

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI

DOCTORAT EN INGÉNIERIE

Thèse pour l'obtention du titre de Philosophiae Doctor en ingénierie

Par

Abdelhamid Saoudi

PRÉDICTION DE LA RUPTURE PAR FATIGUE DANS LES PIÈCES

AUTOMOBILES EN ALLIAGES ALUMINIUM

Avril 2008

Droits réservés ©



Mise en garde/Advice

Afin de rendre accessible au plus grand nombre le résultat des travaux de recherche menés par ses étudiants gradués et dans l'esprit des règles qui régissent le dépôt et la diffusion des mémoires et thèses produits dans cette Institution, **l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** est fière de rendre accessible une version complète et gratuite de cette œuvre.

Motivated by a desire to make the results of its graduate students' research accessible to all, and in accordance with the rules governing the acceptance and diffusion of dissertations and theses in this Institution, the **Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)** is proud to make a complete version of this work available at no cost to the reader.

L'auteur conserve néanmoins la propriété du droit d'auteur qui protège ce mémoire ou cette thèse. Ni le mémoire ou la thèse ni des extraits substantiels de ceux-ci ne peuvent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

The author retains ownership of the copyright of this dissertation or thesis. Neither the dissertation or thesis, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

À ma famille

Résumé

L'objectif de cette thèse consiste à évaluer le potentiel d'utilisation des pièces automobiles en alliages légers dans l'industrie automobile, en étudiant leur durée de vie en fonction de différents paramètres comme l'effet dynamique de la suspension, la nature de l'excitation, la géométrie et le poids de la pièce. La pièce est en alliage d'aluminium 7075-T6, ayant une géométrie semblable à celle qui existe dans le système de suspension d'un quart de véhicule en acier en l'occurrence le bras de suspension inférieur. Nous avons aussi étudié la possibilité d'optimiser le poids du bras de suspension supérieur du véhicule en fonction de sa durée de vie et ses fréquences naturelles. L'épaisseur est variée puisque l'état des contraintes est plan pour une flexion selon la direction de l'épaisseur de la pièce. En effet, la variation de l'épaisseur affecte le profil des contraintes, la densité d'énergie de déformation (SENER) et la durée de vie. Nous avons abordé cette recherche avec une étude exhaustive sur les différents types de critères de fatigue utilisés dans le domaine de la rupture des pièces métalliques sous des sollicitations dynamiques. Notre modèle est basé sur le critère multiaxial de la densité d'énergie de déformation, équivalent au cas analytique uniaxial. En effet, l'approche énergétique nous permet de comparer deux tenseurs de même ordre, cas multiaxial et du cas uniaxial. Dans les deux cas, uniaxial et multiaxial, la densité d'énergie de déformation est un tenseur d'ordre zéro. Nous avons démontré qu'on peut passer d'une excitation aléatoire de déplacement, décrite par une densité spectrale de puissance PSD, à une excitation directe par une force par la normalisation

de cette dernière et en multipliant par un facteur commun calculé à partir des données dynamiques du véhicule.

Deux cas de non linéarité sont rencontrés dans la présente étude : le couplage élasto-plastique du matériau et la non linéarité géométrique lors de la simulation numérique. Le couplage élasto-plastique décrivant la non linéarité du matériau, est décrit par la relation liant la déformation ε et la contrainte σ à partir de la relation de Ramberg-Osgood. Pour éviter l'utilisation de la méthode Newton-Raphson dans tous les éléments du maillage, nous avons créé une interface Matlab pour identifier les éléments critiques. Le signal SENER de l'élément est corrigé pour y enlever les anomalies par un algorithme de l'interface Matlab WAFO (Wave Analysis for Fatigue and Oceanography). L'extraction des cycles « rainflow » est faite selon la formulation de Markov afin de calculer le nombre de répétition, du signal de chargement à la rupture, calculé à partir de la règle de Miner. Les résultats montrent que le signal de chargement étudié doit se répéter $5,45 \times 10^{10}$ fois jusqu'à la rupture de la pièce, en alliage d'aluminium 7075-T6 ayant une épaisseur de 2,5cm. Nous avons démontré que l'utilisation d'une pièce en alliage d'aluminium peut donner la même durée de vie qu'une pièce en acier toute en gagnant environ 36% en poids. L'optimisation de la forme de la pièce nous permet de la rendre plus légère et ses fréquences naturelles loin du spectre de la densité spectrale de puissance PSD décrivant le profil de la chaussée. En plus, cette procédure permet une optimisation du poids de la pièce par rapport à sa durée de vie et ses modes propres dans des délais de temps raisonnables dans un maillage grossier ou raffiné, par rapport à la méthode directe.


M. Bouazara


Abdelhamid Saoudi

Contribution originale de la thèse

La contribution de la présente thèse consiste en l'évaluation de la durée de vie et le potentiel d'utilisation des pièces en alliage d'aluminium dans le système de suspension des véhicules, sous les conditions d'excitation réelle de la chaussée. Cette contribution peut être décrite par les points suivants :

- Définition d'un modèle hybride couplant le comportement dynamique du système de suspension d'un véhicule avec un modèle empirique de fatigue;
- établissement d'un modèle analytique élastique d'un état de contrainte multiaxial équivalent au critère uniaxial de densité d'énergie de déformation donnant une durée de vie de la pièce;
- établissement d'un modèle numérique élasto-plastique multiaxial donnant une durée de vie de la pièce à partir de la densité d'énergie de déformation;
- génération d'une excitation directe par une force aléatoire à partir des données empiriques de la densité spectrale de puissance PSD décrivant l'irrégularité de la chaussée;
- génération d'une interface Matlab pour localiser les éléments critiques sans appliquer l'algorithme de Newton-Raphson dans tous les éléments du maillage, pour extraire la durée de vie de la pièce ;
- les fréquences naturelles de la pièce étudiée, ont été déterminées et comparées à la plage de fréquence du spectre de la densité spectrale de puissance PSD;

- établissement d'une fonction objective d'optimisation intuitive de la pièce en se basant sur un rapport de rejection lié directement à la notion de fatigue. Ceci nous a permis de gagner entre 5 et 11,4% en poids sans affecter d'une manière significative la durée de vie et les fréquences naturelles de la pièce.

Remerciements

Je tiens tout spécialement à remercier monsieur Mohamed Bouazara directeur de recherche et professeur au département des sciences appliquées à l'université du Québec à Chicoutimi, pour ses conseils techniques, son expérience et pour m'avoir si bien guidé dans la réalisation de ce projet.

J'exprime aussi ma reconnaissance à monsieur Daniel Marceau co-directeur et professeur au département des sciences appliquées à l'université du Québec à Chicoutimi pour son aide apporté lors de la réalisation de ce projet.

Je tiens à remercier également les professeur Marc. J. Richard de l'université Laval et Abderrazak El Ouafi de l'université du Québec à Rimouski d'avoir accepté d'examiner cette thèse.

Je remercie également le technicien du groupe LM²SA, Etienne Lafrenière, pour son aide informatique et ses conseils techniques.

Je voudrais exprimer ma gratitude aux organismes ayant contribué à ce travail, soit : le Centre Québécois de Recherche et de Développement de l'Aluminium (CQRDA) pour la bourse d'excellence qui m'a été attribuée lors des deux premières années; la fondation de l'Université du Québec à Chicoutimi (FUQAC) et Regroupement Aluminium de l'Uqac (REGAL).

Je veux également remercier madame Jano Fillion pour la correction préliminaire du texte de cette thèse.

Je remercie également, mon épouse Mgueraman Fayza et ma famille qui m'ont soutenu le long de la réalisation de ce projet.

Table des matières

Résumé.....	iii
Contribution originale de la thèse.....	v
Table des matières	ix
Liste des figures.....	xii
Liste des tableaux	xiv
Chapitre 1	1
Introduction	1
1.1 Généralités :	1
1.2 Problématique :	2
1.3 Objectifs :	3
1.4 Méthodologie :	4
Chapitre 2	9
Revue de littérature.....	9
2.1 Fatigue des matériaux :	9
2.2 Calcul numérique par la méthode des éléments finis :	35
2.3 Étude spectrale de la fatigue due aux chargements aléatoires :	36
2.4 Dynamique d'un système de suspension d'un véhicule :	43
2.5 Les fréquences propres des structures et résonance :	46
2.5.1 Équation de mouvement : Fréquences naturelles :	47
2.5.4 Analyse fréquentielle des structures complexes :	49

2.6 Synthèse de la revue de littérature :	52
Chapitre 3	54
Dynamique du véhicule	54
3.1 Étude dynamique du bras du système de suspension Macpherson :	55
3.2 Modèle de l'excitation aléatoire due à l'irrégularité de la chaussée :	62
3.3 Simplification du modèle dynamique de la suspension dans le cas du bras de suspension inférieur :	66
Chapitre 4	72
Développement du modèle élastique multiaxial	72
4.1 Développement d'une solution analytique de l'état des contraintes :	72
4.2 Gain en poids : cas uniaxial sous chargement sinusoïdale (SWT) :	78
4.3 Cas multiaxial élastique sous chargement aléatoire :	87
4.4 Extraction des cycles «rainflow» d'une PSD :	96
4.5 Calcul de l'endommagement	107
Chapitre 5	110
Développement du modèle numérique élasto-plastique	110
5.1 Critère de fatigue multiaxial dans le cas du couplage élasto-plastique :	115
5.2 Modèle numérique élasto-plastique (cas rigide : non amorti) :	120
5.3 Modèle numérique élasto-plastique (cas de l'amortissement) :	138
Chapitre 6	145
Application : prédiction de la durée de vie des pièces réelles complexes	145
6.1 Analyse dynamique et fréquentielle de la pièce de référence : bras de suspension inférieur d'un véhicule :	147
6.1.1 Prédiction de la durée de vie de la pièce de référence :	149

6.1.2 Analyse fréquentielle de la pièce de référence :	151
6.1.3 Optimisation de la forme géométrique du bras de suspension inférieur d'un véhicule :	153
6.2 Analyse dynamique et fréquentielle de la pièce de référence : bras de suspension supérieur d'un véhicule :.....	160
Chapitre 7	168
Conclusion et recommandations.....	168
Références et annexes	174

Liste des figures

figure 1.	Organigramme de l'étude de la prédiction de la rupture par fatigue.	8
figure 2.	Définition d'un cycle « Rainflow ».	39
figure 3.	Caractérisation mathématique d'un cycle rainflow.	42
figure 4.	Représentation d'un système de suspension.	45
figure 5.	Établissement des spectres d'excitation et de la chaîne de retour.	54
figure 6.	Système de suspension d'un quart de véhicule de type Macpherson.	56
figure 7.	Profil de la piste.	65
figure 8.	Schéma du couplage mécanique entre le système de contrôle de la suspension d'un véhicule et le bras de suspension inférieur.	68
figure 9.	Passage d'une PSD déplacement à une excitation force aléatoire.	70
figure 10.	Différents spectres des forces mises en jeu dans le système de contrôle de la suspension d'un véhicule.	71
figure 11.	Plaque triangulaire mince.	73
figure 12.	Chargement sinusoïdal à amplitude constante avec une valeur moyenne nulle.	80
figure 13.	Courbe S-N pour deux alliages différents (Sinusoïde de Pmax=4000N).	85
figure 14.	Courbe S-N: Modèle SWT et Courbe de Wöhler (harmonique sinusoïdale).	86
figure 15.	Distribution de la densité d'énergie maximale SWT.	87
figure 16.	Organigramme de l'élaboration du cas multiaxial élastique.	90
figure 17.	Organigramme du calcul de la durée de vie d'une pièce dans le cas multiaxial élastique.	92
figure 18.	Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments dans une pièce triangulaire d'épaisseur 30mm.	98
figure 19.	Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments dans une pièce triangulaire d'épaisseur 20mm.	99
figure 20.	Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments dans une pièce triangulaire d'épaisseur 16mm.	100
figure 21.	Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments critiques dans une pièce triangulaire d'épaisseur 14mm.	101
figure 22.	Profil de la somme des variations de l'énergie de déformation selon l'approche analytique.	102
figure 23.	Profil de la somme des variations de l'énergie de déformation selon l'approche analytique.	103
figure 24.	Vue en perspective du spécimen triangulaire d'épaisseur 20mm.	104
figure 25.	Localisation de l'élément critique dans le cas du spécimen d'épaisseur 20mm.	105
figure 26.	Spectre de la densité d'énergie de déformation de l'élément critique du spécimen d'épaisseur 20mm.	106
figure 27.	Caractérisation mathématique d'un cycle «rainflow».	97

figure 28. Analyse du signal de l'élément critique et extraction des cycles « rainflow ».....	109
figure 29. Zoom de la partie 3 de l'organigramme principale.....	114
figure 30. Organigramme résumant le calcul de la densité d'énergie uniaxiale équivalente au cas multiaxiale.	119
figure 31. Le spectre de chargement en mode rigide.	121
figure 32. Comportement plastique de l'alliage 7075-T6.	122
figure 33. Chargement et conditions aux limites dans la pièce en alliage Al 7075-T6.	126
figure 34. Le maillage contrôlé pour mieux représenter l'état des contraintes.	129
figure 35. Les résultats de la simulation numérique.	131
figure 36. Organigramme du programme de l'interface Matlab de filtrage.....	132
figure 37. Signaux brut et corrigé de SENER au point critique 169.	133
figure 38. Comptage de cycles «rainflow».....	134
figure 39. Organigramme de l'extraction du nombre de cycle à la rupture.	137
figure 40. Localisation de l'élément critique dans le cas rigide.	139
figure 41. Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments critiques.....	140
figure 42. Signaux des chargements après amortissement.....	142
figure 43. Signal SENER dans le cas rigide et dans le cas de l'amortissement.	143
figure 44. Profil de la densité d'énergie de déformation SENER dans le cas rigide et de l'amortissement.	144
figure 45. Suspension d'un véhicule montrant le bras de suspension supérieur et inférieur.	146
figure 46. Géométrie de référence.	148
figure 47. Profil de la SENER dans la pièce de référence et signal de la SENER de l'élément critique.	150
figure 48. Les modes propres de la pièce de référence.	153
figure 49. Visualisation des zones critiques et à faible SENER dans la pièce de référence et des paramètres d'optimisation.	155
figure 50. Première étape d'optimisation.	156
figure 51. Deuxième étape d'optimisation.	157
figure 52. Troisième étape d'optimisation.	158
figure 53. Évolution de la géométrie de la pièce lors du processus d'optimisation.	159
figure 54. Bras de suspension supérieur d'un système de suspension d'un véhicule.....	160
figure 55. Analyse des résultants de la pièce de référence.....	162
figure 56. Analyse des résultats de la première étape d'optimisation.	163
figure 57. Analyse des résultats de la deuxième étape d'optimisation.	164
figure 58. Analyse des résultats de la troisième étape d'optimisation.....	165

Liste des tableaux

tableau 1.	Propriétés mécaniques de certains alliages.	10
tableau 2.	Propriétés mécaniques de l'acier et des alliages d'aluminium.	11
tableau 3.	Valeurs numériques des paramètres mécaniques pour différents alliages.	19
tableau 4.	Différences clefs entre Abaqus/Standard et Abaqus/Explicite.	37
tableau 5.	Coefficients de rugosité pour différentes pistes.	64
tableau 6.	Paramètres de la suspension.	67
tableau 9.	Propriétés mécaniques de certains alliages.	79
tableau 10.	Paramètres de l'approche SWT	82
tableau 11.	Données des calculs numériques (sinusoïde d'amplitude 4000 N).	83
tableau 12.	Gain en poids une fois l'alliage 7075-T6 Al est utilisé.	84
tableau 13.	Domaine plastique par rapport au domaine élastique.	89
tableau 14.	Résultats des durées de vie dans le cas numérique et analytique.	108
tableau 15.	Comportement élasto-plastique de quelques alliages Al.	110
tableau 16.	Les données de la figure 32	123
tableau 17.	Normalisation des valeurs pour les 0,28 premières secondes.	127
tableau 18.	Les paramètres métallurgiques de fatigue de l'alliage d'aluminium 7075-T6	135
tableau 20.	Les deux premiers modes de la pièce de référence et sa masse.	152
tableau 21.	Les résultats d'optimisation de la pièce de référence.	155

Chapitre 1

Introduction

1.1 Généralités :

L'étude des métaux légers, comme les alliages d'aluminium, pour répondre aux nouvelles réglementations environnementales, économie d'essence et réduction de la pollution, doit être renforcée par des études de la fiabilité des pièces utilisées dans l'industrie automobile. En effet, des matériaux plus résistants garantissent des véhicules fiables et sécuritaires. De telles problématiques préoccupent plusieurs organismes publics (centre de recherche publique, centre québécois de recherche et de développement de l'aluminium (CQRDA), ministère des transports et de l'environnement) et privés (bureau d'étude du génie conseil, les entreprises etc..). Dans cette optique, nous abordons un nouveau sujet dans ce domaine au niveau de l'UQAC, en étudiant la prédiction de la rupture par fatigue dans les pièces mécaniques en alliages légers. Dans ce contexte, une approche expérimentale-numérique s'avère tout à fait indiquée. Compte tenu du faible coût et de la grande flexibilité de la méthode des éléments finis, MEF, il est possible de qualifier les pièces étudiées sous des scénarios de chargement complexe tel que la prise en compte du profil de chaussée. La pièce automobile étudiée dans le présent travail de recherche, est le bras de suspension

inférieur du système de suspension soumis à des efforts dynamiques très importants. Ce travail de recherche débute par la présentation de la problématique, suivi des objectifs et de la méthodologie.

1.2 Problématique :

La réduction du poids [1, 2, 3] permet non seulement d'améliorer l'angle de glissement entre les pneus et la route, la réaction au virage et la stabilité du véhicule, mais elle permet également à la voiture d'être plus efficace et sécuritaire, ainsi que d'effectuer une grande distance avec une consommation plus faible d'essence. Dans ce cadre, l'étude dynamique et vibratoire de l'automobile et leur effet sur certains éléments en alliage d'aluminium, en particulier les éléments de suspension, ainsi que leur durée de vie est justifiée.

Presque toutes les pièces mécaniques subissent des variations de sollicitation dans le temps et peuvent être soumises à la fatigue et sujettes à des ruptures brutales. Il en résulte que l'étude approfondie de la fatigue est absolument nécessaire. Le processus de fatigue implique l'apparition d'une fissuration qui se développe progressivement sous l'action de la répétition des sollicitations. Ces sollicitations répétées peuvent entraîner la rupture par fatigue lors d'application des contraintes inférieures à la résistance à la traction ou même à la limite élastique. La rupture intervient lorsque la fissure atteint une longueur critique l_c et que le facteur d'intensité des contraintes K atteint une valeur critique K_c [4]. La fissuration peut progresser sans que le facteur d'intensité des contraintes ne dépasse la valeur critique K_c . Dans le cas où la corrosion se superpose à une sollicitation répétée, on observe une réduction importante de la durée de vie de l'élément considéré.

L'étude du phénomène de fatigue expérimentalement et/ou par modélisation numérique, s'avère ainsi nécessaire pour évaluer la fiabilité des pièces mécaniques en alliages légers. La simulation sur ordinateur s'avère plus intéressante puisqu'elle est moins coûteuse et plus flexible que les méthodes expérimentales. Dans la présente étude on génère un modèle hybride analytique/numérique comprenant un couplage entre le comportement dynamique d'un système de suspension et un modèle empirique de fatigue décrit par un critère multiaxial de densité d'énergie de déformation équivalent au cas uniaxial. En effet, le critère multiaxial de densité d'énergie de déformation, équivalent au cas uniaxial, est un outil de calcul plus simple pour coupler le modèle de fatigue à l'état des contraintes multiaxiales au cas uniaxial, car le tenseur de densité d'énergie de déformation dans le cas multiaxial est du même ordre que dans le cas uniaxial, en l'occurrence l'ordre 0.

1.3 Objectifs :

Tel que démontré dans les sections précédentes beaucoup de travaux ont été réalisés dans le domaine de la fatigue des matériaux métalliques. Cependant, la fiabilité des pièces automobiles en alliage d'aluminium soumises à des efforts dynamiques réels très importants pour remplacer celles en acier, n'a pas été étudiée d'une manière exhaustive. Dans cette optique, l'objectif principal de cette recherche est d'étudier la fiabilité du bras de suspension inférieur d'un quart de suspension d'un véhicule en fonction de différents paramètres comme la non linéarité du matériau, la géométrie de la pièce, l'amortissement par le système de contrôle amortisseur-ressort. Cet objectif principal se subdivise en sous objectifs suivants :

- 1- Étudier le potentiel d'utilisation des pièces en alliages légers, dans l'industrie automobile.

- 2- Étudier l'effet du comportement dynamique et vibratoire de l'automobile sur certains éléments en alliage d'aluminium.
- 3- Élaboration du critère uniaxial de densité d'énergie de déformation équivalent au cas multiaxial.
- 4- Calcul de la densité d'énergie de déformation en utilisant la contraction tensorielle entre le tenseur des contraintes et celui de la déformation à l'aide d'une simulation numérique par la méthode des éléments finis.
- 5- Étudier la prédiction de la rupture par fatigue dans les alliages légers par des modèles empiriques de fatigue, dans le cas d'un modèle analytique élastique et d'un modèle numérique élasto-plastique.
- 6- Analyse fréquentielle de la pièce.

1.4 Méthodologie :

Pour atteindre les objectifs énoncés dans la section précédente, nous avons dressé une méthodologie de travail. La méthodologie comporte une revue de littérature, l'établissement du modèle élastique multiaxial (analytique et numérique), l'établissement du modèle numérique élasto-plastique multiaxial, le calcul de la durée de vie de la pièce et l'extraction des fréquences naturelles.

Une revue de littérature est nécessaire pour connaître les travaux de recherche, les plus récents dans le domaine de la fatigue des alliages d'aluminium et la dynamique des systèmes de suspension des automobiles. La revue de littérature traite des sujets suivants :

- la fatigue des alliages d'aluminium : étude de différents critères qui existent
- la modélisation par éléments finis

- l'étude du système de suspension d'un quart de véhicule
- l'analyse fréquentielle des structures

Dans la présente étude, avant de procéder à l'établissement du modèle analytique, il est nécessaire de connaître les propriétés mécaniques des alliages légers à étudier. Connaissant ces propriétés, la prédiction de la rupture par fatigue sera simulée sur une pièce en alliage d'aluminium. Le modèle analytique comportera une composante dynamique et vibratoire de l'automobile pour pouvoir prévenir leur effet sur certains éléments en alliage d'aluminium. La pièce mécanique en alliage d'aluminium, fait partie d'un système de suspension d'un quart de véhicule. On considère que la pièce est encadrée et ne s'éloignant pas de sa position d'équilibre. Il s'agit du cas extrême où l'état des contraintes donne des valeurs de durée de vie plus courte et sécuritaire, en sous-estimant la vraie valeur. Il s'agit du cas élastique multiaxial, ayant une solution analytique comparée à la solution numérique par la méthode des éléments finis.

L'étude est réalisée sur une pièce triangulaire ayant une géométrie proche à celle qui existe déjà dans le système de suspension. La simulation numérique est réalisée grâce au logiciel de calcul numérique par éléments finis « Abaqus ». En effet, on peut analyser les résultats de toutes les variables de sortie telles que : les contraintes principales, la densité d'énergie de déformation multiaxiale etc. Dans le cas élasto-plastique multiaxial, on se contente du modèle numérique établi à l'aide du code commercial en éléments finis, Abaqus, étant donné que la solution analytique du problème est difficile à trouver dans ce cas, voire même impossible. Enfin, les fréquences naturelles sont obtenues par un calcul de la matrice de rigidité, d'une pièce encadrée, en utilisant la méthode des éléments finis.

Les résultats du travail de recherche sont élaborés à partir de l'organigramme de la figure 1. L'organigramme suit les étapes suivantes :

- a- Évaluation de la force d'excitation (calcul de la charge).
- b- Entrée des paramètres physiques de la pièce et/ou optimisation des données si la durée de vie par rapport à la fatigue N_f n'est pas acceptable ou lorsqu'on tombe dans l'une des fréquences naturelles de la pièce.
- c- Calcul des fréquences propres de la pièce.
- d- Calcul du profil de contrainte.
- e- Etude du signal de chargement en chaque point.
- f- Lorsqu'il s'agit d'un signal à amplitude maximale constante on passe au calcul du nombre de cycle à la rupture. Dans le cas d'un chargement aléatoire on applique la loi de Palmgren-Miner après avoir extrait les cycles «rainflow», pour calculer le nombre de répétition du cycle aléatoire jusqu'à la rupture de la pièce. Le modèle est calibré par la méthode des éléments finis ou par des tests expérimentaux.

Si le résultat n'est pas acceptable, il y a une boucle de retour pour optimiser le modèle.

Cette méthodologie est détaillée en huit chapitres à caractère théorique et numérique. Le chapitre 2 présente une revue bibliographique des travaux de recherche dans le domaine de la fatigue des matériaux métalliques, la dynamique du système de suspension d'un véhicule et les fréquences naturelles des structures. Le chapitre 3 traite la dynamique d'un quart de véhicule sous le contrôle d'un système de suspension composé d'un pneu, d'un amortisseur et d'un ressort, ainsi que la modélisation de l'irrégularité de la route par une densité spectrale de puissance PSD. Dans le chapitre 4 on établit le modèle analytique élastique multiaxial, comparé au modèle numérique

élastique multiaxial. Dans le chapitre 5 on simule numériquement par le code commercial par la méthode des éléments finis, Abaqus, le couplage élasto-plastique décrivant la non linéarité du matériau. La comparaison des fréquences naturelles à la gamme de fréquence du spectre de la PSD décrivant l'irrégularité de la route, est traitée dans le chapitre 6. L'analyse des résultats, de l'effet des facteurs cités au début de cette section, est présentée dans le chapitre 7. Finalement dans le chapitre 8, nous présentons les conclusions générales sur l'utilisation des alliages d'aluminium comme bras de suspension d'un véhicule et nous émettons quelques recommandations pour les travaux de recherches à venir.

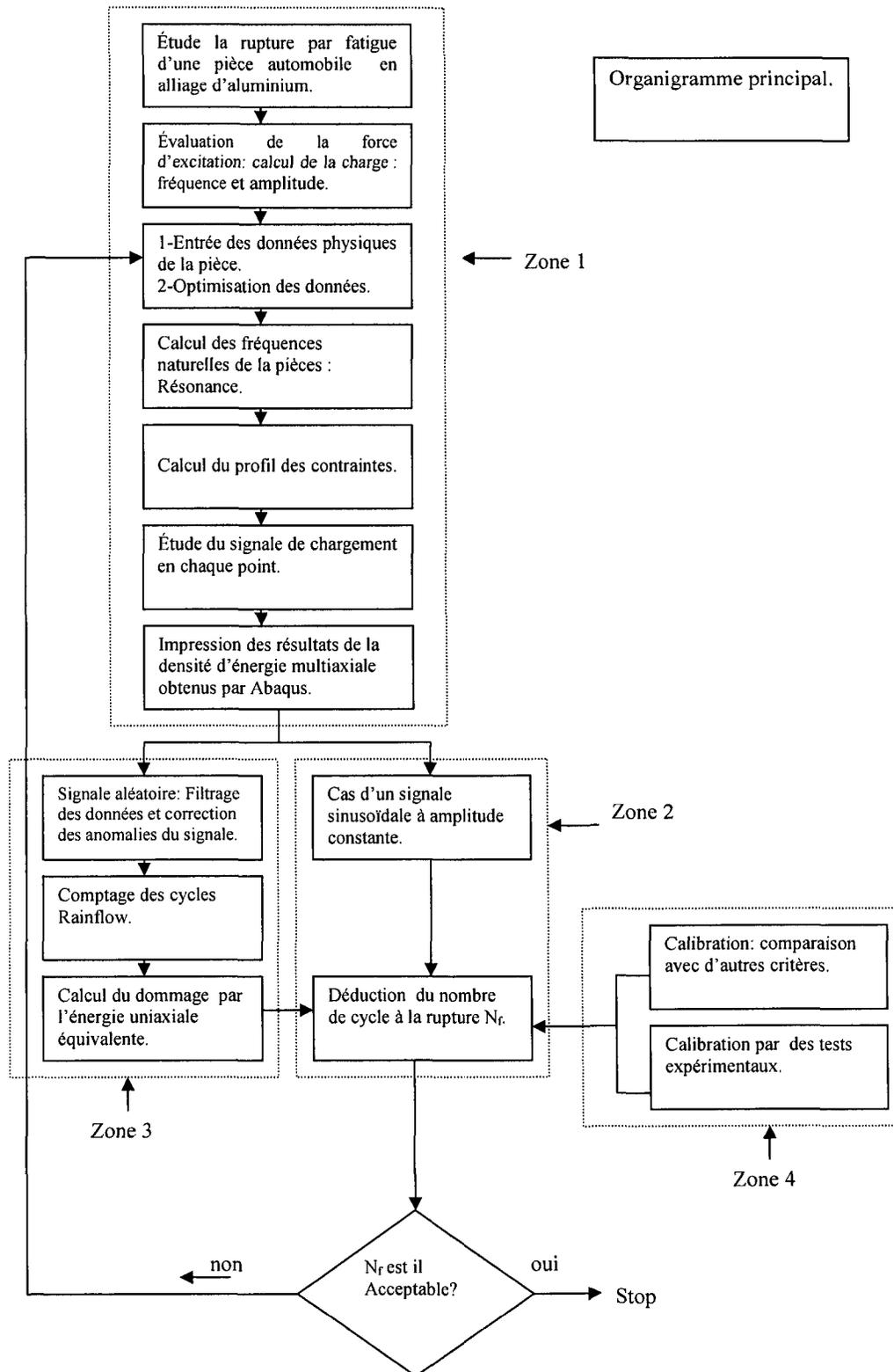


figure 1. Organigramme de l'étude de la prédiction de la rupture par fatigue.

Chapitre 2

Revue de littérature

La revue de littérature traite des sujets suivants : la fatigue des matériaux, le calcul numérique par élément finis, l'analyse spectrale de la fatigue due aux chargements aléatoires, le modèle dynamique du système de suspension d'un quart de véhicule et les fréquences propres des structures.

2.1 Fatigue des matériaux :

La densité du fer qui est de l'ordre de 7,88 est presque trois fois celle de l'aluminium (2,7). D'où l'intérêt de remplacer des pièces en alliage de fer comme l'acier par des alliages d'aluminium pour réduire le poids des véhicules. Dans les alliages d'aluminium, la courbe contrainte-déformation présente une partie plastique non négligeable comme illustré dans le tableau 1. Une comparaison des propriétés mécaniques des alliages de fer avec ceux de l'aluminium comme illustré dans le tableau 2, montre que ces derniers peuvent être utilisés dans l'industrie automobile. En effet d'après le tableau 2, on remarque que certains alliages d'aluminium ont des propriétés mécaniques comparables à ceux de l'acier [5]. Carl Villeneuve [6] rapporte que l'alliage aluminium-silicium 413 est déjà utilisé dans le châssis de certains véhicules.

William F. Smith [7] ne fournit pas les données des durées de vie des pièces en acier, mais uniquement pour les alliages d'aluminium. En effet l'alliage d'aluminium 7001 (T6) à une durée de vie de 500 millions de cycles en utilisant la méthode R. R. Moore d'une machine à poutre tournante. Claude Bathias et Jean-Paul Bâillon [8] ont rapporté que pour des essais en flexion rotative à 100 millions de cycles, la durée de vie pour l'acier XC 10 est de l'ordre de 25,74 psi, qui est une valeur comparable à celle de l'alliage d'aluminium 7001 (T6).

Dans la revue de littérature beaucoup d'approches ont été abordées pour valider des modèles analytiques pour étudier la fissuration par fatigue dans les alliages légers. Marthinsen, K.; et Nes, E. [9] se sont intéressés à l'étude de la consolidation de l'alliage à l'état solide, avant même que le phénomène de la fissuration intervienne. En effet, à l'état solide les alliages sous contrainte, statique ou dynamique, subissent des transformations. L'écrouissage peut diminuer le nombre de dislocation et consolide ainsi la pièce.

tableau 1. Propriétés mécaniques de certains alliages [5].

Alliage :	Code	Densité kg/m ³	Module de Young en MPa	Limite ultime σ_u en MPa	Limite élastique σ_e en MPa	* Rapport : $\frac{\sigma_u - \sigma_e}{\sigma_u}$ en %
Acier	AISI1015	7900	206	415	227	*45,30
	RQC-100	8000	200	758	683	*10,00
Aluminium	2024-T351	2700	73	455	379	*16,70
	2024-T4 Al	2700	73	476	303	*36,34
	7075-T6 Al	2800	71	578	469	*18,85

(* calculé)

tableau 2. Propriétés mécaniques de l'acier et des alliages d'aluminium [7].

		Résistance à la traction (psi)	Limite élastique conventionnelle (psi)	Élongation %	Dureté (Bhn)
Alliage acier-chrome	5140	115	68,5	22,7	229
	5160	138,75	77	17,5	269
Alliage d'aluminium	7001 (T6)	98	91	9	160
	7075 (T6)	83	73	11	150

Une nouvelle approche pour modéliser la consolidation lors de la déformation plastique des métaux purs (cubique à face centrée "cfc"), est basée sur une approche statistique du problème du stockage athermale des dislocations [9]. En combinant la solution pour le problème du stockage des dislocations avec le modèle pour le recouvrement du réseau des dislocations et des sous structures, la description de l'état général interne des variables est obtenue. Marthinsen *et al.*[9], ont développé ce modèle en incluant les effets résultant des joints de grains, des éléments dans la solution solide et la présence des précipités de particules non déformable. Le résultat est un modèle de consolidation et un code informatique associé, capable de donner le profil contrainte-déformation pour des alliages de solution solide sous des conditions de combinaisons du taux de déformation constant et la température. Ce modèle a été appliqué au problème de la consolidation et la saturation de la contrainte d'écoulement dans les alliages aluminium-magnésium [9].

La complexité du problème de la fatigue amène les auteurs à l'aborder de différents points de vue. André Bazergui *et al.* [10] se sont basés sur les courbes de fatigue $S-N$ (contrainte S en fonction du nombre de cycle N) et deux modèles empiriques de fatigue pour prévenir la rupture par fatigue dans les matériaux. Ces

mêmes auteurs [10] ont rapporté dans leurs études que des essais normalisés moins onéreux, flexion rotative, sont pratiqués sur des éprouvettes standards avant d'installer la pièce opérationnelle sur l'appareil pour mieux prédire la durée de vie de la pièce en question. En pratique la variation de la contrainte est souvent périodique mais elle n'est pas toujours sinusoïdale et la valeur moyenne de la contrainte n'est pas nulle à cause de la contribution statique du poids de la pièce, ou à cause d'un serrage prématuré. Il est donc possible de représenter adéquatement une variation de contrainte par la superposition de contraintes sinusoïdale de diverses amplitudes et de différentes valeurs moyennes. On charge une éprouvette standard par une contrainte sinusoïdale d'amplitude σ_a superposée à une contrainte moyenne σ_m statique, en mode flexion rotative. Cependant, d'autres sortes de machines permettent d'effectuer beaucoup mieux des essais de fatigue avec contrainte moyenne non nulle [10].

Nous avons proposé plusieurs relations pour prédire l'effet de σ_m sur la vie d'un matériau, à partir de l'analyse des résultats concernant la fatigue due à une contrainte moyenne nulle et en fonction de la résistance déterminée lors d'un chargement statique uniaxial. La relation empirique de Goodman [10] est la plus connue, elle s'exprime selon l'équation 1 :

$$\text{équation 1: } \frac{\sigma_a}{S_a} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

où σ_m est la contrainte statique moyenne, σ_a est l'amplitude de la contrainte sinusoïdale, S_a la résistance à la fatigue due à une contrainte sinusoïdale (complètement inversée) pour une vie N donnée et S_u la résistance ultime à la traction uniaxiale statique. Soderberg [10] a proposé une relation, selon l'équation 2, semblable

à l'équation 1 mais plus sécuritaire, puisque la valeur de σ_m est limitée à la résistance à l'écoulement S_y en traction statique :

$$\text{équation 2: } \frac{\sigma_a}{S_a} + \frac{\sigma_m}{S_y} = 1$$

Bernard Barthélémy [11] tient compte de l'énergie de déformation qui comprend l'énergie de distorsion S_d et l'énergie de déformation volumique S_v . Ainsi dans le cas d'un problème où les trois modes I, II et III correspondant respectivement aux facteurs de concentration de contrainte K_I , K_{II} et K_{III} , le critère de rupture présenté par Bernard Barthélémy [11] est plus générale que le classique critère de Von Mises qui ne considère que l'énergie de distorsion. Le même auteur [11] ajoute que lorsqu'une structure est soumise à une charge d'intensité variable, le phénomène de fatigue peut conduire à sa rupture bien que la charge reste, à tout moment, inférieure à sa résistance statique. On distingue généralement trois étapes distinctes mettant en jeu des mécanismes différents :

- L'initiation de la fissure. Il s'agit de la création à partir du défaut original d'une fissure de dimensions détectables par les procédés de contrôle non destructifs utilisables.
- La propagation lente de la fissure de fatigue. Au cours de cette étape, la fissure peut croître plus ou moins rapidement selon le matériau et l'intensité du chargement critique, et atteindre dans certains cas une longueur de plusieurs centimètres, voire de l'ordre du mètre. Dans d'autres cas, au contraire, cette étape peut-être très brève et la fissure peut ne pas croître de façon substantielle.

- La rupture, qui est l'étape finale du phénomène, qui se produit lorsque la taille de la fissure est telle qu'elle ait atteint son seuil d'instabilité.

On propose plusieurs lois empiriques pour contrôler dans le temps le phénomène de fatigue [11] :

- La loi de Paris et ses variantes : Il s'agit de la loi la plus universellement utilisée en raison de sa grande simplicité et de son succès à corroborer de nombreux résultats expérimentaux. En effet, Paris propose de relier $\frac{da}{dN}$, où da est la dérivée de la longueur de la fissure par rapport au nombre de cycle, à l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte ΔK sous la forme de l'équation 3 :

$$\text{équation 3: } \frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n$$

$$\text{avec } \Delta K = K_{\max} - K_{\min} = K_{(\sigma_{\max})} - K_{(\sigma_{\min})}.$$

Les facteurs C et n sont des constantes propres au matériau et à l'environnement considéré. Dans certains cas expérimentaux, les résultats sont trop dispersés pour que l'on puisse déterminer les valeurs de C et n , ce qui suggère que la loi de Paris ne fait pas intervenir tous les paramètres et en particulier le niveau de sollicitation.

- La loi de Sih [11]: La loi de Paris possède deux insuffisances majeures : elle ne fait intervenir qu'un paramètre du chargement (amplitude de contrainte) et n'est valable qu'en mode simple de propagation, plus précisément le mode I. Sih [11] a proposé de remplacer dans la loi de Paris l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte ΔK par l'amplitude de la densité d'énergie de déformation minimale ΔS_{\min} . La loi proposée par Sih [11] s'écrit donc :

équation 4: $\frac{da}{dN} = C(\Delta S_{\min})^n$

ΔS_{\min} représente donc la variation de S dans la direction où S est minimum, c'est-à-dire pour la valeur θ_0 de l'angle θ telle que (cas bidimensionnel) :

équation 5: $\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_0} = 0$

Il s'en suit que l'on peut écrire :

équation 6: $\Delta S_{\min} = \Delta S_{\min}^{\max} - \Delta S_{\min}^{\min} = S(\theta_0, \sigma_{\max}) - S(\theta_0, \sigma_{\min})$

où σ_{\max} et σ_{\min} représentent les valeurs extrêmes du tenseur des contraintes σ .

Dans le cas du mode mixte I et II on peut écrire [11]:

équation 7:

$$\Delta S_{\min} = \frac{1}{16\pi G} [a_{11}(K_{I\max} - K_{I\min}) + 2a_{12}(K_{I\max}K_{II\max} - K_{I\min}K_{II\min}) + a_{22}(K_{II\max} - K_{II\min})]$$

Lorsque le problème fait intervenir les trois modes de propagation, ΔS_{\min} doit être complété par le terme correspondant au mode III. Cette loi résout les deux problèmes de la loi de Paris précédemment énoncés. Les résultats expérimentaux sous forme d'un diagramme $(\frac{da}{dN}, \Delta S)$ et non plus $(\frac{da}{dN}, \Delta K)$ montre que la dispersion due au niveau moyen de sollicitation a totalement disparu [11].

Les lois de Sih et de Paris ne sont pas satisfaisantes du point de vue de la prise en compte des véritables mécanismes de la propagation d'une fissure de fatigue. En

effet ces deux lois ne sont que des lois empiriques qui traduisent les corrélations mathématiques des résultats expérimentaux, d'où la nouvelle approche énergétique de Chakrabarti [11]. L'approche énergétique de Chakrabarti [11] est basée sur le concept suivant : l'énergie reçue par le système (corps fissuré) pendant le temps Δt durant lequel la fissure progresse d'une longueur Δa doit au moins égaler l'énergie dissipée sous forme calorifique augmentée de l'énergie de plastification en fond de la fissure et de l'énergie de formation de surface libre (propagation de la fissure).

Ce concept énergétique, qui est identique à celui utilisé par Griffith [11] en 1920, s'exprime par l'équation 8 :

$$\text{équation 8: } \Delta W \geq \Delta W_d + \Delta W_p + \Delta W_s$$

L'énergie reçue par le système s'évalue à partir de l'aire limitée par les boucles d'hystérésis. L'estimation des autres termes requiert l'introduction des paramètres ci-après :

$$\frac{dW_p}{dZP} = \bar{W}_p : \text{ la densité volumique d'énergie de plastification,}$$

ΔZP : l'accroissement volumique de la zone plastique lors d'un allongement Δa de la fissure,

$$\frac{dW_s}{dSL} = \bar{W}_s : \text{ la densité volumique d'énergie de formation d'une surface libre}$$

ΔSL : l'accroissement de la surface libre lors d'un allongement Δa de la fissure.

