIG. I.1 – Conditions aux limites pour l'opérateur de convection



(1) Chaque angle est inférieur à  $\pi/2$



(2) Un angle est supérieur à  $\pi/2$



(3) Un angle est égal à  $\pi/2$

FIG. I.2 – Intersection des bissecteurs orthogonaux des côtés d'un triangle

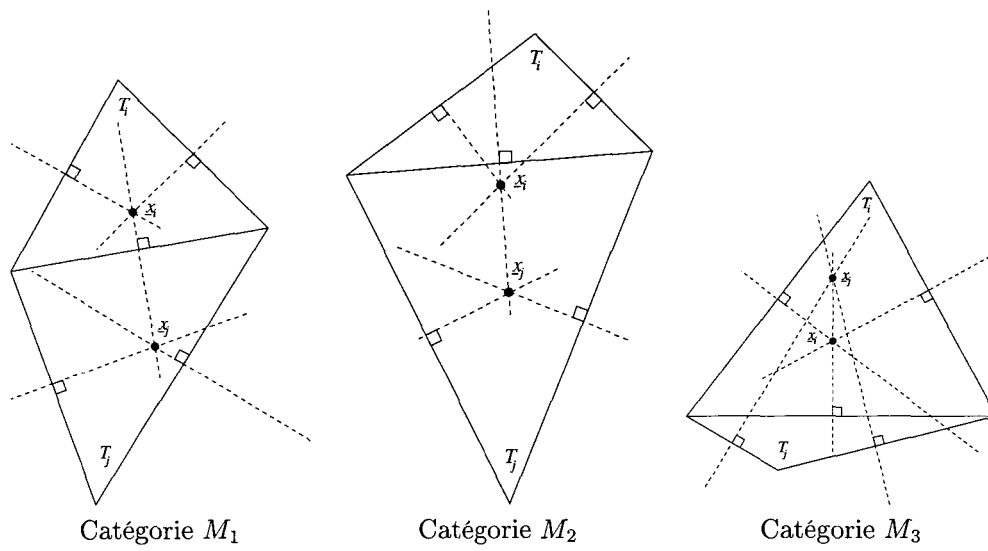


FIG. I.3 – Différentes catégories de maillages

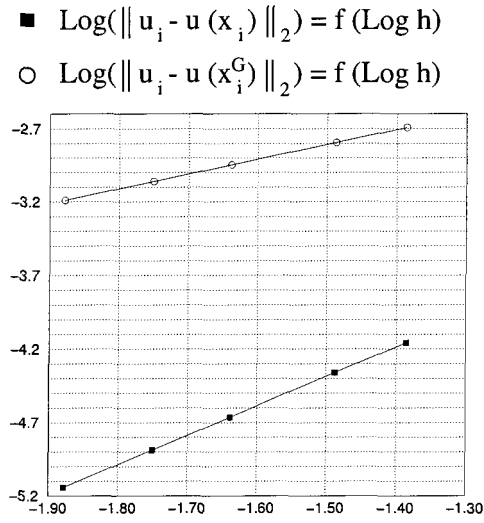


FIG. I.4 – Convergence de  $u_3(x, y) = \sin(x + y)$  sur des maillages de catégorie  $M_3$

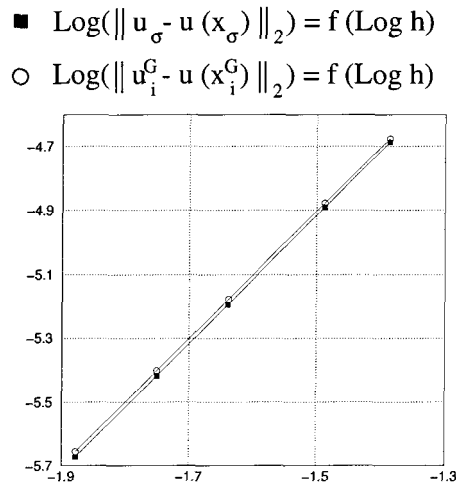


FIG. I.5 – Convergence de  $u_1(x, y) = xy + y$  sur des maillages de catégorie  $M_3$



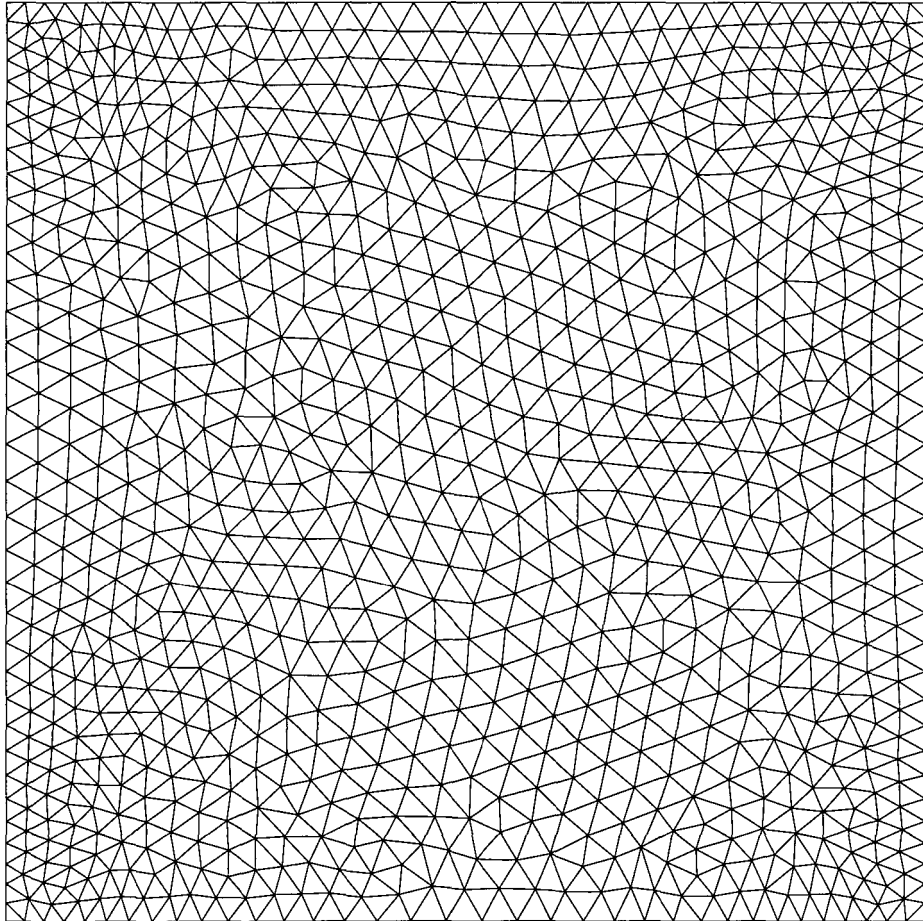


FIG. I.6 – Maillage non structuré pour les calculs d'écoulements dans la cavité carrée entraînée (1 872 éléments)