Supposant que la fréquence du chargement constante durant l'intervalle Δt l'équation 8 devient :

$$\text{équation 9: } \int_{N_1}^{N_2} \frac{dW}{dN} dN \geq \int_{N_1}^{N_2} \left(\frac{dW_d}{da} + \frac{dW_p}{da} + \frac{dW_s}{da} \right) \frac{da}{dN} dN$$

L'introduction de W_p et W_s conduit à :

$$\text{équation 10: } \frac{da}{dN} = \frac{\int_{N_1}^{N_2} \frac{dW}{dN} dN}{\int_{N_1}^{N_2} \left(\frac{dZP}{da} \bar{W}_p + \frac{dSL}{da} \bar{W}_s + \frac{dW_d}{da} \right) dN}$$

Il faut prendre en considération que, les développements qui ont abouti à l'équation 10, doivent respecter les conditions de continuité et que les fonctions mises en jeu sont dérivables aux sens usuels. Dans le cas contraire ces fonctions seront continues et dérivables aux sens des distributions. Le numérateur de l'équation 10 peut s'écrire

comme la somme des énergies reçues lors de chaque cycle $\sum_{i=N_1}^{N_2} W_i$. Quant au

dénominateur, il s'écrit :

$$\int_{N_1}^{N_2} n r_p \xi' \left\{ \left[1 - \left(\frac{r_{pf}}{r_p} \right)^2 \right] \frac{\sigma_e + \sigma_u}{2} (\varepsilon_e + \varepsilon_u) + \left(\frac{r_{pf}}{r_p} \right)^2 \frac{\sigma_f + \sigma_u}{2} (\varepsilon_f + \varepsilon_u) \right\} dN + \int_{N_1}^{N_2} \frac{e \xi K_{IC}^2}{E} (1 + \gamma^2) dN$$

où :

$$n = 1 + \frac{\Delta W_d}{\Delta W_p}$$

r_p et r_{pf} : tailles des zones plastiques en chargements monotones et cycliques

e : l'épaisseur de la tôle

ξ et ξ' : les facteurs de « turtuosité » de la fissure, applicables pour corriger ΔSL et

ΔPZ ,

σ_e : la limite d'élasticité,

σ_u : la résistance ultime,

σ_f : la contrainte de rupture,

ε_e : la déformation à la plastification,

ε_u : la déformation plastique uniforme,

ε_f : la déformation locale à la rupture ($= l_n \frac{A_0}{A_f}$),

E et γ : le module d'Young et coefficient de poisson.

Bien que cette approche possède l'inconvénient de recourir à de nombreux facteurs, elle possède aussi l'avantage d'être fondée sur une base rationnelle.

La rupture finale se produit lorsque la fissure atteint une longueur telle que sous le chargement maximal σ_{\max} soit réalisée dans les conditions nécessaires à son instabilité. Dans le cas de l'utilisation de la loi de Paris, ceci se produit pour une longueur a_f telle que :

$$K(\sigma_{\max}, a_f) = K_{IC}$$

Si l'on a recours à la loi de Sih, la longueur critique a_f se calcule à partir de :

$$S_{\min}^{\max}(a_f) = S(\theta_0, \bar{\sigma}_{\max}, a_f) = S_{cr},$$

où S_{cr} est la densité critique d'énergie de déformation :

$$S_{cr} = S_{\min} = \frac{1-2\nu}{4\pi G} K_{IC}^2,$$

avec G est le module d'élasticité de cisaillement et ν le coefficient de poisson. Des valeurs de S_{cr} pour divers alliages sont fournies par le tableau 3. Le nombre de cycles

N_p ainsi déterminé auquel s'ajoute éventuellement le nombre de cycle d'initiation N_i , fournit la durée de vie de la pièce considérée.

Dans le cas réel, les sollicitations sont aléatoires et complexes qui nécessitent des modélisations par des processus stochastiques. Soize [11] a explicité les conditions que la loi de Miner peut être étendue à la fatigue sous sollicitations aléatoires sous la forme :

$$\text{équation 11: } D = \int_{\sigma_0}^{+\infty} \frac{n(\sigma)}{N(\sigma)} d\sigma$$

tableau 3. Valeurs numériques des paramètres mécaniques pour différents alliages [11].

Matériau	Résistance Ultime (MPa)	K_{IC} (MPa \sqrt{m})	S_{cr} (J/m ³)
Acier : A517F	827	186,8	16078
Acier : AISI4130	1172	109,9	5808
Alliage d'aluminium 2014-T651	483	25,3	619
Alliage d'aluminium 2024-T851	448	25,3	619

Il peut s'agir d'une excitation sinusoïdale d'amplitude constante $F = F_{\max} \sin(\omega t)$, produisant un profil de contrainte variant dans l'espace et dans le temps provoquant par l'intermédiaire d'un système d'amortissement un signal d'amplitude variable comme dans le cas du système de suspension de l'automobile. Il peut aussi s'agir d'une excitation quelconque dont l'amplitude est aléatoire. Il est donc nécessaire, en chaque point du matériau, de connaître la déformation et les pics de la contrainte locale pour chaque cycle identifié sur le chargement aléatoire. Ainsi, plusieurs chercheurs [12, 13,

14, 15] utilisent l'algorithme «rainflow» pour compter les pics, les identifier en l'associant à chaque sous cycle, pour calculer les paramètres des lois empiriques donnant le nombre de cycle à la rupture. S. Cervello *et al.*[16], ont analysé et étudié le design des roues des voies ferrées à faible bruit. La procédure numérique a été utilisée pour le calcul du facteur de perte. Cette procédure vérifiée sur des plaquettes par des moyens d'analyses modales expérimentales, a permis un meilleur traitement de la finesse et l'arrangement à choisir parmi ceux disponibles commercialement et faisables en technologique. Un autre type de fatigue peut intervenir, il s'agit de la fatigue oligocyclique. En effet par suite de l'amplitude de la contrainte maximale, chaque cycle d'effort entraîne une déformation plastique d'ensemble accompagnée en général d'un durcissement notable du métal. On peut situer ce domaine depuis la contrainte correspondant à la limite élastique macroscopique jusqu'à celle correspondant à la charge de rupture statique du métal considéré, sollicité dans les mêmes conditions. La loi de Manson-Coffin [11] intervient dans ce cas.

A. Elmarakbi *et al.*[17], ont étudié la validité du critère multiaxial de fatigue ; cela est basé sur la densité d'énergie de tension. L'analyse tridimensionnelle par éléments finis sur l'axe d'entaille de "Society of Automotive Engineering" (SAE), est utilisée comme une composante de test pour évaluer le critère de dommage multiaxial par fatigue. Les réponses élastiques et élastiques-plastiques de la contrainte/déformation sont utilisées pour obtenir les paramètres du dommage qu'éventuellement seront utilisées pour prédire la durée de vie des structures ou des composantes. A. Elmarakbi *et al.*[17], proposent un modèle pour évaluer les capacités prédictives de plusieurs théories de fatigue multiaxial, tel que la flexion, torsion ou des tests de combinaison de flexion-torsion, qui ont été réalisés par (SAE) en utilisant l'axe d'entaille. Un domaine

du cycle de charge est à mentionner, c'est lorsque la contrainte plastique intervient durant chaque cycle. Ce domaine est associé à des charges élevées et des courtes durées de vie ou des bas cycles de fatigue. L'autre domaine du cycle de charge est associé aux cycles de contraintes qui sont confinées au domaine élastique pour des durées de vie longues.

Ces mêmes auteurs.[17], proposent un modèle pour évaluer les capacités prédictives de plusieurs théories de fatigue multiaxiale, tel que la flexion, torsion ou des tests de combinaison de flexion-torsion, qui ont été réalisés par "Society of Automotive Engineering" (SAE) utilisant l'axe d'entaille. Le premier objectif était de calculer les contraintes locales et les déformations de l'axe d'entaille par la MEF en utilisant le logiciel d'analyse par la méthode des éléments finis Abaqus. Pour l'analyse élastique-plastique, le profil non linéaire est donné par l'équation 12 :

$$\text{équation 12: } \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k'}\right)^{1/n'}$$

où $K' = \frac{\sigma'_f}{\varepsilon'^{n'}}$: le coefficient de la limite d'endurance, $n' = \frac{b}{c}$ est l'exposant de la dureté cyclique, σ'_f est le coefficient de la résistance à la fatigue, c l'exposant de la ductilité de la fatigue, b est l'exposant de la résistance à la fatigue et ε'_f est coefficient de la ductilité de la fatigue.

L'énergie totale de déformation par unité de volume au niveau de la région critique, peut être obtenue à partir du modèle en éléments finis tridimensionnels. Il faut obtenir un équivalent de déformation uniaxiale à partir de la densité d'énergie de déformation totale qu'on peut obtenir de l'analyse contrainte/déformation multiaxiale.

Autrement dit, trouver la déformation uniaxiale équivalente qui cause la même densité d'énergie dans le cas uniaxial. Deux approches sont possibles : la densité d'énergie obtenue par l'analyse élastique et l'autre par l'analyse élastique-plastique.

D'autres chercheurs [17], ont montré que pour les entailles profondes, comme dans le cas de la déformation plastique localisée, la distribution de l'énergie dans la zone plastique est aussi la même que les matériaux élastiques linéaires. Ceci veut dire qu'en présence de déformation plastique localisée à petite échelle, le profil élastique linéaire grossier du matériau entoure la déformation de l'entaille de contrôle dans la zone plastique. Ainsi, on peut conclure que la densité d'énergie U_σ due au champ contrainte/déformation élastique-plastique local, est approximativement égale à la densité d'énergie U_s due au champ contrainte/déformation élastique [17] :

$$\text{équation 13: } U_s = U_\sigma, \text{ ou } \int_0^{\epsilon_y} S_{ij} d\epsilon_{ij} = \int_0^{\epsilon_y} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

Dans cette méthodologie l'analyse élastique tridimensionnelle du modèle par élément finis a été utilisée et la densité totale de l'énergie de déformation dans la majorité de la région critique est déterminée par la sommation des contributions de toutes les composantes contrainte/déformation. Ceci est utilisé pour calculer la déformation équivalente correspondant à la densité d'énergie qui compose les composantes plastique et élastique dans le cas uniaxial [17]. Ceci veut dire que la valeur de la densité d'énergie de déformation obtenue à partir de l'analyse en MEF tridimensionnelle est égalisée à la densité d'énergie uniaxiale qui compose l'énergie de déformation plastique et élastique. La formulation mathématique de cette méthodologie est la suivante :

l'énergie totale de la déformation uniaxiale par unité de volume, peut-être obtenue par une intégration :

$$\text{équation 14: } U = U_e + U_p = \int \sigma d\varepsilon$$

on sait que :

$$\text{équation 15: } \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

ainsi :

$$\text{équation 16: } \frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{1}{E} + \frac{\sigma^{\left(\frac{1-n'}{n'}\right)}}{n' K'^{\frac{1}{n'}}}$$

Alors que l'équation 14 devient :

$$\text{équation 17: } U = \int \sigma \left(\frac{1}{E} + \frac{\sigma^{\left(\frac{1-n'}{n'}\right)}}{n' K'^{\frac{1}{n'}}} \right) d\sigma$$

après simplifications ;

$$\text{équation 18: } U = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\sigma}{n'+1} \left(\frac{\sigma}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

la résolution de l'équation 18 permet d'obtenir la contrainte requise pour produire la même densité d'énergie dans le cas uniaxial. En substituant la contrainte dans l'équation 15, la déformation correspondante est obtenue. Ayant la déformation, la prédiction de la fatigue est possible en utilisant l'équation 19 de Manson-Coffin [17] :

$$\text{équation 19: } \frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c$$

où $\Delta\varepsilon$ est l'intervalle de déformation, σ'_f est le coefficient de la résistance à la fatigue, N le nombre de cycle, E est le module de Young, c l'exposant de la ductilité de la

fatigue, b est l'exposant de la résistance à la fatigue et ε'_f est le coefficient de la ductilité de la fatigue. Les résultats montrent qu'il est clair que cette méthodologie surestime la durée de vie dans la région des bas cycles de fatigue, car la déformation plastique n'est pas comptée proprement. Il faut noter que cette méthodologie est basée sur le fait que la déformation plastique est une petite fraction de la déformation totale, c'est pour cela que cette méthode délivre de bonnes estimations dans les régions à haut cycle de fatigue où la déformation élastique contrôle les processus de dommage par fatigue. Donc cette méthodologie n'est pas unique comme outil de prédiction à bas cycle et haut cycle de fatigue.

A. Elmarakbi *et al.*[17] ont testé une autre méthodologie pour prédire la durée de vie de l'axe d'entaille par la densité d'énergie, basée sur le champ élastique-plastique. Dans cette méthodologie, l'analyse inélastique du modèle tridimensionnelle par la MEF est utilisée et la densité d'énergie U (élastique et plastique) au niveau de la majorité de la région critique est prédite en prenant en considération les contributions de toutes les composantes contrainte/déformation. C'est-à-dire :

$$\text{équation 20: } U = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

Il est important de noter que les densités d'énergie de déformation pour différentes charges sont facilement obtenues à partir des données des fichiers du logiciel Abaqus [17]. Les valeurs de la densité d'énergie obtenues sont utilisées après, pour définir la déformation uniaxiale équivalente, comme expliqué auparavant pour la méthode de l'énergie élastique. Cette méthodologie, qui est basée sur le critère d'énergie de déformation calculée par le champ contrainte/déformation élastique-plastique, délivre des résultats plus précis que celle calculée le champ contrainte/déformation élastique.

Cette performance dans la prédiction de la durée de vie est due au fait que la déformation plastique est comptée avec précision en utilisant l'analyse élasto-plastique.

Mars W.V. [18], se base sur le même critère utilisé par A. Elmarakbi *et al.* [17], en l'occurrence la densité d'énergie de fissuration. Mars W.V. [18], a réalisé des tests de fatigue, tension-torsion, et a comparé les résultats avec le critère de densité d'énergie. Les modèles envisagés pour prédire la durée de vie de particules de caoutchouc, suivent deux approches : une approche focalisée sur la durée de l'initiation de la fissure donnant l'historique de quelques paramètres tels que l'état des contraintes et des déformations qui sont définis dans un point matériel. L'autre approche, basée sur des idées de la mécanique de la rupture, s'intéresse à la prédiction de la propagation des fissures particulières, donnant l'historique du taux d'énergie dégagée. Mars W.V [18] a opté pour l'approche de la propagation de la fissure, car l'approche de l'initiation de la fissure reçoit moins d'attention dans la littérature. Cette dernière est avantageuse pour l'analyse lorsque l'historique mécanique est donnée en terme d'entités qui sont définies à un point matériel, sans donner de considération explicite aux fissures individuelles [18].

L'approche de la propagation de la fissure a été développée par Rivlin et Thomas, selon la référence [18], qui ont appliqué le critère de Griffith au caoutchouc. La difficulté de l'application de l'approche de la propagation de la fissure sur le caoutchouc c'est qu'elle exige d'avance la connaissance de la location initiale et l'état de la fissure qui provoque la rupture finale. Le changement de la géométrie doit être pris en considération aussi. Pour un petit flux de chargement simple en tension étendu,

le taux d'énergie de déformation dégagée peut être écrit sous forme d'un produit de la densité d'énergie W et la longueur de la fissure c :

équation 21: $T = 2kWc$

où k est une constante de proportionnalité qui dépend faiblement de la déformation et le chiffre 2 montre qu'une surface à deux faces d'énergie. L'équation 21 utilisée par Mars W.V. [18] ne tient pas compte de l'énergie de plastification et de l'énergie dégagée sous forme de chaleur, considérant ainsi le caoutchouc comme un matériau purement élastique et que la propagation de la fissure est athermique.

En plus du modèle déterministe de A. Elmarakbi *et al.*[17], utilisé dans la présente étude on trouve dans la littérature d'autres modèles qui couvrent l'aspect aléatoire du phénomène de la fatigue. Par exemple, Asok R. *et al.* [19], ont proposé un modèle stochastique pour étudier la propagation de la fissure par fatigue dans les matériaux métalliques. C'est un domaine de recherche relativement récent. En effet, une liste extensive de la littérature technique de cette méthode est citée par Sobczyk et Spencer, alors que les applications récentes de cette dernière dans la mécanique de rupture sont présentées par Scheller, selon la référence [19]. La même référence [19] ajoute qu'une des approches de la modélisation par des processus stochastiques de la croissance de la propagation de la fissuration par fatigue, est de rendre aléatoire les coefficients du modèle déterministe pour représenter l'inhomogénéité du matériau proposé par Ditlevson et Olsen. Asok R. *et al.* [19], ont rapporté une autre approche, proposée par Lin et Yang en 1985 et Spencer en 1989 : il s'agit de générer l'information stochastique nécessaire en multipliant la dynamique déterministe de la

croissance de la fissuration par fatigue avec un processus aléatoire non négatif (strictement positif).

Asok R. *et al.* [19], ont utilisé le modèle de la distribution log-normal de la longueur de la fissure "lognormal distributed crack length (LDCL)" et ils ont vérifié les prédictions du modèle par des données expérimentales de la croissance de la fissure par fatigue réalisées par d'autres chercheurs pour les alliages d'aluminium 2024-T3 et 7075-T6. Ce modèle stochastique est construit à partir d'un modèle déterministe de la croissance de la fissure par fatigue qui est basé sur le principe de la croissance de la fissure, développé par Newman en 1981. Le modèle de Newman, selon Asok R. *et al.* [19], représente la valeur moyenne du processus de la croissance de la fissuration par fatigue jusqu'aux microfissures de l'ordre de la taille par défaut du matériau et qui a la forme suivante :

$$\text{équation 22: } d\mu_c(t) = C(\Delta K_{eff})^m dt; \quad \mu_c(t_0) > 0; \quad t \geq t_0$$

$$\text{équation 23: } \Delta K_{eff} = (S_{max} - S_0) \sqrt{\pi \mu_c} F$$

où $\mu_c(t) \equiv E[c(\omega, t) |_{c(\omega, t_0) = \mu_{c_0}}]$ est la valeur prévue du processus $c(\omega, t)$ de la longueur de la fissure conditionnée par la longueur initiale de la fissure $c(\omega, t_0)$; l'échantillon testé est représenté par ω ; le temps t est exprimé en terme de nombre de cycle, t_0 est le temps initial ; $d\mu_c$ est la différentielle de μ_c , $\Delta K_{eff} = \frac{d\mu_c}{dt}$; S_{max} est la contrainte de contrôle maximale ; S_0 est la contrainte d'ouverture de la fissure et F est le facteur de correction de la configuration géométrique. Le modèle LDCL proposé par Asok R. *et al.* [19], est semblable à la loi universelle de Paris, n'illustre que le caractère aléatoire du

comportement du matériau. Dans une autre publication, Asok R. et Ravindra P.[20] ont utilisé un modèle stochastique basé sur des observations expérimentales et la structure d'un modèle déterministe de l'espace d'état avec deux variables d'états, en l'occurrence la longueur de la fissure et la contrainte d'ouverture. En effet, ces derniers auteurs [20] ont postulé une équation gouvernant la propagation de la fissuration par fatigue dans un aspect aléatoire semblable à ce qu'a été originalement développé par Paris P.C. et Erdogan F en 1963. Par ailleurs, Asok R. et Ravindra P.[21] ont présenté le code informatique d'un modèle dynamique non linéaire de l'espace d'état pour étudier la croissance de la fissuration par fatigue dans les alliages ductiles.

Bruzzi M.S. et McHugh P.E. [22] ont développé une méthodologie informatique pour modéliser le comportement de la croissance des petites fissures par fatigue pour les alliages forgés 2124-T4-Al et l'alliage d'aluminium de fonderie 359-T6-Al. En particulier, corrélérer les conditions locales de la force motrice du bout de la fissure pour une fissure initiale avec une courbe expérimentale du taux de croissance d'une longue fissure [22], en utilisant la fermeture de fissure. En effet, le bout de la fissure a été modélisé par la méthode des éléments finis et le paramètre de corrélation, ΔJ_{eff} (la gamme effective de l'intégrale-J, équation 24), est calculé.

équation 24:

$$\Delta J_{eff} = \frac{(U\Delta K)^2}{E'} \left\{ 1 + \frac{Y^2}{C_2} \left(\frac{n-1}{n+1} \right) \left[\frac{(\sigma_{\infty}^{\max} / \sigma_0)^2}{1 + (\sigma_{\infty}^{\max} / \sigma_0)^2} \right] \right\} + 4\alpha\sigma_0\varepsilon_0 ah_1 U \left(\frac{\Delta\sigma_{\infty}}{2\sigma_0} \right)^{n+1}$$

où ΔK est la gamme de la valeur nominale du facteur d'intensité de contrainte = $K_{\max} - K_{\min}$, Bruzzi M.S. et McHugh P.E. [22] ne prennent pas en considération ΔK_{eff} car il s'agit de petites fissures et négligent la zone plastique même si d'autres auteurs

[22], cités par ces derniers, assument que l'intégrale- J , qui est une approche du défaut toléré dans la structure, caractérise le comportement élastique-plastique de la croissance de la fissuration par fatigue ; $U = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{open}}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}} = \frac{\Delta K_{eff}}{\Delta K}$ est le rapport de la gamme des contraintes effectives ; σ_{open} est la contrainte pour laquelle la surface de la fissure devient complètement séparée durant le chargement ; $\sigma_{open} \geq \sigma_{\min}$ dû à la fermeture de la fissure ; $C_2 = 6$ pour les déformations planes ; Y est défini comme étant le terme de géométrie collective dans l'expression de K élastique $K = Y\sigma_{\infty}^{\max} \sqrt{\pi a}$; σ_{∞}^{\max} la valeur maximale du champ étendu de contrainte, a est la longueur de la fissure ; $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$ est le module élastique effectif, E le module de Young, ν est le coefficient de poisson ; les coefficients α , ε_0 , et σ_0 et l'exposant de durcissement n sont les paramètres de la relation constitutive de Ramberg-Osgood; h_1 est un facteur sans dimension.

Zhang J.Z. *et al.*[23], ont utilisé l'analyse élastique-plastique par la méthode des éléments finis pour des fissures sous chargement en mode I dans de petite et large échelle. La taille de la zone plastique du bout de la fissure, le profil de l'ouverture de la fissure et la distribution de la déformation plastique en avant du bout de la fissure pour des petites fissures, 0,1 mm, et pour des longues fissures, 0,2, 0,4, 1 et 2 mm, ont été étudiés. L'analyse montre que la taille de la zone plastique du bout de la fissure, la déformation plastique du bout de la fissure et les déplacements d'ouverture du bout de la fissure sont plus grands pour les petites fissures que pour les longues fissures, pour le même niveau du facteur d'intensité de contrainte nominale. L'étude expérimentale [23] de la croissance des petites et longues fissures pour l'alliage d'aluminium ultra fin IN9052, montre que les petites fissures se propagent plus vite que les longues fissures,

par fatigue, pour la même gamme du facteur d'intensité de contrainte. Cependant, si les taux de croissance des petites et longues fissures par fatigue sont corrélés à la taille de la zone plastique, alors leurs valeurs tombent dans le même intervalle. Le critère de déformation utilisé dans ce programme est celui de Von Mises et la règle de l'écoulement utilisée dans la relation Prandtl-Ruess, selon la référence [23]. En se basant sur l'analyse en éléments finis, Zhang J.Z. *et al.*[23] ont développé l'équation 25 pour décrire la propagation maximale de la taille de la zone plastique :

équation 25:

$$r_{\max} = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 + 2.5 \left[\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{ys}} \right]^2 + 4 \left[\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{ys}} \right]^4 \right\} \left[\frac{K_{\max}}{\sigma_{ys}} \right]^2, \text{ pour } 0 < \sigma_{\max} < 0.9\sigma_{ys}$$

où σ_{\max} est la valeur maximale de la contrainte appliquée, σ_{ys} est la limite d'élasticité conventionnelle et K_{\max} la valeur maximale du facteur d'intensité de contrainte. Lorsque le niveau maximale de la contrainte appliquée est faible comparé à la limite d'élasticité conventionnelle, σ_{ys} , du matériau, les deux termes contenant σ_{\max} peuvent être ignorés et l'équation 25 devient :

équation 26:
$$r_{\max} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{K_{\max}}{\sigma_{ys}} \right]^2$$

L'équation 26 constitue la relation d'Irwin, basée sur les distributions de contrainte élastique en avant du bout de la fissure [23]. L'équation 26 s'applique uniquement lorsque la longueur de la fissure et la contrainte appliquée sont basses. En contraste par rapport à d'autres modèles de la prédiction de l'endurance d'une pièce qui ont été basés sur des lois de type Paris, de-Andréas A. *et al.*[24], ont utilisé une loi de l'élément

cohésive. Dans cette approche, la création de nouvelles surfaces est le résultat final d'un processus de perte graduelle de l'élasticité lorsque la séparation augmente. Dans le cadre général, de-Andréas A. *et al.*[24] ont considéré qu'un corps occupant une configuration initiale $B_0 \subset R^3$. Le corps subit la transformation $\varphi : B_0 \times [0, T] \rightarrow R^3$, où $[0, T]$ est l'intervalle de temps écoulé. Considérant \mathbf{F} le gradient de déformation et \mathbf{P} le premier tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff. de-Andréas A. *et al.*[24] ont supposé qu'une surface cohésive S_0 , de vecteur unitaire normal \mathbf{N} traverse le corps. Cette surface divise le corps en deux sous corps $B_{0\pm}$ avec une couche positive et une couche négative. La puissance communiquée au corps par la force de volume $\rho_0 \mathbf{b}$ et la force de traction frontalière \mathbf{t} est :

$$\text{équation 27: } \dot{W} = \sum \int_{B_{0\pm}} \rho_0 \mathbf{b} \varphi dV_0 + \sum \int_{\partial B_{0\pm}} \mathbf{t} \varphi dS_0$$

la force de volume s'exerce sur le corps au complet de masse volumique ρ_0 et la force de volume frontalière est une tension surfacique s'exerçant sur le contour $\partial B_{0\pm}$ du domaine $B_{0\pm}$. La somme \sum , se fait sur les deux parties du corps formées lorsque la surface cohésive S_0 le traverse. Le modèle de l'élément cohésif est couplé avec la loi de Miner, théorie de la fatigue des matériaux gouvernée par le dommage cumulatif, pour déterminer la durée de vie. de-Andréas A. *et al.*[24] ont conclut que l'élément cohésif gouverne la séparation des flancs de la fissure qui en accord avec la loi cohésive irréversible, éventuellement amenant à la formation de surfaces libres, compatible avec la discrétisation en éléments finis conventionnelle de la majeure partie du matériau. Ce qui est attrayant dans cette théorie, selon de-Andréas A. *et al.*[24] c'est qu'elle ne présuppose pas une réponse particulière des réponses constitutives du matériau,

l'étendue de la croissance de la fissure ou la taille de la zone plastique. La forme et la location des fronts des fissures sont des résultats des calculs [24].

Visvanatha S.K. *et al.*[25, 26, 27] ont utilisé des méthodes de prédiction de la déformation incluant la règle de Neuber dans sa forme originale et sa forme généralisée, la méthode de la densité d'énergie de déformation équivalente et l'analyse en élément finis utilisant le code Abaqus. Selon les références [25] et [28] Neuber avait montré que pour un corps prismatique subissant une déformation par cisaillement avec une loi contrainte/déformation non linéaire arbitraire, la moyenne géométrique de la contrainte et des facteurs de concentration de déformation K_σ et K_ε est égale au facteur de concentration de contrainte théorique, K_t :

$$\text{équation 28: } K_t^2 = K_\sigma K_\varepsilon$$

où K_σ est le rapport de la contrainte fondamentale σ et la section nette S de la contrainte nominale. K_ε est le rapport de la déformation fondamentale d'entaille ε et la section nette e de la déformation nominale. Ainsi la loi de Neuber s'écrit :

$$\text{équation 29: } \sigma\varepsilon = K_t^2 S e$$

généralement la loi de Neuber s'écrit en terme de gamme de contrainte et de déformation :

$$\text{équation 30: } \Delta\sigma\Delta\varepsilon \cong \frac{(K_t\Delta S)^2}{E}$$

le terme de droite de l'équation 30 est calculé pour trouver $\sigma\varepsilon$ et après σ est déterminé à partir de la courbe $\sigma\varepsilon$ versus σ qui dérive du diagramme cyclique déformation/contrainte. Visvanatha S.K. *et al.*[25] rapporte que Neuber a développé

son travail original pour un profil d'entaille hyperbolique sous un cisaillement monotone bidimensionnel mais a donné aussi des suggestions pour généraliser la formulation pour les états de contraintes arbitraires, comme le modèle de Hoffmann et Seeger.

Une autre relation approximative a été envisagée par Visvanatha S.K. *et al.*[25, 29] en l'occurrence la densité d'énergie de déformation équivalente (*DEDE*) pour remplacer la règle de Neuber, proposée par Molski et Glinka. Dans cette approche, on suppose que la densité d'énergie de déformation au niveau de l'entaille fondamentale ne change pas significativement si la plasticité locale est entourée par un domaine élastique prédominant. Autrement dit, le calcul de la densité d'énergie de déformation au niveau de l'entaille principale produit les mêmes résultats pour la loi des matériaux élastiques et élastiques-plastiques. La relation (*DEDE*) à la forme suivante :

$$\text{équation 31: } \frac{1}{2} \frac{(K_t S)^2}{E} = \int_0^\varepsilon \sigma_{(\varepsilon)} d\varepsilon$$

où E est le module élastique, $\sigma_{(\varepsilon)}$ est la contrainte de l'entaille fondamentale qui est une fonction de la déformation de l'entaille fondamentale ε . Le membre gauche de l'équation 31 est évalué en utilisant une technique intuitive pour trouver un point sur la courbe cyclique, déformation-contrainte. Visvanatha S.K. *et al.*[25] Glinka *et al.* rapportent que le modèle (*DEDE*) est supérieur à la règle de Neuber lorsqu'on veut prédire les déformations et les contraintes élastiques-plastiques de l'entaille. Il a été suggéré que les estimations faites à partir du modèle (*DEDE*) de Glinka et la règle de Neuber, vont donner les bornes inférieures et supérieures de la déformation locale qui peuvent être utilisées pour coller avec la prédiction de l'endurance [25]. Visvanatha

S.K. *et al.* [25], ont prédit la durée de vie par la méthode de la déformation locale pour deux lots d'alliages d'aluminium 7050-T7451, un avec un bas K_t de 1,4 (*S.I*) et l'autre avec un haut K_t de 3,25 (*S.I*), sous deux différents spectres de chargement. Les comparaisons montrent que la technique d'estimation de la déformation influence légèrement la précision de la prédiction comparée aux données expérimentales. Les mêmes chercheurs [25] ont aussi trouvé une différence significative dans la précision relative de la prédiction entre les lots à haut K_t et ceux dont les valeurs de K_t sont basses. Cette différence a été attribuée aux différentes proportions de temps utilisées dans l'initiation et la propagation de la fatigue pour les deux lots. D'autres chercheurs [30, 31, 32, 33] ont pris en considération les contraintes résiduelles. Les contraintes résiduelles apparaissent lorsque les pièces sont obtenues par moulage, forgeage, travail à chaud, coulage. Ces contraintes sont d'origine mécanique ou thermique. Dans l'analyse de rupture, les contraintes résiduelles sont souvent comme principale cause de bris. La réduction des contraintes résiduelles se fait généralement par un traitement thermique ou par la méthode de relaxation par vibration. Les contraintes résiduelles, d'origine mécanique, en compression sont bénéfiques [5], lors du phénomène de fatigue, cependant elles peuvent aussi endommager la pièce lorsque les efforts de traction sont très importants. Généralement les modèles empiriques de fatigue tiennent compte indirectement des contraintes résiduelles, contrairement aux modèles numériques qui modélisent de tel paramètre.

2.2 Calcul numérique par la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis (MEF) est préconisée, car c'est un puissant moyen de résolution des équations aux dérivées partielles [34]. Deux cas peuvent se présenter pour l'application des éléments finis :

- a- le premier cas, il existe une forme intégrale du problème physique à résoudre : ce peut être une fonctionnelle résultant d'un principe variationnel, dont le minimum correspond à la solution recherchée, comme en élasticité ou en viscoplasticité, ou plus généralement une équation intégrale à résoudre ;
- b- dans le second cas une formulation intégrale doit être obtenue à partir du système d'équations aux dérivées partielles initiales au moyen d'une formulation faible, appelée aussi méthode des résidus pondérés.

La méthode des éléments finis (MEF) se distingue par le caractère plus général de sa formulation : aptitude à représenter des géométries plus complexes, possibilité d'utiliser des maillages non structurés, imposition plus naturelle des conditions aux limites. Actuellement les connaissances sont restreintes au niveau des études des alliages légers d'aluminium et de magnésium par la MEF pour prédire la fissuration par fatigue dans les pièces mécaniques utilisées dans l'industrie automobile. Cette étude va l'enrichir entre autre par l'utilisation des méthodes statistiques plus précises et les méthodes numériques (MEF) pour modéliser le phénomène de fissuration par fatigue, concernant les métaux légers en l'occurrence les alliages d'aluminium et de magnésium. L'analyse par la MEF est réalisée grâce au code fourni dans l'un des logiciels spécifiques de l'université du Québec à Chicoutimi, en l'occurrence le logiciel Abaqus.

Abaqus/CAE peut être utilisé pour créer un modèle d'analyse complet. Abaqus/Standard ou Abaqus/explicit éditent le fichier «Abaqus-Input file » généré par

Abaqus/CAE, exécutent les analyses et envoient les informations à Abaqus/CAE pour contrôler la simulation et générer une base de donnée de sortie (output database). Abaqus/CAE permet aussi de visualiser les erreurs dans le modèle lorsqu'elles existent. Abaqus/Standard et Abaqus/Explicit sont capables de résoudre une large variété de problèmes. Les caractéristiques des procédures implicites et explicites déterminent quelle méthode appropriée pour chaque problème. Pour ces problèmes qu'on peut traiter avec l'une ou telle méthode, l'efficacité avec laquelle le problème peut-être résolu détermine la méthode à utiliser. Le tableau 4 résume les différences clefs entre ces procédures [35].

2.3 Étude spectrale de la fatigue due aux chargements aléatoires :

Soit une pièce mécanique soumise à une contrainte $\sigma(t)$ variable dans le temps. Cette contrainte variable produit, même si elle ne dépasse pas la limite d'élasticité du matériau, un endommagement par fatigue. Le but du concepteur est de dimensionner la section de cette pièce de façon à éviter la rupture en fatigue pendant la durée de service. L'approche développée dans ce cadre est traditionnellement temporelle, c'est-à-dire basée sur l'historique de la contrainte. Cette approche repose sur des variables telles que l'amplitude et la valeur moyenne des cycles parcourus par la contrainte $\sigma(t)$ pendant la séquence de chargement [36]. Cependant, la fatigue peut également être provoquée par des vibrations et le problème de calcul de durée de vie peut demander l'étude de la réponse dynamique des structures à des excitations périodiques ou aléatoires. La réponse dans ce cas, est alors donnée dans le domaine fréquentiel. Ainsi, des méthodes alternatives de calcul de durée de vie à partir de la densité spectrale de puissance de la contrainte $\sigma(t)$ ont alors été développées. Toutes ces approches approximent les

résultats obtenus par la méthode temporelle basée sur le comptage « rainflow » des cycles.

tableau 4. Différences clefs entre Abaqus/Standard et Abaqus/Explicite.

Entité	Abaqus/Standard	Abaqus/Explicite
Librairie.	Offre une vaste librairie.	Offre une vaste librairie qui convient mieux pour les analyses explicites. Les éléments disponibles sont un sous-ensemble de ceux disponibles dans Abaqus/Standard.
Procédures d'analyses.	Procédures générales et perturbation linéaire sont disponibles.	Procédures générales sont disponibles.
Modèles de matériau.	Offre une large gamme de modèles de matériau.	Similaire à ceux qui existent dans Abaqus/Standard, avec une différence notable qui est la présence du modèle de fissuration des matériaux.
Formulation des problèmes de contacts.	Robuste dans la résolution des problèmes de contacts.	A des fonctionnalités de contact robustes qui peuvent résoudre facilement même des simulations de contact complexes.
Technique de solution.	Utilise les techniques de solution rigide inconditionnellement stable.	Utilise la technique de solution par intégration explicite qui est conditionnellement stable.
Mémoire et capacité de l'ordinateur à calcul.	Dû au grand nombre d'itérations possibles lors de l'incrément, la mémoire utilisable peut être large.	Espace du disque et la mémoire de l'ordinateur sont typiquement plus petits que ceux dans le cas de Abaqus/Standard.

a- Cumul du dommage :

Lorsque les chargements se composent de différents cycles de différentes amplitudes et de différentes valeurs moyennes, il faut mesurer l'endommagement total produit par ces cycles. Selon la référence [36], Fatemi et Yang présentent une revue

complète des lois de cumul du dommage qui ont été développées depuis la règle de cumul linéaire proposée par Palmgren en 1924. Il n'existe pas encore de loi de cumul universellement acceptée. Par conséquent, la simple loi de cumul linéaire est encore largement utilisée en raison de sa simplicité. La formulation mathématique sous laquelle elle est actuellement connue a été proposée par Miner en 1945 et elle s'exprime selon l'équation 32:

$$\text{équation 32 : } D = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i}$$

L'historique de la contrainte est décrite comme une séquence de blocs d'amplitude constante. Chaque bloc i est composé de n_i cycles d'amplitudes σ_i . La durée de vie N_i correspondant à cette amplitude de la contrainte est déterminée à partir de la courbe de Wöhler. L'amorçage est théoriquement prédit lorsque le dommage D est égal à 1. Le "dommage" D tel qu'il est défini dans l'approche macroscopique, par Xavier Pitoiset [36], est un instrument d'étude situant la pièce par rapport à sa durée de vie estimée. Malgré que la loi de cumul linéaire de Palmgren-Miner néglige de nombreux phénomènes observés expérimentalement, elle semble toutefois donner de bonnes estimations de durée de vie lorsque les chargements suivent des processus aléatoires stationnaires.

c- Méthode « rainflow » de comptage des cycles :

Les chargements réels sont généralement plus complexes. Qu'ils soient d'amplitude variable ou qu'ils soient décrits par des processus aléatoires (gaussiens, par exemple), l'application de la démarche nécessite l'utilisation d'une méthode de comptage de cycles, permettant de décomposer le chargement en cycles élémentaires

dont l'amplitude et la valeur moyenne, sont connues. Xavier Pitoiset [36] ajoute que pour identifier des cycles à partir de l'historique de la contrainte, la méthode de comptage rainflow, proposée par Matsuishi et Endo, est considérée, depuis l'étude de Dowling, comme celle menant à des prédictions de durée de vie les plus proches de la réalité. En plus, différents algorithmes ont été présentés dans la littérature, voir Downing et Socie, Amzallag *et al.*, conformément à la référence [36].

La procédure de comptage proposée est basée sur la méthode dite des quatre points présentée à la figure 2. Physiquement, une boucle fermée dans le plan contrainte-déformation $\sigma - \varepsilon$ est décrite pour chaque cycle rainflow extrait de l'historique de la contrainte.

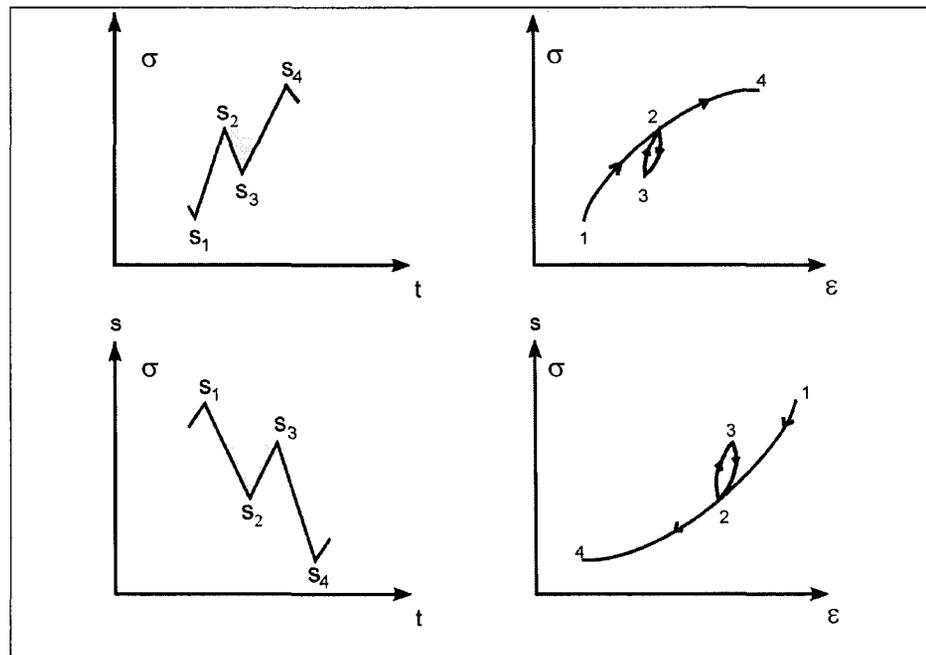


figure 2. Définition d'un cycle « Rainflow » [36].

La décomposition du signal se déroule en plusieurs étapes :

1^{ère} étape : L'historique de la contrainte, ou signal, est réduit à une séquence de maxima et minima locaux, appelée processus des extrema.

2^{ème} étape : Les quatre premiers points successifs $s_1 (\sigma_1)$, $s_2 (\sigma_2)$, $s_3 (\sigma_3)$ et $s_4 (\sigma_4)$ sont examinés, ces quatre points forment trois étendues $\Delta s_{1,2,3} = \Delta \sigma_{1,2,3}$ qui sont calculées de la façon suivante :

$$\text{équation 33 : } \Delta \sigma_1 = |\sigma_2 - \sigma_1|; \Delta \sigma_2 = |\sigma_3 - \sigma_2|; \Delta \sigma_3 = |\sigma_4 - \sigma_3|$$

3^{ème} étape : si $\Delta \sigma_2 \leq \Delta \sigma_3$ et $\Delta \sigma_2 \leq \Delta \sigma_1$, le cycle rainflow défini par le couple d'extrema (s_2, s_3) , montré dans la figure 2 par la zone grise, est extrait du signal et son amplitude est défini par :

$$\sigma_a = \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \text{ et sa valeur moyenne est donnée par : } \sigma_m = \frac{|\sigma_2 + \sigma_3|}{2}. \text{ } s_2 \text{ et } s_3$$

sont éliminés du signal, s_1 est raccordé à s_4 .

4^{ème} étape : sinon, le rang des quatre points est incrémenté d'une unité et le test précédant est repris.

5^{ème} étape : ce traitement est répété jusqu'au dernier point de la séquence des extrema. Suite à cette procédure, certains points du signal n'ont pas été extraits. Ils forment un résidu, qui est un signal dont les étendues vont en croissant puis en décroissant. Le maximum et le minimum de la séquence de départ se trouvent dans ce résidu, formant ainsi la plus grande étendue observée sur la séquence considérée. L'effet de ce résidu est par conséquent non négligeable, c'est pourquoi il est nécessaire de le décomposer en cycles élémentaires [36]. Ainsi, une nouvelle séquence de chargement est formée à

partir du résidu, à la suite duquel est ajouté une nouvelle fois ce même résidu. De nouveaux cycles peuvent alors être extraits en appliquant la procédure précédente. L'ensemble de la décomposition est alors terminé.

Le même auteur [36] ajoute qu'en pratique, il est possible de discrétiser les niveaux de contrainte en définissant n classes d'amplitudes. Chaque cycle « rainflow » $(j; k)$ est une transition d'un extremum de niveau j (classe de départ) à un extremum de niveau k (classe d'arrivée), il peut alors être stocké dans une matrice « rainflow » $R = r(j; k)$ de dimension $n \times n$ dite classe de départ – classe d'arrivée. Le calcul du dommage à partir de cette matrice « rainflow » est alors facilement réalisé à partir de la courbe de Wöhler, du diagramme de Haigh et de la loi de cumul de Palmgren-Miner.

Les méthodes de calcul de durée de vie en fatigue ont traditionnellement été développées dans le domaine temporel. Toutefois, lorsqu'une structure est soumise à des vibrations aléatoires, le calcul de sa réponse dynamique à partir d'un modèle en éléments finis, est souvent réalisé dans le domaine fréquentiel. La contrainte aléatoire est alors donnée sous forme de densité spectrale de puissance (power spectral densities, en anglais, notées PSD dans la suite du texte). Le comptage des cycles « rainflow » par l'algorithme de Markov est préconisé.

c- Méthode de Markov :

Le problème du passage direct de la PSD du processus $\sigma(t)$ au comptage des cycles « rainflow » a ensuite été résolu par une théorie rigoureuse basée, d'une part, sur la définition d'un cycle « rainflow » proposée en 1987 par Rychlik et d'autre part, sur la théorie des chaînes de Markov comme rapporté par la référence [36]. En effet, un cycle « rainflow », tel qu'il est illustré par la figure 3, peut être mathématiquement caractérisé de la façon suivante: Considérons la contrainte $\sigma(t)$ où $t \in [0, T]$ et le maximum de la

contrainte M_i de niveau k se produisant au temps t_i . Nous pouvons définir les étendues (m_i^-, M_i) et (M_i, m_i^+) où:

- m_i^- est le minimum de $\sigma(t)$ qui se trouve entre le dernier passage à pente négative de $\sigma(t)$ par le niveau k et le maximum M_i . Ce minimum se trouve à gauche de M_i et se produit au temps t_i^- .
- m_i^+ est le minimum de $\sigma(t)$ qui se trouve entre M_i et le premier passage à pente positive de $\sigma(t)$ par le niveau k . Ce minimum se trouve à droite de M_i et se produit au temps t_i^+ .

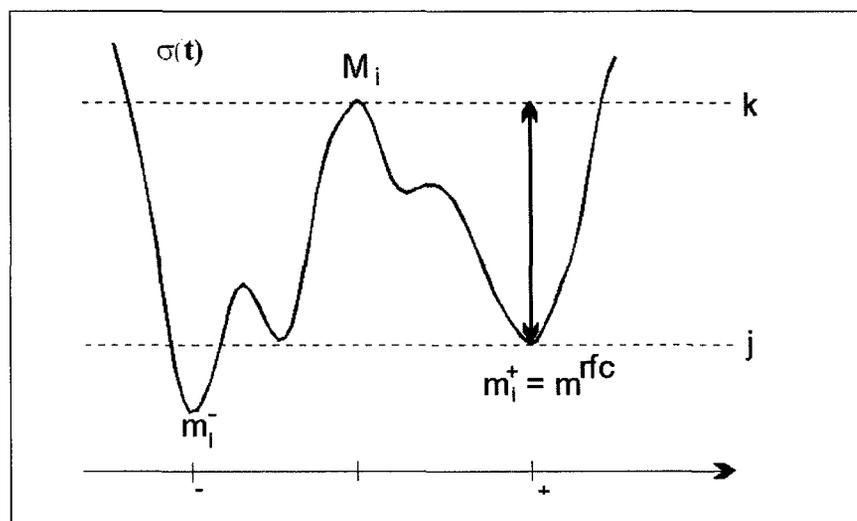


figure 3. Caractérisation mathématique d'un cycle rainflow [36].

S'il n'existe pas de passage de $\sigma(t)$ par le niveau k avant ou après le temps t_i , alors respectivement $t_i^- = 0$ ou $t_i^+ = T$. Le cycle rainflow extrait au temps t_i est alors défini, soit comme l'étendue (m_i^{rfc}, M_i) , soit (M_i, m_i^{rfc}) . Ce minimum m_i^{rfc} est déterminé en appliquant la condition :

$$\text{équation 34 : } m_i^{rc} = j = \begin{cases} \max(m_i^-, m_i^+) & \text{si } t_i^- > 0 \\ m_i^+ & \text{sinon} \end{cases}$$

Ensuite, nous supposons que le processus des extrema peut être modélisé par une chaîne de Markov. La contrainte est alors discrétisée en un nombre M de niveaux, le processus des extrema devient alors un processus discret. Si n_{jk} représente le nombre de transitions arrivant à un extremum de niveau k partant d'un extremum de niveau j , la probabilité conditionnelle t_{jk} d'observer une transition vers un niveau k sachant que l'extremum précédent est de niveau j peut s'écrire :

$$\text{équation 35 : } t_{jk} = \frac{n_{jk}}{\sum_{m=1}^M n_{jm}}$$

Le nombre de transitions peut être observé sur une réalisation du processus $\sigma(t)$, mais également être déterminé théoriquement à partir d'une PSD.

2.4 Dynamique d'un système de suspension d'un véhicule :

Dans la présente étude, nous nous intéressons au côté théorique des vibrations et son application dans l'industrie automobile, car les pièces de l'automobile subissent des efforts dynamiques et vibratoires très importants. Ces efforts dynamiques et vibratoires conduisent, avec le temps, à la fatigue du matériau constituant les pièces en question, et causent leur rupture. La connaissance du mode d'action de ces efforts et de l'interaction entre eux, étant donné que ces efforts interviennent dans les quatre quarts de l'automobile, permet de prédire la durée de vie de ces pièces.

L'approche variationnelle de la mécanique repose sur les concepts d'énergie et de travail. Elle permet ainsi une compréhension beaucoup plus profonde des phénomènes en jeu. En même temps, elle est un outil de travail très performant, pour deux raisons :

- elle facilite l'écriture analytique des équations du mouvement d'un système complexe,
- elle conduit à des méthodes numériques approchées pour le calcul des systèmes continus.

Un système amorti, qui représente le cas naturel étant donné qu'il tient compte de la dissipation d'énergie par frottement (même pour une déformation élastique) avec le milieu ambiant ou au sein des matériaux déformés. Les mécanismes d'amortissement sont caractérisés par une expression relativement simple des efforts retardateurs agissant sur les mouvements. On distingue ainsi :

- le frottement solide, ou de coulomb, à réaction sensiblement constante et indépendante des vitesses des déplacements,
- le frottement visqueux, où l'effort retardateur est proportionnel aux vitesses des déplacements,
- l'amortissement hydraulique, enfin, qui agit en proportion du carré de ces mêmes vitesses.

La figure 4 montre une représentation du système de suspension d'un quart de véhicule en mode vertical.

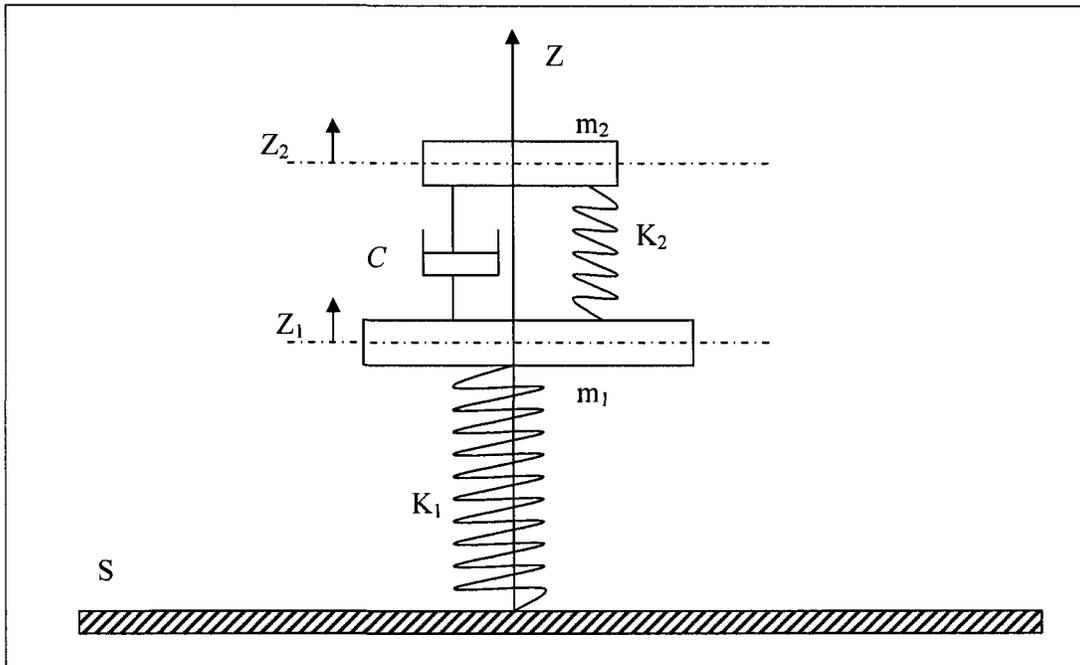


figure 4. Représentation d'un système de suspension.

m_2 = masse du reste du véhicule, m_1 = masse du pneu,
 c = la coefficient d'amortissement de l'amortisseur,
 k_1 = la constante de raideur du pneu,
 k_2 = la constante de raideur du ressort, S = support vibrant.

L'amortisseur, de coefficient c , joue sur la différence des vitesses

$\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt} = \dot{z}_1 - \dot{z}_2$ des mouvements des deux masses en exerçant sur la première

masse m_1 l'action $-c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)$ et l'autre masse m_2 la force $-c(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)$. On peut

introduire les équations du mouvement des deux masses par l'équation de Lagrange :

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_s} = Q_s$ en considérant ces forces comme des forces généralisées de type

Q_s . Les équations du mouvement sont :

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + (k_1 + k_2)z_1 - k_2 z_2 + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + k_2(z_2 - z_1) + c(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

On pose :

$$\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}, \omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1} = \lambda\omega_2^2, \omega_3^2 = \frac{k_2}{m_1} = \mu\omega_2^2, 2\varepsilon\omega_2 = \frac{c}{m_2},$$

$$\text{d'où : } \frac{c}{m_1} = \frac{c}{m_2} \cdot \frac{m_2}{m_1} = 2\mu\varepsilon\omega_2$$

on voit que ε définit le taux d'amortissement relatif au système secondaire

$$\varepsilon = \frac{c}{c_{crit}} = \frac{c}{2\sqrt{k_2 m_2}} \text{ on aboutit à l'expression suivante :}$$

$$\text{équation 36: } \left. \begin{aligned} \ddot{z}_1 + 2\mu\varepsilon\omega_2 \dot{z}_1 + (\mu + \lambda)\omega_2^2 z_1 - 2\mu\varepsilon\omega_2 \dot{z}_2 - \mu\omega_2^2 z_2 &= 0 \\ \ddot{z}_2 + 2\varepsilon\omega_2 \dot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 - 2\varepsilon\omega_2 \dot{z}_1 - \omega_2^2 z_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Selon M.A. Julien [37], des solutions de ce système sont de la forme :

$z_1 = Ae^{pt}$ et $z_2 = Be^{pt}$. On substitue ces solutions dans le système de l'équation 36 et

faisant un changement de variable $p = \varpi\omega_2$, où ϖ est un nombre sans dimension, on

obtient un système d'équations en A et B de déterminant $\Delta(\varpi)$.

2.5 Les fréquences propres des structures et résonance :

Tout système possédant une masse et de l'élasticité, est capable de vibrer librement avec ou en absence des excitations externes. Le système en question, a par conséquent ses fréquences naturelles de vibrations. Il est donc nécessaire d'élaborer ses équations de mouvement et évaluer ses fréquences naturelles qui sont principalement une fonction de la masse et la raideur du système. L'amortissement en quantité modérée a peu d'influence sur les fréquences naturelles, peut-être négligé dans les calculs [38]. L'effet de l'amortissement est principalement évident dans la diminution de l'amplitude des vibrations avec le temps. Ainsi lors du design d'un système

mécanique, soumis en service à des sollicitations aléatoires, on doit prendre en considération en plus de sa durée de vie, le phénomène de résonance car le spectre des sollicitations aléatoires doit être loin des fréquences naturelles du système mécanique en question.

Le modèle de base d'un système oscillatoire consiste en une masse, un ressort et un amortisseur. Le ressort supportant la masse est supposée avoir une masse négligeable. La relation entre la force et la déflexion du ressort est considérée comme linéaire, suivant la loi de Hooke, $F = kx$, où k est la constante de raideur du ressort en N/m. L'amortissement visqueux, généralement représenté par un amortisseur, est décrit par une force proportionnelle à la vitesse où $F = c\dot{x}$. Le coefficient d'amortissement c est mesuré en N.s/m.

2.5.1 Équation de mouvement : Fréquences naturelles :

Une masse reliée à un ressort suspendu est un simple système non amorti, qui se déplace dans la direction verticale. Ce système a un seul degré de liberté (DOF), car son mouvement est décrit par une seule coordonnée x . Lorsque le système est en mouvement, des oscillations prennent naissance à des fréquences naturelles qui sont propres au système. La déformation du ressort à l'équilibre statique est Δ et la force du ressort est $F = k\Delta$ qui égale au poids w de la masse :

$$F = k\Delta = w = mg \text{ où } g \text{ est l'accélération de l'apesanteur.}$$

En mesurant le déplacement x à partir de la position d'équilibre, les forces qui agissent sur la masse m sont $k(\Delta + x)$ et $w = mg$ (x , \dot{x} et \ddot{x} sont choisis positifs vers le bas).

Sachant que, $k\Delta = w = mg$, la deuxième loi de Newton nous permet d'écrire :

$$\text{équation 37: } m\ddot{x} = \sum F = -k(x) \Rightarrow m\ddot{x} + k(x) = 0$$

En définissant la fréquence circulaire ω_n par : $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$, l'équation 37 peut s'écrire comme suit :

$$\text{équation 38: } \ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$$

L'équation 38 montre que le mouvement de la masse est harmonique. C'est une équation différentielle linéaire homogène de second ordre qui a pour solution générale :

$$x = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + x(0) \cos(\omega_n t).$$

La période naturelle des oscillations est établie à partir de $T\omega_n = 2\pi$ où $T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}}$

et la fréquence naturelle est :

$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Le cas d'une poutre de masse négligeable devant le poids d'une masse M est à signaler pour mettre en évidence la notion de rigidité d'une poutre. Pour une poutre encastrée de masse négligeable au bout de son extrémité chargé d'une masse M , la déflexion x de la poutre soumis au poids P de la masse M à son extrémité est :

$$x = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{P}{k} \text{ où } EI \text{ est la rigidité flexurale.}$$

Ainsi, la constante de raideur de la poutre devient : $k = \frac{3EI}{l^3}$ et la fréquence naturelle du système est :

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{Ml^3}}$$

2.5.4 Analyse fréquentielle des structures complexes :

Athanasios C. *et al.* [39], ont utilisé les changements dans les fréquences naturelles pour identifier les fissures multiples dans une poutre sous flexion. En effet, identifier une fissure c'est trouver sa position et sa profondeur. Dans la majorité des cas il existe plusieurs fissures dans une seule poutre. Chaque fissure est caractérisée par sa profondeur, position et l'angle relatif. Toutes les fissures sont supposées rester dans des positions angulaires arbitraires par rapport à l'axe longitudinal de la poutre et à chaque position du coté gauche. Une matrice locale de coefficient, de degré de liberté et flexion dans le plan vertical et horizontal, est utilisée pour modéliser les fissures transversales de rotation dans la gaine et elle est calculée sur la base des expressions des facteurs d'intensité de contrainte et des expressions associées des taux d'énergie de déformation dégagée. Lorsqu'une fissure existe dans une structure, comme le cas d'une poutre, les fréquences naturelles des vibrations diminuent. Cette réduction dans les valeurs des fréquences naturelles a été étudiée pour six paramètres indépendants principalement ; la profondeur, la position et l'angle de rotation de chaque fissure. À cause de la sensibilité dans les changements des déplacements ou des pentes, la théorie des ondelettes identifie les positions des fissures réduisant ainsi le nombre de paramètres indépendants. Les mêmes auteurs [39] ajoutent que les transformations par les ondelettes des vibrations propres ou des réponses vibratoires de la structure sous certaines circonstances, peuvent être utilisées pour localiser les fissures. En introduisant les fréquences propres dans les équations caractéristiques, les modes propres sont obtenus et présentés dans les lieux intacts et multi fissurés de la gaine. Comme les modes propres présentent une discontinuité de la pente à chaque lieu de la fissuration, cette propriété est utilisée pour localiser les fissures.

N.G Stephen et Y. Zhang [40] ont étudié une structure de poutre répétitive, au point de vue vibration et chargement en couplage torsion-tension. Les propriétés équivalentes de raideur continue dérivées de l'analyse aux valeurs propres d'une seule cellule d'une structure de poutre répétitive plane, ont été utilisées auparavant dans les théories dynamiques, comme Euler-Bernoulli et Timoshenko pour les vibrations flexurales, modifiées convenablement, pour prédire les fréquences naturelles des vibrations. Ces mêmes auteurs [40] ont utilisé la théorie dynamique torsion-tension de Di Prima. Cette approche, combinaison de structure périodique et un continuum substituant, donne une bonne correspondance avec les prédictions à partir de la méthode des éléments finis MEF, spécialement pour les faibles modes des vibrations. Ces résultats sont à $\pm 1\%$ éloignés de ceux de la MEF pour les basses fréquences naturelles 8-10 pour les plus longues (30 cellules ont été considérées dans ce cas, et la majorité des modes ont été pris en torsion), et à $\pm 1\%$ pour les modes les plus bas 4-5, les plus courts (dix cellules).

Un couplage torsion-flexion fut l'objet d'une étude menée par H. Salarieh et M. Ghorashi [41] sur une poutre Timoshenko sous la charge d'une masse rigide dans une des extrémités. Le centre de masse de la masse attachée ne coïncide pas obligatoirement avec le point d'attache avec la poutre. Ainsi, la poutre peut être exposée à des déformations d'origine torsion et de flexion élastique plane. Les formulations dérivant du principe de Hamilton (équations de mouvement et les conditions aux limites) ont été transformées à des formes équivalentes sans dimensions. Les résultats obtenus par H. Salarieh et M. Ghorashi [41] sont significatifs, car le modèle de la poutre Timoshenko est plus précis que le modèle de la poutre Euler-Bernoulli et peut être appliqué à des poutres fines et épaisses dans le domaine des

vibrations de basses et hautes fréquences. Ainsi, le modèle de la poutre Timoshenko permet une généralisation des résultats existant dans la littérature. Un autre cas rencontré souvent dans la littérature a été traité par E. Hamed et Y. Frostig [42]. En effet, trois cas ont été étudiés : (a) poutre pré-stressé « prestressed beam » avec un câble pré stressé « prestressed cable » (b) poutre réelle (c) câble pré stressé. Ces derniers ont proposé la formule suivante des fréquences naturelles pour une poutre compressée et suspendue axialement :

$$\text{équation 39: } \omega_n = \frac{n\pi}{L_{beam}} \sqrt{\frac{1}{m_{beam}} \left[EI \left(\frac{n\pi}{L_{beam}} \right)^2 - N \right]}$$

où EI la rigidité flexurale de la poutre, L_{beam} est sa longueur, m_{beam} est sa masse par unité de longueur, n est le numéro de mode et N est la force compressive axiale. La fréquence naturelle d'un câble sous tension T est :

$$\text{équation 40: } \omega_n = \frac{n\pi}{L_{câble}} \sqrt{\frac{T}{m_{câble}}}$$

où $L_{câble}$ est la longueur du câble, $m_{câble}$ sa masse par unité de longueur et T est l'intensité de la force de tension. L'équation 39 et l'équation 40 révèlent que si on augmente l'intensité de la force axial, la fréquence naturelle diminue dans le cas d'une poutre compressée (« compression softening ») et augmente dans le cas du câble sous tension. Selon la même source [42], Saïidi *et al.* ont déterminé les fréquences naturelles d'un pont réel pré stressé, en utilisant l'équation 39. Les résultats obtenus par ce dernier montrent qu'une augmentation de l'intensité de la force réduit les fréquences naturelles. A. Kyprianou *et al.* [43], ont résolu le problème inverse de modification des structures pour déterminer les dimensions de la section transversale de la poutre surtout lorsqu'elle est ajoutée à la structure originale, elle contrôle les fréquences naturelles ou

l'antirésonance. Dans une autre publication, ces mêmes auteurs [44] ont étudié le contrôle des fréquences naturelles en ajoutant une masse et un ou plusieurs ressorts.

2.6 Synthèse de la revue de littérature :

La revue de littérature nous a permis d'avoir une vue générale sur les travaux les plus récents dans les domaines qui sont proches du présent travail de recherche. Ainsi, nous avons pu isoler le critère de fatigue qui permet de prendre en considération l'état multiaxial des contraintes pour le coupler avec le comportement dynamique du véhicule. Le critère multiaxial de fatigue en question est décrit par la densité d'énergie de déformation liée par une relation empirique et un développement analytique et/ou numérique, à la durée de vie de la pièce N_f . Ce critère est fondé sur une base plus rationnelle que les critères purement empiriques qui sont basés sur l'observation comme la loi de Paris qui est limitée et spécifique à la propagation des fissures, la courbe de Whöler, et d'autres critères qui exigent des corrections comme la loi de Morrow lorsque la valeur moyenne du chargement est non nulle. Nous avons étudié aussi la dynamique du système de suspension d'un véhicule pour pouvoir calculer les excitations externes qui agissent sur la chaîne d'action à travers le pneu et la chaîne de retour se composant d'un ressort et d'un amortisseur. Nous avons analysé quelques publications concernant l'analyse numérique par la méthode des éléments finis avec ses principales variantes, pour identifier les conditions de convergences des schémas d'intégration numérique qui existent dans les codes commerciaux comme Abaqus. Étant donné l'aspect aléatoire de l'excitation de la route, une étude des méthodes spectrales du calcul de l'endommagement et les différentes méthodes du calcul des fréquences naturelles des structures, s'était avérée nécessaire. En effet, nous avons trouvé que la méthode de Markov dans l'extraction des cycles « rainflow », est un outil rigoureux puisqu'elle peut

être utilisée dans le domaine temporel et fréquentiel. Quand aux calculs des fréquences naturelles, nous avons fait un rappel de certains cas particuliers où les équations générales donnant les modes propres peuvent s'appliquer. En effet, nous avons conclu que les fréquences propres pour un système ayant des conditions aux limites bien déterminées, sont généralement proportionnelles à la rigidité flexurale et inversement proportionnelles à la masse.

Chapitre 3

Dynamique du véhicule

Le chapitre 3 est consacré à l'étude dynamique de la suspension du véhicule. Nous avons étudié la théorie de la dynamique du système de suspension Macpherson, suivi par le modèle du profil de la chaussée. Une analyse préliminaire de l'état des contraintes sans amortissement, est réalisée pour justifier le modèle de suspension du bras de suspension inférieur du véhicule. Le contenu du chapitre 3 est résumé dans l'organigramme de la figure 5 :

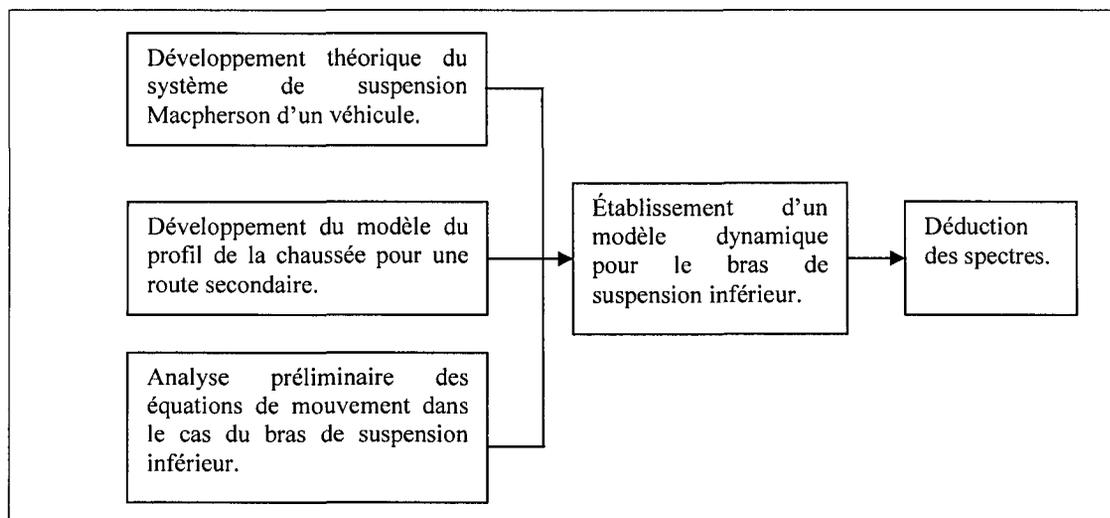


figure 5. Établissement des spectres d'excitation et de la chaîne de retour.

3.1 Étude dynamique du bras du système de suspension Macpherson :

H. Rahnejat [45] a étudié la dynamique d'un système de suspension Macpherson d'un quart de véhicule. Ce dernier considère le ressort et l'amortisseur comme un seul élément dont la constante de raideur est k_s , contrairement à M.A.Julien [37], comme illustrée dans la figure 6. En effet, H. Rahnejat [45] propose dans la figure 6 un modèle simple du système de suspension d'un quart de véhicule type Macpherson. Les éléments d'inertie m, I représentent la proportion de la masse du véhicule et l'inertie, supportés par le système de suspension du quart de véhicule. La raideur du ressort, k_s , est la raideur équivalente de l'amortisseur et du pneu dans la direction verticale OY . En effet H. Rahnejat [45] considère le ressort et l'amortisseur comme un seul élément dont la constante de raideur est k_s , contrairement à M.A.Julien [37]. XYZ est le référentiel global choisi alors que $x'y'z'$ est le référentiel d'inertie. L'articulation de l'élément d'inertie est contrainte par les conditions de pivotement entre l'essieu et le dessous du véhicule (voir figure 6-a). Ce modèle simple bidimensionnel est une forme non contraignante, introduisant trois degrés de liberté; mouvement de translation selon les deux directions X et Y et un mouvement de rotation ψ . Cependant, deux contraintes sont employées dans les directions globales X et Y pour représenter le mouvement contraint de l'élément d'inertie.

Il y a un nombre important de points pris comme des marques dans le modèle (figure 6-b) qui permettent la formulation des fonctions de contraintes. Ces fonctions sont formulées en mettant en relation les positions instantanées et l'orientation des marqueurs $\{q_i\} = f(t)$. Les marqueurs choisis dans cet exemple sont le centre de masse de l'élément d'inertie, m_1 et la location m_2 . Ils sont donnés par les vecteurs positions

$\vec{R}_{m_2}, \vec{R}_{m_1}$ par rapport au référentiel global. Le vecteur $\vec{r}_{m_1 m_2}$ donne la position instantanée du marqueur m_1 par rapport au marqueur m_2 .

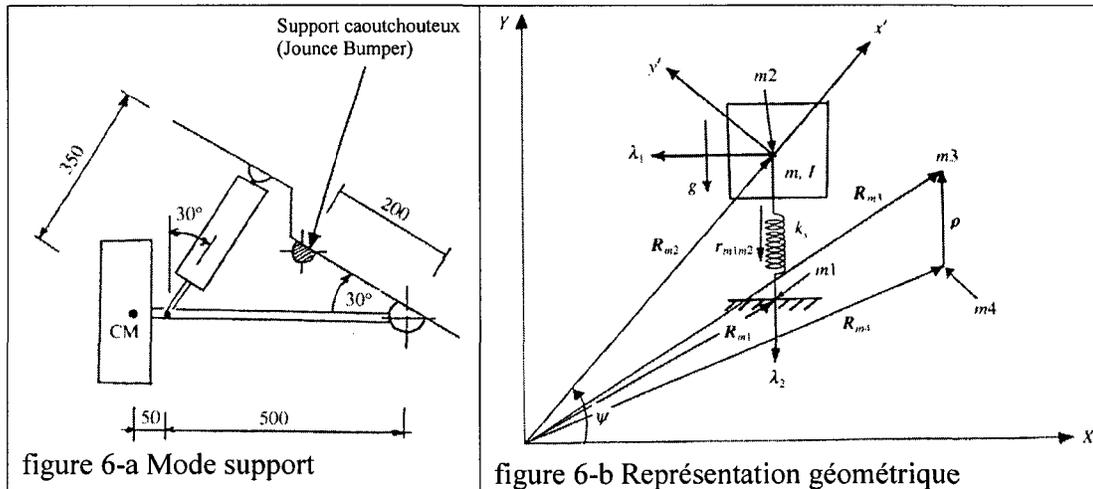


figure 6. Système de suspension d'un quart de véhicule de type Macpherson [45].

Avec les contraintes à implémenter, le mouvement de la masse m_2 est désiré être dans la direction Y .

L'énergie cinétique de la masse m est :

$$\text{équation 41: } K = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

En utilisant les équations de Lagrange, l'équation du mouvement de la masse m est :

$$\text{équation 42: } m(\ddot{y} - g) + k_s y + \lambda_2 \frac{\partial C}{\partial y} = 0$$

où C est le scalaire contrainte et λ_2 est le multiplicateur de Lagrange.

L'équation 42 de second ordre peut-être réduit en deux paires d'équations de premier ordre :

$$\text{équation 43: } \left. \begin{aligned} m(\dot{v} - g) + k_s y + \lambda_2 \frac{\partial C}{\partial y} &= 0 \\ v - \dot{y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

d'une manière similaire, selon l'axe OX :

$$\text{équation 44: } \left. \begin{aligned} m(\dot{u}) + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial x} &= 0 \\ u - \dot{x} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

la fonction de contrainte est formulée comme suit :

$$\text{équation 45: } \vec{C} = \vec{R}_{m1} - (\vec{R}_{m2} - \vec{r}_{m1m2}) = 0$$

Les vecteurs dans l'équation 44 sont connus à chaque instant dans le référentiel fixe comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \vec{R}_{m1} &= x_{m1} \vec{i} + y_{m1} \vec{j} \\ \vec{R}_{m2} &= x_{m2} \vec{i} + y_{m2} \vec{j} \\ \vec{r}_{m1m2} &= r_x \vec{i} + r_y \vec{j} \end{aligned} \right\}$$

la dépendance fonctionnelle des composantes r_x, r_y en angle de rotation d'Euler ψ est :

$$\left. \begin{aligned} r_x &= r_{x'} \cos(\psi) - r_{y'} \sin(\psi) \\ r_y &= r_{x'} \sin(\psi) + r_{y'} \cos(\psi) \end{aligned} \right\}$$

après substitution dans l'équation 45, on obtient l'équation suivante :

équation 46:

$$\vec{C} = \{x_{m1} - x_{m2} - (r_{x'} \cos \psi - r_{y'} \sin \psi)\} \vec{i} + \{y_{m1} - y_{m2} - (r_{x'} \sin \psi + r_{y'} \cos \psi)\} \vec{j} = 0$$

ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x} = \vec{C} \cdot \vec{i} &= x_{m1} - x_{m2} - (r_{x'} \cos \psi - r_{y'} \sin \psi) \\ \frac{\partial C}{\partial y} = \vec{C} \cdot \vec{j} &= y_{m1} - y_{m2} - (r_{x'} \sin \psi + r_{y'} \cos \psi) \end{aligned}$$

La dépendance fonctionnelle du vecteur \vec{r}_{m1m2} en l'angle ψ introduit l'équation du moment d'Euler conformément à l'équation 46 de liaison de contrainte, est :

$$\vec{\lambda} \cdot \frac{\partial \vec{C}}{\partial \psi} = \vec{\lambda} \cdot (\vec{k} \wedge \vec{r}_{m1m2}) = (\vec{r}_{m1m2} \wedge \vec{\lambda}) \cdot \vec{k} = \lambda_2 r_y - \lambda_1 r_x$$

$$\text{avec } \vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

L'équation du moment d'Euler est réduite aux deux paires d'équations de premier ordre :

$$\begin{aligned} I_{zz} \dot{\varpi} + \lambda_2 r_y - \lambda_1 r_x &= 0 \\ \varpi - \dot{\psi} &= 0 \end{aligned}$$

en remplaçant ces relations dans les équations de mouvement on obtient le système suivant :

$$\text{ système 1: } \left. \begin{aligned} m\dot{u} + \{x_{m1} - x_{m2} - (r_x \cos(\psi) - r_y \sin(\psi))\} \lambda_1 &= 0 \\ m(\dot{v} - g) + k_s y + \{y_{m1} - y_{m2} - (r_x \sin(\psi) + r_y \cos(\psi))\} \lambda_2 &= 0 \\ I_{zz} \dot{\varpi} + \lambda_2 (r_x \sin(\psi) + r_y \cos(\psi)) - \lambda_1 (r_x \cos(\psi) - r_y \sin(\psi)) &= 0 \\ u - \dot{x} &= 0 \\ v - \dot{y} &= 0 \\ \varpi - \dot{\psi} &= 0 \\ x_{m1} - x_{m2} - (r_x \cos(\psi) - r_y \sin(\psi)) &= 0 \\ y_{m1} - y_{m2} - (r_x \sin(\psi) + r_y \cos(\psi)) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Il y a huit inconnus; $u, v, x, y, \varpi, \psi, \lambda_1, \lambda_2$ et huit équations dans le système 1. Les deux dernières équations du système 1 contraignent les mouvements dans les directions OX et OY comme une dépendance fonctionnelle en ψ . Ceci en réalité donne un degré de liberté indépendant en terme d'angle ψ . Pour un modèle cinématique, l'angle ψ peut être exprimé comme une fonction de contrainte de mouvement telle que :

$$\text{équation 47: } \psi(t) = \frac{3\pi}{20} t$$

où le coefficient du temps, t , dans l'équation 47 représente l'angle que l'axe dans la figure 6-a pour faire une rotation durant une seconde pour que le support en caoutchouc

(« jounce bumper ») prene place. L'équation 47 et les relations de contraintes pour x et y dans le système 1 décrivent complètement le mouvement de l'élément d'inertie. Ces équations correspondent à l'analyse cinématique du modèle. Il faudrait, ainsi, observé que sous les solutions sous les conditions cinématiques aux équations du mouvement ne sont pas demandées [45]. Ceci veut dire que les contributions de l'inertie sont ignorées. Bien que une telle analyse cinématique est utile dans les modèles complexes pour observer les mécanismes des articulations dans le but de vérifier les fonctions désirées, le fait que les effets de l'inertie sont ignorés dans l'analyse est jugé dangereux pour l'estimation des charges ou la sélection de système de conformité appropriée et les sources d'amortissement.

Pour l'analyse dynamique, la force d'excitation ou le couple du système doivent être introduits. En plus de l'analyse abordée par M.A.Julien [37] pour un système de suspension en mode verticale, H. Rahnejat [45] considère le moment induit par l'excitation due aux irrégularités de la route au niveau de l'articulation du gond. Dans ce modèle H. Rahnejat [45] incorpore la force d'interaction route-pneu comme une fonction du temps. Ceci peut-être représenté par une action de force selon la direction OY dans un cas simple. En réalité un état complexe de force/couple agit sur la roue. Pour l'exemple de la figure 6-b, on a :

$$F_y(t) = f(t)$$

ce terme doit être ajouté à l'équation du mouvement selon la direction y .

L'action du support de choc « bump-stop » doit être incorporé dans le modèle comme une force d'impact. Son point d'application est donné dans la figure 6-b par le vecteur \vec{R}_{m_3} par rapport au référentiel global. Le marqueur correspondant m_4 , dans la

figure 6-b, qui cause un impact sur le support de choc est donné par le vecteur \vec{R}_{m4} tel que :

$$\vec{R}_{m3} - \vec{R}_{m4} = \vec{\rho}$$

H. Rahnejat [45] modélise la force du support de choc comme suit :

$$\text{ystème 2: } \left. \begin{array}{ll} Q = k_{bs} \delta^e, & \delta = |\vec{\rho}| - l, \quad |\vec{\rho}| > l \\ Q = 0, & \delta = 0, \quad |\vec{\rho}| \leq l \end{array} \right\}$$

où Q est la réaction du support de choc, k_{bs} sa raideur, δ sa déflexion élastique, $|\vec{\rho}|$ est l'écart instantané entre les marqueurs m_3 et m_4 , l est l'écart original ou de design entre les deux mêmes marqueurs et e l'exposant déflexion-charge des caractéristiques du support de choc. La même forme que le système 2 peut être utilisée pour décrire la force de réaction du pneu. Les caractéristiques d'amortissement du support de choc ou du pneu peuvent aussi être ajoutées en incluant la vitesse relative des membres de contact/impact comme le taux de changement de la pénétration multiplié par la constante d'amortissement. Pour le modèle proposé par H. Rahnejat [45] on assume que le support de choc agit selon la direction y du référentiel global.

Ainsi, l'équation du mouvement dans la direction y change et devient :

équation 48:

$$\left. \begin{array}{l} m(\dot{v} - g) + k_s y + \{y_{m1} - y_{m2} - (r_x \sin(\psi) + r_y \cos(\psi))\} \lambda_2 = f(t) - (k_{bs} \delta^e) \\ \text{avec } \delta > 0 \end{array} \right\}$$

L'équation 48 remplace l'équation correspondante dans le système 1, qu'on peut exprimer sous forme matricielle selon le système 3:

système 3:

$$\begin{bmatrix} m\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{x_{m1} - x_{m2} - (r_x \cos(\psi) - r_y \sin(\psi))\} & 0 \\ 0 & m\alpha & 0 & 0 & k_x & 0 & 0 & \{y_{m1} - y_{m2} - (r_x \sin(\psi) - r_y \cos(\psi))\} \\ 0 & 0 & I_{zz}\alpha & 0 & 0 & 0 & -r_x \cos(\psi) - r_y \sin(\psi) & r_x \sin(\psi) + r_y \cos(\psi) \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -(r_x \cos(\psi) - r_y \sin(\psi)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -(r_x \sin(\psi) + r_y \cos(\psi)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varpi \\ x \\ y \\ \psi \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) - k_{bx}\delta^e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

où $\alpha = \frac{s}{\Delta t}$, s est un facteur d'échelle utilisé la procédure d'intégration étape par étape et

Δt est le pas du temps de l'intégration.

Le système 3 peut-être représenté dans une forme générale :

$$J(q, \lambda, \alpha) \{q, \lambda\}^T = \{F_q\}$$

où J est la matrice Jacobienne (ou le Jacobien), $\{q, \lambda\}^T$ est le vecteur solution requis comprenant les variables d'état et les multiplicateurs de Lagrange et $\{F_q\}$ est le vecteur des forces appliquées. La matrice Jacobienne peut aussi être exprimée sous la forme suivante :

$$[J] = \begin{bmatrix} \left[\frac{s}{\Delta t} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial K}{\partial q} \right] & \left[\frac{\partial C}{\partial \lambda} \right] \\ \left[\frac{\partial C}{\partial q} \right] & [0] \end{bmatrix} \text{ où } K \text{ est l'énergie cinétique}$$

La résolution du système 3 peut se faire par la méthode Newton-Raphson ou par la méthode RUNGA-KUTTA.

3.2 Modèle de l'excitation aléatoire due à l'irrégularité de la chaussée :

L'excitation due au profil de la chaussée est de nature aléatoire. Dans cette étude, le profil de la piste est estimé à partir de la densité spectrale de puissance (Power Spectral Density, PSD). On définit le profil de la piste par la fonction $X(t)$ et en admettant que la surface de la piste est un processus aléatoire, stationnaire, gaussien et centré; c'est-à-dire que toutes ses propriétés statistiques sont invariables dans tout changement de l'argument t , que la loi de répartition de la variable $X(t)$ est une loi gaussienne, et que la moyenne de $X(t)$ pour tout t appartenant à $[0, T]$, est nulle.

Le processus aléatoire, stationnaire, gaussien $X(t)$ peut être considéré comme une fonction périodique dans le temps t , d'amplitude α , de fréquence circulaire ω et d'une phase ϕ [46]. Ainsi, le processus aléatoire $X(t)$ peut s'écrire selon l'équation 49 :

$$\text{équation 49: } X(t) = \alpha \cos(\omega t - \phi)$$

On peut exprimer $X(t)$ par la somme d'une série de fonctions harmoniques appelée série de fourrier :

$$\text{équation 50: } X(t) = \sum_i^N \alpha_i \cos(\omega_i t - \phi_i)$$

On suppose que la phase ϕ_i est aléatoire et répartie dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Donc la moyenne de l'équation 50 est donnée par l'équation 51 :

$$\text{équation 51: } E[X(t)] = \sum_i^N \alpha_i E[\cos(\omega_i t - \phi_i)] = 0$$

d'où :

$$\text{équation 52: } E[\cos(\phi_i)] = \int_0^{2\pi} \cos(\phi_i) \left(\frac{1}{2\pi}\right) d\phi_i = 0$$

Prenons la moyenne quadratique de $X(t)$:

$$\text{équation 53: } E[X(t)^2] = E\left[\sum_i^N \alpha_i \cos(\omega_i t - \phi_i) \sum_{j=1}^M \alpha_j \cos(\omega_j t - \phi_j)\right] = \sum_i^N \frac{1}{2} \alpha_i^2$$

l'équation 52 et l'équation 53 montrent que le processus est stationnaire. Dans le cas d'un processus aléatoire, stationnaire, gaussien, l'équation suivante doit être satisfaite en utilisant la moyenne m et l'écart type δ :

$$\text{équation 54: } \delta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega - m^2$$

comme $m = 0$, on peut discrétiser l'équation 54 et on obtient :

$$\text{équation 55: } \delta^2 = 2 \sum_{i=1}^N S_{XX}(\omega_i) \Delta\omega = E[X^2(t)] = \sum_i^N \frac{1}{2} \alpha_i^2$$

on obtient:

$$\text{équation 56: } \alpha_i = \sqrt{4S_{XX}(\omega_i) \Delta(\omega)}$$

Finalement, nous obtenons le processus $X(t)$ en fonction de la densité spectrale de puissance qui est donnée par :

$$\text{équation 57: } X(t) = \sum_{i=1}^N \sqrt{4S_{XX}(\omega_i) \Delta\omega} \cos(\omega_i t - \phi_i)$$

Pour la gamme de fréquence spatiale s'étalant de 0,01 à 10 cycles/m, la densité spectrale de puissance $S_{XX}(\gamma)$ tirée de l'expérience peut être représentée par une fonction exponentielle [46] donnée par le système 4 :

$$\text{système 4: } S(\gamma) = \begin{cases} S(\gamma_0) \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{-q_1} & \text{si } \gamma \leq \gamma_0 \\ S(\gamma_0) \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{-q_2} & \text{si } \gamma > \gamma_0 \end{cases}$$

avec $\gamma_0 = \frac{1}{2\pi}$ (cycles/m), $q_1 = 3,14 \pm 0,76$ et $q_2 = 2,11 \pm 0,38$. Robson [46] propose

pour plusieurs cas de surface de piste une seule fonction qui pourra être utilisée :

$$\text{équation 58: } S(\gamma) = R\gamma^{-q}$$

L'équation 58, représente un modèle de piste proche de la réalité, en utilisant $q = 2,5$ et R est un coefficient de rugosité qui caractérise le modèle de la piste comme il est indiqué au tableau 5. γ est la fréquence spatiale qui a une relation avec la fréquence circulaire ω donnée par:

$$\text{équation 59: } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi V}{\lambda} = 2\pi V\gamma$$

où T représente la période, V la vitesse du véhicule et λ la longueur d'onde qui égale à

$\frac{1}{\gamma}$. Du système 4 on peut tracer la densité spectrale de puissance illustrée dans la figure

7-a. De l'équation 57 on déduit le processus $X(t)$ en fonction de la densité spectrale de puissance comme montré dans la figure 7-b.

tableau 5. Coefficients de rugosité pour différentes pistes [46].