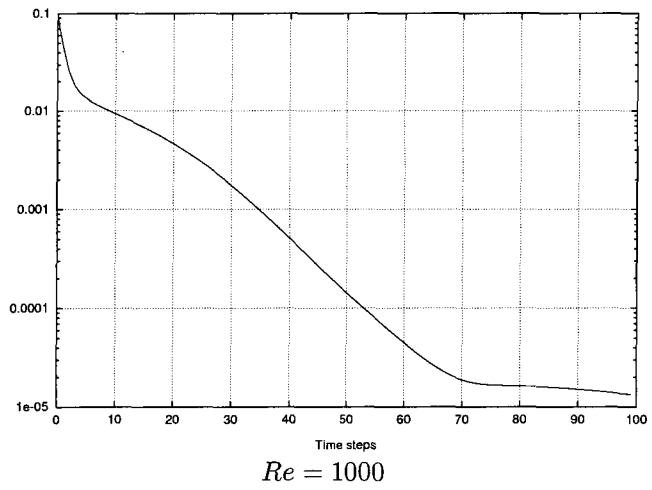
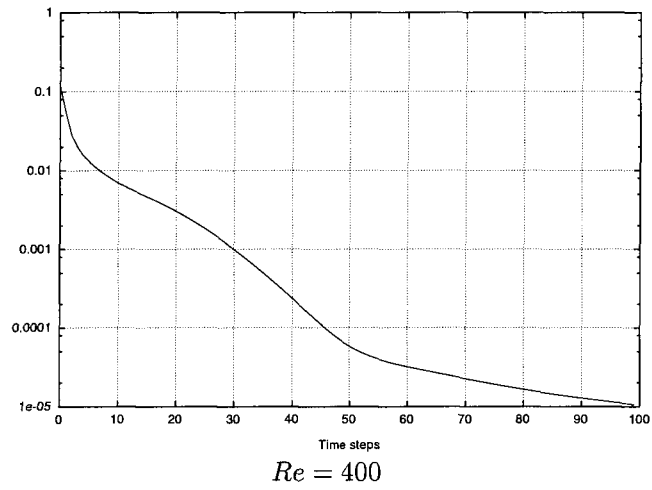
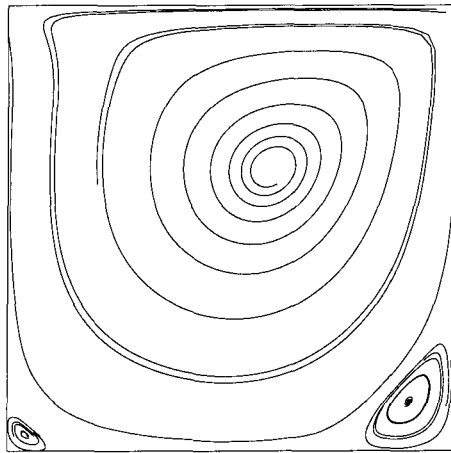
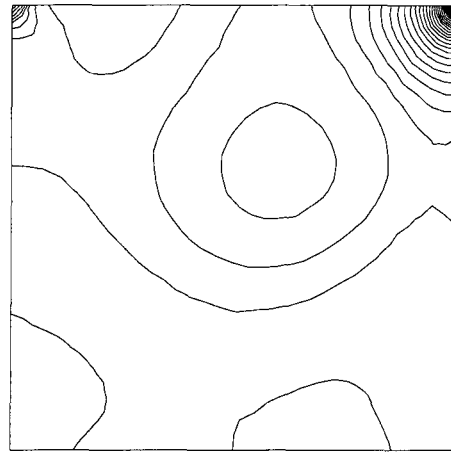


FIG. I.7 – Convergence des calculs :  $\|u_h^{n+1} - u_h^n\|_{L^2}$  en fonction du nombre de pas de temps effectués

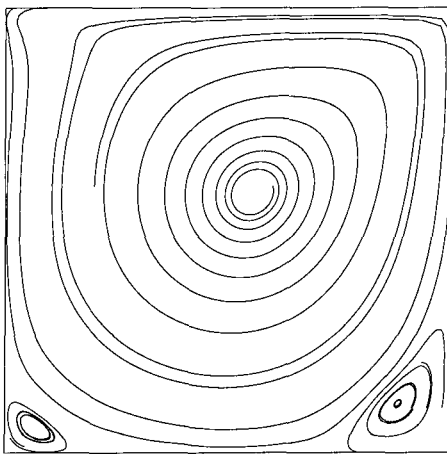


Lignes de courant (a)

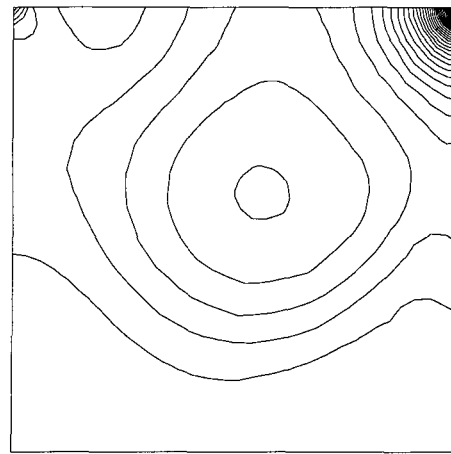


Isobares à 0 (0.025) 1 (b)

FIG. I.8 - Lignes de courant (a) et isobares (b) pour  $Re = 400$



Lignes de courant (a)



Isobares à 0 (0.015) 0.6 (b)

FIG. I.9 - Lignes de courant (a) et isobares (b) pour  $Re = 1000$

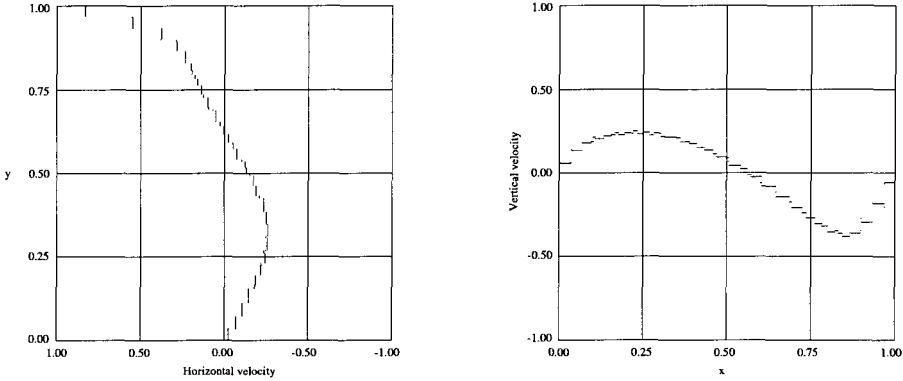


FIG. I.10 – Profils de vitesse le long des médianes de la cavité pour  $Re = 400$