Autoroute (Motorway)	3×10^{-8} à 50×10^{-8}	Moyenne, 10×10^{-8}
Route principale (Main road)	3×10^{-8} à 800×10^{-8}	Moyenne, 50×10^{-8}
Route secondaire (Minor road)	50×10^{-8} à 3000×10^{-8}	Moyenne, 500×10^{-8}

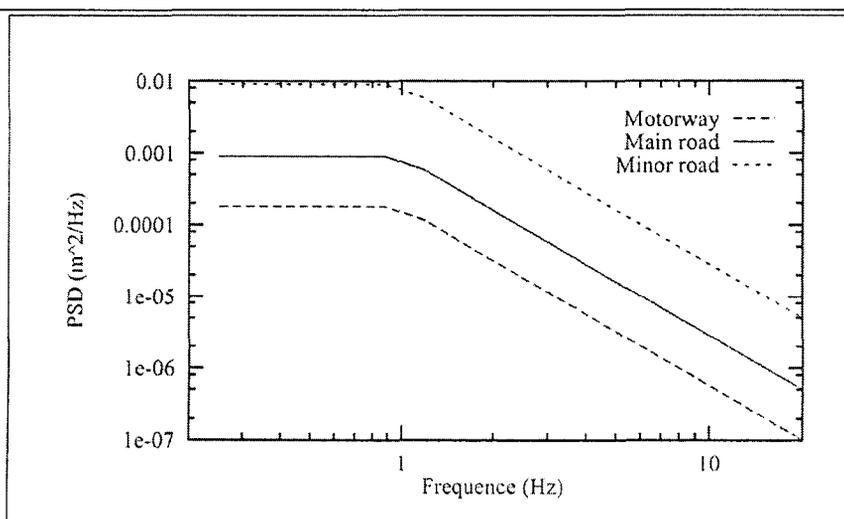


figure 7-a. Densité spectrale de la piste (PSD).

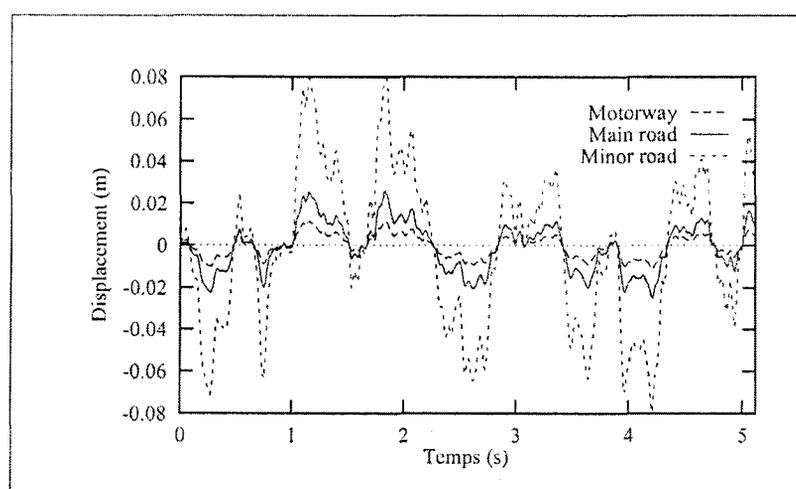


figure 7-b. Profil de la piste en fonction du temps.

figure 7. Profil de la piste.

Le spectre de la route ainsi obtenu correspond à celui d'un déplacement aléatoire vertical. Or la présente étude prend en considération l'excitation directe par une force dynamique aléatoire. Il est donc nécessaire de transformer le déplacement aléatoire en une force aléatoire tout en gardant la même pulsation ou la gamme de fréquence. C'est ainsi que le spectre de la route secondaire est normalisé. Nous avons multiplié les valeurs de ce spectre par un facteur commun estimé à partir des données statistiques.

Sur une route secondaire, la vitesse du véhicule est inférieure à 75 km/h (21m/s). À cette vitesse, un véhicule de 960 kg a une quantité de mouvement égale à 20 160 kg.m/s. Ainsi en 1/2 seconde, l'intervalle de temps pour une excitation maximale de l'ensemble des cinq secondes que dure la totalité de l'excitation aléatoire, on peut estimer une force d'excitation maximale de $20\ 160\ \text{kg.m}/0,5\text{s} = 40320\ \text{N}$. Cette force distribuée d'une manière égale sur les quatre systèmes de suspension, donne une force partielle $40320/4 \approx 10000\text{N}$. L'irrégularité de la route transmet donc au véhicule lors d'un choc élastique avec le quart d'un véhicule, une force de l'ordre de 10000N.

3.3 Simplification du modèle dynamique de la suspension dans le cas du bras de suspension inférieur :

La stabilité partielle du véhicule est assurée par un système de contrôle qui a pour chaîne d'action le pneu de constante de raideur K_p et pour chaîne de retour en contre réaction négative un ressort de raideur K_s monté avec un amortisseur C_s , comme le montre la figure 8. En effet, la force d'excitation F_2 de l'irrégularité de la route, à travers le pneu est équilibrée par la contre réaction F_1 par le biais de la chaîne de retour supportant le quart de la masse du véhicule. La contre réaction F_1 ramène le bras de suspension à sa place d'équilibre d'une manière linéaire, dans le domaine des petites perturbations et la domination du comportement élastique du matériau donnant un état des contraintes faibles. On peut alors écrire la relation :

$$\text{équation 60: } \frac{x_1}{L_1} = \frac{x_2}{L_2} \Rightarrow x_1 = \frac{L_1}{L_2} x_2$$

Connaissant x_2 la déflexion, par rapport à la position d'équilibre, causée par le profil de la chaussée $S(\gamma)$, on peut déduire le déplacement x_1 comme indiquée dans la figure 8.

La masse non suspendue, telle que la masse du ressort, pneu et l'amortisseur est négligeable devant les efforts dynamiques mis en jeu.

Les paramètres de la suspension sont donnés dans le tableau 6.

tableau 6. Paramètres de la suspension [46].

Masse suspendue = m_s :	Masse non suspendue = : m_l .	K_s du ressort	C_s de l'amortisseur	K_p du pneu
240 kg	36kg	16000 N/m	1000 N.s/m	160 000 N/m

Les forces appliquées au bras de suspension inférieur d'un quart de véhicule sont :

- $F_2 = k_p x_2$ exercée par le pneu excité par x_2
- $F_1 = K_s x_1 + C_s \dot{x}_1$ force de contre réaction exercée par le ressort et l'amortisseur.

Connaissant les valeurs expérimentales [46] de la PSD $S(\gamma)$ décrite par le système 4, on peut déduire x_2 et par la suite F_2 . L'équation 60 nous permet d'avoir le spectre x_l . Une fois x_l est connue, la détermination complète des valeurs de F_l se fait d'une manière numérique, étant donné que \dot{x}_1 peut-être calculée par une dérivée numérique de x_l .

La normalisation du spectre du profil de la chaussée $S(\gamma)$, fonction de la vitesse du véhicule, obtenu à partir de la densité spectrale de puissance PSD, est nécessaire pour garder la même gamme de fréquence et pouvoir la transformer en une force excitation. Le facteur, qui doit être multiplié par les valeurs de la densité spectrale, dépend des valeurs numériques de la masse suspendue, la constante de raideur du pneu et de l'amortisseur, la constante d'amortissement de l'amortisseur et la masse non suspendue.

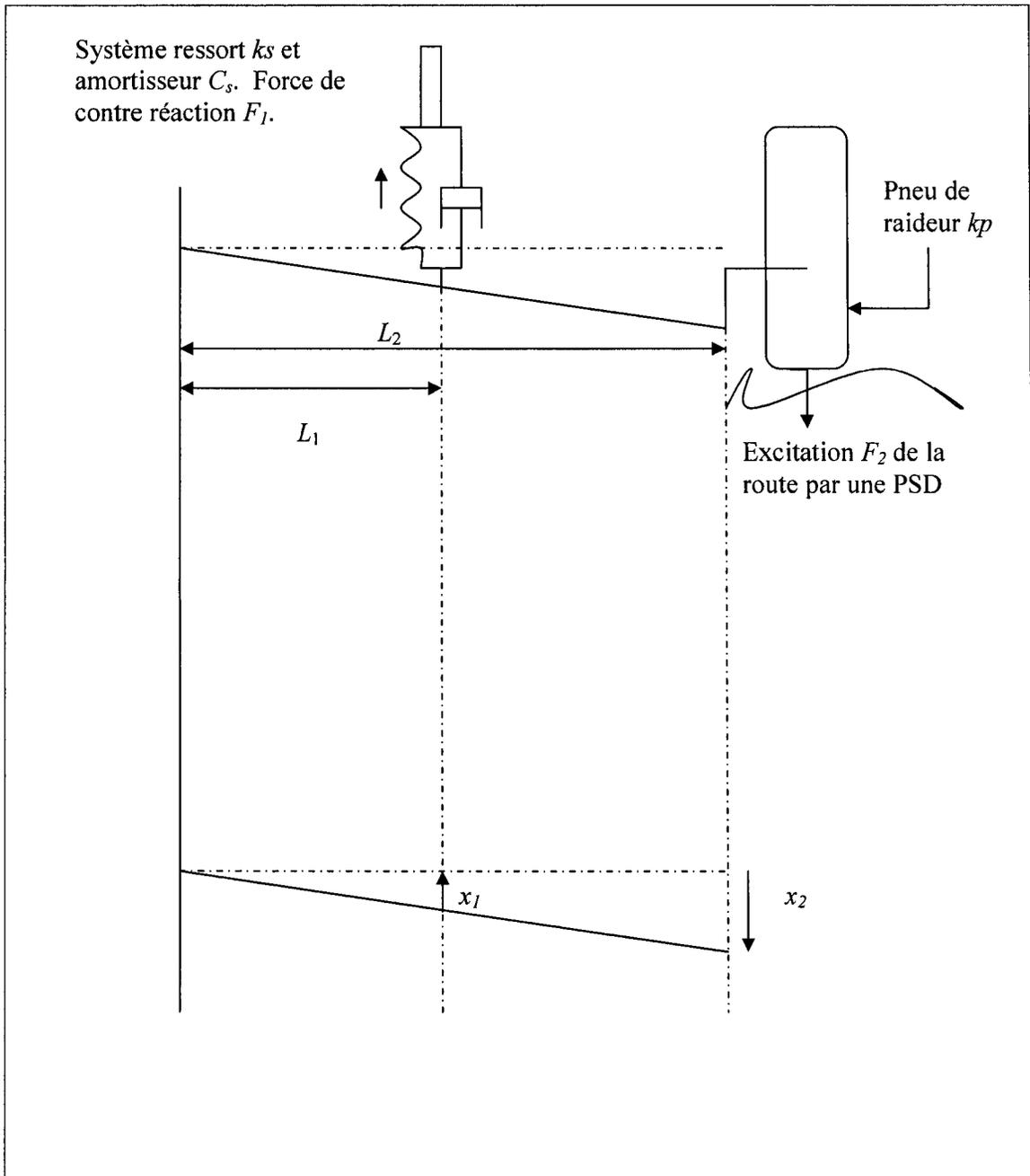
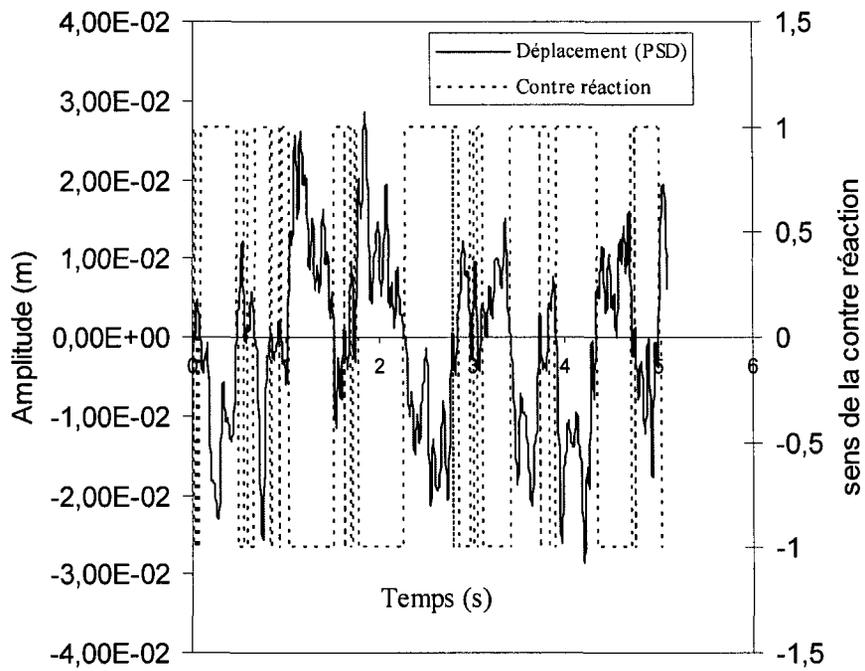


figure 8. Schéma du couplage mécanique entre le système de contrôle de la suspension d'un véhicule et le bras de suspension inférieur.

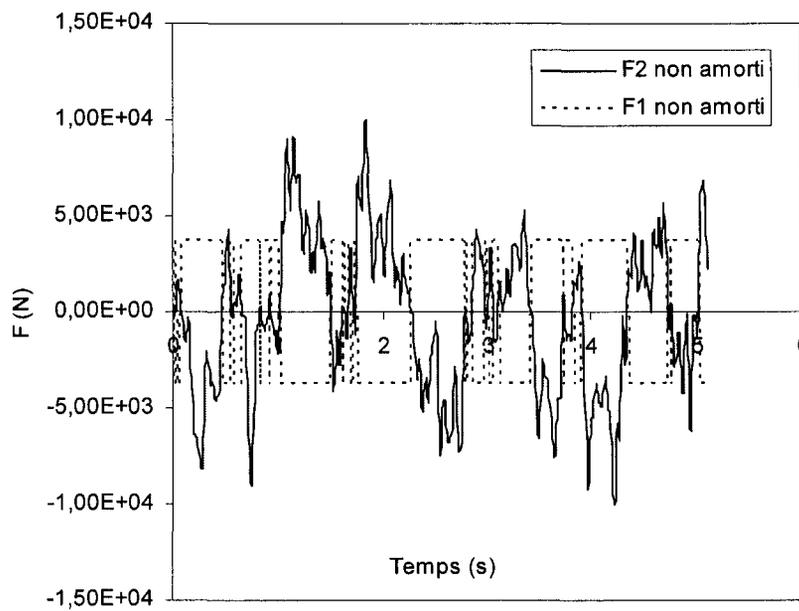
La valeur numérique [46] de ce facteur est estimée à: 0,025. La détermination des valeurs numériques de \dot{x}_1 permet le calcul de $F_1 = K_s x_1 + C_s \dot{x}_1$. \dot{x}_1 est déterminé numériquement par :

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1(t + \Delta t) - x_1(t)}{\Delta t}$$

Les données numériques de Δt , PSD $S(\gamma)$, x_1 , \dot{x}_1 et x_2 ainsi que F1 et F2 sont colligées dans les tableaux en annexe 1 pour les 43/100 premières secondes de la simulation. Le poids du véhicule est estimé à 3750N opposé dans la chaîne de retour à l'excitation aléatoire de valeur maximale 4000N, dans le cas sans amortissement. Le signal de la densité spectrale de puissance est échantillonné à un pas de temps de 0,01 seconde pour une durée de simulation de l'ordre 5,11 secondes. La valeur maximale de la force d'excitation à travers un pneu de raideur 160×10^3 (N/m) est de l'ordre de 4000N. Les spectres de la figure 9 illustrent le passage d'une PSD déplacement à une PSD force en mode non amorti, alors que celui de la figure 10 montrent la comparaison entre les spectres en mode amorti et non amorti ainsi qu'une visualisation de l'opposition de phase entre l'excitation F_2 et la force F_1 de la chaîne de retour dans le système de contrôle d'une suspension d'un véhicule. La valeur maximale de la force de la chaîne de retour $F_1 = K_s x_1 + C_s \dot{x}_1$ est de l'ordre de 1200 N en valeur absolue.

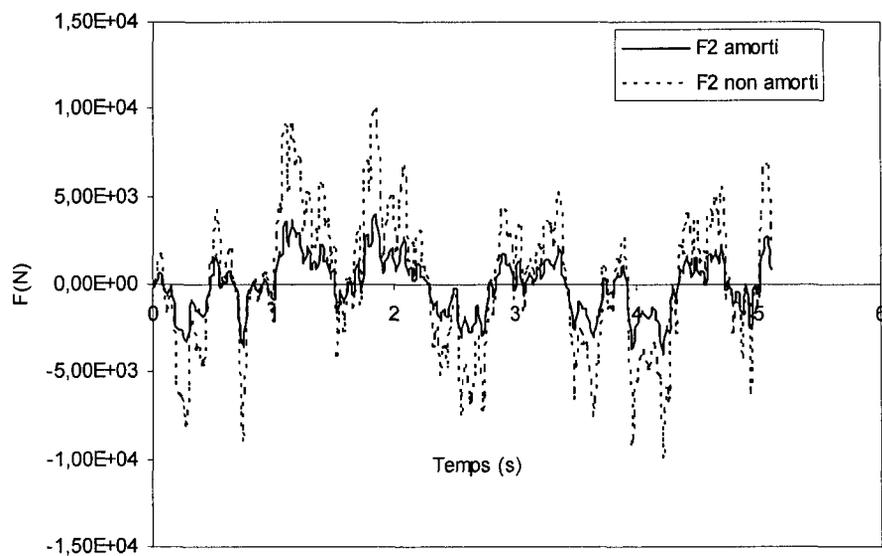


(a) PSD en déplacement et le sens de la contre réaction.

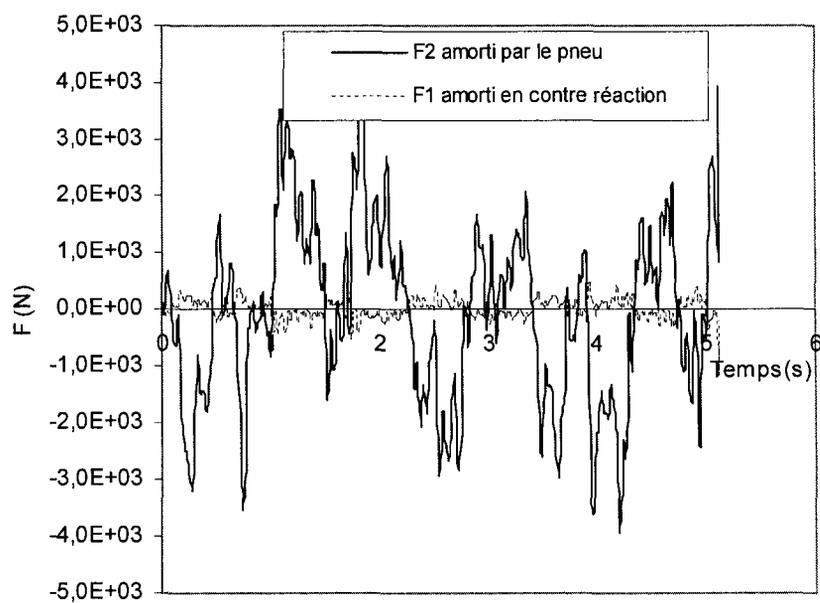


(b) Mode non amorti : Force F_2 en contre réaction par F_1 .

figure 9. Passage d'une PSD déplacement à une excitation force aléatoire.



(a) Excitation F_2 de la route en mode amorti et non amorti.



(b) Mode amorti : Excitation de la route F_2 et la chaîne de retour F_1 .

figure 10. Différents spectres des forces mises en jeu dans le système de contrôle de la suspension d'un véhicule.

Chapitre 4

Développement du modèle élastique multiaxial

Dans ce chapitre nous analysons en profondeur la possibilité de remplacer des pièces automobile en acier par d'autres en alliage d'aluminium en terme d'endurance tout en gagnant en poids. Par la suite nous développons un modèle de rupture par fatigue multiaxial élastique, du bras de suspension inférieur d'un véhicule sous sollicitations dynamiques réelles via le système de suspension du véhicule, par le critère multiaxial de densité d'énergie de déformation. Nous identifions un cas extrême pour lequel on peut trouver une solution analytique au tenseur de contrainte (tenseur de Cauchy).

4.1 Développement d'une solution analytique de l'état des contraintes :

Il s'agit du cas de la figure 11 qui représente le cas extrême de l'état des contraintes puisque la pièce est encastree : la pièce triangulaire, représentant le bras de suspension inférieur, est sous chargement aléatoire P et stabilisée par la force F_2 en contre réaction. La plaque homogène mince ne s'éloigne pas de sa position d'équilibre donnant une flèche négligeable. Il s'agit d'une flexion simple, puisque le moment fléchissant ne s'annule pas. La plaque est mince et l'une de ses côtés est libre, on

suppose alors que la distribution des contraintes est plane et que la flexion est de nature élastique. Les trois forces qui s'appliquent sur la plaque sont :

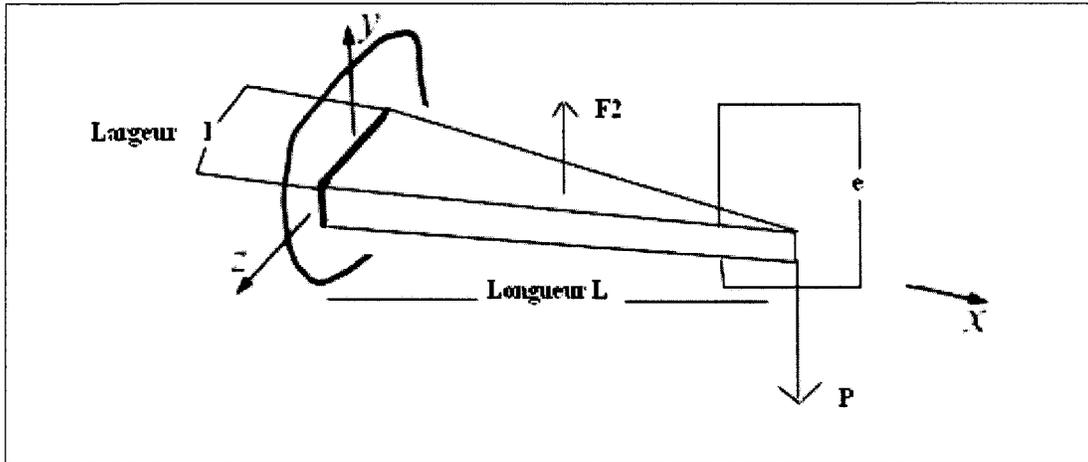


figure 11. Plaque triangulaire mince.

$e =$ épaisseur e , $l =$ largeur l , $L =$ longueur.

- la force P représente l'excitation aléatoire ou sinusoïdale à amplitude constante : singularité en $x = L$,
- la force F_2 l'action du poids du véhicule mais en opposition par rapport à P : condition aux limites pour $x = \frac{L}{2}$. On peut écrire par exemple $F_2 = \text{signe}(-P) \times 3750$ pour $P = \sin(\omega t)$.
- la réaction F_1 au niveau du joint de suspension : condition aux limites pour $x = 0$.

Selon la figure 11, il y a une singularité au point d'application de la force F_2 , $x = \frac{L}{2}$.

On estime que la valeur de l'effort tranchant au point de discontinuité $x = \frac{L}{2}$ est égale à

la moyenne de l'effort tranchant à $x_0^- = \left(\frac{L}{2}\right)^-$ et $x_0^+ = \left(\frac{L}{2}\right)^+$. En effet, et d'une manière

grossière l'effort tranchant au point de discontinuité $x_0 = \frac{L}{2}$ est égale à :

$$V(x_0 = \frac{L}{2}) = \frac{V(x_0^-) + V(x_0^+)}{2}$$

La contrainte normale $\sigma_{xx} = -\frac{My}{I_z}$ est constante dans une coupe selon l'axe OY ,

car e est petite devant l et L , avec $M = Vx$ est le moment de flexion, V est l'effort

tranchant et $I_z = \frac{le^3}{12}$ est le second moment de la plaque rectangulaire ($I_z = \frac{le^3}{3}$ dans le

cas d'une plaque triangulaire). Puisque la distribution des contraintes est plane et que

$\sigma_{xx} = -\frac{My}{I_z}$ est supposé constante, σ_{xx} est égale à sa valeur maximale pour $y = \frac{e}{2}$ par

rapport à l'axe neutre : $\sigma_{xx} = -\frac{My}{I_z} = -\frac{Me}{I_z 2}$, avec e est en valeur algébrique.

À cause de la singularité au point $x_0 = \frac{L}{2}$ on distingue les deux cas suivants :

- si $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$; l'effort tranchant V et le moment de flexion M sont respectivement

égales à :

$$V = F_2 - P$$

$$M = x(F_2 - P)$$

si $\frac{L}{2} \leq x \leq L$; l'effort tranchant V et le moment de flexion sont respectivement

égales à :

$$V = F_2 - 2P$$

$$M = x(F_2 - 2P)$$

Les équations d'équilibre, en négligeant le poids de la plaque par rapport au chargement, s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xy} = -\frac{Ve}{2I_z} + f(x) \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{cases}$$

La constante $f(x)$ doit être déterminée grâce aux conditions aux limites d'équilibre.

En effet, pour $z = \pm \frac{l}{2}$ on a $\tau_{xy} = 0$ d'où : $f(x) = \frac{Vel}{4I_z}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xy} = -\frac{Ve}{2I_z} + \frac{Vel}{4I_z} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Le tenseur de Cauchy ainsi déterminé est :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Vxe}{2I_z} & -\frac{Ve}{2I_z} + \frac{Vel}{4I_z} \\ -\frac{Ve}{2I_z} + \frac{Vel}{4I_z} & 0 \end{pmatrix}, e \text{ est une valeur algébrique.}$$

Il est essentiel de déterminer les valeurs maximales et minimales de σ et τ en tout point, particulièrement dans l'analyse de rupture. Ces valeurs extrêmes sont déterminées dans l'espace et dans le temps. Dans le temps, elles correspondent aux pics et aux vallées de la contrainte dans le matériau et dans l'espace, elles correspondent aux

contraintes selon une direction θ_1 par rapport à la direction OX et OY . Connaissant les pics et les vallées d'une excitation sinusoïdale à amplitude constante, on détermine la direction θ_1 . En effet, les contraintes maximales et minimales en un point I ne correspondent pas nécessairement aux contraintes orientées selon OX et OY . Ainsi, on démontre que l'état des contraintes $(\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \tau'_{xy})$ en un point I du matériau selon une direction θ s'écrit en fonction de $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})$ comme suit :

$$\begin{aligned} 1-a : \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \text{équation 61 : } 1-b : \sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ 1-c : \tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \end{aligned}$$

Les contraintes principales σ_1 et σ_2 respectivement σ_{\max} et σ_{\min} sont déterminées

lorsque : $\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0$ ou $\frac{d\sigma_{y'}}{d\theta} = 0$. En effet on obtient :

$$\text{équation 62 : } \operatorname{tg}(2\theta_1) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Les limites de la variation de l'angle θ étant de 180° , l'angle double varie de 360° , donc l'équation 62 a deux solutions : un angle $2\theta_1$ et $2\theta_1 + 180^\circ$. Les contraintes principales σ_1 et σ_2 sont alors déterminées en remplaçant θ_1 dans l'équation 61-a, ce qui nous permet d'écrire après simplification :

équation 63 :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Selon les directions 1 et 2, correspondant à σ_1 et σ_2 , la contrainte de cisaillement est nulle. Ce sont les axes principaux selon lesquels l'élément ne subit aucune contrainte de cisaillement.

Les champs de déformation sont connus lorsque les trois composantes du champ de déplacement sont déterminées, grâce aux relations qui les relient. Cependant le cas inverse est plus délicat puisqu'il n'a pas de solution unique, car le nombre de variable passe de six déformations à trois déplacements. Physiquement on interprète le problème comme suit : lorsqu'il s'agit de déplacement, la différence entre le déplacement de corps rigides (sans déformation) et ceux qui s'accompagnent de déformations n'est pas faites. Ainsi, pour passer des déformations aux déplacements, il est nécessaire de contraindre le problème par des relations supplémentaires qui sont appelées : relations de compatibilité. Trompette [34] a défini ces relations en se basant sur le principe obligatoire lors de l'intégration du champs des déformations et que le résultat ne doit pas dépendre du chemin suivi.

Dans le cas cyclique, la détermination de la durée de vie d'une pièce est basée sur des relations semi-empiriques ou semi empiriques. La contrainte, la déformation et le moment varient respectivement entre deux valeurs $(\sigma_{\max}, \sigma_{\min})$, $(\varepsilon_{\max}, \varepsilon_{\min})$ et (M_{\max}, M_{\min}) . On suppose que les effets de l'accélération sont petites, l'équilibre des forces existe à chaque instant et que l'équation suivante :

$$\begin{aligned} dM &= (\sigma)(l)ydy \\ \text{équation 64 : } M &= \int \sigma y dy \end{aligned}$$

soit toujours satisfaite. Un programme en langage Fortran est conçu pour le calcul des valeurs numériques de σ_{\max} et σ_{\min} (voir annexe 2).

4.2 Gain en poids : cas uniaxial sous chargement sinusoïdale (SWT) :

Une étude préliminaire dans le cas uniaxial est préconisée pour connaître l'ordre de grandeur de l'état de contrainte dans une plaque triangulaire ressemblant au bras de suspension inférieur. Cette pièce est soumise à un chargement sinusoïdal à amplitude constante contrôlé par une contre réaction constante égale au quart du poids du véhicule. Ces conditions de chargements sont arbitraires et sont les mêmes dans le cas d'une pièce en alliage d'aluminium que dans une autre en acier comme illustré dans la figure 11, pour montrer qu'on peut gagner en poids sans perdre en propriété mécanique de fatigue. Pour pouvoir étudier le gain en poids, on fixe des paramètres arbitraires de chargement dans le cas d'une pièce en alliage d'aluminium et d'une autre pièce en acier. On suppose que l'état des contraintes est uniaxial, et que la pièce est chargée par une force $P=4000\sin(\omega t)$ qui est en contre réaction avec la force $F_2=3750\text{signe}(-P)$ comme illustré par la figure 12.

Généralement, les tests déterminant la limite d'endurance sont appliqués dans le cas d'un chargement cyclique complètement renversé. Des éprouvettes standard sans entaille sont utilisées dans la majorité des cas. Dans les alliages d'aluminium, la courbe contrainte-déformation présente une partie plastique non négligeable. Pour décrire le comportement de ces types d'alliages qui diffère de celui des matériaux élastiques, viscoplastiques ou élastiques parfaitement plastiques, on utilise la relation de Ramberg-Osgood dans le cas cyclique [5] :

$$\text{déformation}_{\text{Totale}} = \text{déformation}_{\text{élastique}} + \text{déformation}_{\text{plastique}}$$

équation 65 :

$$(\varepsilon_a)_{\text{Ramberg-Osgood}} = (\varepsilon_a)_{\text{R-O}} = \varepsilon_{\text{élastique}} + \varepsilon_{\text{plastique}} = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{H}\right)^{1/n'}$$

avec H est le coefficient de résistance cyclique, E le module de Young, n' est l'exposant de durcissement cyclique et σ_a est la gamme de contrainte comme le montre la figure 12 dans le cas d'une contrainte locale sinusoïdale à amplitude constante : $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$. Le tableau 7 résume les propriétés mécaniques de quelques alliages d'aluminium et d'un acier.

tableau 7. Propriétés mécaniques de certains alliages [5].

Alliage :	Code	Densité kg/m ³	Module de Young en MPa	Limite ultime σ_u en MPa	Limite élastique σ_e en MPa
D'acier	AISI1015	7900	206	415	227
	RQC-100	8000	200	758	683
D'aluminium	2024-T351	2700	73	455	379
	2024-T4 Al	2700	73	476	303
	7075-T6 Al	2800	71	578	469

Dans la relation Manson-Coffin, la durée de vie N_f , est liée à la déformation totale par la relation suivante :

équation 66 :

$$(\varepsilon_a)_{\text{Manson-Coffin}} = (\varepsilon_a)_{\text{M-C}} = \varepsilon_{\text{élastique}} + \varepsilon_{\text{plastique}} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_f)^b + \varepsilon_f' (2N_f)^c$$

où σ_f' est le coefficient de résistance à la fatigue, b est l'exposant de résistance à la fatigue, c est l'exposant de ductilité de la fatigue et ε_f' est le coefficient de la ductilité de la fatigue [5].

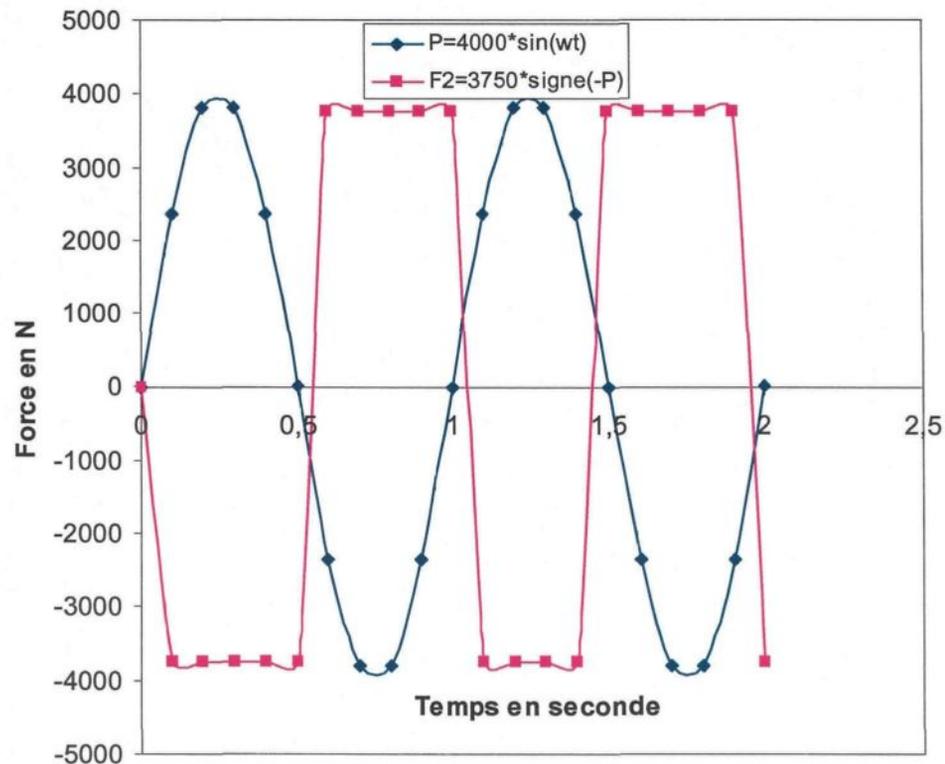


figure 12. Chargement sinusoïdal à amplitude constante avec une valeur moyenne nulle.

On utilise la relation décrite par l'équation 67, qui lie la gamme de contrainte à la durée de vie, comme une interpolation de la courbe $S-N$:

$$\text{équation 67 : } \sigma_a = \sigma_f' (2N_f)^b$$

Selon Norman E. Dowling [5], J.Morrow a suggéré un modèle tenant compte de l'effet

de la contrainte moyenne, $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$, donnant la durée de vie N_f avec l'effet de

σ_m , en fonction de N^* ne tenant pas compte de l'effet de σ_m . Le modèle de J.Morrow

a été modifié en réduisant la partie décrivant le comportement plastique du matériau pour des durées de vie courtes.

La même référence [5], Smith, Watson et Topper (SWT) ont lié la durée de vie au produit $\sigma_{\max} \varepsilon_a$ qui représente la densité d'énergie. En effet la méthode SWT assume que la durée de vie pour toutes situations de la valeur moyenne de la contrainte dépend du produit $\sigma_{\max} \varepsilon_a$ car $\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m$ (on voit bien que si $\sigma_m = 0$, alors $\sigma_{\max} = \sigma_a$). Dans le cas idéal le produit $\sigma_{\max} \varepsilon_a$ doit être englober le cas particulier $\sigma_a \varepsilon_a$. Le produit $\sigma_a \varepsilon_a$ dans le cas d'un chargement complètement renversé comprend le produit de la relation de Manson-Coffin et la relation de l'extrapolation de la courbe de Wöhler. La déformation est calculée à partir de la relation de Ramberg-Osgood selon l'équation 65. Smith, Watson et Topper, ont multiplié la loi de Manson-Coffin par l'équation 65, et ont obtenu une relation liant la durée de vie à la densité d'énergie, décrite par l'équation 69, appelée la méthode SWT indépendante de la valeur moyenne de la contrainte :

$$\text{équation 68 : } \sigma_{\max}(\varepsilon_a)_{R-O} = \sigma_a(\varepsilon_a)_{M-C}$$

$$\text{équation 69 : } \sigma_{\max} \varepsilon_a = \frac{(\sigma_f')^2}{E} (2N_f)^{2b} + \sigma_f' \varepsilon_f' (2N_f)^{b+c}$$

Norman E. Dowling [5] conclut que l'approche de J.Morrow donne de bon résultat dans le cas de l'acier, et lorsqu'elle est modifiée elle s'applique bien aux spécimens contenant une entaille qui ont une courte durée de vie. L'approche SWT donne de bon résultat pour une large gamme d'alliage, et elle est utilisée dans le cas général. Le profil de contrainte déterminé dans le cas uniaxial, flexion simple dans la présente étude,

permet de connaître les valeurs, σ_{\max} et σ_{\min} , dans le matériau et déduire σ_a par l'équation 70:

$$\text{équation 70 : } \sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

Après, on détermine la valeur de ε_a par la relation de Ramberg-Osgood. Un programme informatique est nécessaire pour le calcul de σ_{\max} , σ_{\min} et σ_a à partir du tenseur de Cauchy puis extraire ε_a et N_f . Les paramètres de l'approche SWT, basée sur le concept de densité d'énergie, dans le cas de l'alliage d'aluminium 7075-T6 sont donnés dans le tableau 8.

tableau 8. Paramètres de l'approche SWT [5]

Alliage	E	H'	n'	σ_f'	ε_f'	b	c
7075-T6 Al	71000 MPa	977 MPa	0,106	1466 MPa	0,262	-0,143	-0,619
Ausformed-H11	207000 MPa	3475 MPa	0,059	3810 MPa	0,0743	-0,0928	-0,7144

L'extraction de N_f demande des techniques numériques car l'équation 69 est non linéaire. La méthode Newton est préconisée. Il s'agit d'une méthode itérative basée sur le calcul numérique de la tangente d'une fonction f en un point x_n , où cette fonction s'annule en un point voisin x_{n+1} . L'itération consiste à diminuer l'erreur par rapport à une solution approchée.

Lorsque l'épaisseur augmente, la contrainte σ_a diminue comme illustré dans le tableau 9. On peut renforcer le matériau dans les régions où la contrainte est élevée et en enlevant de la matière là où la contrainte est faible lors de l'opération d'optimisation, comme dans d'autres travaux de recherche [47]. La figure 13 illustre les données du nombre de cycles à la rupture en fonction de la charge et l'épaisseur de la pièce

triangulaire en alliage d'aluminium 7075-T6 comparées à ceux d'une même plaque en acier Ausformed-H11.

tableau 9. Données des calculs numériques (sinusoïde d'amplitude 4000 N).

Épaisseur en mm	σ_a en MPa	N_f : 7075-T6 Al Modèle SWT	N_f : Acier H-11 Modèle SWT	N_f : 7075-T6 Al Wöhler	N_f : Acier Ausformed-H11 Wöhler
20	548	438	600000000	486,91752	594021393
25	280	61612	8,1E+11	53305,715	8,2468E+11
30	162	2500000	2,6E+14	2446882,14	2,9998E+14
35	102	58000000	4,5E+16	62174450	4,3866E+16
40	68	1000000000	3,8E+18	1059300941	3,4647E+18

N_f = nombre de cycles à la rupture.

Lorsque l'épaisseur augmente, la contrainte locale diminue et la durée de vie de la pièce augmente dans les deux cas. La pièce en acier Ausformed-H11 est plus sécuritaire que celle en alliage d'aluminium 7975-T6, mais plus pesante. Il doit exister une épaisseur équivalente d'une pièce en alliage d'aluminium 7075-T6 plus légère que la pièce en acier Ausformed-H11, donnant le même nombre de cycle à la rupture. La courbe de Wöhler est réalisée pour une éprouvette d'épaisseur 0,48 pouce = 1,22 cm. Un état de contrainte maximale dans une pièce triangulaire d'épaisseur 0,48 pouce donne une durée de vie égale à 49 cycles. Selon la courbe de Wöhler on obtient 69 cycles. Ceci nous permet de conclure que le modèle SWT est calibré par la courbe de Wöhler.

Une pièce en acier Ausformed-H11 d'épaisseur 2 cm a une durée de vie de l'ordre de 6×10^8 selon le modèle SWT. Le poids correspondant est de l'ordre de 7,8 kg. Une pièce en alliage d'aluminium 7075-T6 donnant le même nombre de durée de vie

devrait avoir une épaisseur de l'ordre de 3,75 cm, avec un poids de l'ordre de 5 kg. Dans ce cas on a un gain en poids de 36% comme illustré dans le tableau 10. Cette épaisseur est déterminée aussi dans le cas d'un chargement aléatoire qui représente l'aspect réel de la chaussée. La figure 14 compare la durée de vie obtenue par le modèle SWT avec celle obtenue par la courbe de Wöhler. En effet dans le cas de l'acier Ausformed-H11 les deux valeurs de durée de vie sont presque égales, alors que dans le cas de l'alliage d'aluminium 7075-T6 il y a une différence significative pour les charges élevées.