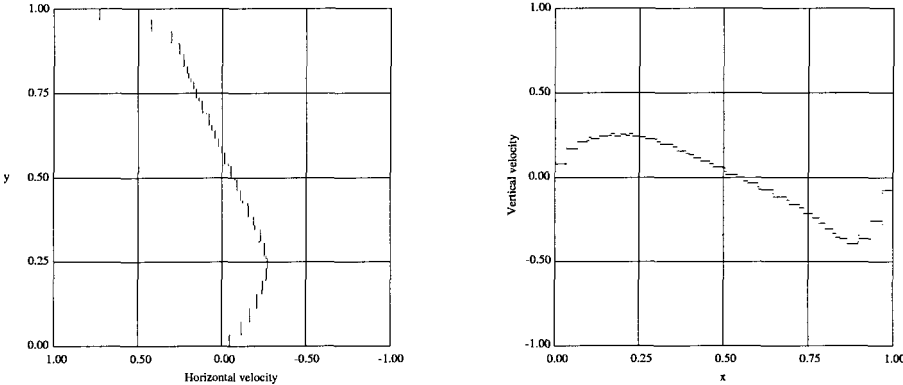


FIG. I.11 – Profils de vitesse le long des médianes de la cavité pour  $Re = 1000$

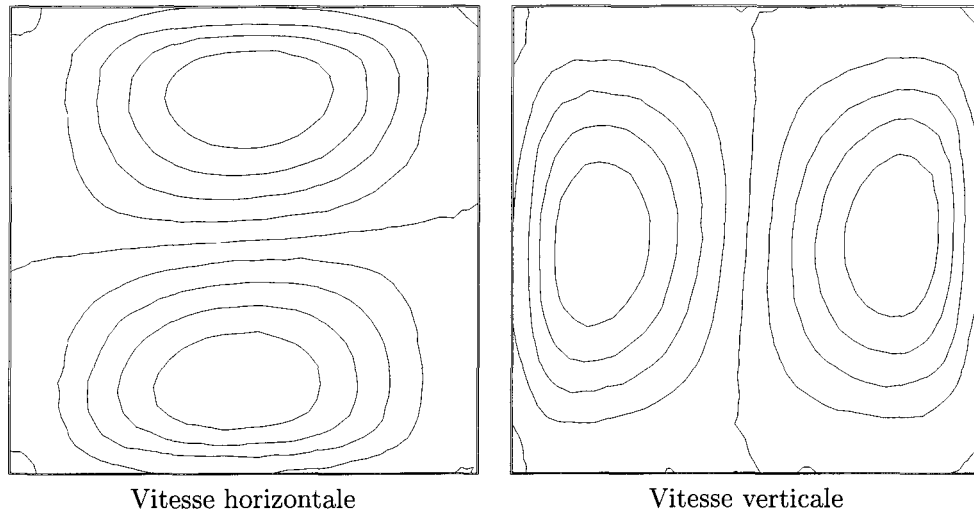


FIG. I.12 – Isovaleurs des composantes de la vitesse de notre solution à  $Ra = 10^3$

(a) Isovaleurs à - 3.558 (0.7125) 3.567      (b) Isovaleurs à -3.612 (0.7211) 3.599

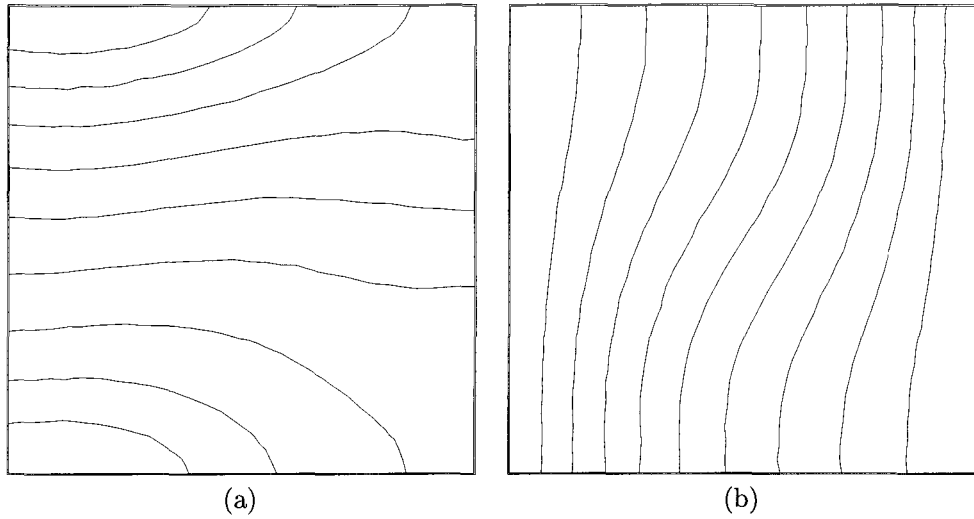
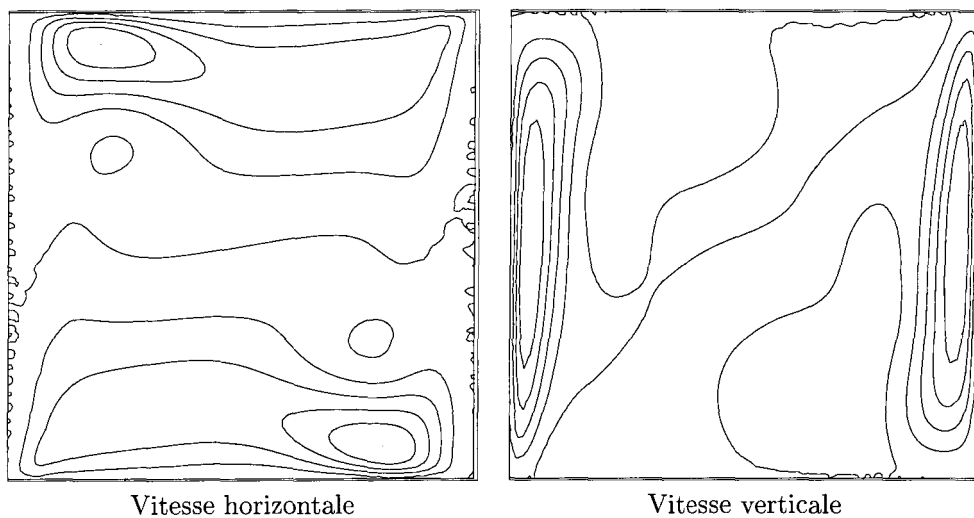


FIG. I.13 – Isobares (a) et isothermes (b) de la solution à  $Ra = 10^3$

(a) Isovaleurs à -67 (45.8) 391      (b) Isovaleurs à 0 (0.1) 1



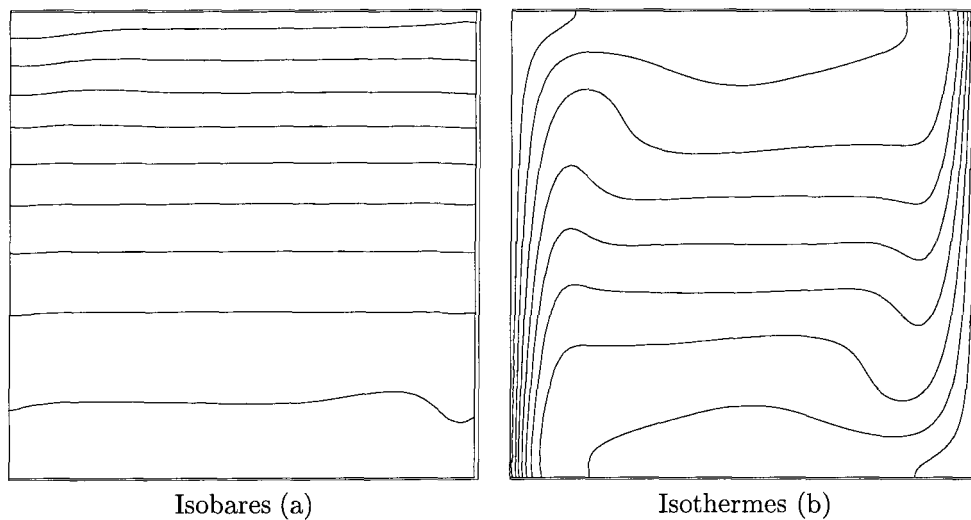
Vitesse horizontale

Vitesse verticale

FIG. I.14 – Isovaleurs des composantes de la vitesse de notre solution à  $Ra = 10^6$

(a) Isovaleurs à -125.74 (25.08) 125.07

(b) Isovaleurs à -215.27 (43.19) 216.61



Isobares (a)

Isothermes (b)

FIG. I.15 – Isobares (a) et isothermes (b) de la solution à  $Ra = 10^6$

(a) Isovaleurs à -18 742 (39 032.6) 371 584

(b) Isovaleurs à 0 (0.1) 1

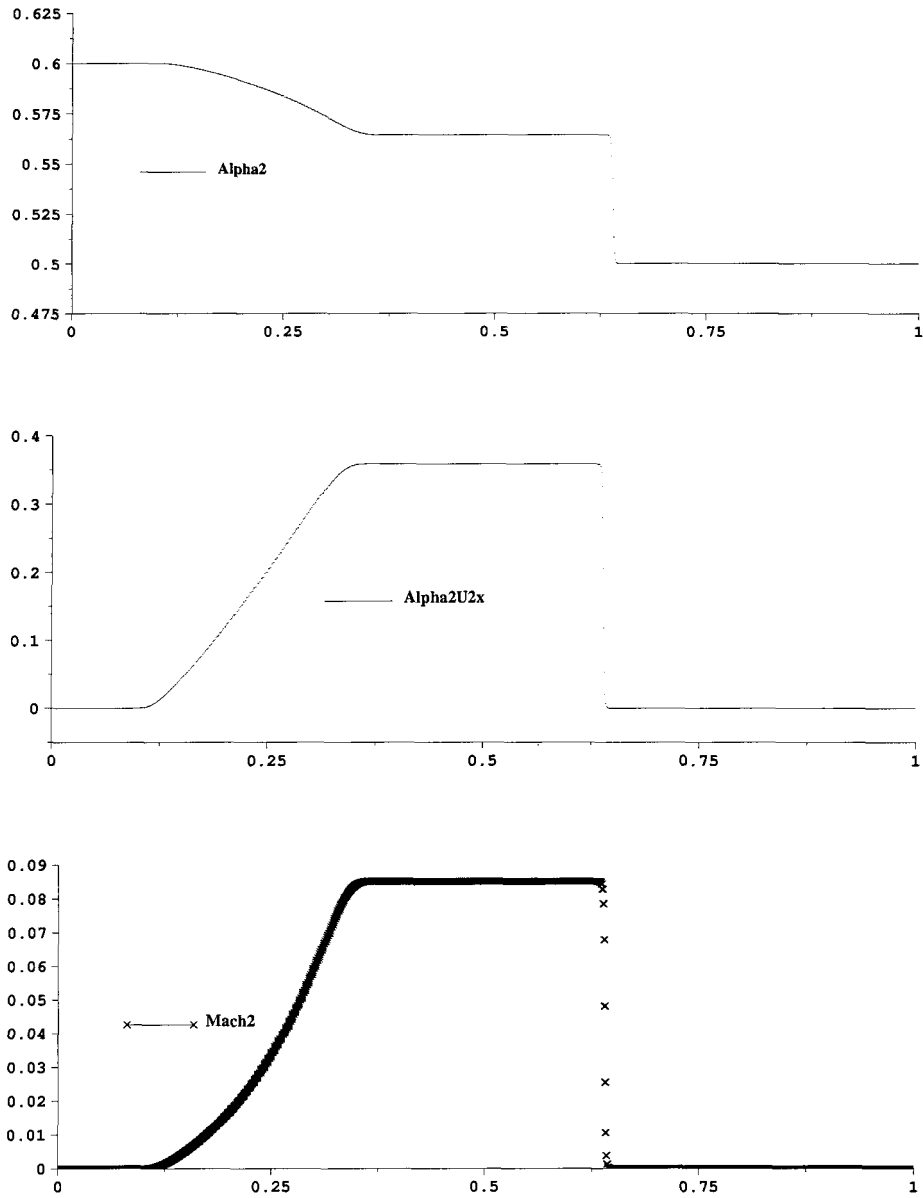


FIG. II.16 – Cas-test de type “rupture de barrage”

Conditions initiales :