Une distribution de la densité d'énergie maximale SWT_{max} dans une plaque triangulaire est illustrée par la figure 15. En effet la densité d'énergie maximale SWT_{max} se trouve au lieu où l'excitation de la route s'applique. En ce lieu, le moment de la force d'excitation est maximal. Les résultats montrent que dans le cas d'une pièce de suspension de véhicule en alliage d'aluminium 7075-T6, donnant le même nombre de durée de vie qu'une pièce métallique en alliage d'acier Ausformed-H11, on a un gain en poids appréciable. Les essais de simulation avec un chargement sinusoïdal à amplitude constante ont montré qu'il existe un potentiel de l'utilisation des pièces de suspension en alliage d'aluminium.

tableau 10. Gain en poids une fois l'alliage 7075-T6 Al est utilisé.

Alliage	Épaisseur en cm	N_f	Poids non optimisé	Gain en poids
Acier Ausformed H11	2	6×10^8	7.8 kg	
7075-T6 Al	3,75	6×10^8	5 kg	36%

N_f = nombre de cycles à la rupture.

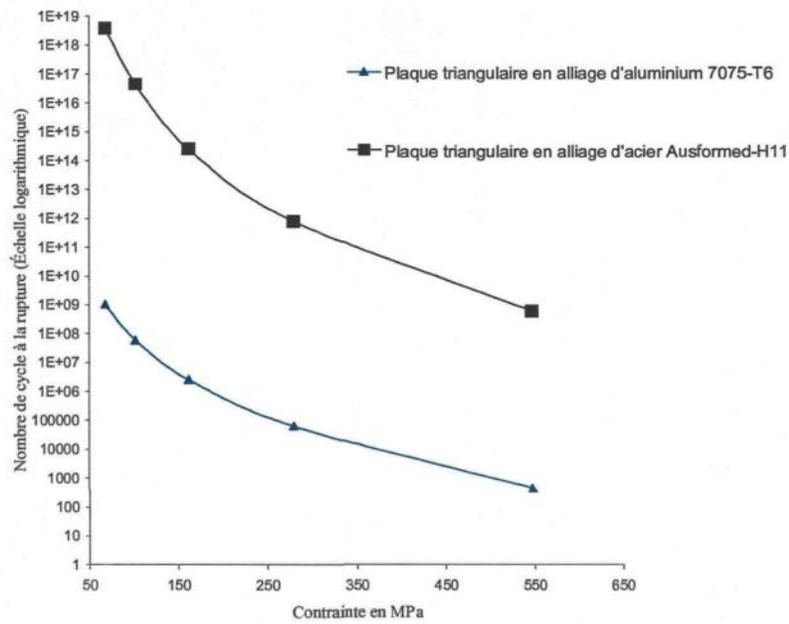


figure 13-a : nombre de cycle à la rupture en fonction de la contrainte σ_a .

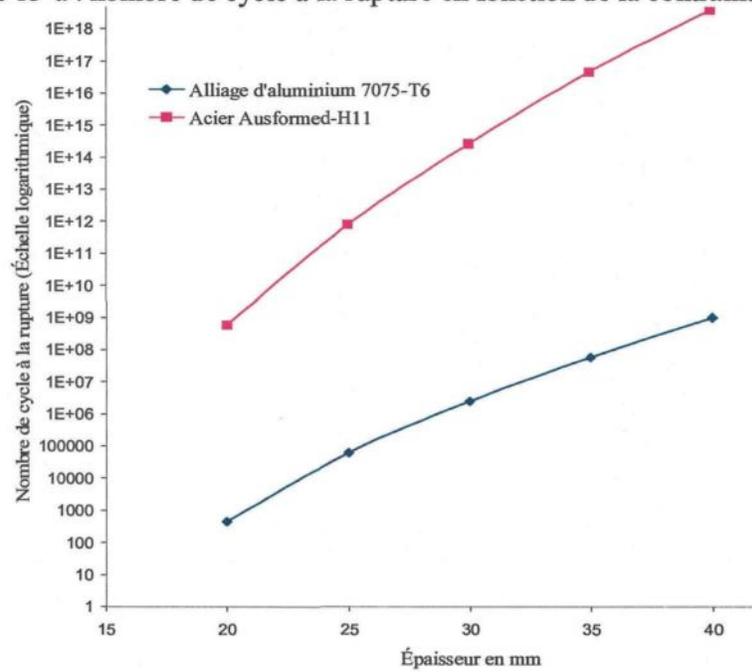


figure 13-b: nombre de cycle à la rupture en fonction de l'épaisseur.

figure 13. Courbe $S-N$ pour deux alliages différents (Sinusoïde de $P_{max}=4000N$).

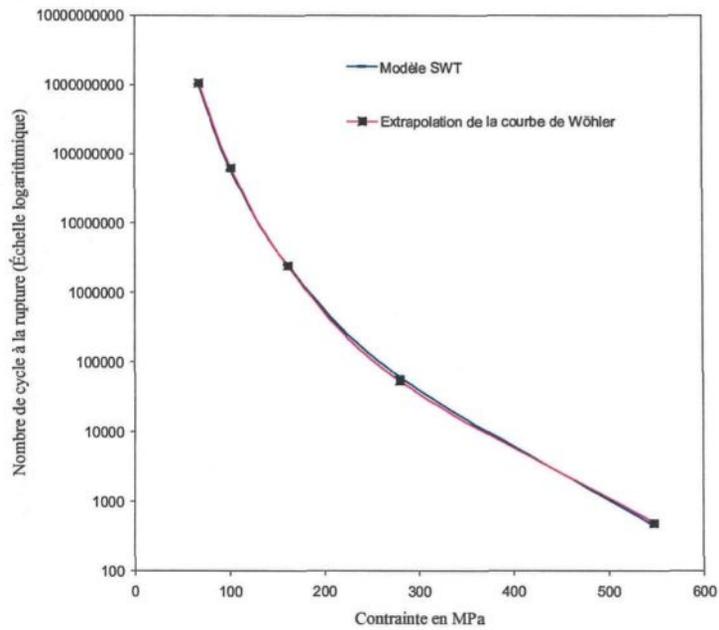


figure 14-a : Alliage d'aluminium 7075-T6.

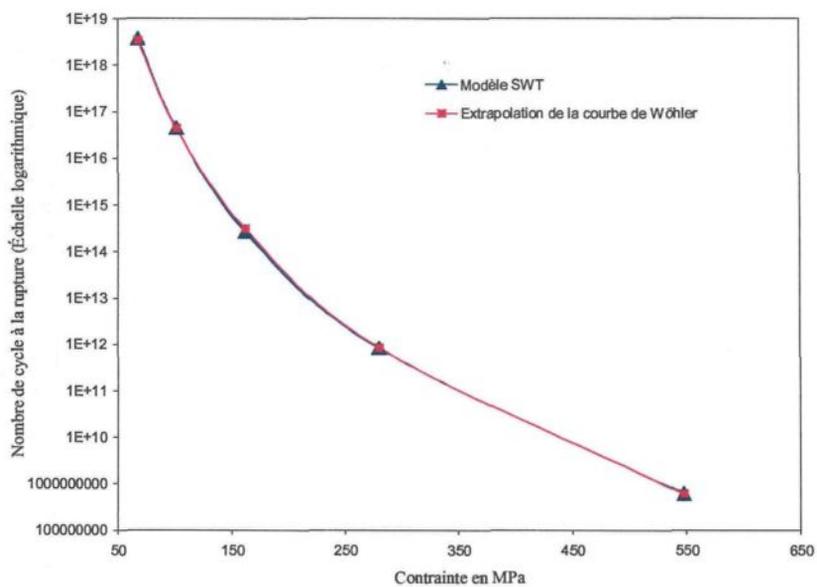


figure 14-b: Acier Ausformed-H11.

figure 14. Courbe S-N: Modèle SWT et Courbe de Wöhler (harmonique sinusoïdale).

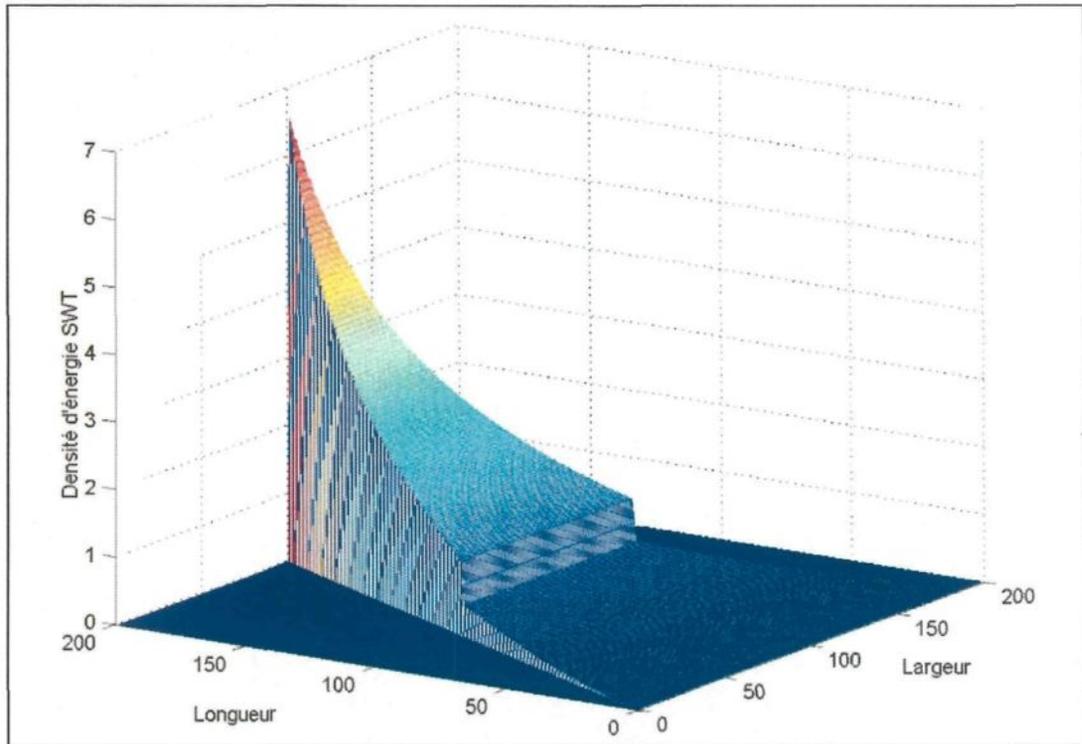


figure 15. Distribution de la densité d'énergie maximale SWT.

Plaque triangulaire d'épaisseur 20mm soumise à une excitation de 4000N.

4.3 Cas multiaxial élastique sous chargement aléatoire :

Dans la section précédente nous avons montré que les alliages d'aluminium peuvent remplacer l'acier en terme de propriété d'endurance tout en gagnant en poids. Cependant, l'état des contraintes dans un bras de suspension d'un véhicule est multiaxial. Pour étudier la durée de vie du bras de suspension inférieur, il faut coupler un modèle de fatigue adéquat avec l'état de contrainte engendré par le comportement dynamique de la suspension d'un véhicule. L'état plan local des contraintes, caractérisé par σ_1 , σ_2 , φ_p et $\lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ sont respectivement les deux contraintes principales, l'angle de déphasage entre σ_1 et l'axe local ox et le rapport de biaxialité [48], dans un matériau peut prendre les aspects suivants :

- cas uniaxial : $\lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0$ et φ_p est constant à chaque instant. Dans ce cas on utilise un des modèles uniaxiaux pour calculer la durée de vie d'une pièce comme le modèle de densité d'énergie SWT ;
- cas multiaxial proportionnel : $\lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ varie dans le temps et φ_p est constant à chaque instant. Dans ce cas on utilise le modèle de la déformation effective [5];
- cas multiaxial non proportionnel : $\lambda = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ et φ_p varient dans le temps. Dans ce cas on utilise le critère du plan critique ou un autre critère multiaxial [5].

Le cas multiaxial non proportionnel, où on utilise la méthode du plan critique pour calculer la durée de vie d'une pièce, est le plus précis mais coûteux en terme de temps de programmation. Dans la présente étude nous avons choisi le critère multiaxial équivalent au cas uniaxial, en l'occurrence le critère multiaxial de densité d'énergie de déformation. Le code en Fortran, développé dans cette étude, calculant le rapport de biaxialité montre que l'état des contraintes est a priori multiaxial non proportionnel.

Les calculs du tableau 11 montrent que dans le cas de l'alliage 7075-T6 le pourcentage du domaine plastique ne dépasse pas 19% du domaine de la déformation totale. Il est donc intéressant d'étudier le cas multiaxial élastique, puisque pour une pièce de forme géométrique optimisée par rapport à une durée de vie et ses fréquences naturelles, la contrainte maximale ne dépasse pas la limite d'élasticité conventionnelle. Ceci nous permet d'explorer, dans cette section, la solution analytique correspondante à l'encastrement au niveau du joint de suspension, développée dans le cas uniaxial, mais pour un état général de l'état des contraintes. Pour une plaque triangulaire nous avons établi une solution analytique de l'état des contraintes en solutionnant le tenseur de

Cauchy. Ainsi, l'état des contraintes et couplé au modèle de fatigue multiaxial équivalent au cas uniaxial, par le biais de la densité d'énergie de déformation.

tableau 11. Domaine plastique par rapport au domaine élastique [5].

Alliage	Code	Limite ultime σ_u en MPa	Limite élastique σ_e en MPa	* Rapport : $\frac{\sigma_u - \sigma_e}{\sigma_u}$ en %
D'aluminium	2024-T351	455	379	*16,70
	2024-T4 Al	476	303	*36,34
	7075-T6 Al	578	469	*18,85

(* calculé)

Une comparaison des résultats analytiques au schéma d'intégration numérique, grâce au code commercial Abaqus, permet une calibration du modèle élastique multiaxial. La méthodologie suivie, lors de l'élaboration du cas multiaxial élastique, est illustrée par la figure 16. On conserve la solution analytique du tenseur de Cauchy déterminée dans la section précédente est :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Vxe}{2I_z} & -\frac{Ve}{2I_z} + \frac{Vel}{4I_z} \\ -\frac{Ve}{2I_z} + \frac{Vel}{4I_z} & 0 \end{pmatrix}$$

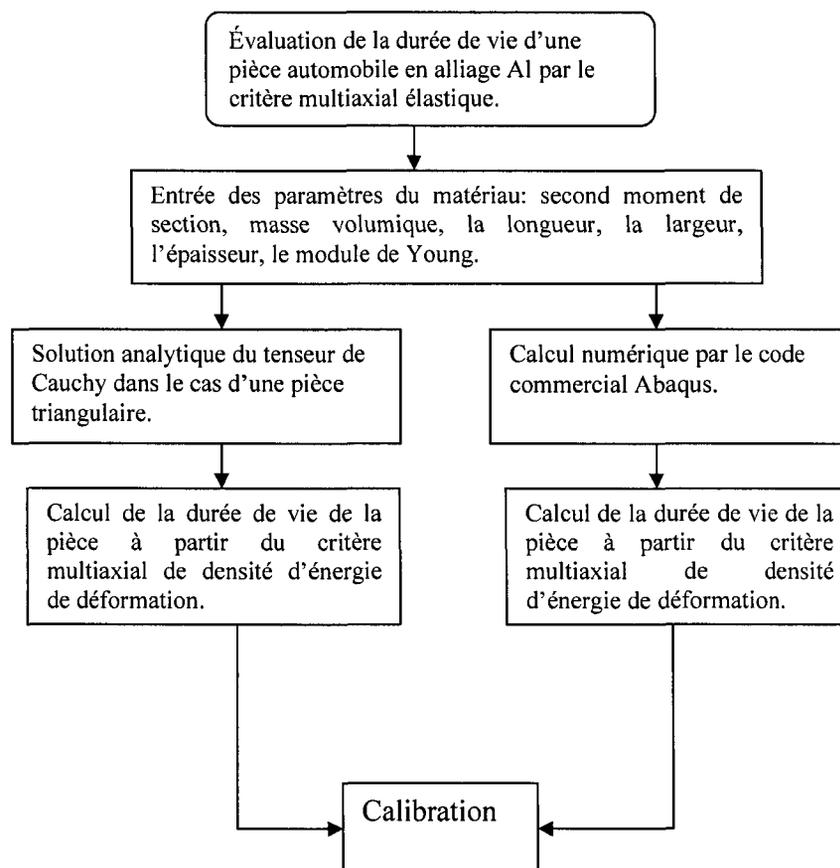


figure 16. Organigramme de l'élaboration du cas multiaxial élastique.

Nous avons calculé la densité d'énergie de déformation multiaxiale, cas général, sous chargement réel via le comportement dynamique. Considérons un élément soumis à un état général de contrainte $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$. Nous appliquons le principe de superposition :

- on applique $\sigma_x = E\varepsilon_{xx}$ au premier lieu : la densité d'énergie de déformation

$$\text{correspondante est : } dU_1 = \int_0^{\varepsilon_{xx}} \sigma_x d\varepsilon_{xx} = \int_0^{\varepsilon_{xx}} E\varepsilon_{xx} d\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} E\varepsilon_{xx}^2 = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x^2}{2E}.$$

- σ_y est appliqué en deuxième lieu : $dU_2 = \int_0^{\varepsilon_{yy}} \sigma_y d\varepsilon_{yy} + \int_0^{\varepsilon_{xx}} \sigma_x d\varepsilon_{yy}$. En présence

de σ_x nous avons une déformation $\varepsilon_{xy} = -\frac{\nu\sigma_y}{E}$ dans la direction x . En plus

que $\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_y}{E}$, la densité d'énergie de déformation dans ce cas devient :

$$dU_2 = \int_0^{\varepsilon_{yy}} E\varepsilon_{yy} d\varepsilon_{yy} + \sigma_x \int_0^{\varepsilon_{xy}} d\varepsilon_{xy} = \frac{E\varepsilon_{yy}^2}{2} + \sigma_x \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{E} - \frac{\nu\sigma_x\sigma_y}{E}.$$

- En dernier lieu nous appliquons σ_z qui donnera pour densité d'énergie de

$$\text{déformation : } dU_3 = \frac{\sigma_z^2}{2E} - \frac{\nu\sigma_x\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_y\sigma_z}{E}.$$

- Chacune des contraintes de cisaillement entraîne une seule composante de

$$\text{déformation : } dU_4 = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \int_0^{\gamma_{yz}} \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \int_0^{\gamma_{zx}} \tau_{zx} d\gamma_{zx}.$$

Sachant que $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$ (E le module de Young, ν coefficient de poisson et G le

module d'élasticité en cisaillement), la densité d'énergie de déformation totale par unité de volume est égale à :

équation 71:

$$U = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

L'état plan des contraintes nous permet de réduire l'équation 71 à :

$$\text{équation 72: } U = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2)$$

l'équation 71 correspond à la densité d'énergie de déformation dans le cas élastique multiaxial. La densité d'énergie de déformation élastique cyclique du cas uniaxial est donnée par l'équation:

$$\text{équation 73: } U = \frac{\sigma_a^2}{2E}$$

la durée de vie N_f de la pièce est déterminée une fois que U , σ_a et ε_a sont calculés comme indiqué dans la figure 17.

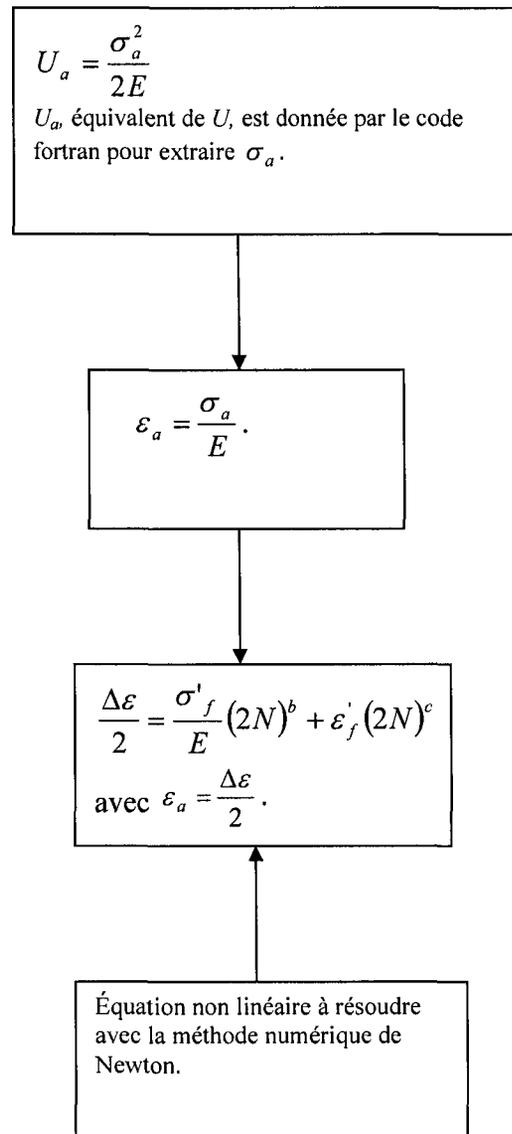


figure 17. Organigramme du calcul de la durée de vie d'une pièce dans le cas multiaxial élastique.

La solution analytique proposée dans cette section est une approximation qui considère l'état des contraintes constant le long de l'épaisseur du spécimen. Par conséquent, cette approche ne serait valable que pour les spécimens à faible épaisseur. Une étude comparant les résultats obtenus par la méthode des éléments finis et ceux de la solution analytique pour plusieurs spécimens d'épaisseurs différentes, est nécessaire. Nous avons développé une interface Matlab utilisant un signal aléatoire au niveau du pneu et la contre réaction qui stabilise le quart de véhicule (voir annexe 3). Ce dernier code simule la dynamique dans le système de suspension d'un véhicule pendant deux secondes d'excitation.

La rupture par fatigue d'un bras de suspension en alliage métallique peut avoir lieu même si la contrainte maximale est inférieure à la limite d'élasticité. Il est donc important qu'avant d'étudier la durée de vie d'une pièce, de vérifier l'état des contraintes de la pièce par rapport aux hypothèses suivantes :

- le comportement élastique du matériau caractérise un domaine de déformation bien déterminé. En effet les schémas d'intégration numériques par la méthode des éléments finis risque de ne pas converger même dans le cas implicite stable, si on dépasse le domaine élastique imposé dans le modèle numérique.
- l'analyse fréquentielle se rapportant au phénomène de la résonance, prend un autre aspect puisque les fréquences naturelles vont changer avec la haute déformation.

Dans cette section le matériau est supposé avoir un comportement linéaire. Par conséquent la contrainte maximale dans le matériau ne doit pas dépasser la limite d'élasticité conventionnelle. La limite d'élasticité conventionnelle de l'alliage 7075-T6 est de l'ordre de 460MPa. Nous avons respecté la condition que toutes les contraintes :

principale minimale et maximale et la contrainte Mises soient inférieurs en tout temps à 460MPa. Nous nous intéressons à l'étude de la durée de vie du bras de suspension inférieur dans le cas de force concentrée d'une manière analytique et numérique. Le développement du modèle numérique élastique multiaxial est analogue au cas élasto-plastique exposé dans le chapitre 5. La nécessité de déterminer l'élément critique, en l'occurrence ses coordonnées, nous a poussé à choisir une stratégie qui permet d'isoler l'élément ayant la somme des variations positives maximale par filtre. En effet, contrairement au cas statique la valeur maximale brute de la densité d'énergie de déformation dans une courbe ne correspond pas nécessairement à celle de l'élément critique lorsqu'il s'agit de la fatigue correspondant au cas dynamique. Ceci permet d'appliquer l'algorithme de Newton-Raphson dans un seul élément au lieu de l'appliquer dans tous les points de la structure pour extraire le nombre de cycle à la rupture de l'équation non linéaire de Mansson-Coffin. Ce filtre généralise le cas où l'excitation est multipoint décalée dans le temps donnant un enchevêtrement des signaux des contraintes des éléments du maillage du matériau. Le filtre en question est basé sur l'algorithme suivant :

Les coordonnées x_c, z_c de l'élément critique sont ceux ayant :

$$M(i_c j_c) = M_{nc}(\text{Max}(\sum_{m=0}^{jf} \Delta U(m, n)))$$

Où : $\Delta U(m, n) = U(l, n) - U(p, n)$, lorsque $U(l, n) > U(p, n)$, m = paramètre

du temps, k = durée de la simulation, $t_f = c_k^2 = \frac{k!}{2!(k-2)!}$ et n = paramètre

spatial réunissant les coordonnées i et j en une seule colonne.

En effet c'est la variation de la densité d'énergie de déformation qui entraîne la rupture par fatigue dans le cas des sollicitations dynamiques et non la valeur brute de la densité d'énergie de déformation comme dans le cas statique. Les figures 18, 19, 20 et 21 illustrent l'évolution de la densité d'énergie de déformation dans le temps des éléments critiques filtrés, dans le cas de la solution numérique et la solution analytique. On remarque que l'approche analytique tend vers la solution analytique lorsque l'épaisseur diminue. Les résultats de la solution numérique, sont 3 fois supérieurs à ceux de l'approche analytique dans le cas du spécimen d'épaisseur 30mm. Cette différence diminue dans le spécimen de faible épaisseur en l'occurrence 14mm. D'autres simulations ont montré que la différence entre l'approche analytique et la solution numérique, augmente lorsque le maillage est raffiné, même dans le cas des faibles épaisseurs, ceci s'explique par le fait que dans les calculs numériques le code commercial Abaqus tient compte de la non linéarité géométrique qui introduit un terme non nul dans le second membre des équations donnant les termes du tenseur de Cauchy. Or, dans l'approche analytique on considère un équilibre mécanique permanent traduisant un cas rigide ne donnant pas de flèche. Les figures 22 et 23 illustrent le profil de la somme des variations de la densité d'énergie de déformation selon l'approche analytique, dans les quatre spécimens triangulaires. L'élément critique 19949, filtré dans les quatre cas est situé au sommet de chaque triangle. La figure 25 montre une vue instantanée de l'état de l'énergie de déformation SENER dans le cas du calcul numérique par la MEF et une vue en perspective de l'état de la somme des variations de la SENER dans le spécimen triangulaire d'épaisseur 20mm. Le filtrage des résultats de la somme des variations de densité d'énergie de déformation obtenu par les calculs numériques de la méthode des éléments finis MEF montre que l'élément critique est

aussi situé au sommet de chacun des quatre spécimens triangulaires, comme montré par la figure 26. L'élément critique s'illustre par une nette singularité dans le cas de l'approche analytique comme montré par la figure 25. La figure 27, montre le spectre de la SENER de l'élément critique dans le cas de la MEF et selon l'approche analytique.

4.4 Extraction des cycles «rainflow» d'une PSD :

Étant donné que le chargement est de nature aléatoire, alors on doit procéder au comptage des cycles «rainflow» par la méthode de Markov automatisé par le groupe WAFO (Wave Analysis for Fatigue and Oceanography) en utilisant le logiciel Matlab. En effet, le problème du passage direct de la PSD du processus $\sigma(t)$ au comptage des cycles «rainflow» a été résolu par une théorie rigoureuse basée, d'une part, sur la définition d'un cycle «rainflow» proposée en 1987 par Rychlik et d'autre part, sur la théorie des chaînes de Markov, selon la référence [36]. En effet, un cycle «rainflow», tel qu'il est illustré par la figure 18, peut être mathématiquement caractérisé de la façon suivante: Considérons la contrainte $\sigma(t)$ où $t \in [0, T]$ et le maximum de la contrainte M_i de niveau k se produisant au temps t_i . Nous pouvons définir les étendues (m_i^-, M_i) et (M_i, m_i^+) où:

- m_i^- est le minimum de $\sigma(t)$ qui se trouve entre le dernier passage à pente négative de $\sigma(t)$ par le niveau k et le maximum M_i . Ce minimum se trouve à gauche de M_i et se produit au temps t_i^- .

- m_i^+ est le minimum de $\sigma(t)$ qui se trouve entre M_i et le premier passage à pente positive de $\sigma(t)$ par le niveau k . Ce minimum se trouve à droite de M_i et se produit au temps t_i^+ .

S'il n'existe pas de passage de $\sigma(t)$ par le niveau k avant ou après le temps t_i , alors respectivement $t_i^- = 0$ ou $t_i^+ = T$. Le cycle «rainflow» extrait au temps t_i est alors défini, soit comme l'étendue (m_i^{rfc}, M_i) , soit (M_i, m_i^{rfc}) . Ce minimum m_i^{rfc} est déterminé en appliquant la condition :

$$\text{équation 74 : } m_i^{rfc} = j = \begin{cases} \max(m_i^-, m_i^+) & \text{si } t_i^- > 0 \\ m_i^+ & \text{sinon} \end{cases}$$

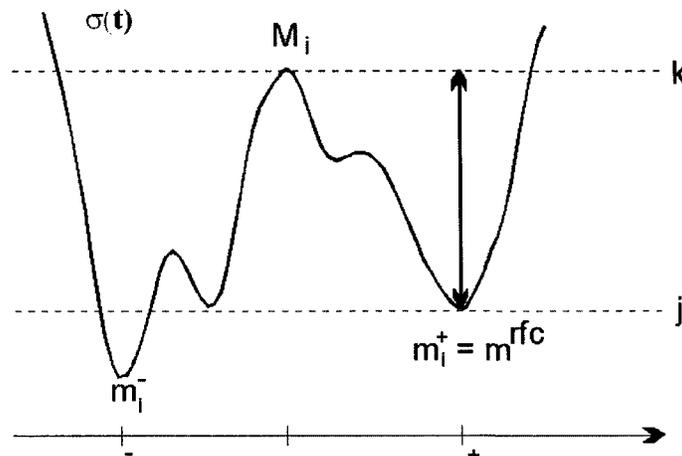


figure 18. Caractérisation mathématique d'un cycle «rainflow».

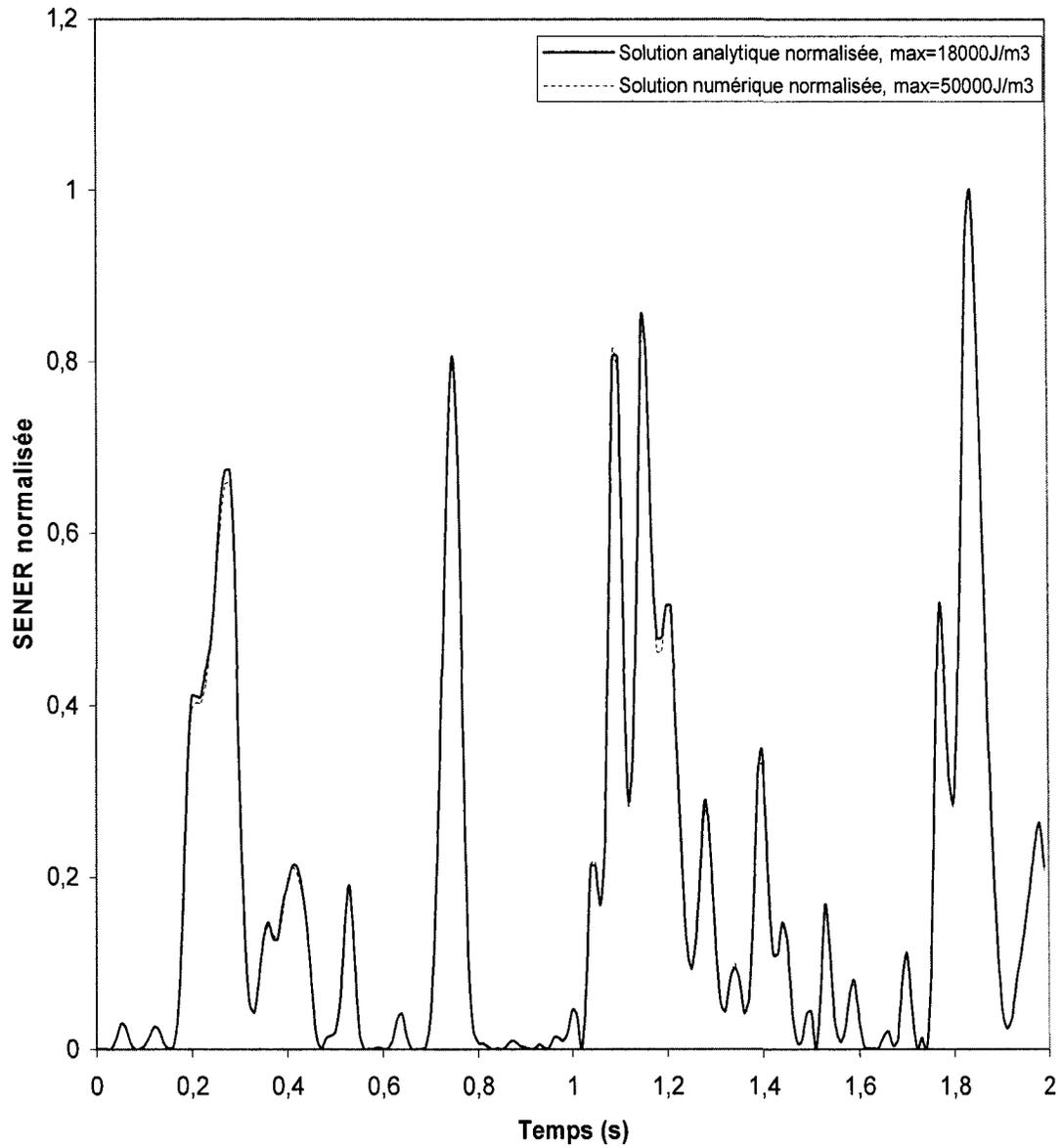


figure 19. Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments dans une pièce triangulaire d'épaisseur 30mm.

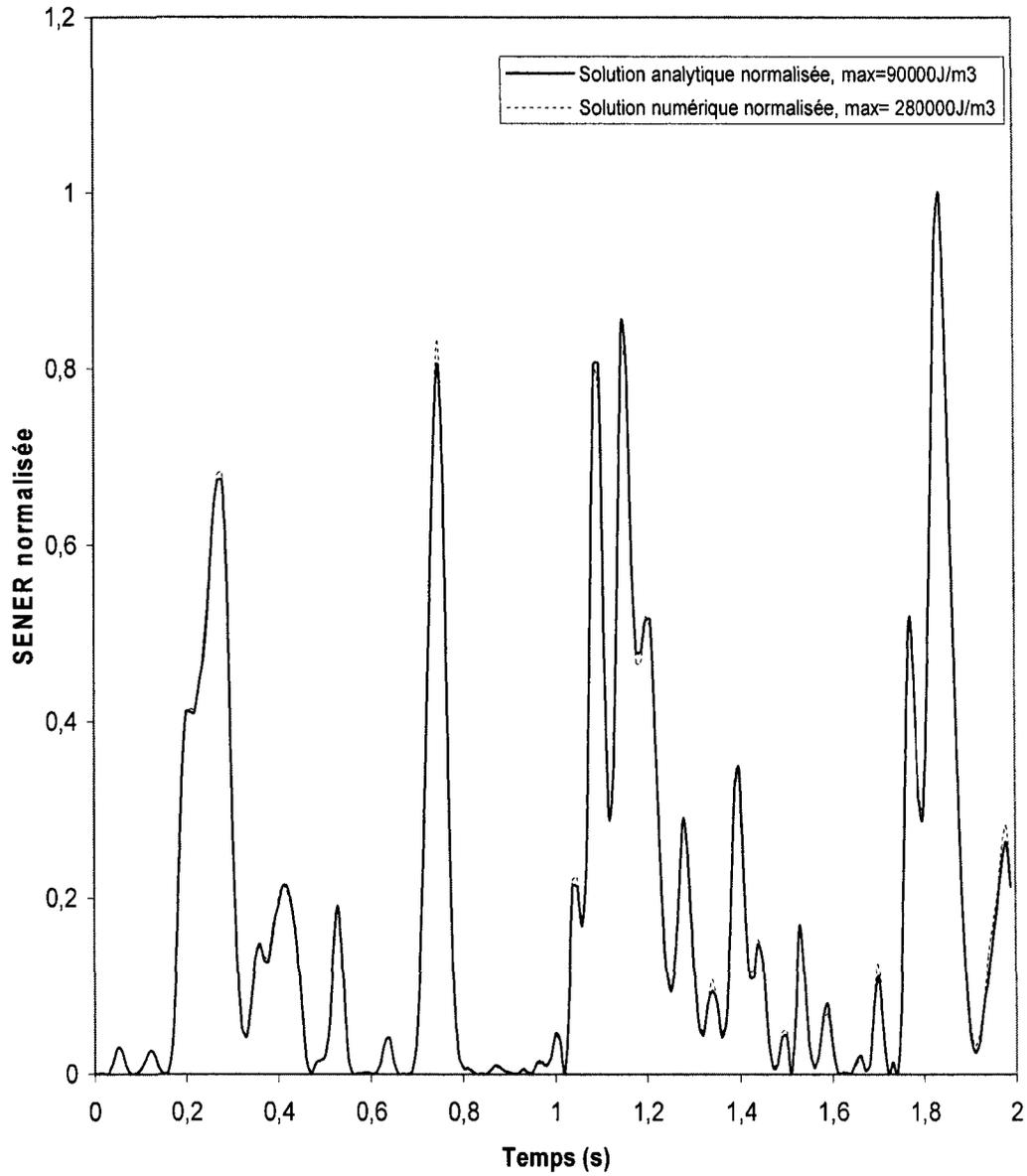


figure 20. Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments dans une pièce triangulaire d'épaisseur 20mm.

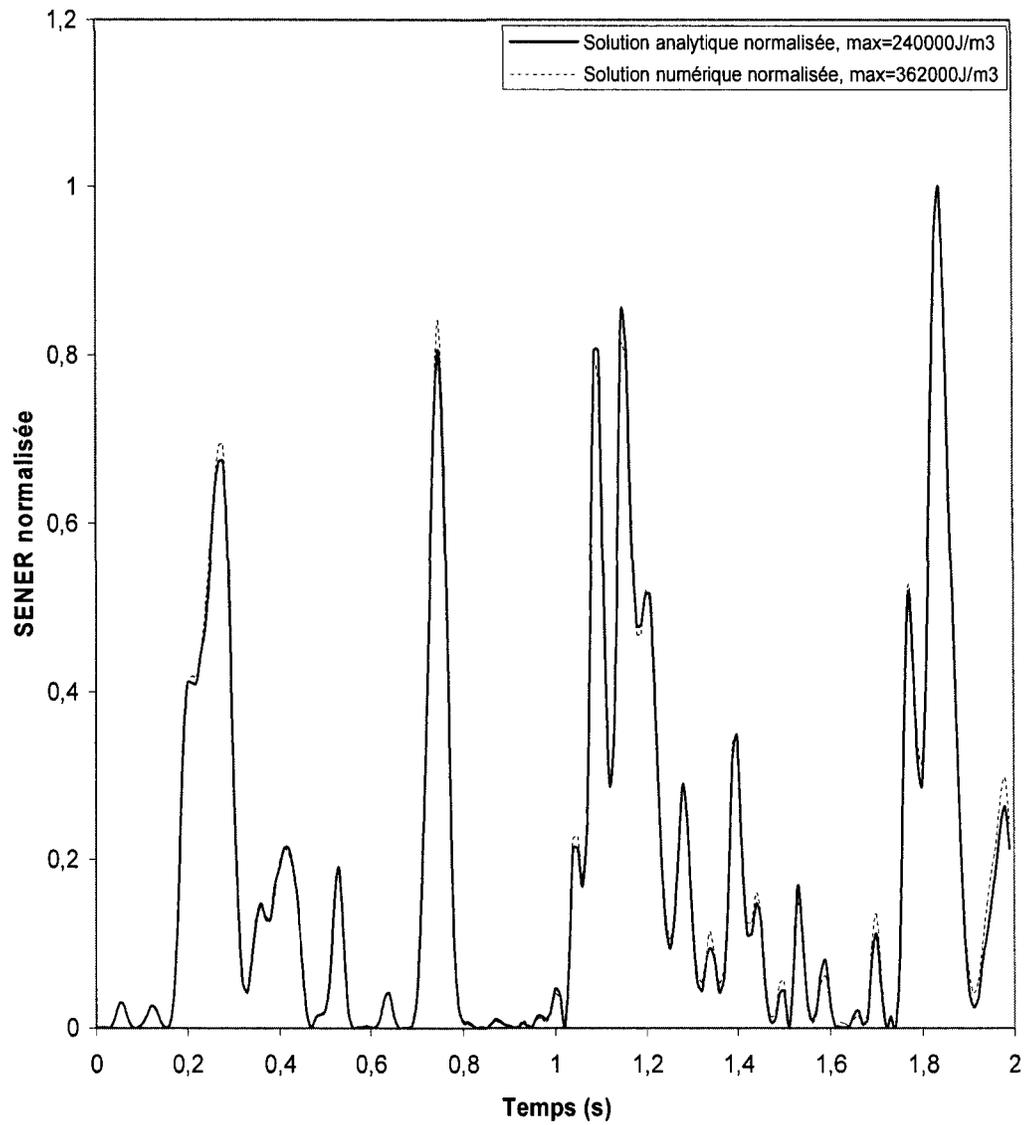


figure 21. Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments dans une pièce triangulaire d'épaisseur 16mm.

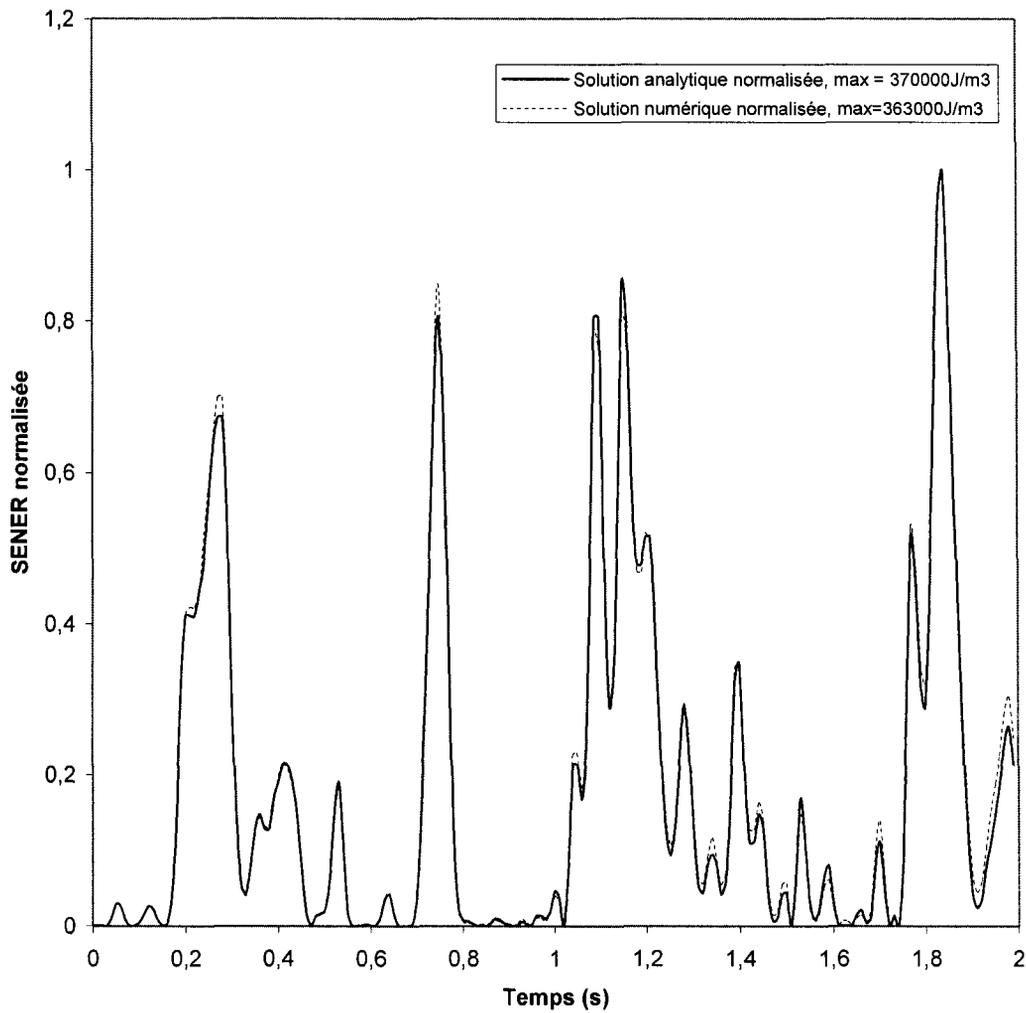


figure 22. Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments critiques dans une pièce triangulaire d'épaisseur 14mm.