	Gauche	Droite
$\alpha_2$	0,6	0,5
$U_{2x}$	0	0

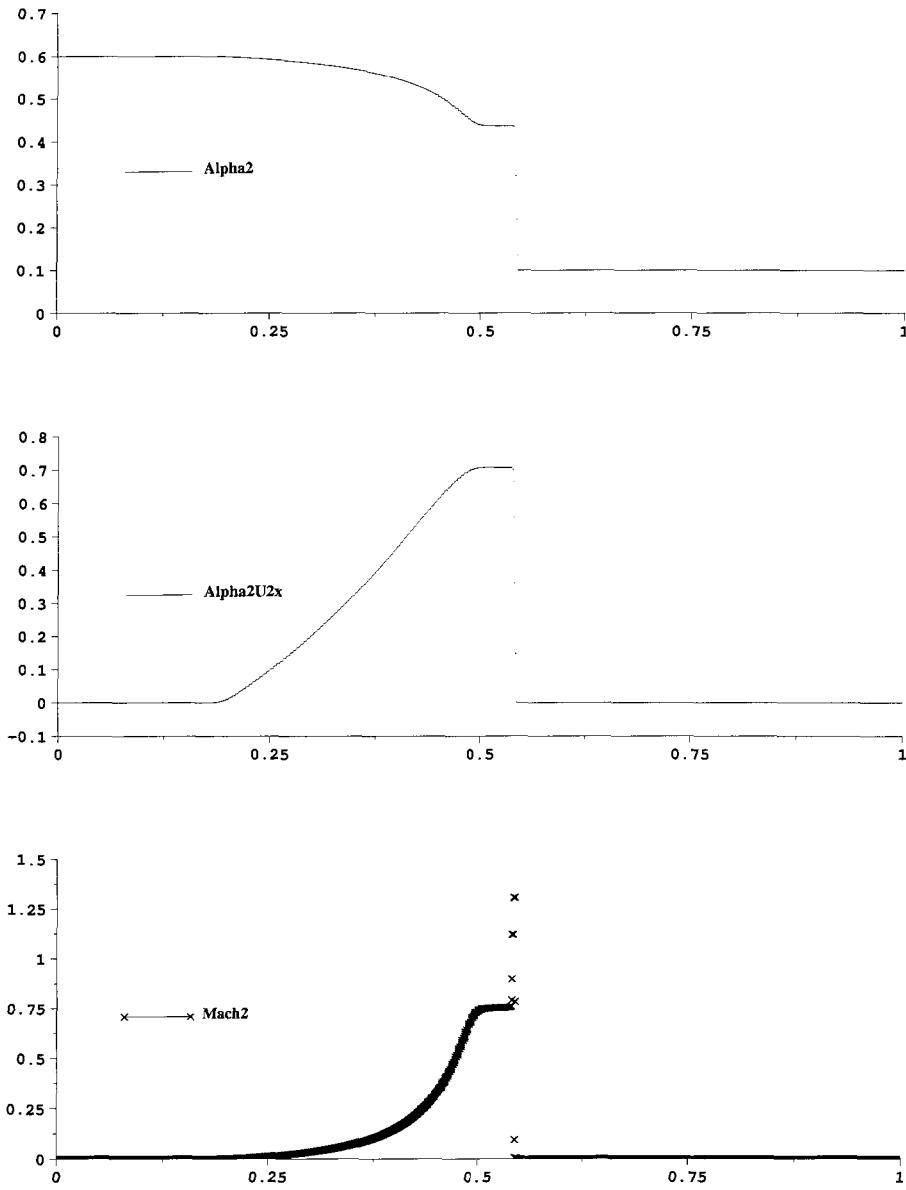


FIG. II.17 – Cas-test de type “rupture de barrage”

Conditions initiales :

	Gauche	Droite
$\alpha_2$	0,6	0,1
$U_{2x}$	0	0



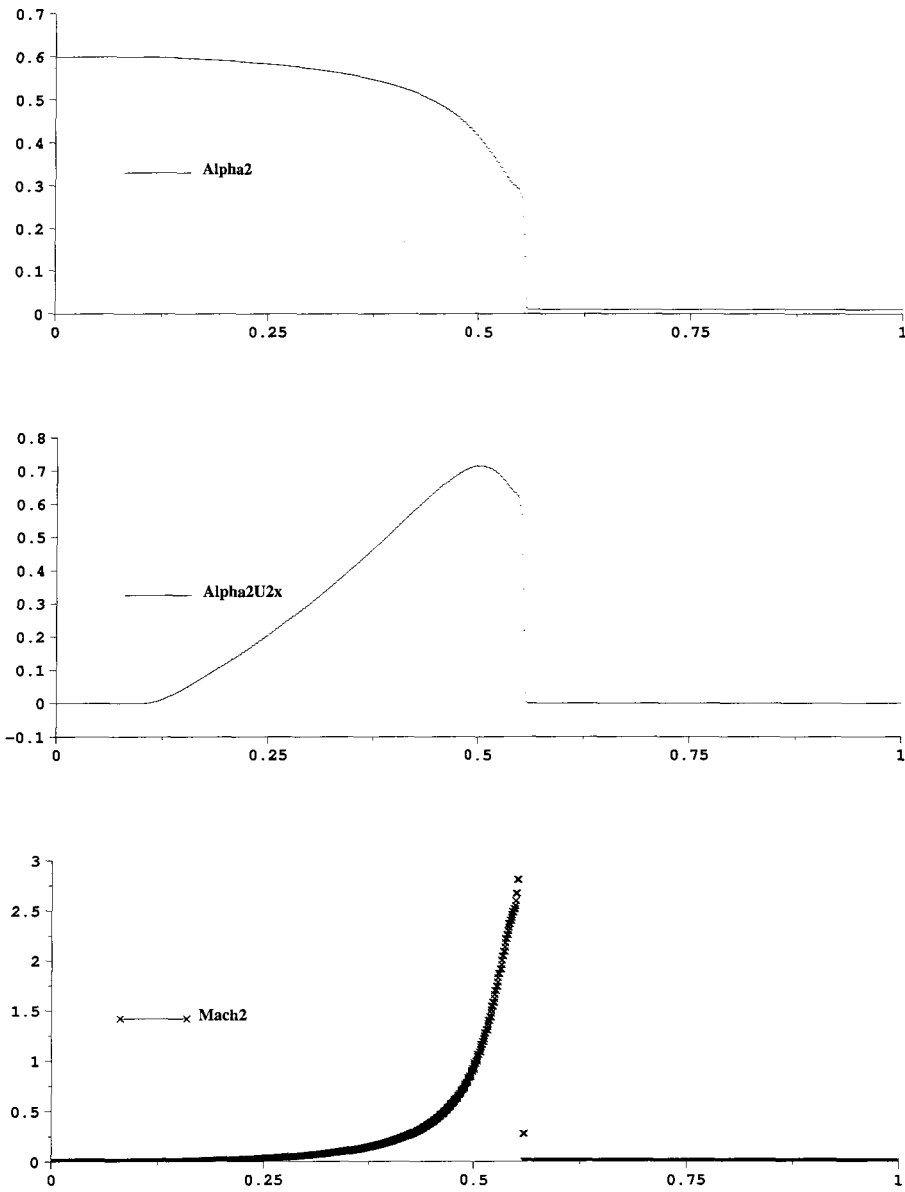


FIG. II.18 – Cas-test de type “rupture de barrage”

Conditions initiales :

	Gauche	Droite
$\alpha_2$	0,6	0,01
$U_{2x}$	0	0

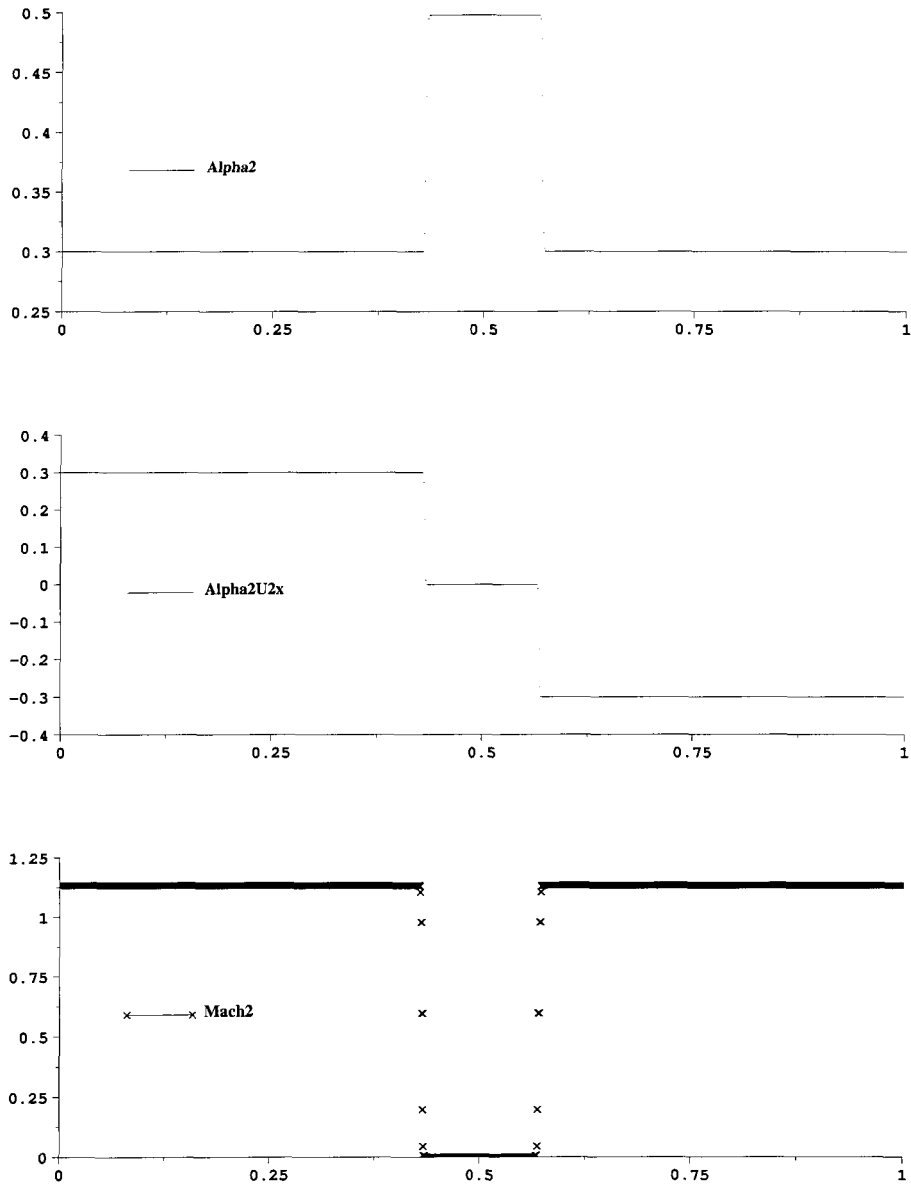


FIG. II.19 – Cas-test de double choc

CFL = 0,8 - Conditions initiales :

	Gauche	Droite
$\alpha_2$	0,3	0,3
$U_{2x}$	1	-1

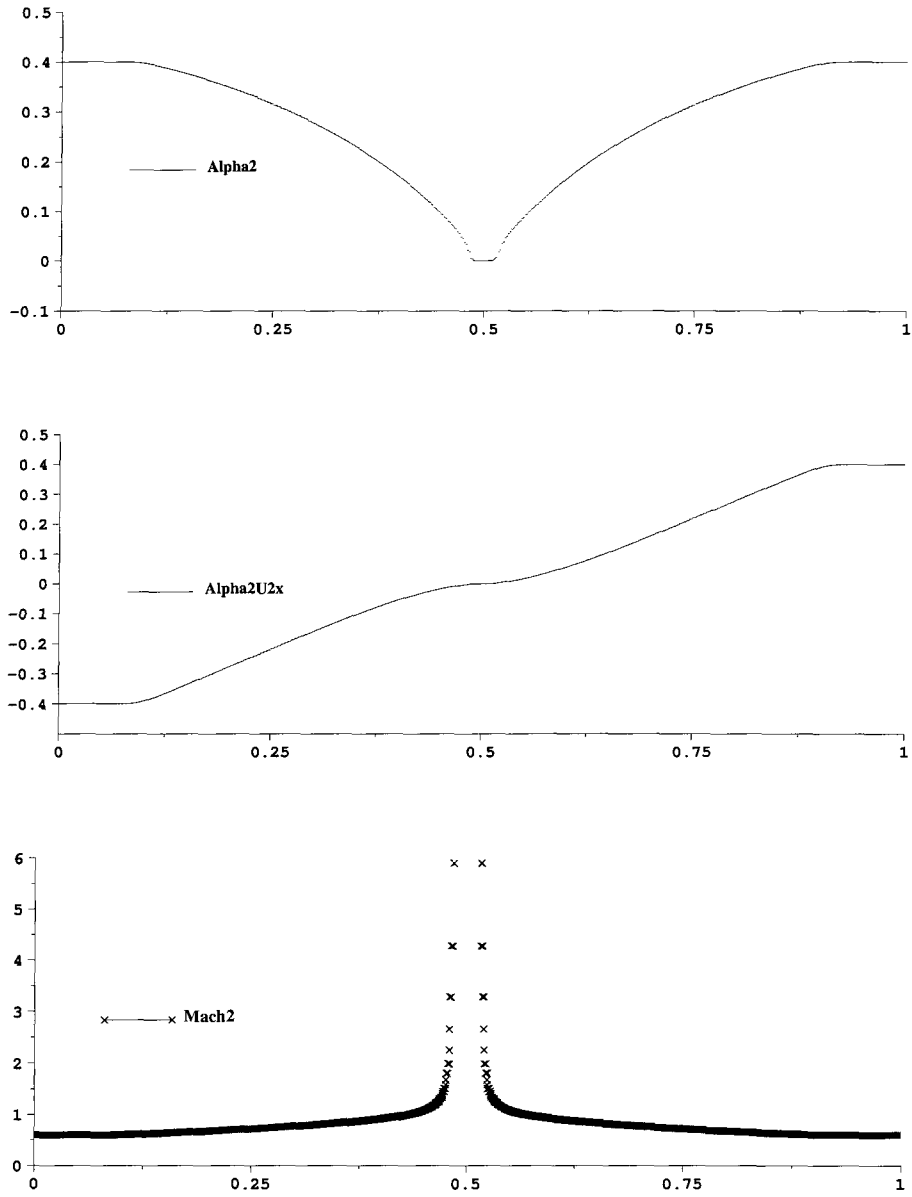


FIG. II.20 – Cas-test de double détente

Conditions initiales :