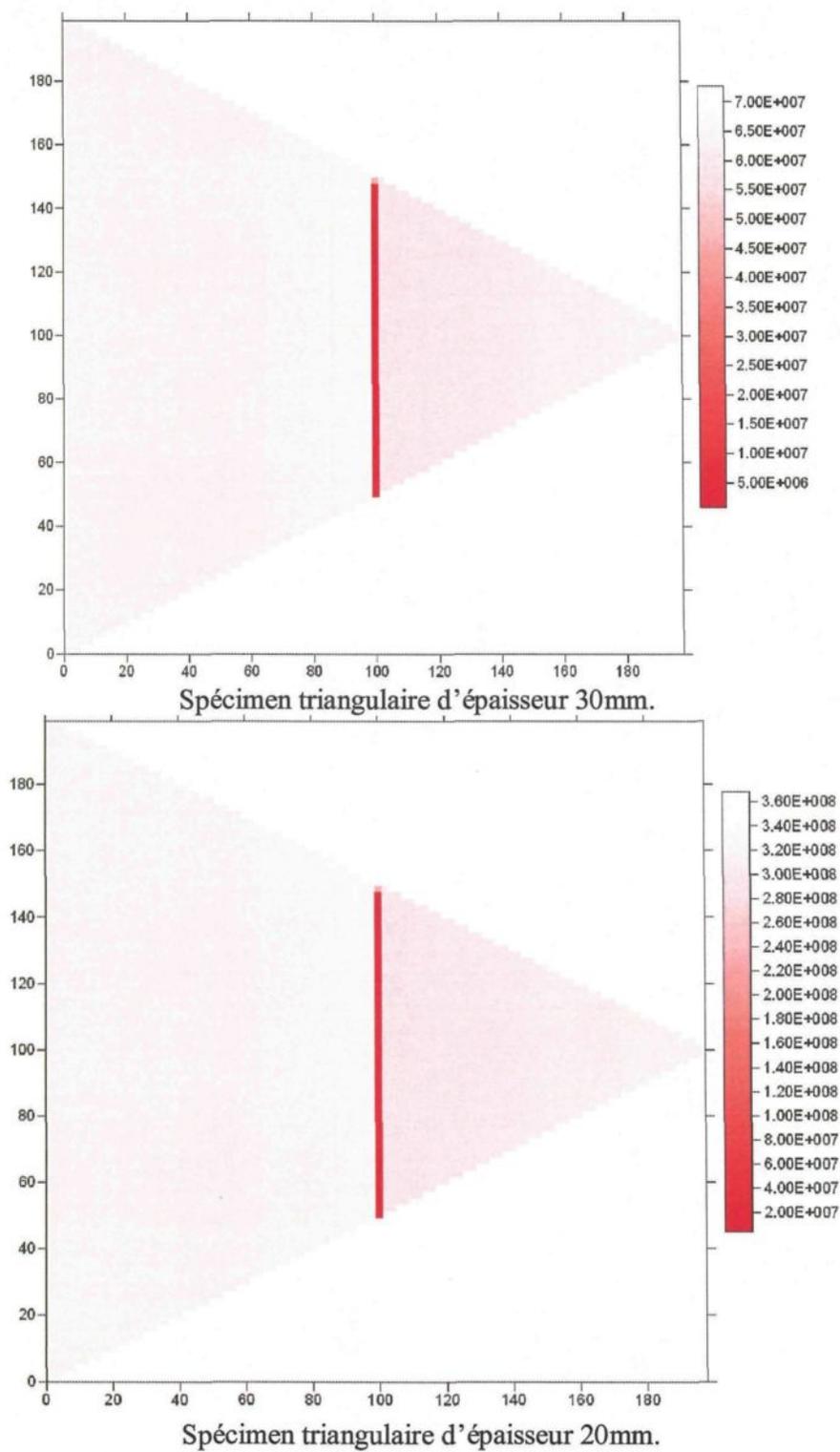


figure 23. Profil de la somme des variations de l'énergie de déformation selon l'approche analytique.

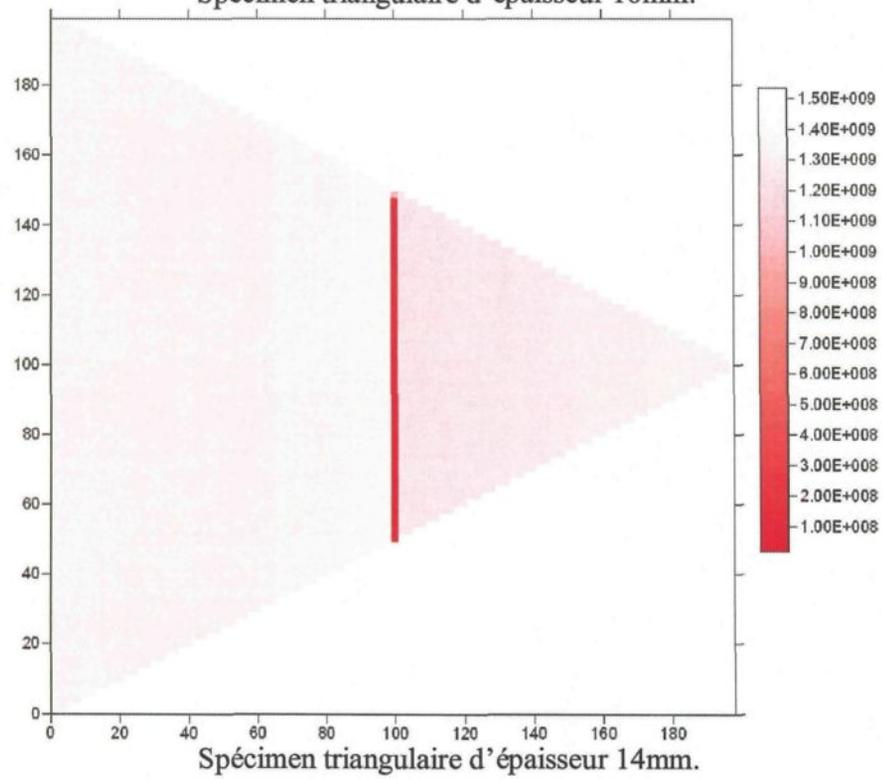
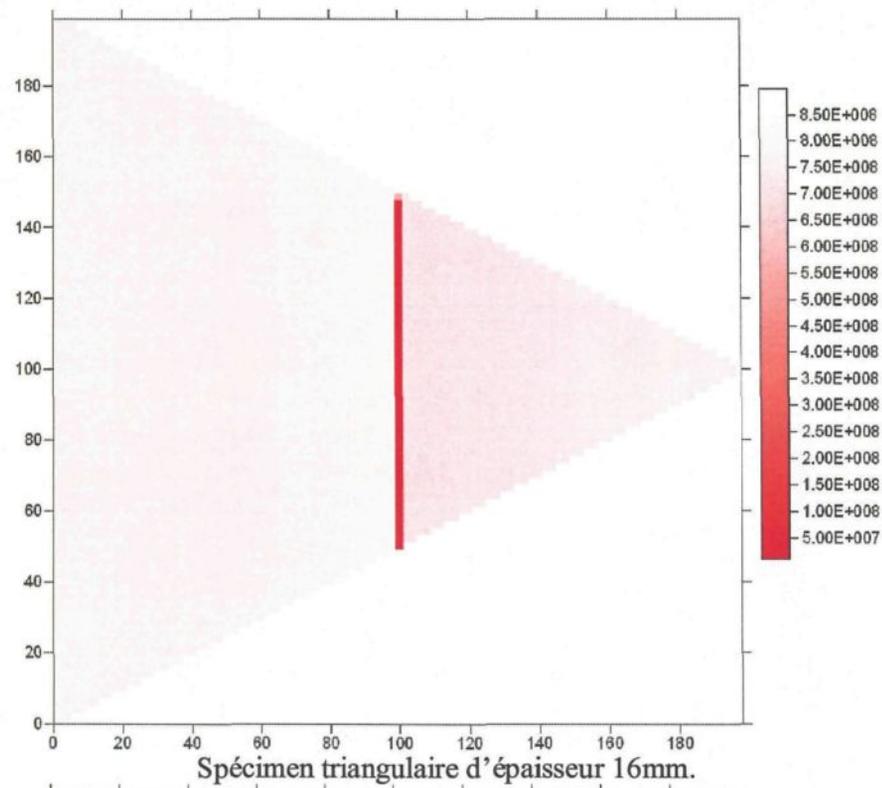
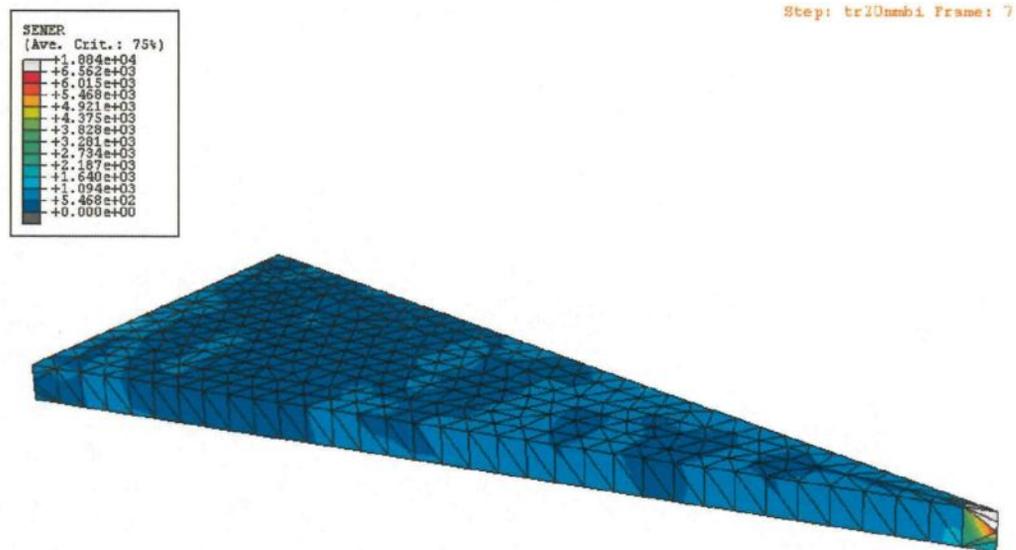
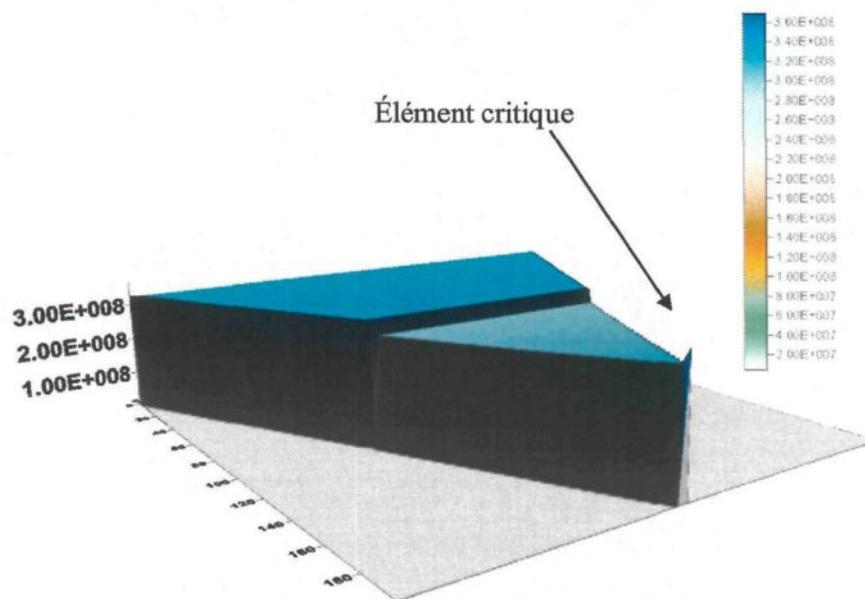


figure 24. Profil de la somme des variations de l'énergie de déformation selon l'approche analytique.

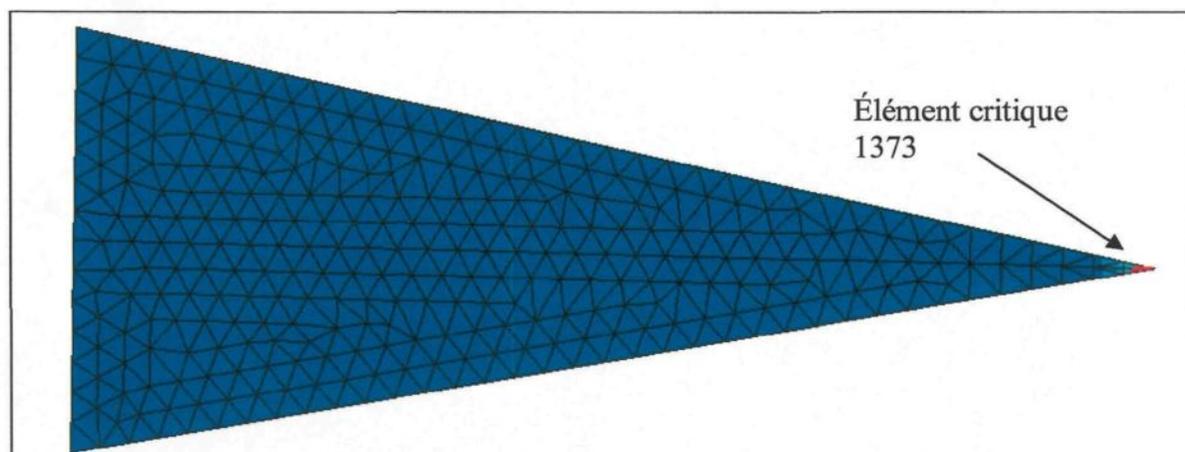


Vue instantanée de l'état de la densité d'énergie de déformation obtenue par la MEF.

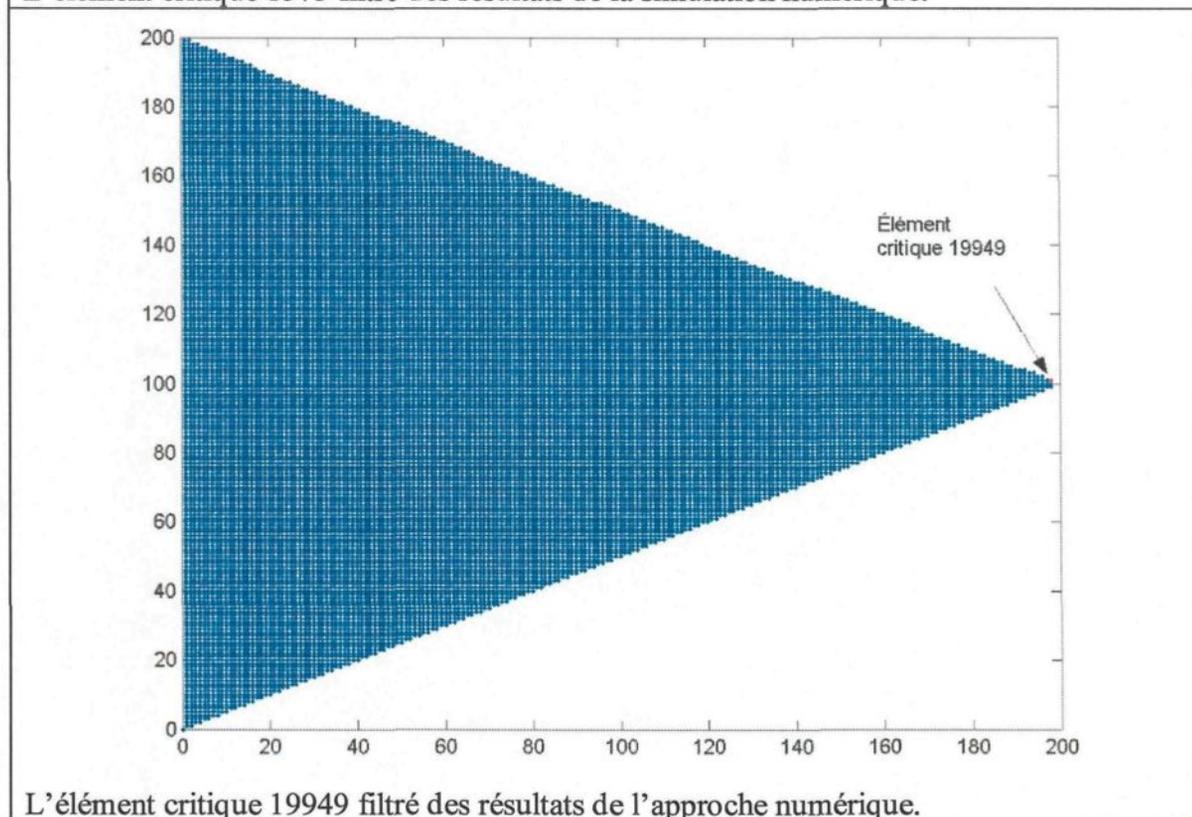


Vue en perspective de la somme des variations de la densité d'énergie de déformation, selon l'approche analytique.

figure 25. Vue en perspective du spécimen triangulaire d'épaisseur 20mm.

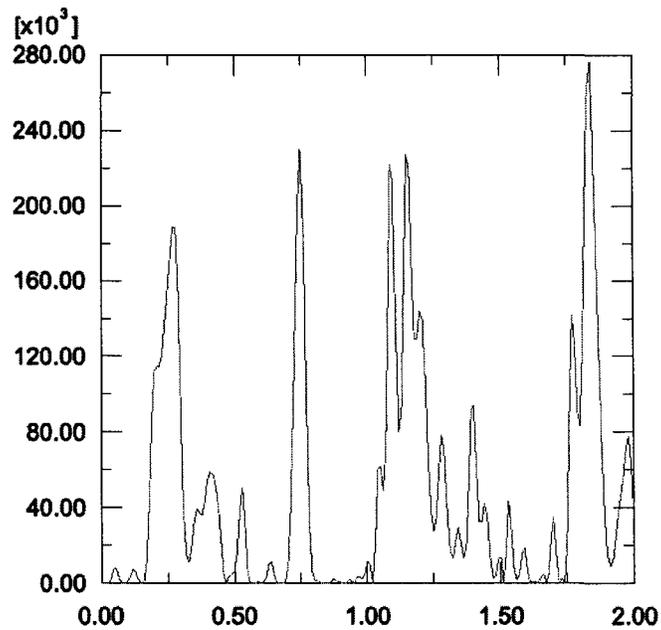


L'élément critique 1373 filtré des résultats de la simulation numérique.

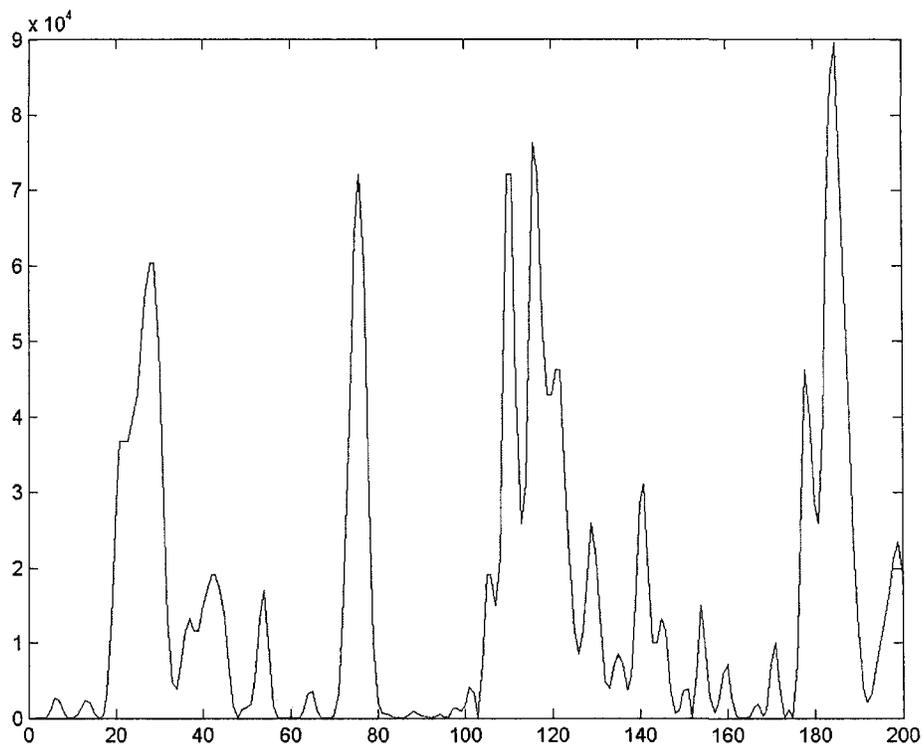


L'élément critique 19949 filtré des résultats de l'approche numérique.

figure 1. Localisation de l'élément critique dans le cas du spécimen d'épaisseur 20mm.



Densité d'énergie de déformation en fonction du temps de l'élément critique cas numérique : maximum 280×10^3 J/m³.



Densité d'énergie de déformation en fonction du temps de l'élément critique cas selon l'approche analytique : maximum 90×10^3 J/m³.

figure 27. Spectre de la densité d'énergie de déformation de l'élément critique du spécimen d'épaisseur 20mm.

Il faut noter qu'avant d'extraire les cycles « rainflow », il faut corriger le signal des anomalies qu'il peut contenir pour pouvoir exécuter l'algorithme de Markov. La figure 28 montre le signal brut SENER de l'élément critique selon l'approche analytique, le type d'anomalie qu'on retrouve dans ce signal et un exemple de comptage des cycles « rainflow », du spécimen triangulaire d'épaisseur 20mm. L'anomalie est corrigée par la commande Matlab `[proc,b]=dat2tp(proc,0,'none')` de l'interface WAFO, comme montré par les figures 28-a et 28-b.

4.5 Calcul de l'endommagement

Dans le cas d'un chargement à amplitude variable, on utilise la loi de cumul de l'endommagement selon la loi de Palmgren-Miner. En effet l'endommagement provoqué par un certain niveau d'amplitude est pris comme le quotient du nombre de cycles de chargement n_i à ce niveau par le nombre de cycles à la rupture N_i à ce même niveau, lequel est fourni par la courbe de Wöhler ou par le calcul analytique comme dans le présent travail de recherche. On suppose ensuite que les endommagements se cumulent sans qu'il y ait influence d'un niveau sur l'autre. L'endommagement total est donnée par l'équation suivante :

$$\text{équation 75: } D = \sum_i \frac{n_i}{N_i}$$

La rupture est supposée se produire lorsque $D = 1$. Il faut ainsi trouver le nombre de fois que le cycle à amplitude variable se répète pour que D soit égal à l'unité. Il faut trouver le nombre B_f qu'on doit multiplier par D pour atteindre la rupture. B_f se calcul selon l'équation:

équation 76:
$$B_f = \frac{1}{\sum_i \frac{n_i}{N_i}}, \text{ car } B_f D = B_f \left(\sum_i \frac{n_i}{N_i} \right) = 1$$

Le principal reproche que l'on puisse faire à la loi de Palmgren-Miner est d'ignorer l'ordre dans lequel se succèdent les niveaux de chargement [11]. Or, l'expérience montre que la vitesse de fissuration ne dépend pas seulement de l'amplitude du chargement à l'instant considéré mais encore des amplitudes au cours des cycles précédents. Il y a donc un effet d'un niveau de sollicitation sur les niveaux ultérieurs.

En règle générale, lorsque la structure est d'abord soumise à des cycles de faible amplitude, puis à des cycles d'amplitude plus élevée, l'endommagement D défini par l'équation 75 est supérieur à l'unité lorsque la rupture se produit. Dans le cas contraire la rupture se produit avant que l'endommagement D ait atteint l'unité. Lorsqu'il s'agit d'un chargement aléatoire, on suppose que l'endommagement D est égal à l'unité lorsque la rupture intervient. Dans tous les cas les valeurs du spectre de la SENER dans le cas de la solution numérique sont supérieures à celles de la solution analytique, comme illustré par le tableau 12. Cependant, la durée de vie est presque la même dans le cas de faibles épaisseurs. L'approche analytique proposée dans cette étude surestime la durée d'une pièce automobile en alliage d'aluminium puisque les valeurs du spectre de l'élément critique, calculées par la MEF sont supérieures à ceux de l'approche analytique lorsque l'épaisseur augmente.

tableau 12. Résultats des durées de vie dans le cas numérique et analytique.

Spécimen	30mm		20mm		16mm		14mm	
	A :	N :	A :	N :	A :	N :	A :	N :
Durée de vie	3,5x10 ⁸	1,3x10 ⁸	7x10 ⁷	2,3x10 ⁷	2,6x10 ⁷	2,4x10 ⁷	1,7x10 ⁷	1,7x10 ⁷

(A : solution analytique. N : solution numérique)

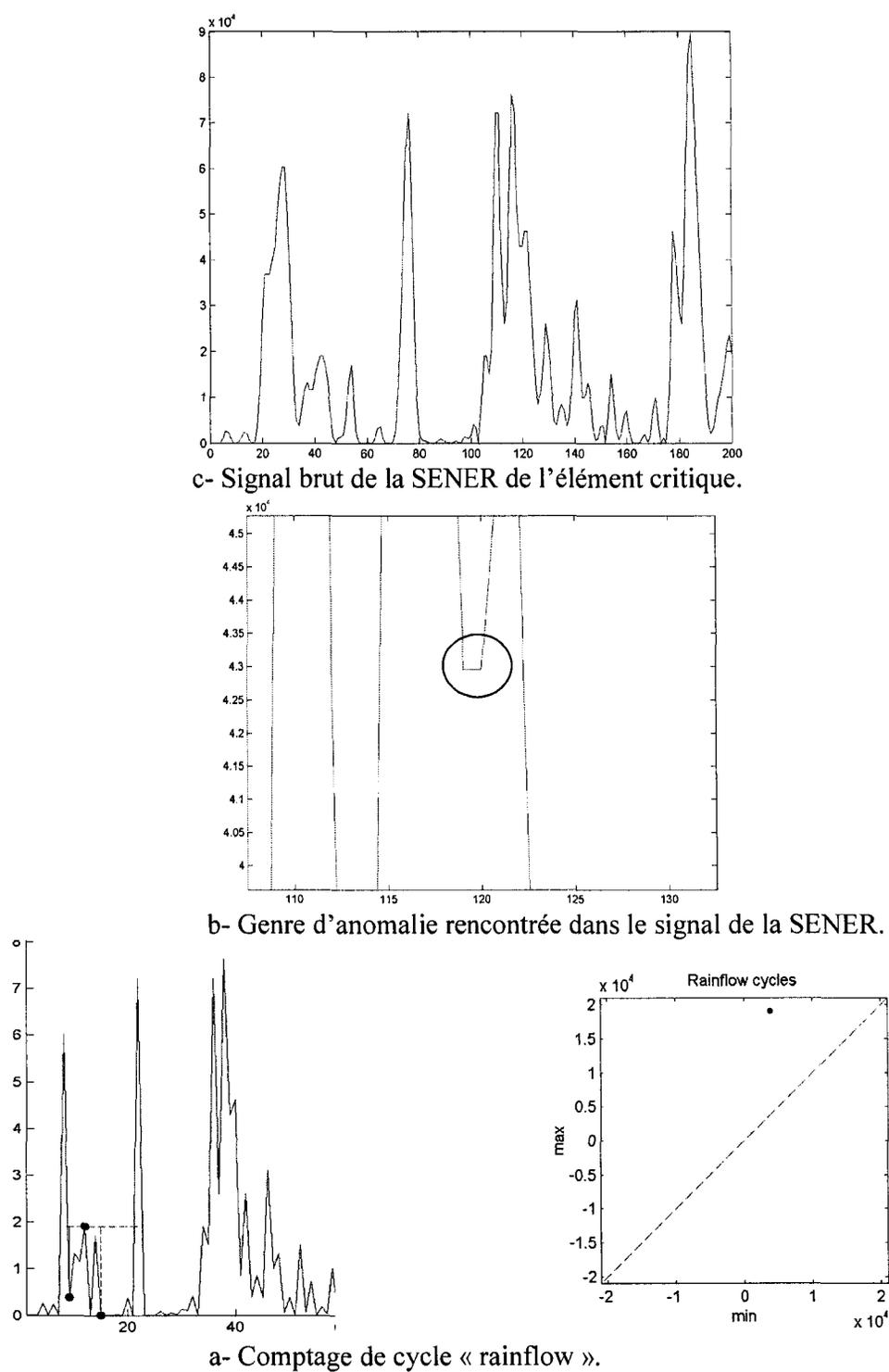


figure 28. Analyse du signal de l'élément critique et extraction des cycles « rainflow ».

Chapitre 5

Développement du modèle numérique élasto-plastique

En réalité, les alliages d'aluminium présentent un comportement élasto-plastique avec une contribution plastique d'environ 36% dans certains cas, comme illustré dans le tableau 13. Gbadebo M. *et Al.*[49, 50], ont développé une solution analytique approchée dans le cas élasto-plastique. En effet, la matrice des incréments du tenseur déformation totale $(d\varepsilon_{ij}^T)$ est la somme de la contribution élastique $(d\varepsilon_{ij}^e)$ et plastique $(d\varepsilon_{ij}^p)$, selon l'équation 77 :

$$\text{équation 77: } (d\varepsilon_{ij}^T)_m = (d\varepsilon_{ij}^e) + (d\varepsilon_{ij}^p)$$

tableau 13. Comportement élasto-plastique de quelques alliages Al [5].

Alliage	Code	Limite ultime σ_u en MPa	Limite élastique σ_e en MPa	* Rapport : $\frac{\sigma_u - \sigma_e}{\sigma_u}$ en %
D'aluminium	2024-T351	455	379	*16,70
	2024-T4 Al	476	303	*36,34
	7075-T6 Al	578	469	*18,85

(* calculé)

Les relations pour estimer l'incrément moyen de la contrainte et la déformation élastique sont formulées par les modèles de Chen et Li, selon la référence [49]. Ainsi, les composantes de la matrice des incréments des contraintes élastique non renforcée, $(d\sigma_{ij})_m$, peuvent être reliées à la contrainte nominale appliquée, $(d\sigma_{ij})$, par :

$$\text{équation 78: } \begin{aligned} (d\sigma_{ij})_m &= d\sigma_{ij} - V_f C_{klmst(m)} (S_{klst} - I) L^{-1} (C_{klst(f)} - C_{klst(m)}) C_{klst(m)}^{-1} d\sigma_{ij} \\ L &= [(V_f - 1) C_{ijkl(m)} (I - S_{ijkl}) + C_{ijkl(m)} (V_f (S_{ijkl} - I) - S_{ijkl})] \end{aligned}$$

V est la fraction volumique du constituant suscrit, les C_{ijkl} représentent les composantes du tenseur de rigidité du constituant suscrit, I est le tenseur identité et les S_{ijkl} sont les composantes du tenseur de Eshelby qui peuvent être trouvées à partir des inclusions géométrique [49] et la matrice de coefficient de poisson. Les composantes de la matrice des incréments de la déformation élastique sont relatées dans le tenseur de contrainte de la loi de Hooke généralisée :

$$\text{équation 79: } d\varepsilon_{ij(m)}^e = C_{ijk(m)}^{-1} d\sigma_{kl(m)}$$

Par contre, si la matrice des contraintes élastiques est renforcée (la plasticité n'est pas négligée mais l'élément est renforcé de façon à ce que la contrainte soit inférieure de loin à la limite d'élasticité conventionnelle), les composantes de la matrice des incréments de contraintes s'écrit :

$$\text{équation 80: } (d\sigma_{ij})_f = d\sigma_{ij} + V_m C_{klmst(m)} (S_{klst} - I) L^{-1} (C_{klst(f)} - C_{klst(m)}) C_{klst(m)}^{-1} d\sigma_{ij}$$

$$\text{et } d\varepsilon_{ij(f)}^e = C_{ijk(f)}^{-1} d\sigma_{kl(f)}.$$

Dans le comportement plastique Gbadebo M. *et Al.* [49] ont développé la théorie endochronique de la plasticité. Ces derniers ont défini les composantes de la matrice des incréments des déformations plastiques d'une manière approximative, comme suit :

$$\Delta \varepsilon_{ij(m)}^p = \frac{a_{ij(m)} \Delta Z}{b}$$

équation 81: où : $a_{ij(m)} = \frac{1}{2} [(\Delta S_{ij(m)})_q + \sum_{r=1}^n (S_{ij(m)}^r)_{q-1} (1 - e^{-\alpha_r \Delta Z})]$

et $b = \sum_{r=1}^n C_r \frac{(1 - e^{-\alpha_r \Delta Z})}{\alpha_r}$

q est le nombre de pas avec lequel on divise la courbe de chargement, $S_{ij(m)}$ sont les composantes de la matrice tenseur de contrainte déviatorique, $S_{ij(m)} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk(m)} \frac{\delta_{ij}}{3}$, où δ_{ij} est delta de Kröner et Z l'échelle intrinsèque du temps associé avec l'historique de la déformation du matériau. C_r et α_r sont des constantes du matériau déterminées par un lissage par les séries de fonctions de Dirichlet, $\rho(z)$, avec n terme en forme de :

$$\rho(z) = \sum_{r=1}^n C_r e^{-\alpha_r z}$$

à la courbe cyclique contrainte-déformation plastique uniaxiale. Par conséquent, dans la présente étude le couplage élasto-plastique multiaxial est assuré par le modèle du code commercial Abaqus. En effet, le module Abaqus a besoin comme entrée le comportement élasto-plastique uniaxial exprimé par la relation de Ramberg-Osgood.

L'analyse numérique du cas non linéaire élasto-plastique est préconisée vu que le code commercial par la méthode des éléments finis, en l'occurrence Abaqus, est disponible. Par conséquent, l'étude du cas non linéaire élasto-plastique dans ce chapitre commence par le montage du modèle par la méthode des éléments finis dans le module Abaqus. Ce modèle prend en considération les deux cas de non linéarité : la non linéarité géométrique (variation de la configuration géométrique du système au cours du temps) et la non linéarité du matériau qui exprime le couplage élasto-plastique. Le schéma d'intégration numérique dépend de la stabilité du schéma, du temps de calcul et

de la précision de la méthode. Le chargement et les conditions aux limites consistent à spécifier les lieux de l'excitation et les degrés de liberté imposés au système. Le maillage prend en considération l'état des contraintes et les points sources : tels que les lieux de chargements et les conditions aux limites. La stratégie globale, après le montage du modèle numérique Abaqus, est illustrée par l'organigramme de la figure 29. En effet, les résultats concernant la densité d'énergie de déformation à partir de l'état des contraintes multiaxiales, du modèle numérique (Abaqus), sont analysés. Nous calculons l'équivalent en mode uniaxial, puisqu'il s'agit de deux tenseurs de même ordre (ordre zéro). L'élément critique est filtré parmi tous les éléments du maillage, donnant la somme des variations positives maximales, puisqu'il s'agit de la fatigue. Le signal du chargement de l'élément critique est corrigé selon la méthode d'extraction des cycles « rainflow », de Markov. Les durées de vie partielles sont calculées par la méthode Newton, étant donné la non linéarité de l'équation de Manson-Coffin. Le nombre de répétition du cycle aléatoire menant la pièce à la rupture est déduit en dernière étape.

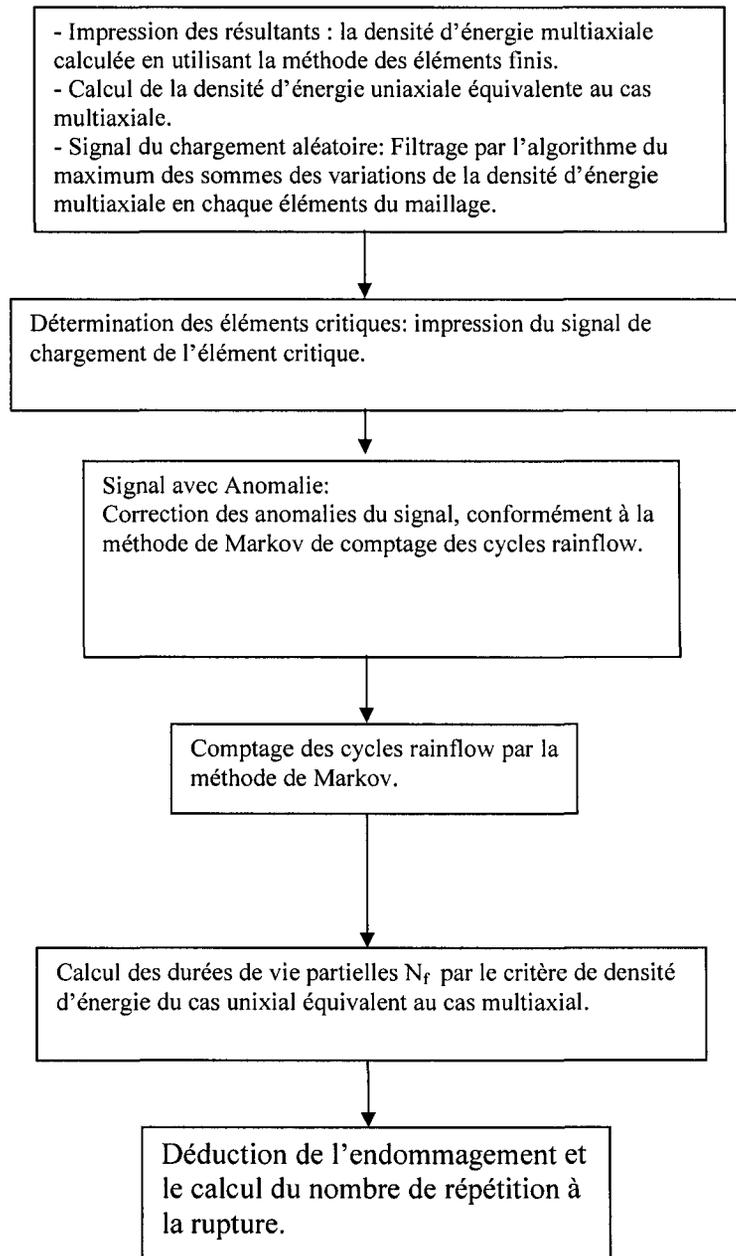


figure 29. Zoom de la partie 3 de l'organigramme principale.

5.1 Critère de fatigue multiaxial dans le cas du couplage élasto-plastique :

Lachowicz [51] a utilisé le critère multiaxial de densité d'énergie sans spécifier la façon de calculer la densité d'énergie de déformation plastique. Pan W-F *et al.*[52] et Lee B.L. *et al.*[53] et B. Li *et al.* [54] ont comparé les résultats expérimentaux de fatigue multiaxiale avec des modèles de critère multiaxial de densité d'énergie déjà existants comme le critère du plan critique qui généralise le modèle uniaxial SWT. Dans le cas multiaxial, on peut ramener l'étude multiaxiale en calculant la durée de vie d'une pièce en mode uniaxial par une quantité d'énergie équivalente à l'énergie multiaxiale, puisqu'il s'agit d'un scalaire en l'occurrence un tenseur d'ordre zéro. En plus, les alliages d'aluminium présentent un comportement plastique important par rapport au comportement élastique (comportement élastique-plastique), le profil non linéaire du matériau est donné par l'équation suivante :

$$\text{équation 82: } \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k}\right)^{1/n'}$$

où $K' = \frac{\sigma_f'}{\varepsilon_f'^{n'}}$: le coefficient de la limite d'endurance, $n' = \frac{b}{c}$ est l'exposant de la dureté cyclique, σ_f' est le coefficient de la résistance à la fatigue, c l'exposant de la ductilité de la fatigue, b est l'exposant de la résistance à la fatigue et ε_f' est coefficient de la ductilité de la fatigue.

L'énergie totale de déformation par unité de volume au niveau de la région critique, peut-être obtenue à partir du modèle en éléments finis tridimensionnels. Il faut obtenir un équivalent de déformation uniaxiale à partir de la densité d'énergie de déformation totale qu'on peut obtenir de l'analyse contrainte-déformation multiaxiale.