	Gauche	Droite
$\alpha_2$	0,4	0,4
$U_{2x}$	-1	1

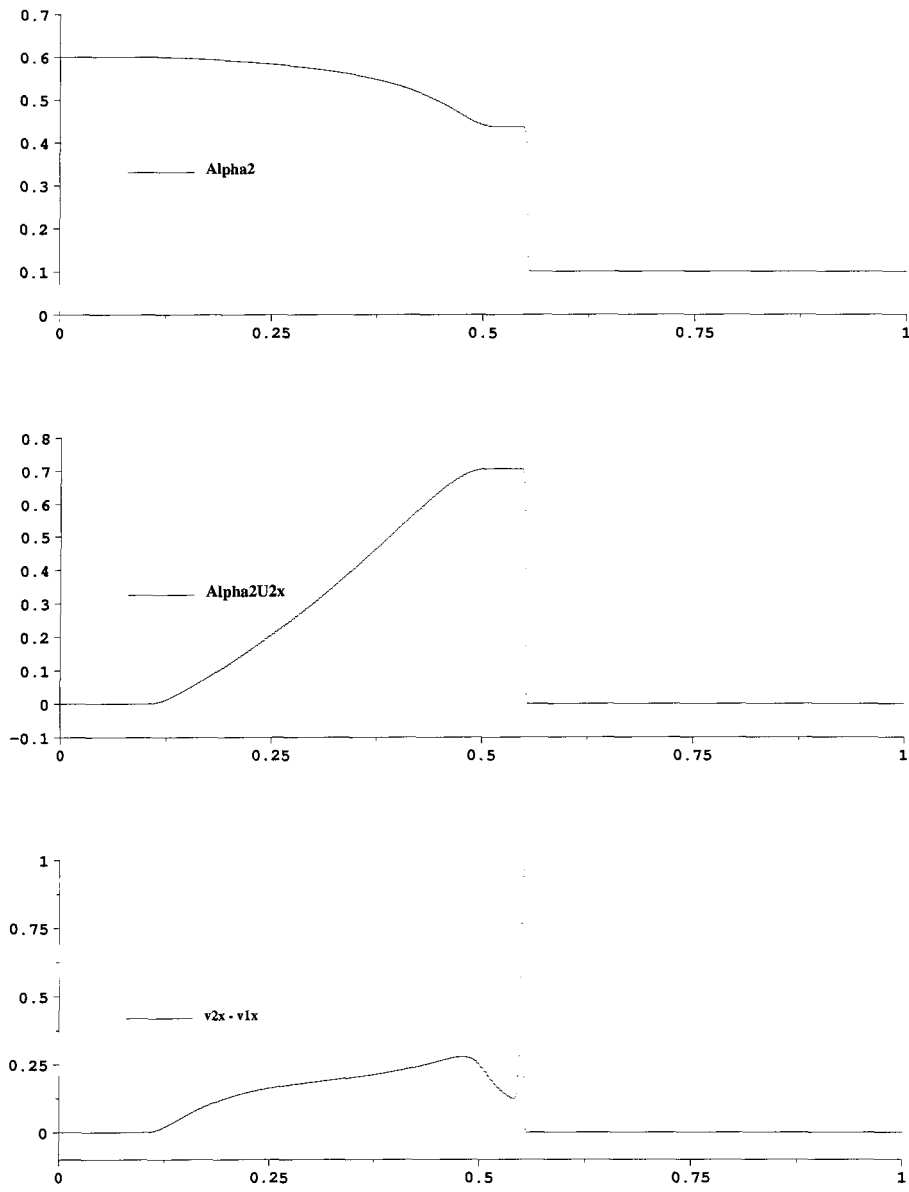


FIG. II.21 – Cas-test de type “rupture de barrage” avec traînée

Conditions initiales :