Autrement dit, trouver la déformation uniaxiale équivalente qui cause la même densité d'énergie dans le cas uniaxial. Deux approches sont possibles : la densité d'énergie obtenue par l'analyse élastique et l'autre par l'analyse élastique-plastique. D'autres chercheurs ont montré que pour les entailles profondes, comme dans le cas de la déformation plastique localisée, la distribution de l'énergie dans la zone plastique est aussi la même que pour les matériaux élastiques linéaires. Ceci veut dire qu'en présence de déformation plastique localisée à petite échelle, le profil élastique linéaire grossier du matériau entoure la déformation de l'entaille de contrôle dans la zone plastique. Ainsi, on peut conclure que la densité d'énergie U_σ due au champ contrainte-déformation élastique-plastique local, est approximativement égale à la densité d'énergie U_s due au champ contrainte-déformation élastique:

$$\text{équation 83: } U_s = U_\sigma, \text{ ou } \int^{\epsilon_y} S_{ij} d\epsilon_{ij} = \int^{\epsilon_y} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$$

Dans cette méthodologie l'analyse élastique tridimensionnelle du modèle par éléments finis a été utilisée et la densité totale de l'énergie de déformation dans la majorité de la région critique est déterminée par la sommation des contributions de toutes les composantes contraintes-déformations. Ceci est utilisé pour calculer la déformation équivalente correspondant à la densité d'énergie qui compose les composantes plastiques et élastiques dans le cas uniaxial. Ceci veut dire que la valeur de la densité d'énergie de déformation obtenue à partir de l'analyse en MEF tridimensionnelle est égalisée à la densité d'énergie du cas uniaxial qui compose l'énergie de déformation plastique et élastique. La formulation mathématique de cette méthodologie est la suivante :

l'énergie totale de la déformation uniaxiale par unité de volume, peut-être obtenue par une intégration [17] :

$$\text{équation 84: } U_a = U_{ae} + U_{ap} = \int_0^{\varepsilon_a} \sigma_a d\varepsilon_a$$

on sait que :

$$\text{équation 85: } \varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}}$$

ainsi :

$$\text{équation 86: } \frac{d\varepsilon_a}{d\sigma_a} = \frac{1}{E} + \frac{\sigma_a^{\frac{1-n'}}{n'}}{n' K'^{\frac{1}{n'}}$$

Alors que l'équation 14 devient :

$$\text{équation 87: } U_a = \int \sigma_a \left(\frac{1}{E} + \frac{\sigma_a^{\frac{1-n'}}{n'}}{n' K'^{\frac{1}{n'}}} \right) d\sigma_a$$

après simplifications ;

$$\text{équation 88: } U_a = \frac{\sigma_a^2}{2E} + \frac{\sigma_a}{n'+1} \left(\frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}}$$

La résolution de l'équation 88 permet d'obtenir la contrainte requise pour produire la même densité d'énergie dans le cas uniaxial. En substituant la contrainte dans l'équation 85, la déformation correspondante est obtenue. Ayant la déformation, la prédiction de la fatigue est possible en utilisant l'équation 89 de Manson-Coffin:

$$\text{équation 89: } \frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c$$

où $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}$ est l'intervalle de déformation, σ'_f est le coefficient de la résistance à la fatigue, N le nombre de cycles, E est le module de Young, c l'exposant de la ductilité de la fatigue, b est l'exposant de la résistance à la fatigue et ε'_f est coefficient de la ductilité de la fatigue. Les résultats montrent qu'il est clair que cette méthodologie surestime la durée de vie dans la région des bas cycles de fatigue, car la déformation plastique n'est pas comptée proprement. Il faut noter que cette méthodologie est basée sur le fait que la déformation plastique est une petite fraction de la déformation totale, c'est pour cela cette méthode délivre de bonnes estimations dans les régions à haut cycle de fatigue où la déformation élastique contrôle les processus de dommage par fatigue. Donc, cette méthodologie n'est pas unique comme outil de prédiction à bas cycle et haut cycle de fatigue. Dans le cas plus complexe où l'état des contraintes est multiaxial, après avoir extrait la densité d'énergie de déformation du cas multiaxial des calculs numérique de la MEF, on calcule la densité d'énergie de déformation équivalente au cas uniaxial en premier lieu. Le calcul de la densité d'énergie du cas uniaxial équivalent au cas multiaxial est résumé dans l'organigramme de la figure 30 :

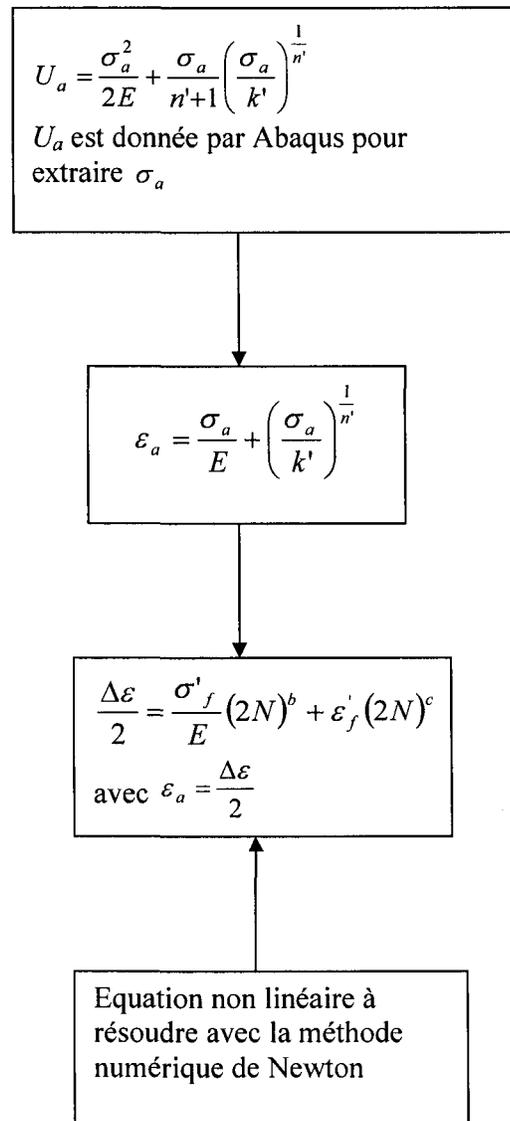


figure 30. Organigramme résumant le calcul de la densité d'énergie uniaxiale équivalente au cas multiaxiale.

5.2 Modèle numérique élasto-plastique (cas rigide : non amorti) :

Dans cette section on traite le cas rigide, sans amortissement, pour connaître le comportement de la pièce dans de telles conditions. En effet, selon H. Rahnejat [45] le bras de suspension ne peut pas supporter une force de contre réaction d'un quart de poids du véhicule qui est de l'ordre de 3750N correspondant au cas rigide comme le montre la figure 31. L'étude de fiabilité concerne une pièce du système de suspension Macpherson d'un véhicule, en alliage d'aluminium 7075-T6. Cette pièce est soumise à l'excitation aléatoire de la route décrite par une PSD et au quart du poids du véhicule qui lui est opposée. Le bout opposé à l'endroit de l'excitation de la route, est lié au joint de suspension de façon à permettre une rotation autour de ce dernier, comme illustré dans le module de chargement et des conditions de limites. Les dimensions de la pièce sont les suivantes : épaisseur 2,5cm, longueur 50 cm et largeur 30 cm. Le design de la pièce est réalisé à l'aide le logiciel Solidwork. Le fichier du design final est sauvegardé sous forme d'une extension qui garde les unités du système international *SI*, puis importé dans le logiciel de traitement numérique par la méthode des éléments finis.

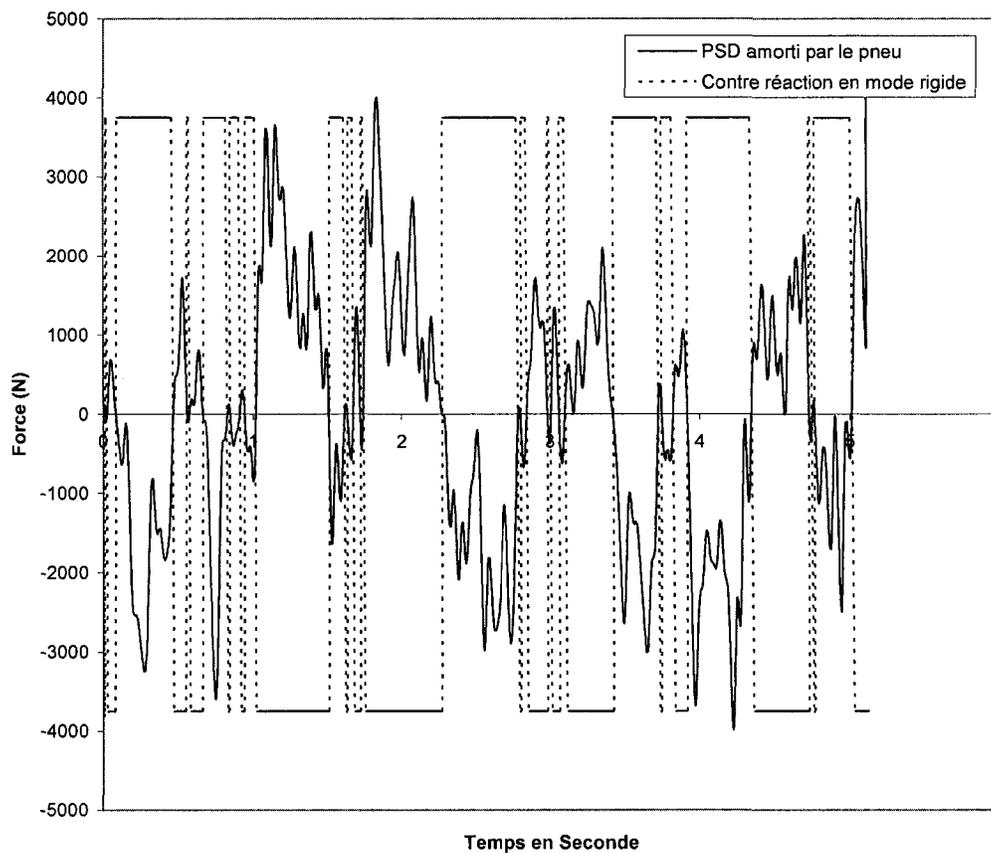


figure 31. Le spectre de chargement en mode rigide.

a- Matériau : couplage élasto-plastique :

Le couplage élasto-plastique est pris en considération en entrant les paramètres élastiques comme le module de Young, le coefficient de poisson et la densité. Le comportement élasto-plastique est décrit par la relation uniaxiale de Ramberg-Osgood. En effet, puisque les alliages d'aluminium présentent un comportement plastique important par rapport au comportement élastique (comportement élastique-plastique), le profil non linéaire est donné par l'équation :

équation 90:
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{k'}\right)^{1/n'}$$

où $K' = \frac{\sigma_f'}{\varepsilon_f'^{n'}}$ représente le coefficient de la limite d'endurance, $n' = \frac{b}{c}$ est l'exposant de

la dureté cyclique, σ_f' est le coefficient de la résistance à la fatigue, c l'exposant de la ductilité de la fatigue, b est l'exposant de la résistance à la fatigue et ε_f' est coefficient de la ductilité de la fatigue.

La figure 32 et le tableau 14 illustrent le comportement élasto-plastique non linéaire du matériau :

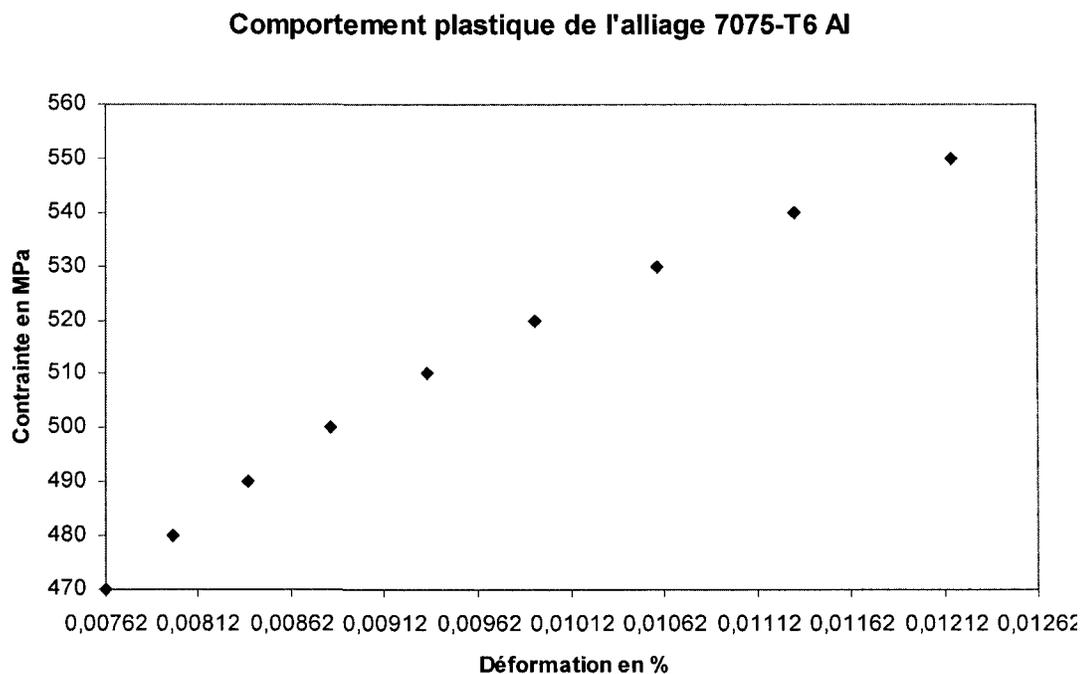


figure 32. Comportement plastique de l'alliage 7075-T6.

tableau 14. Les données de la figure 32

Contrainte en MPa	Déformation en %.
469	0
470	0,007624144
480	0,007985676
490	0,00838959
500	0,008842901
510	0,009353612
520	0,009930821
530	0,010584851
540	0,011327383
550	0,012171606

Le comportement plastique de l'alliage représente presque 19% de la déformation totale. Le module propriété du matériau du logiciel Abaqus permet de prendre en considération le couplage élasto-plastique du matériau, décrivant son comportement non linéaire. Abaqus utilise ainsi le comportement uniaxial non linéaire du matériau, comme a démontré Gbadebo M. *et Al.*[49].

b- Schéma d'intégration :

Comme dans la majorité des méthodes numériques de résolution des équations différentielles, il existe deux schémas d'intégration dans le cas de la méthode des éléments finis : explicite et implicite. Le choix entre la méthode dynamique explicite et implicite est difficile. Cependant, il est recommandé de comparer les résultats obtenus par les deux méthodes. La méthode implicite utilise la stratégie de l'incrément automatique basée sur la méthode de résolution itérative complète de Newton :

$$\text{équation 91: } \Delta u^{(i+1)} = \Delta u^{(i)} + K_t^{-1} (F^{(i)} - I^{(i)})$$

où K_t est la matrice instantanée tangente de rigidité, F est le vecteur des forces appliquées, I est le vecteur des forces internes et Δu est l'incrément du déplacement

[55, 56]. Selon Sun J.S, Lee K.H. et Lee H.P [55], Hilbert *et al.* ont défini la procédure dynamique implicite par :

$$\text{équation 92: } M\ddot{u}^{(i+1)} + (1 + \alpha)Ku^{(i+1)} - \alpha Ku^{(i)} = F^{(i+1)}$$

où M est la matrice masse, K la matrice de rigidité, F le vecteur des chargements appliqués et u le vecteur déplacement :

$$\text{équation 93: } u^{(i+1)} = u^{(i)} + \Delta t \dot{u}^{(i)} + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}^{(i)} + \beta \ddot{u}^{(i+1)} \right)$$

$$\text{équation 94: } \dot{u}^{(i+1)} = \dot{u}^{(i)} + \Delta t \left((1 - \gamma) \ddot{u}^{(i)} + \gamma \ddot{u}^{(i+1)} \right)$$

avec : $\beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha^2)$, $\gamma = \frac{1}{2} - \alpha$, $\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 0$, $\alpha = -0,05$ est choisi par défaut dans Abaqus comme le plus petit terme d'amortissement qui élimine rapidement le bruit de haute fréquence sans avoir un effet significatif sur la réponse fréquentielle basse [55]. Pour la méthode implicite, le coefficient de tolérance résiduel de demi-incrément HAFTOL est important dans le contrôle de la précision des résultats.

Le schéma d'intégration explicite est basé sur l'implémentation des règles d'intégration avec l'utilisation des éléments diagonaux de la matrice masse. L'équation de mouvement du corps est intégrée en utilisant la règle d'intégration de la différence centrée explicite :

$$\text{équation 95: } u^{(i+1)} = u^{(i)} + \Delta t^{(i+1)} \dot{u}^{(i+1)}$$

$$\text{équation 96: } \dot{u}^{(i+1/2)} = \dot{u}^{(i-1/2)} + \frac{1}{2} (\Delta t^{(i+1)} + \Delta t^{(i)}) \ddot{u}^{(i)}$$

Les accélérations au début de l'incrément [56] peuvent être exécutées selon l'équation 97 :

équation 97: $\ddot{u}^{(i)} = M^{-1}(F^{(i)} - I^{(i)}).$

La méthode explicite est conditionnellement stable, contrairement à la méthode implicite. Ainsi, l'incrément du temps doit satisfaire à la condition suivante [55, 57] :

équation 98: $\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}}$

où ω_{\max} est la valeur propre maximale de l'élément. Une estimation conservatrice de l'incrément stable du temps est donnée par la valeur minimale de tous les éléments. La limite de stabilité décrite par l'équation 98 peut être écrite comme suit [55] :

$$\Delta t = \min\left(\frac{L_e}{c_d}\right)$$

où L_e caractérise les dimensions de l'élément et c_d est la vitesse dilatationnelle de l'onde effective du matériau. À noter que la procédure explicite ne requière pas d'itérations ni de matrice tangente de rigidité [56]. Dans la présente étude, il s'agit d'une intégration implicite dans un premier temps sans le contrôle du coefficient HAFTOL. La simulation est exécuté pour une période de temps de 5,11 s, un pas de temps de 0,01 s et un nombre maximum d'incrément de 600 pour pouvoir terminer l'analyse. Les variables de sorties, telle que la densité d'énergie multiaxiale, sont imprimées à chaque pas de temps. Le contrôle de la non linéarité géométrique, due à la variation de la configuration géométrique en fonction du temps, est activé dans le module STEP de Abaqus.

c- Chargement :

Le spectre de la route secondaire est normalisé, donc on a multiplié les valeurs de ce spectre par un facteur commun estimé à partir de la quantité de mouvement

échangée entre la route et le pneu d'un quart de véhicule allant avec une vitesse de 75 km/h. En effet sur une route secondaire, la vitesse du véhicule est inférieure à 75 km/h (21 m/s). À cette vitesse, un véhicule de 1400 kg a une quantité de mouvement égale à 29 167 kg.m/s. Ainsi en deux secondes, on peut estimer une force d'excitation maximale de $29\ 167 / 2 = 14583$ N. Cette force distribuée d'une manière égale sur les quatre systèmes de suspension, donne une force partielle $14583/4 = 3645$ N majorée à 4000N. Comme montré dans la figure 33, les forces concentrées sont remplacées par des pressions surfaciques uniformes selon l'équation :

$$\text{équation 99 : } P = \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{F}{S}$$

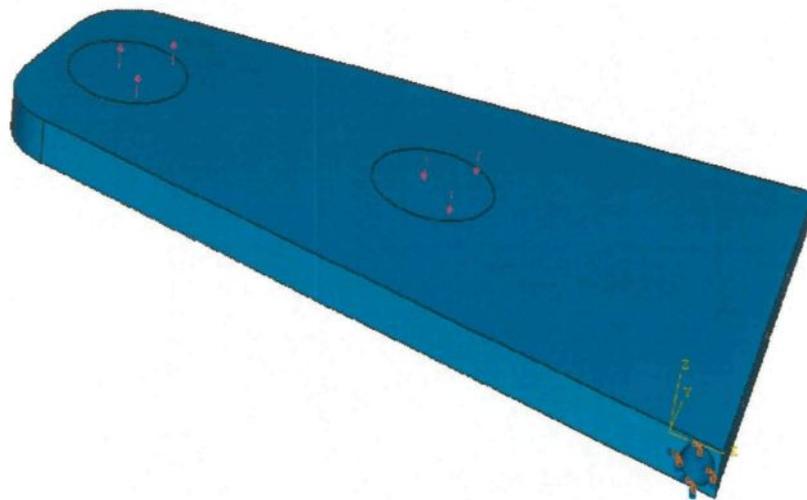


figure 33. Chargement et conditions aux limites dans la pièce en alliage Al 7075-T6.

La force est distribuée sur une surface de rayon ayant une valeur de 4 cm au bord droit de la pièce illustrée dans la figure 33, ce qui nous permet d'obtenir une pression

maximale $P_d = \frac{4000N}{\pi(4 \times 10^{-2})^2 (m^2)} = 7.96 * 10^5 Pa$. De la même manière on obtient une

pression au milieu de la pièce $P_m = \frac{3750N}{\pi(4 \times 10^{-2})^2(m^2)} = 7.46 * 10^5 Pa$. Le système de

contrôle du système de suspension oblige les deux pressions à être de sens opposés. Les données de la PSD concernent le déplacement vertical du pneu du véhicule. Pour pouvoir transformer ces données en pression locale uniforme, on a normalisé ces valeurs en divisant par la valeur maximale, puis multiplié chaque valeur normalisée par P_d . La valeur de la pression P_m , est ainsi multipliée par le signe des valeurs de P_d , comme le montre le tableau 15. La pièce est contrainte à des déplacements et rotations nuls, représentant un état de contrainte extrême.

tableau 15. Normalisation des valeurs pour les 0,28 premières secondes.

temps	PSD(aléatoire)	Normalisation	Poids (P_m)
0	0	0,00E+00	0
0,01	8,01E-04	2,81E-02	1
0,02	-6,75E-04	-2,37E-02	-1
0,03	4,01E-04	1,41E-02	1
0,04	3,03E-03	1,06E-01	1
0,05	4,88E-03	1,71E-01	1
0,06	4,55E-03	1,60E-01	1
0,07	2,62E-03	9,19E-02	1
0,08	6,23E-04	2,19E-02	1
0,09	-7,38E-04	-2,59E-02	-1
0,10	-1,93E-03	-6,77E-02	-1
0,11	-3,40E-03	-1,19E-01	-1
0,12	-4,55E-03	-1,60E-01	-1
0,13	-4,24E-03	-1,49E-01	-1
0,14	-2,43E-03	-8,53E-02	-1
0,15	-8,24E-04	-2,89E-02	-1
0,16	-1,65E-03	-5,79E-02	-1
0,17	-5,61E-03	-1,97E-01	-1
0,18	-1,11E-02	-3,89E-01	-1
0,19	-1,57E-02	-5,51E-01	-1
0,20	-1,79E-02	-6,28E-01	-1
0,21	-1,81E-02	-6,35E-01	-1
0,22	-1,81E-02	-6,35E-01	-1
0,23	-1,86E-02	-6,53E-01	-1
0,24	-1,98E-02	-6,95E-01	-1
0,25	-2,10E-02	-7,37E-01	-1
0,26	-2,22E-02	-7,79E-01	-1
0,27	-2,31E-02	-8,11E-01	-1
0,28	-2,31E-02	-8,11E-01	-1

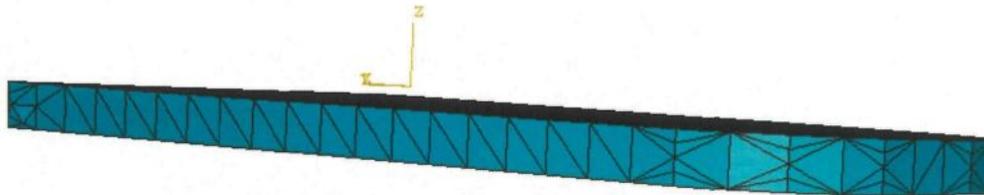
d- Maillage :

Coût du raffinement du maillage:

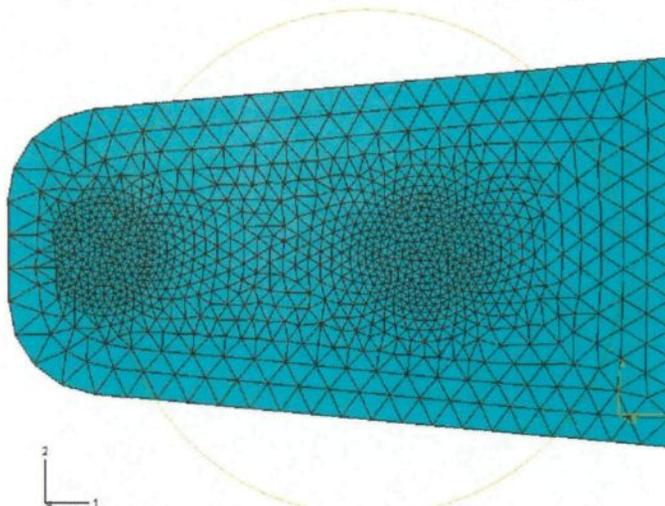
En utilisant la méthode explicite, le coût de programmation est proportionnel au nombre d'éléments et rudement inversement proportionnel à la dimension du plus petit élément. Ainsi, le raffinement du maillage, augmente le coût de la programmation en augmentant le nombre d'éléments et réduisant la dimension du plus petit élément. Bien que la prédiction de l'augmentation du coût avec un raffinement de maillage pour la méthode explicite est directe, il est plus difficile de le prédire lorsqu'on utilise la méthode implicite. La difficulté survient lorsqu'il y a une relation de dépendance dans un problème entre l'élément de connexion et le coût de la solution, cette relation qui n'existe pas dans la méthode explicite. Lorsqu'on utilise la méthode explicite, l'expérience montre que pour plusieurs problèmes le coût de la programmation est approximativement proportionnel au carré du nombre de degrés de liberté. La méthode explicite montre un gain considérable par rapport à la méthode implicite lorsque la grosseur du modèle augmente tant que le maillage est relativement uniforme (voir annexe).

La version Abaqus-6.4 nous offre que des éléments tétraédriques. Un maillage contrôlé est nécessaire pour raffiner le nombre d'élément près des zones critiques : conditions aux limites et près des termes sources, comme indiqué dans la figure 34. En outre, puisqu'il s'agit d'une flexion dans un état de contrainte plan, le maillage au niveau de l'épaisseur doit être raffiné pour mieux représenter l'état des contraintes. En effet, des partitions verticales sont réalisées au niveau de l'épaisseur. Les éléments linéaires de l'intégration réduite tolèrent les distorsions [35], par conséquent l'utilisation d'un maillage raffiné de ces éléments dans n'importe quelle simulation où les niveaux

de distorsion peuvent être très élevés. Ainsi nous avons opté pour des éléments tétraédriques linéaires dans un schéma d'intégration stable en l'occurrence le schéma implicite.



Maillage au niveau de l'épaisseur : Partition « edge number ».



Maillage surfacique contrôlé près des termes sources.

figure 34. Le maillage contrôlé pour mieux représenter l'état des contraintes.

e- Résultats des calculs numériques obtenus par Abaqus :

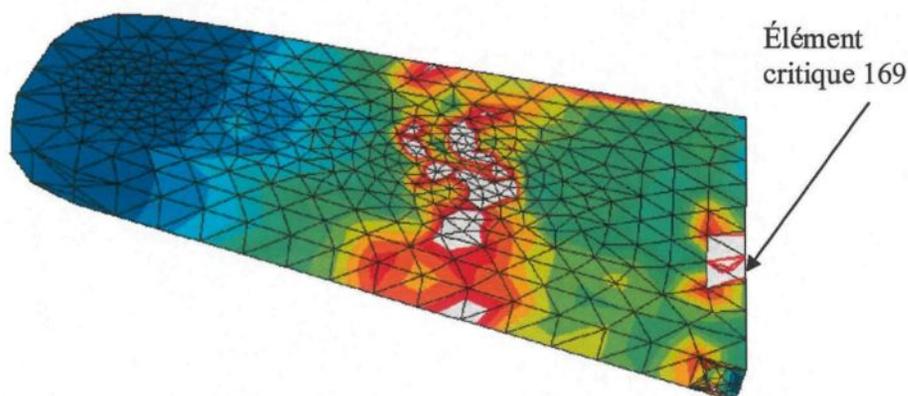
La rupture par fatigue d'un bras de suspension en alliage métallique peut avoir lieu même si la contrainte maximale est inférieure à la limite d'élasticité. Il est donc important qu'avant d'étudier la durée de vie d'une pièce, de vérifier l'état des contraintes de la pièce par rapport aux hypothèses suivantes :

- le couplage élasto-plastique du matériau caractérise un domaine de déformation bien déterminé. En effet les schémas d'intégration numériques par la méthode des éléments finis risquent de ne pas converger même dans le cas implicite stable, si on dépasse le domaine élasto-plastique imposé dans le modèle numérique.
- l'analyse fréquentielle se rapportant au phénomène de la résonance, prend un autre aspect puisque les fréquences naturelles vont changer avec la haute déformation.

Dans cette section le matériau est supposé avoir un comportement non linéaire. Par conséquent la contrainte maximale dans le matériau ne doit pas dépasser la limite de rupture. La limite d'élasticité conventionnelle de l'alliage 7075-T6 est de l'ordre de 460 MPa et la limite de rupture est de l'ordre de 578 MPa. Pour rester dans le domaine à haut cycle de fatigue, loin du comportement oligocyclique en fatigue, donnant une pièce mécanique sécuritaire nous avons respecté la condition que toutes les contraintes : principale minimale et maximale et la contrainte Von Mises soient inférieures en tout temps à 460MPa.

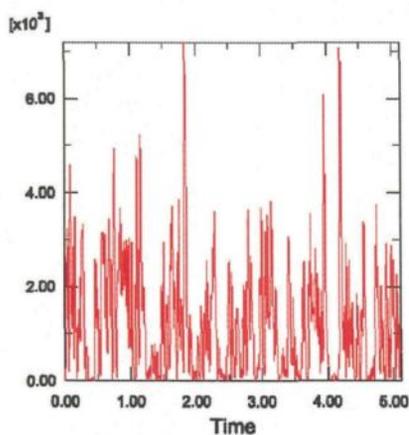
La figure 35-a illustre les résultats de l'état de la densité d'énergie de déformation (SENER) dans la pièce. L'énergie de déformation est critique aux alentours des conditions aux limites. L'organigramme partiel fait un zoom de la partie 3 de l'organigramme principal cité dans l'introduction. En effet il s'agit des détails des traitements des résultats depuis le calcul de la densité d'énergie du cas multiaxial, jusqu'au calcul de la durée de vie partielle de la pièce dans le cas d'un chargement aléatoire et par suite la nombre de répétitions du chargement jusqu'à la rupture. La densité d'énergie de déformation (SENER) atteint une valeur maximale dans un élément du maillage. Cette valeur maximale est comprise entre 15 et 20 KJ/m³. Pour choisir

l'élément critique il faut filtrer l'élément, ou les éléments, dont la somme des variations de la densité d'énergie de déformation est maximale comme montré par l'organigramme de la figure 36. Il s'agit de l'élément étiqueté 169. La figure 35-a montre l'emplacement de l'élément 169 dans la pièce. La figure 35-b montre l'évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation multiaxiale dans le centroïde de cet élément. L'élément critique est situé dans la région où la pièce est encastrée.



Densité d'énergie de déformation instantanée dans le spécimen (25mm).

(a)



L'évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation de l'élément critique numéro 169.

(b)

figure 35. Les résultats de la simulation numérique.

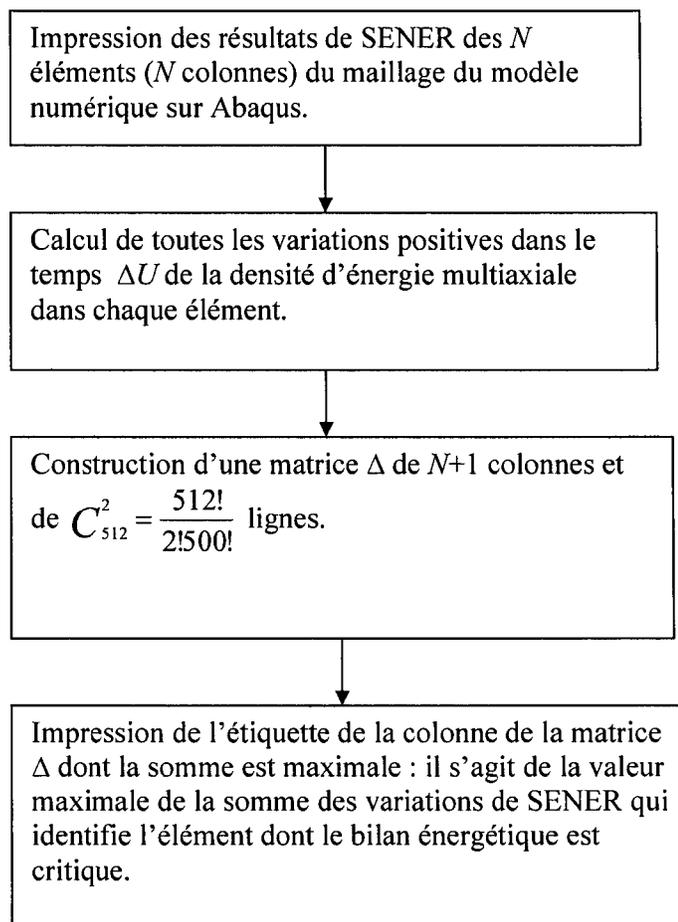


figure 36. Organigramme du programme de l'interface Matlab de filtrage.

Le signal de chargement dans l'élément critique 169 peut présenter des anomalies qui peuvent faire défaut au comptage des cycles « rainflow » par la méthode de Markov. La figure 37-a et la figure 37-b, montre le signal de chargement brut et corrigé au point critique 169. La figure 38 illustre le comptage des cycles « rainflow » dans le cas de l'élément critique 169.

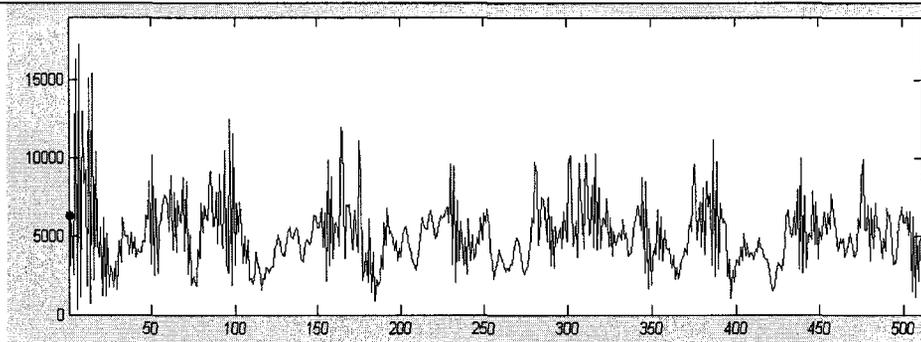


figure 37-a. Signal brut de SENER au point critique 169.

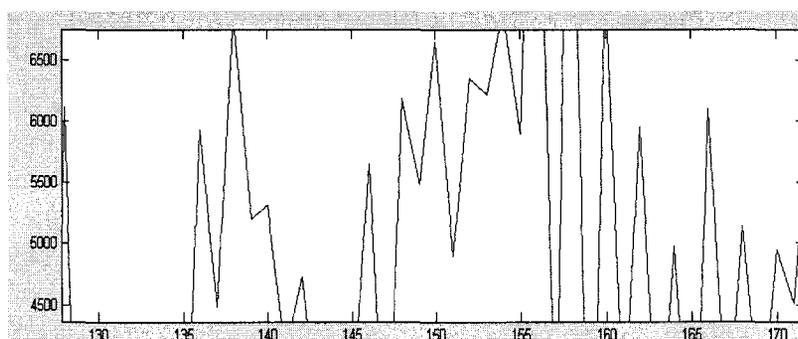


figure 37-b. Signal SENER au point critique 169, corrigé.

figure 37. Signaux brut et corrigé de SENER au point critique 169.

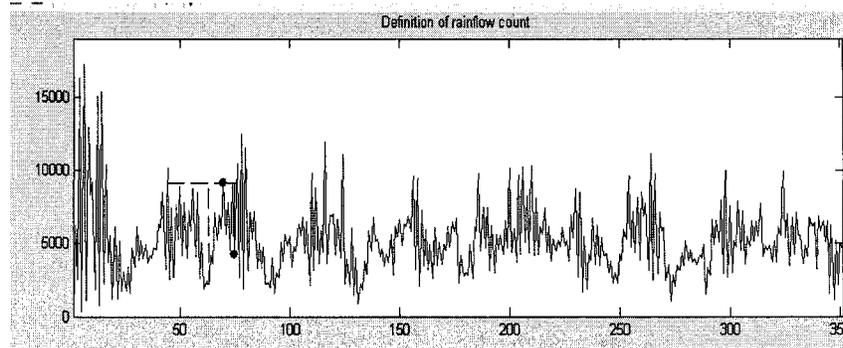


figure 38-b. Comptage des cycles « rainflow ».

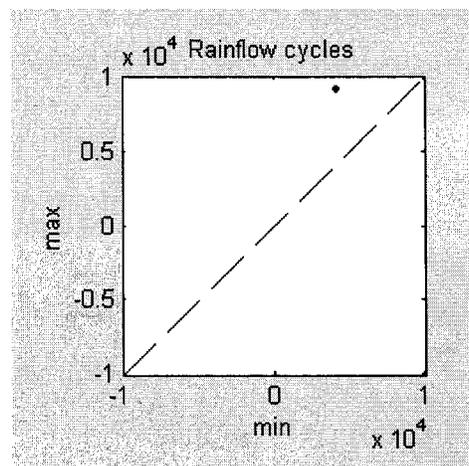


figure 38-c. Résultat d'un comptage.

figure 38. Comptage de cycles «rainflow».

Dans le cas multiaxial élasto-plastique, A. Elmarakbi *et al.*[17], ont aussi ramené l'étude multiaxiale en calculant la durée de vie d'une pièce, en mode uniaxial par une quantité d'énergie équivalente au cas multiaxial, puisqu'il s'agit d'un scalaire en l'occurrence un tenseur du même ordre zéro. Comme démontré au début de la section, le nombre de cycles à la rupture est calculé à partir de la densité d'énergie de déformation du cas uniaxial, équivalente au cas multiaxial :

équation 100:
$$U_a = \frac{\sigma_a^2}{2E} + \frac{\sigma_a}{n'+1} \left(\frac{\sigma_a}{K'} \right)^{\frac{1}{n'}}$$

et la relation Manson-Coffin :

équation 101:
$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N)^b + \varepsilon'_f (2N)^c$$

où $K' = \frac{\sigma'_f}{\varepsilon'^{n'}}$: le coefficient de la limite d'endurance, $n' = \frac{b}{c}$ est l'exposant de la dureté

cyclique, σ'_f est le coefficient de la résistance à la fatigue, c l'exposant de la ductilité de la fatigue, b est l'exposant de la résistance à la fatigue, ε'_f est coefficient de la ductilité de la fatigue, $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}$ est l'intervalle de déformation, σ'_f est le coefficient de la résistance à la fatigue, N le nombre de cycle, E est le module de Young, c l'exposant de la ductilité de la fatigue, b est l'exposant de la résistance à la fatigue et ε'_f est coefficient de la ductilité de la fatigue. Le calcul de N_f est résumé dans l'organigramme de la figure 39.

tableau 16. Les paramètres métallurgiques de fatigue de l'alliage d'aluminium 7075-T6

<i>Module de Young : E</i>	<i>H</i>	<i>n'</i>	<i>σ'_f</i>	<i>ε'_f</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
71000 MPa	977 MPa	0,106	1466 MPa	0,262	-0,143	-0,619

Le tableau 16 montre les paramètres métallurgiques de fatigue de l'alliage d'aluminium Al 7075-T6 constituant la pièce automobile étudiée. La durée de vie partielle N_f est obtenue par la résolution numérique de l'équation non linéaire de Manson-Coffin par

la méthode de Newton-Raphson, comme illustré par l'organigramme de la figure 39. Il s'agit d'une méthode itérative basée sur le calcul numérique de la tangente d'une fonction f en un point x_n , où cette fonction s'annule en un point voisin x_{n+1} . L'itération consiste à diminuer l'erreur par rapport à une solution approchée. En effet :

$$f'(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}, \text{ or } f(x_{n+1}) = 0, \text{ on déduit alors :}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Les résultats obtenus lors de l'extraction des cycles « rainflow » sont en annexe

4. Il s'agit du de U_{\max} , U_{\min} et $U_a = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2}$ nécessaire pour le calcul de la durée de vie partielle par la densité d'énergie du cas uniaxial équivalente au cas multiaxial. Le calcul du dommage selon la loi de Palmgren-Miner pour un chargement aléatoire est résumé en annexe 4. Les résultats montrent que le signal de chargement étudié doit se répéter $8,86 \times 10^{11}$ fois jusqu'à la rupture de la pièce, en alliage d'aluminium 7075-T6 ayant une épaisseur de 2,5cm. La contrainte maximale $(\sigma_a)_{\max}$ du cycle « rainflow » de l'élément critique, filtrée par une interface Matlab, est de l'ordre de 31MPa et une déformation maximale correspondante de l'ordre de $4,3 \times 10^{-4}$. Ces valeurs, légèrement faibles, peuvent être encore atténuées pour sécuriser la pièce en la renforçant aux points critiques. Une optimisation de la forme de la pièce permettra d'augmenter le nombre de répétitions jusqu'à la rupture, afin de sécuriser le véhicule et diminuer plus son poids à des endroits non critiques.

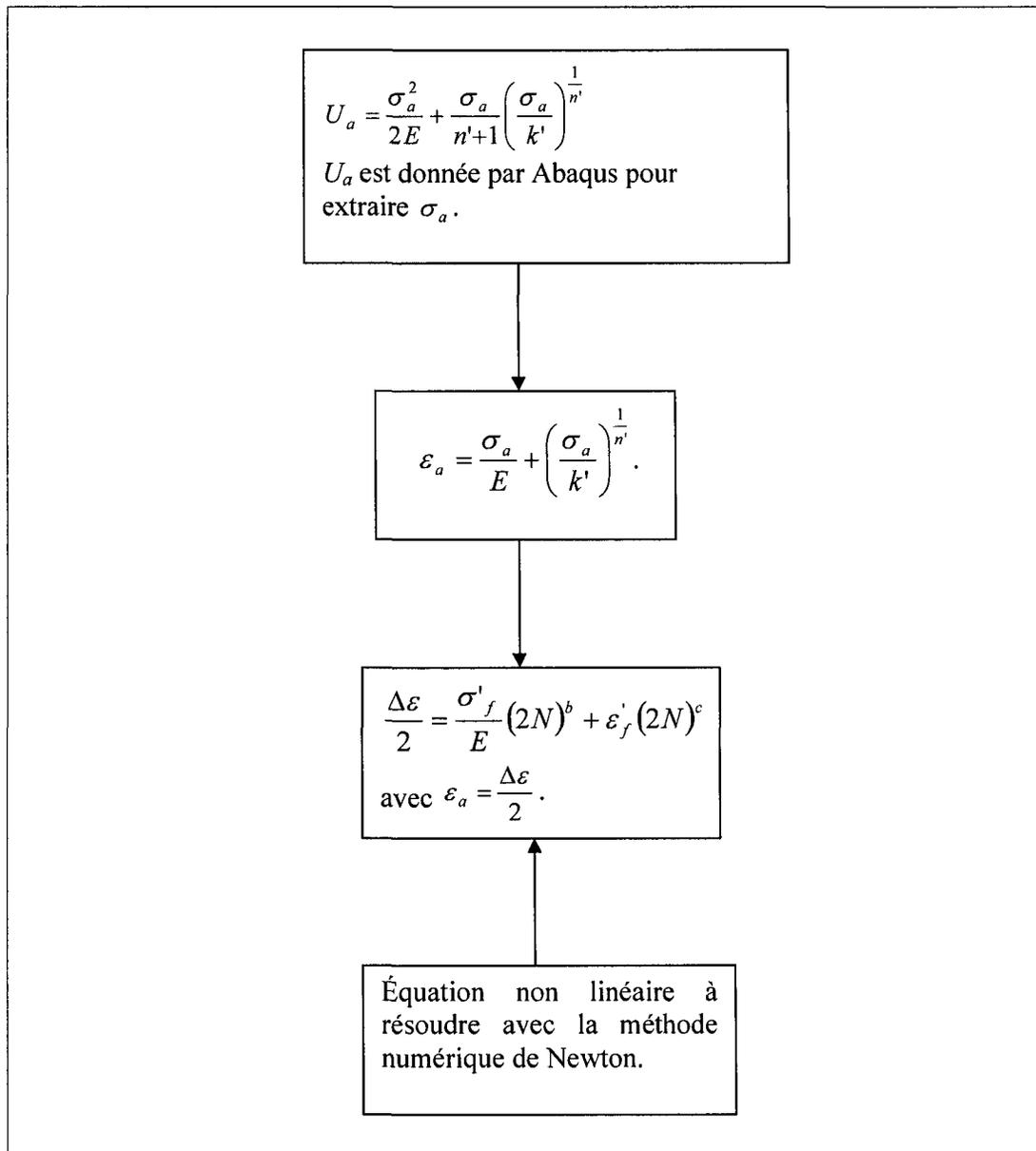


figure 39. Organigramme de l'extraction du nombre de cycle à la rupture.