	Gauche	Droite
$\alpha_2$	0,6	0,1
$U_{2x}$	0	0
$U_{1x}$	0	0

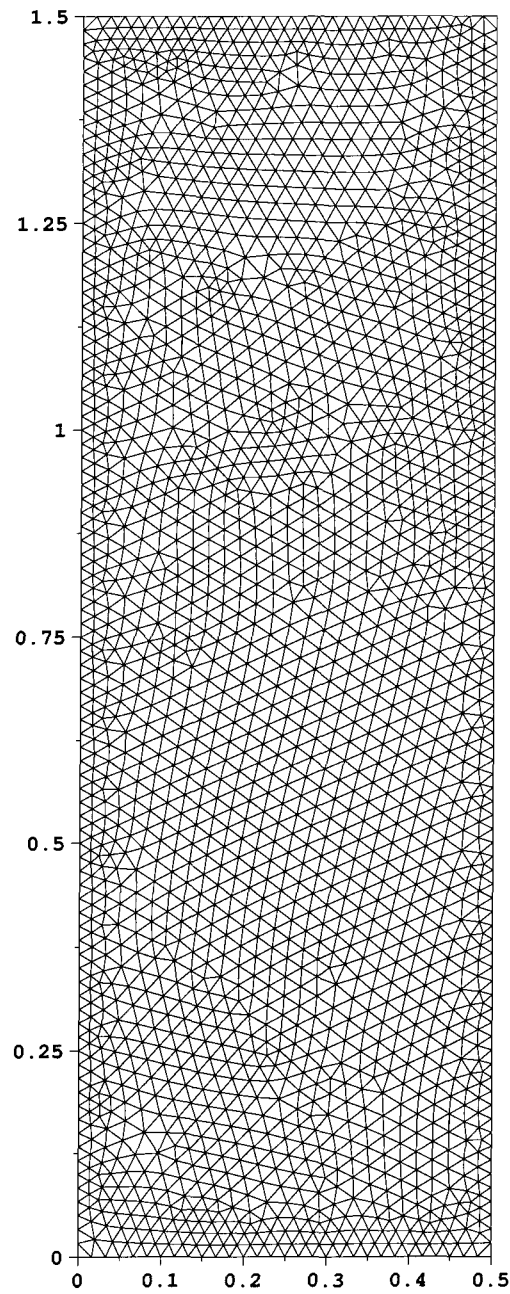


FIG. II.22 – Maillage utilisé pour le cas-test de compactage

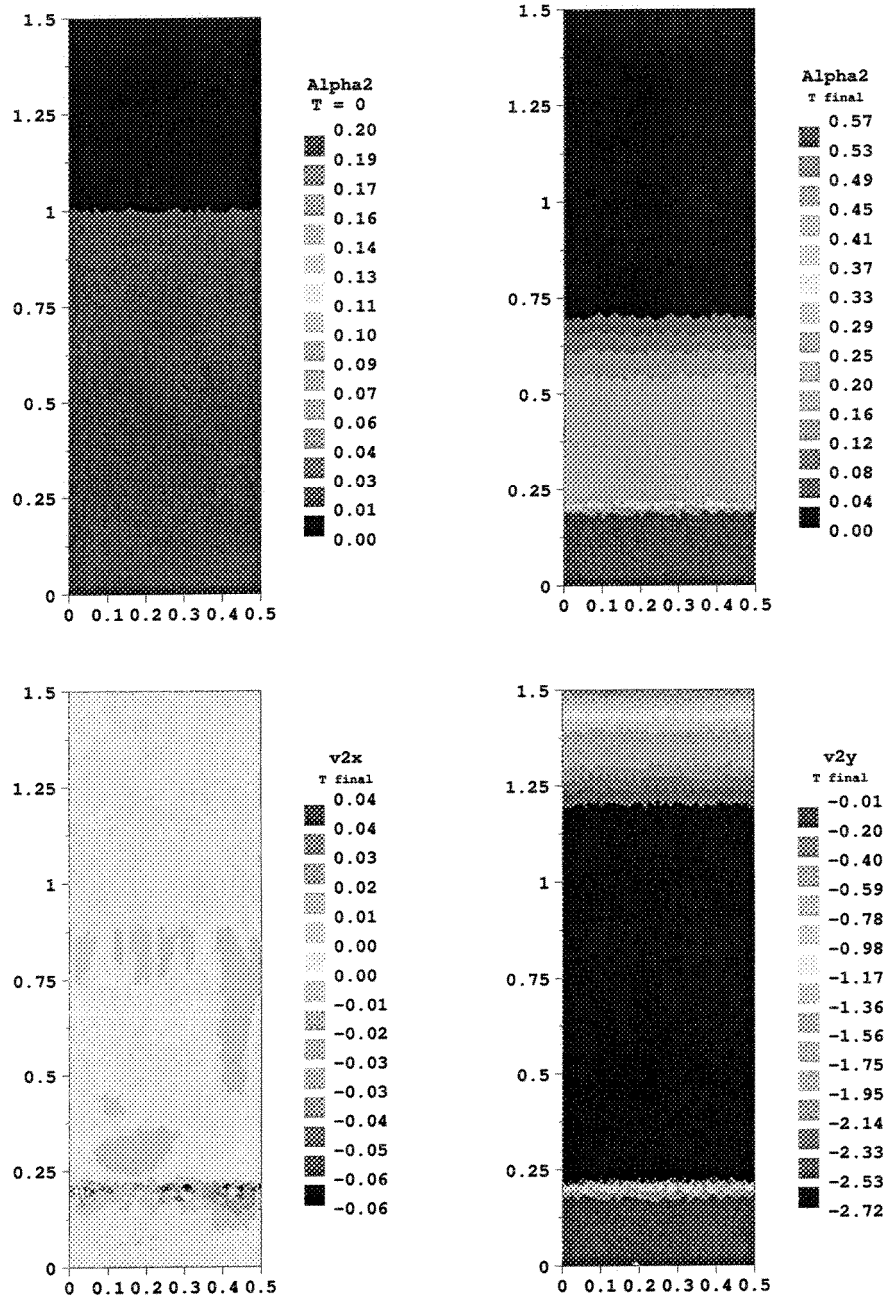


FIG. II.23 – Cas-test de compactage : taux de présence et vitesse de la phase solide

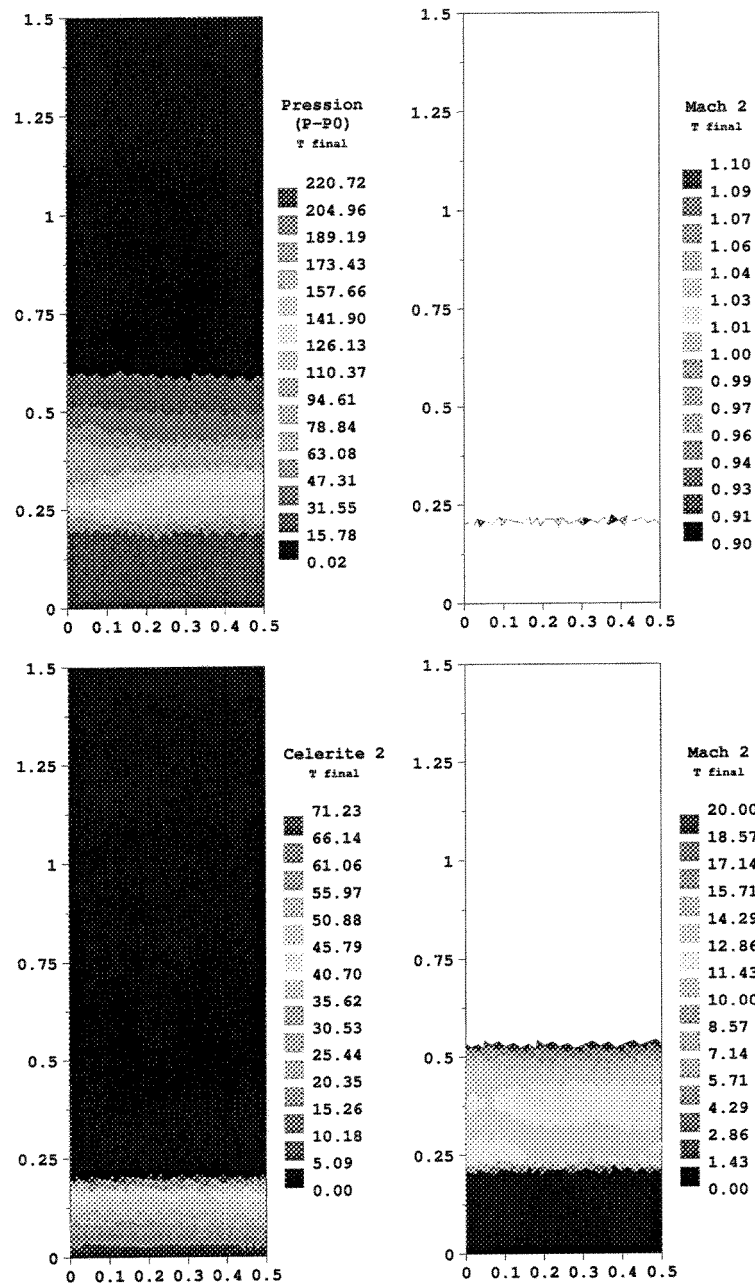


FIG. II.24 – Cas-test de compactage : pression mécanique  $P$ , nombre de mach et célérité associés à la pression inter-granulaire  $\alpha_2\Theta(\alpha_2)$ .