5.3 Modèle numérique élasto-plastique (cas de l'amortissement) :

Nous avons réalisé plusieurs tests de simulation dans le cas rigide. Ces tests ont montré que l'élément critique est situé dans la région de l'encastrement de la pièce. La figure 40 montre le profil de la densité d'énergie de déformation SENER obtenu lors des différentes simulations dans le cas rigide, ainsi que la localisation des éléments critiques par le filtre développé dans la présente étude. En effet, nous avons varié l'épaisseur de la pièce pour étudier l'emplacement des points critiques de la pièce. Dans les trois cas, l'élément critique se situe au niveau du joint de suspension où la pièce est encadrée. La figure 41 montre le signal de SENER de chaque élément critique. Le signal de SENER diminue d'une manière monotone de 75% en passant d'une pièce d'épaisseur 25mm à une autre d'épaisseur 35mm. La durée de vie passe respectivement de $8,86 \times 10^{11}$ (25mm) à $1,26 \times 10^{14}$ (35mm), correspondant à une augmentation de presque 100%. La durée de vie dans le cas de la pièce intermédiaire d'épaisseur 30mm est de l'ordre de $2,49 \times 10^{12}$. Les différentes positions de l'élément critique d'un spécimen à un autre sont dues aux différentes épaisseurs et maillages. Cette durée de vie peut être augmentée si on renforce localement la pièce aux points critiques.

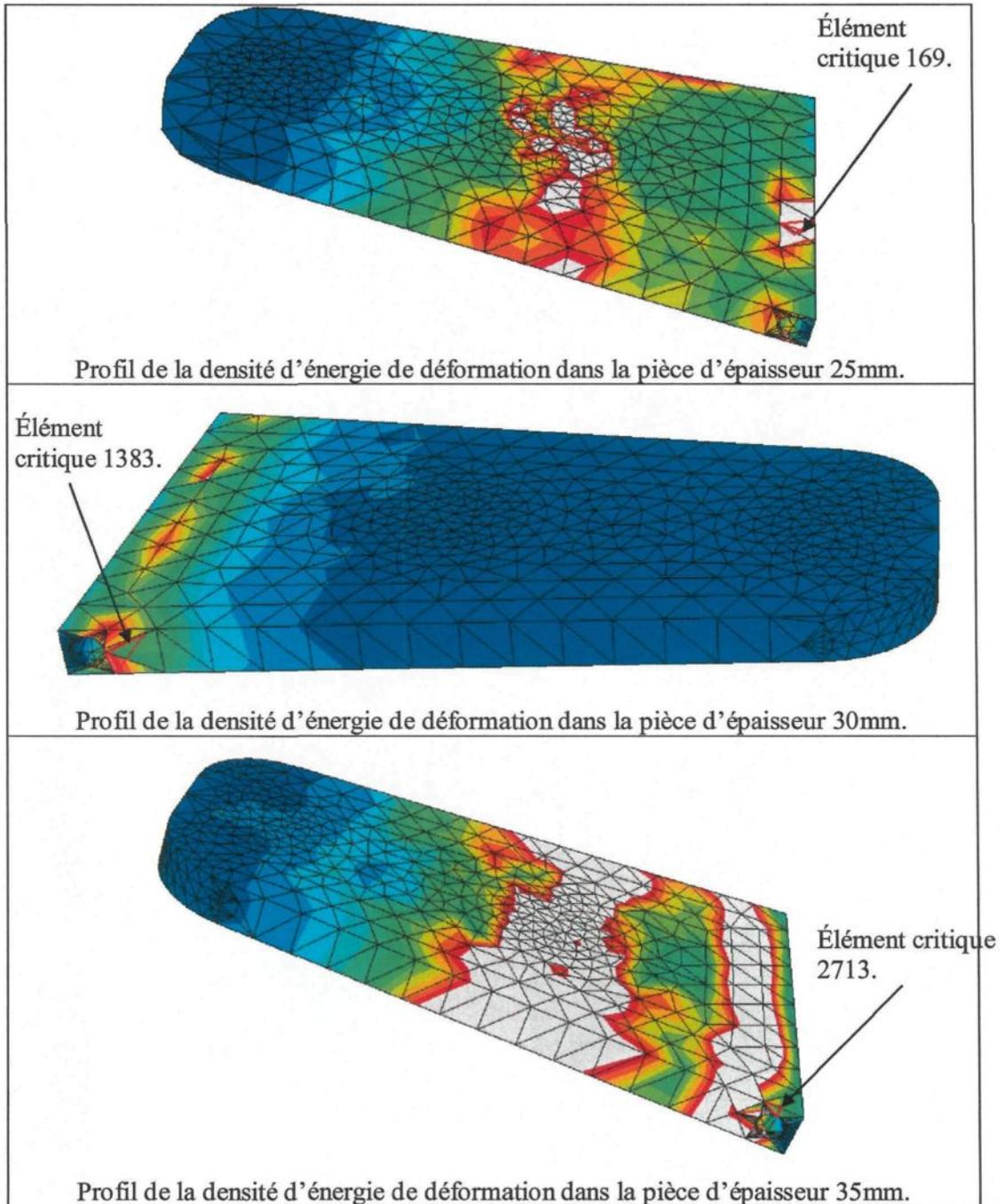


figure 40. Localisation de l'élément critique dans le cas rigide.

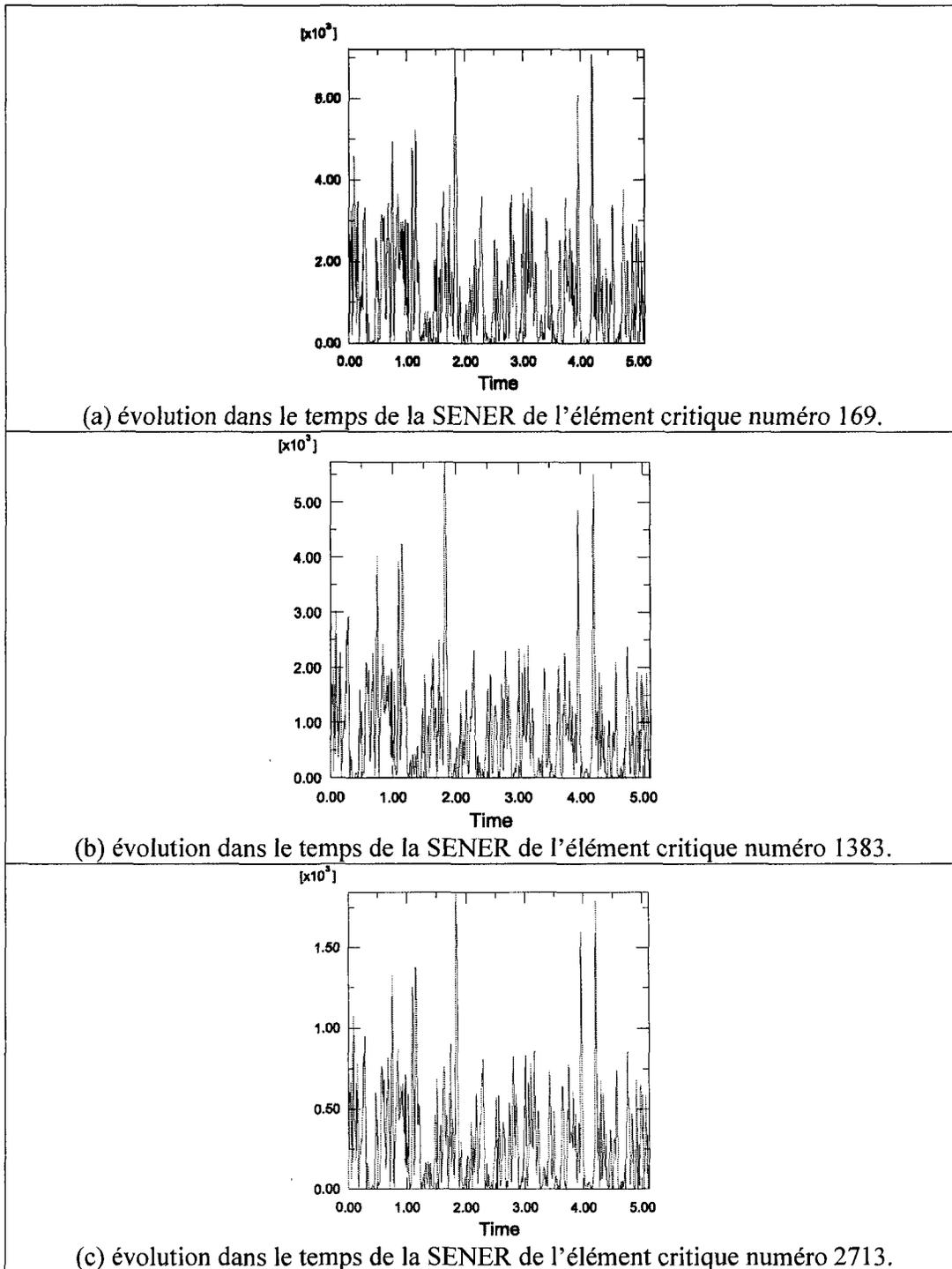


figure 41. Évolution dans le temps de la densité d'énergie de déformation SENER des éléments critiques.

(a) pièce d'épaisseur 25 mm (b) pièce d'épaisseur 30 mm (c) pièce d'épaisseur 35 mm.

Nous avons démontré dans le chapitre 3 consacré à la dynamique du véhicule, que l'amortissement de la suspension diminue largement la contrainte appliquée dans la chaîne de retour au milieu de la pièce de suspension. En effet, le poids du véhicule est estimé à 3750N ne dépassant pas en valeur absolue la valeur $F_1 = 1200\text{N}$ dans le cas de l'amortissement par un ressort et un amortisseur comme le montre la figure 42. Cette force opposée dans la chaîne de retour à l'excitation aléatoire de la route amortie par le pneu de raideur $K = 160\,000\text{ N/m}$, de valeur maximale $F_{2max} = 4000\text{N}$. La chaîne de retour en contre-réaction à F_2 , utile pour stabiliser le véhicule ne compensera pas F_2 en terme de contrainte puisque la différence entre F_1 et F_2 dans le cas de l'amortissement est supérieure au cas rigide. Ceci est confirmé par une augmentation de la densité d'énergie de déformation SENER comme illustrée dans la figure 43. L'élément critique filtré dans les deux cas est l'élément 169 situé au niveau de l'encastrement, puisqu'il s'agit de la même pièce et du même maillage, comme illustrée par la figure 44. Par conséquent, la durée de vie de la pièce dans le cas de l'amortissement sera inférieure à celle du cas rigide. Une optimisation du poids de la pièce, consisterait à ôter de la matière dans les régions à faible densité d'énergie de déformation pour contrôler le facteur de rigidité flexurale EI , où E est le module de Young de l'alliage et I le second moment de section de la pièce qui dépend de sa géométrie, la masse m et les fréquences naturelles. Ceci sera abordé dans le chapitre 6 consacré à l'optimisation du poids de deux pièces réelles d'automobiles de géométries complexes, sans affecter leur durée de vie ni leurs fréquences naturelles.

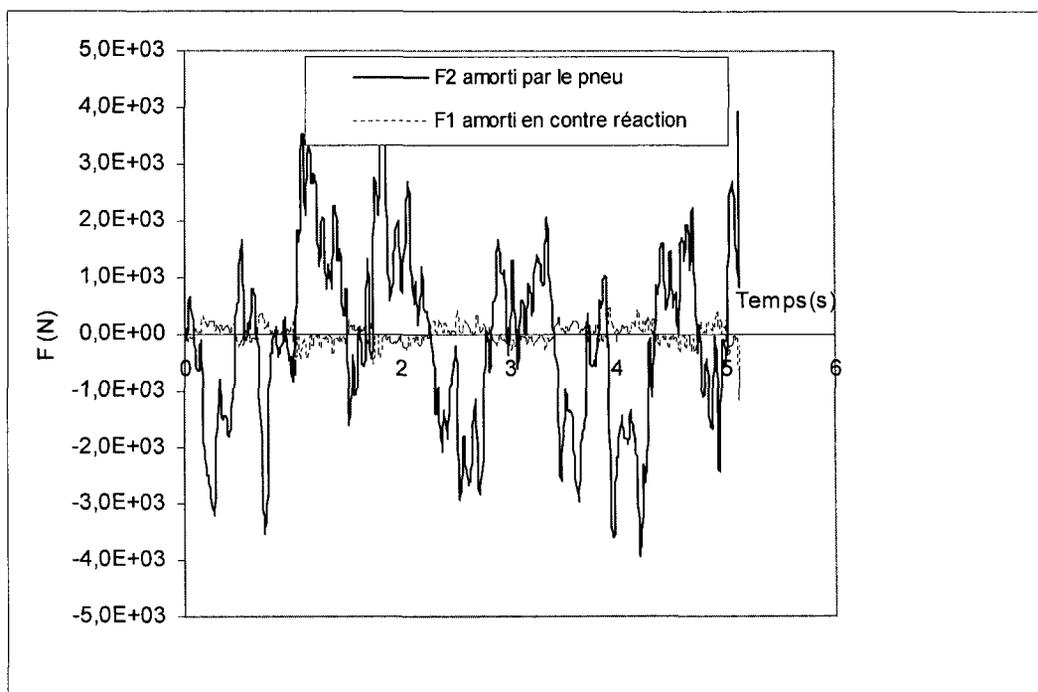


figure 42. Signaux des chargements après amortissement.

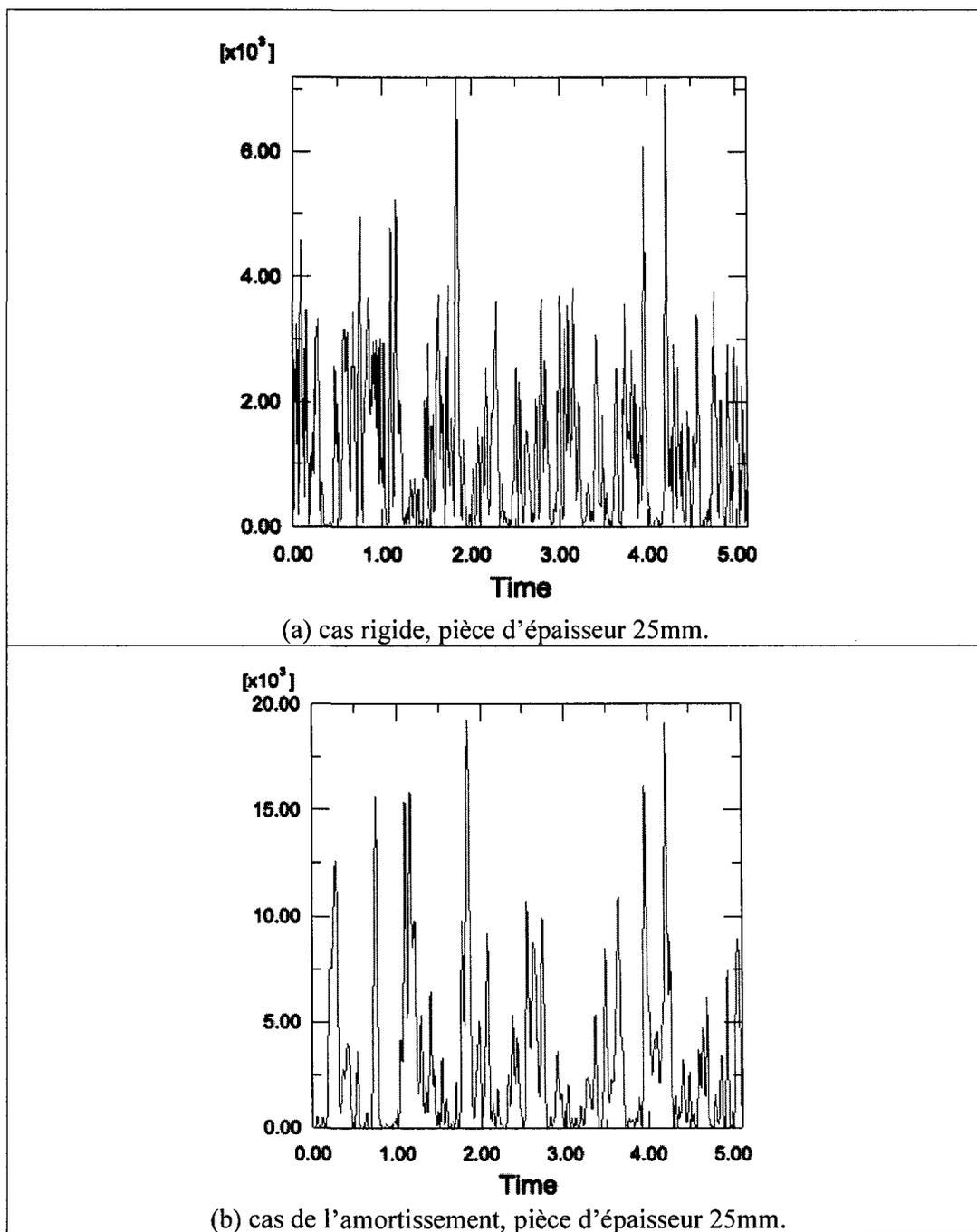


figure 43. Signal SENER dans le cas rigide et dans le cas de l'amortissement.

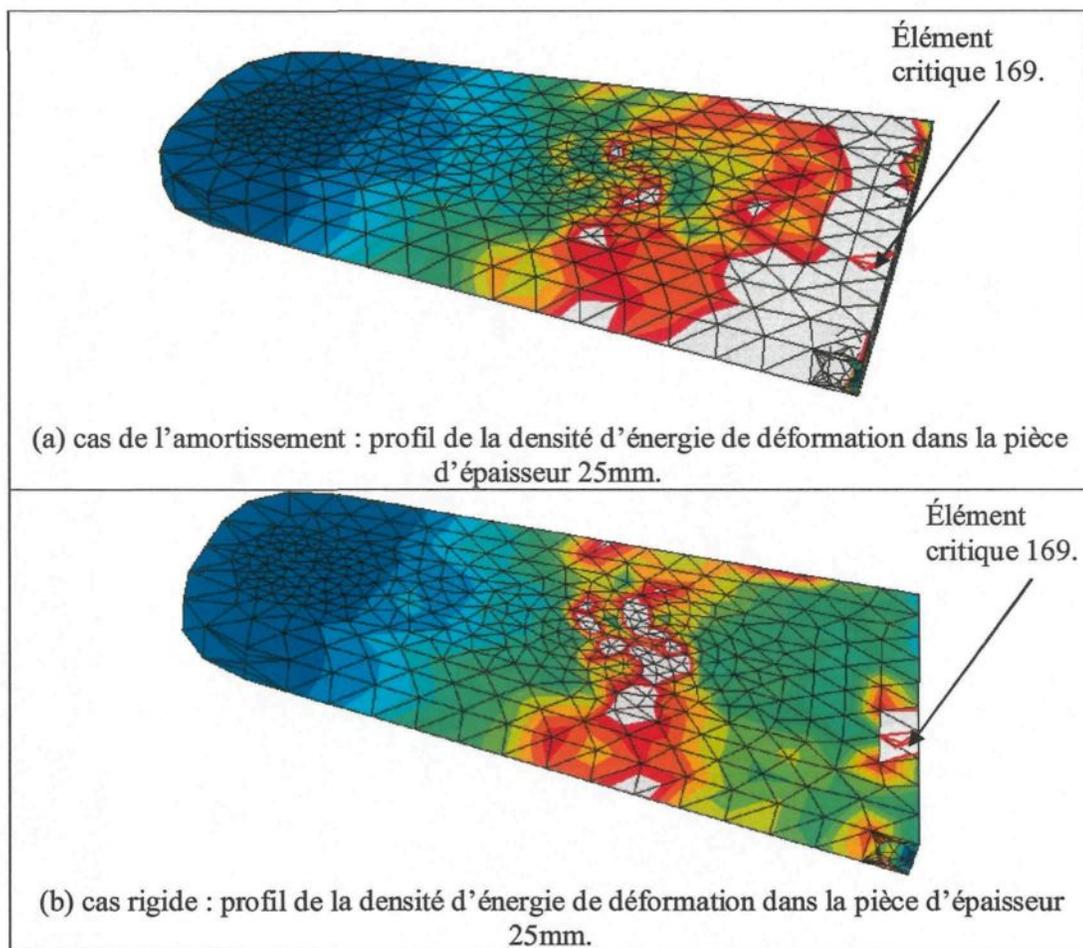


figure 44. Profil de la densité d'énergie de déformation SENER dans le cas rigide et de l'amortissement.

Chapitre 6

Application : prédiction de la durée de vie des pièces réelles complexes

Dans ce chapitre nous étudions la durée de vie de deux pièces réelles complexes en alliage d'aluminium, en l'occurrence le bras de suspension inférieur et supérieur d'un véhicule, qui sont deux composantes indispensables de la suspension d'un véhicule. Actuellement, ces deux pièces sont fabriquées généralement à partir d'acier. Dans la présente section, nous étudions la durée de vie de ces deux pièces sachant qu'elles sont fabriquées à partir de l'alliage d'aluminium 7075-T6. La figure 45 illustre une suspension d'un véhicule contenant les deux bras de suspension. Nous vérifions l'applicabilité du modèle que nous avons développé dans les chapitres précédents au processus d'optimisation de ces deux pièces déjà en service. Nous étudions ainsi, les fréquences naturelles de ces deux pièces, afin de les comparer à la gamme de fréquence de la densité spectrale de puissance PSD décrivant le profil de la chaussée, en fonction de leurs poids et leur durée de vie par rapport à la fatigue. En effet, le cas optimum est une pièce plus légère avec une durée de vie équivalente à la durée de vie d'un véhicule et des fréquences naturelles loin de la gamme de fréquence de la PSD. Dans la présente

étude, on propose une méthode directe d'optimisation éliminant les parties de la pièce ayant la densité d'énergie de déformation la plus faible. Il ne s'agit pas d'une étude exhaustive de l'optimisation de la forme géométrique de la pièce, mais d'une méthode d'optimisation intuitive. En effet une étude d'optimisation détaillée et rigoureuse de la forme de la pièce est basée sur l'utilisation des algorithmes génétiques. N.V. Banichuk *et al.*[58], et Roberto Brighenti *et al.*[59], ont publié des articles à ce sujet d'une manière exhaustive.

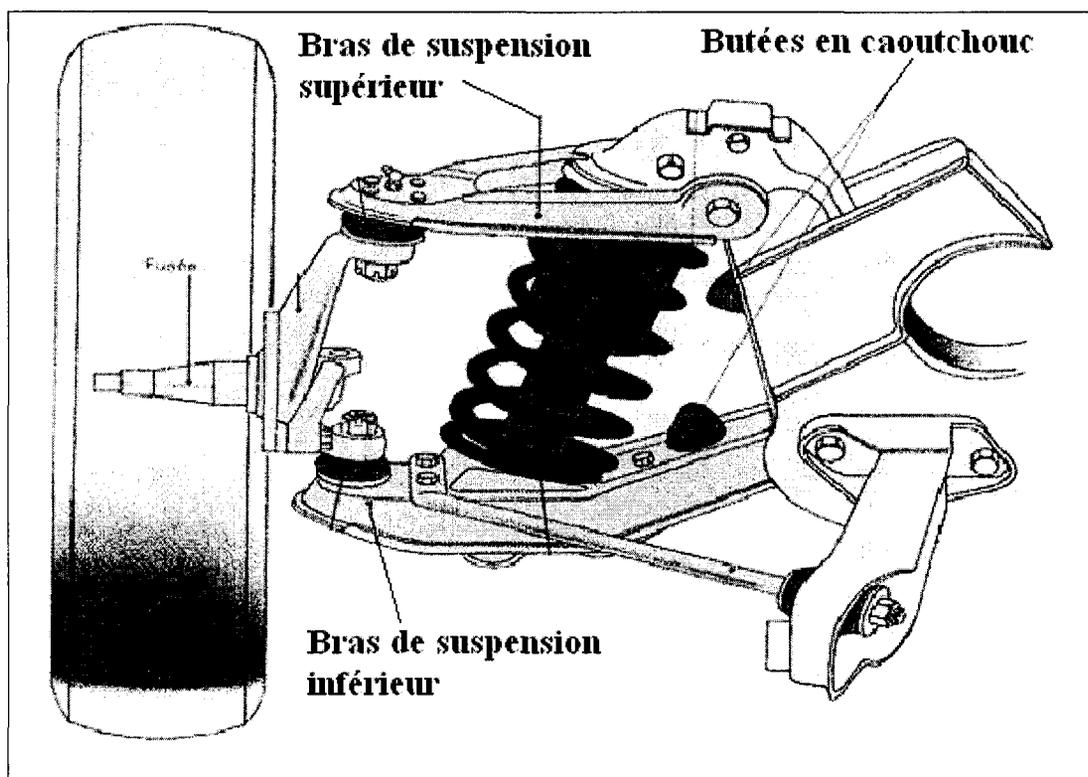


figure 45. Suspension d'un véhicule montrant le bras de suspension supérieur et inférieur [60].

Deux analyses sont nécessaires pour pouvoir appliquer la technique intuitive d'optimisation proposée. En effet, une analyse dynamique implicite pour calculer la durée de vie de chaque pièce de forme géométrique spécifique, dont l'une est une pièce

de référence, et une analyse des modes propres de chaque pièce. Il s'agit de quatre bras de suspensions en alliage d'aluminium 7075-T6 de géométries différentes conçus à l'aide du logiciel SolidWork. La géométrie diffère d'un bras à l'autre selon la quantité de matière enlevée des régions moins critiques. L'enlèvement de la matière des régions moins critiques à faibles densité d'énergie de déformation SENER, ne devrait pas par hypothèse affecter le profil de la SENER dans la pièce. Cette hypothèse est valide tant que nous ne dépassons pas la limite permise à savoir l'enlèvement de la matière au voisinage des éléments qui contribuent plus dans les valeurs non négligeable de la densité d'énergie de déformation. Lors des simulations numériques, de l'analyse dynamique implicite et l'analyse fréquentielle, le maillage est une opération critique et prend en considération les paramètres à mieux représenter. En effet, il faut contrôler le maillage au niveau de l'épaisseur pour mieux représenter la flexion lors de la simulation dynamique implicite. Un maillage raffinés est aussi réalisé dans les zones critiques tels que les lieux des conditions aux limites, dans le cas de l'analyse fréquentielle et l'analyse dynamique implicite, et aux alentours du lieu de l'application des excitations dans le cas de l'analyse dynamique implicite. Cette section comporte donc : une analyse dynamique et fréquentielle de la pièce de référence et une analyse dynamique et fréquentielle des pièces optimisées.

6.1 Analyse dynamique et fréquentielle de la pièce de référence : bras de suspension inférieur d'un véhicule :

Dans la section précédente nous avons montré que les points critiques se trouvent au niveau du joint de suspension; l'endroit de l'encastrement de la pièce. La géométrie de référence correspond à une pièce réelle complexe qui représente le bras de suspension

inférieur d'un véhicule dont l'épaisseur est égale à 30 mm comme le montre la figure 46. C'est une épaisseur donnant un état de déformation dans le domaine des petites perturbations. Un bras de suspension réel d'un véhicule en alliage d'aluminium ayant une géométrie doit répondre aux critères suivants :

- un poids inférieur à un bras de suspension en acier donnant la même durée de vie sécuritaire par rapport à la fatigue
- des fréquences naturelles loin de la gamme des fréquences de la densité spectrale de puissance PSD.

Ces conditions s'ajoutent aux paramètres industriels tels que le coût de production, la quantité de pièce fabriquée par unité de temps etc.

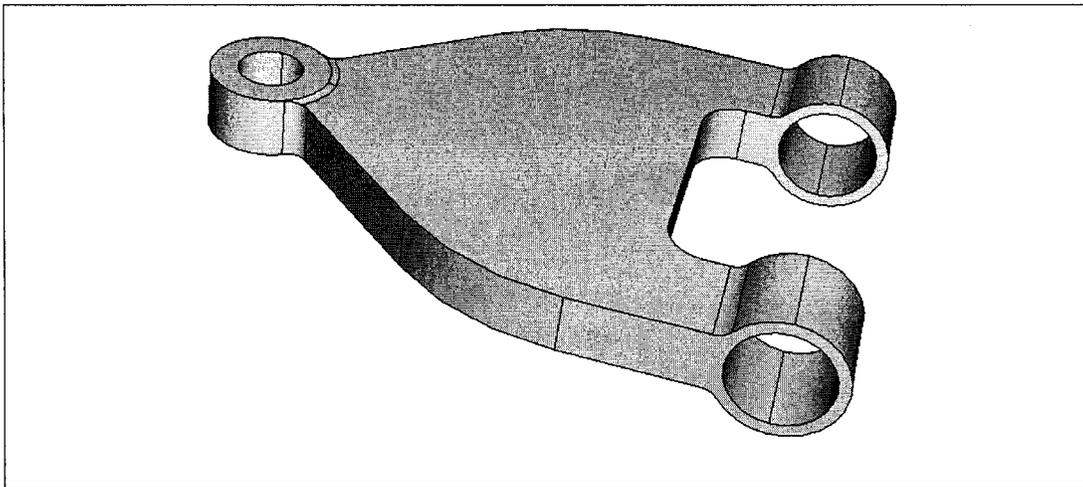


figure 46. Géométrie de référence.

Les fréquences naturelles sont proportionnelles [42] au second moment de section qui dépend de la géométrie de la pièce et inversement proportionnelles à la masse. Donc, un enlèvement de matière dans les régions moins critiques laisse prévoir

une augmentation des valeurs des modes propres de la pièce et un changement substantiel de la durée de vie de la pièce.

6.1.1 Prédiction de la durée de vie de la pièce de référence :

Tel que décrit dans les chapitres précédents, une simulation dynamique implicite est réalisée, grâce au code commercial Abaqus 6.4. L'analyse dynamique de la pièce de référence est utile pour identifier les zones critiques et les zones dont la densité d'énergie de déformation SENER est faible. Il s'agit d'une simulation dynamique de deux secondes. Pour pouvoir comparer les différentes pièces du même alliage, on garde presque le même nombre d'éléments lors du maillage des structures. L'élément critique 365 est situé au voisinage de l'encastrement. La figure 47 illustre le profil de la SENER dans la pièce de référence et le signal SENER dans l'élément critique filtré par l'algorithme que nous avons développé dans les sections précédentes, en l'occurrence l'élément 365. La SENER atteint une valeur maximale de 150 J/m^3 . La durée de vie NR de la pièce est évaluée selon la loi de Miner à $5,2 \times 10^7$ cycles en excitation continue, conformément au modèle hybride développé auparavant. La masse de la pièce est de l'ordre de 3,5 kg. Les zones à faible densité d'énergie de déformation SENER, sont illustrées par la figure 47. En effet, une première analyse nous permet d'identifier les zones à faibles SENER à ôter de la pièce sans affecter ses fonctions, ni diminuer d'une manière significative sa durée de vie et ses fréquences propres.

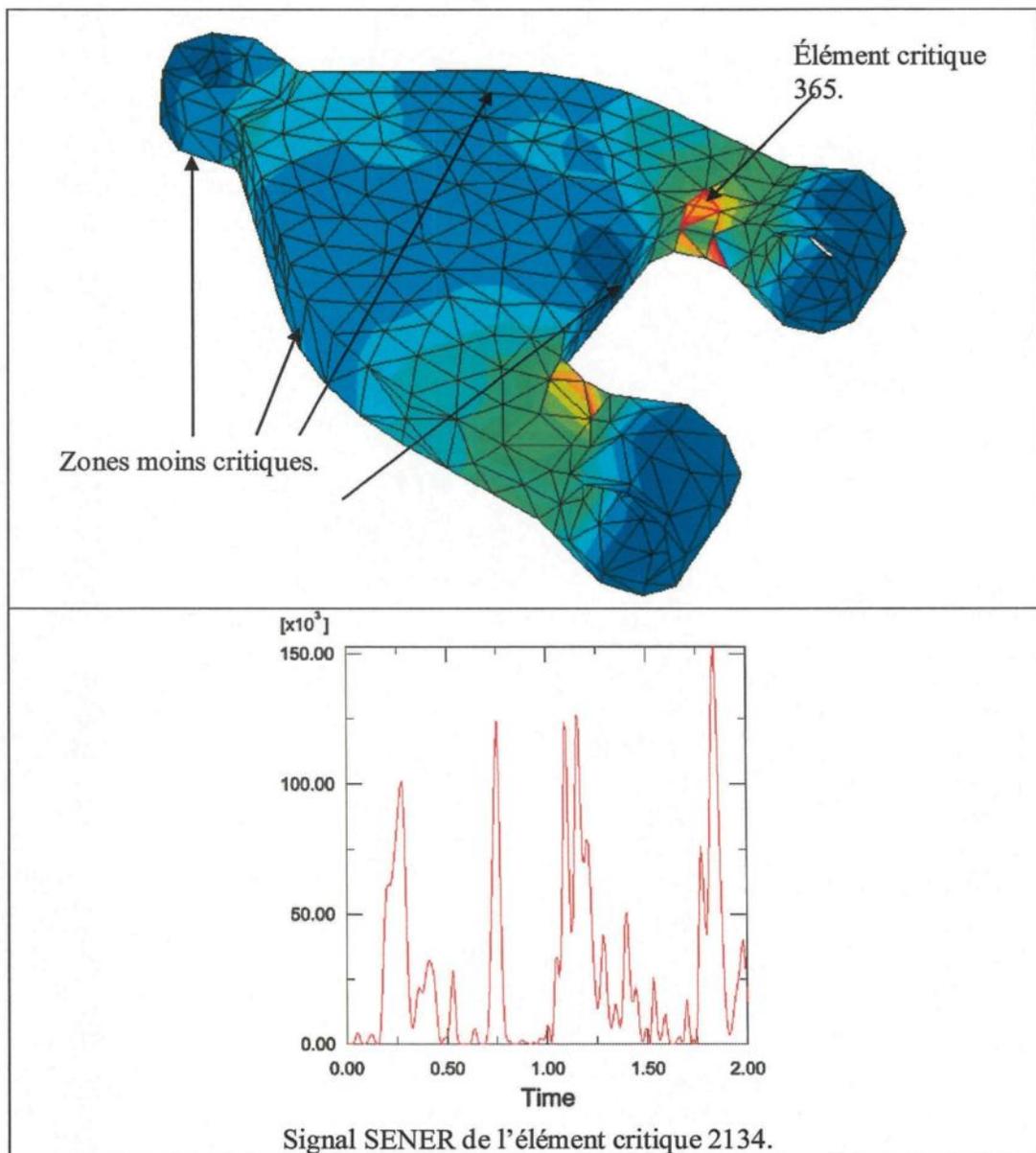


figure 47. Profil de la SENER dans la pièce de référence et signal de la SENER de l'élément critique.

6.1.2 Analyse fréquentielle de la pièce de référence :

Comme mentionné dans les sections précédentes, parmi les paramètres d'optimisation de la pièce, il existe les fréquences propres. Il faut éviter la résonance mécanique en maintenant les fréquences propres de la pièce loin de la gamme de fréquence de l'excitation de la route. Le code commercial Abaqus 6.4, calcule les fréquences propres de la pièce, en se basant sur la théorie de l'élasticité qui considère un corps déformable comme un ressort de masse non négligeable. En effet, l'analyse fréquentielle des structures plus complexe est un travail laborieux étant donné les conditions complexes des systèmes :

- les conditions aux limites,
- les conditions de l'équilibre statique par rapport auquel, le système est excité,
- la distribution des masses dans le système.

L'analyse aux valeurs propres est un atout mathématique qui nous permet de résoudre les équations des petites oscillations dans l'espace propre où les tenseurs sont diagonaux. Les détails de cette méthode sont présentés à l'annexe, selon la référence [61].

L'étude des fréquences propres d'une pièce mécanique en générale, en particulier la pièce de référence, est primordiale pour éviter le phénomène de la résonance. Les paramètres à contrôler dans ce volet sont :

- l'état d'équilibre par rapport auquel nous allons exciter le système : il s'agit de l'équilibre statique,
- la distribution de masse,

- les conditions aux limites.

Dans ce cas, l'état de l'équilibre statique est défini par l'encastrement (le spécimen est contraint à ne pas bouger selon les six degrés de liberté) et l'élasticité est due aux poids des spécimens. Les deux premiers modes de la pièce de références sont colligés dans le tableau 17. Les deux premiers modes ont les fréquences respectives suivantes : 416 Hz et 1754 Hz comme illustré par la figure 48. La masse de la pièce de référence est de l'ordre de 3,5 kg. Les deux premiers modes, de la pièce de référence arbitraire, sont situés au delà de la gamme de fréquence de la PSD décrivant le profil de la chaussée. Une optimisation mal contrôlée pourrait faire coïncider ces deux premiers modes avec la gamme de fréquence de la PSD. Si au contraire les modes propres de la pièce de référence coïncident dès le début avec la gamme de fréquence de la PSD, le processus d'optimisation devrait en éloigner le plus possible.

tableau 17. Les deux premiers modes de la pièce de référence et sa masse.

Masse	Mode 1	Mode 2
3,5 kg	416 Hz	1754 Hz

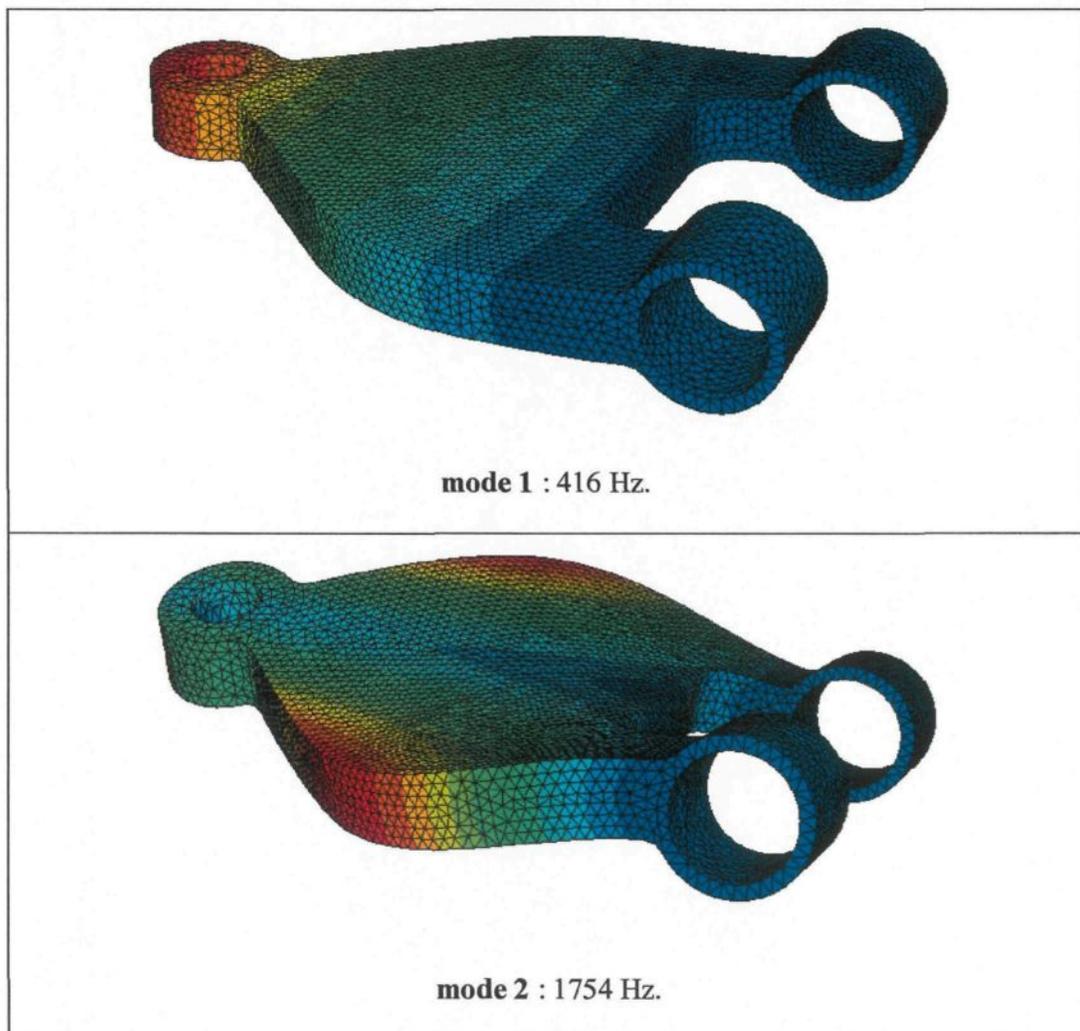


figure 48. Les modes propres de la pièce de référence.

6.1.3 Optimisation de la forme géométrique du bras de suspension inférieur d'un véhicule :

La figure 49 montre les zones critiques ainsi que les zones à faible intensité de SENER. On sait que les fréquences naturelles sont proportionnelles à la rigidité flexurale et inversement proportionnelles à la masse de la pièce, telle que décrit dans la revue bibliographique et la section précédente. Un enlèvement de matière des zones à faible intensité SENER de façon à ce que la réduction de la géométrie de la pièce est

compensée par la diminution de la masse qui est inversement proportionnelle aux fréquences naturelles. Une première étape d'enlèvement de la matière des zones à faible intensité SENER est illustrée par la figure 50. Les éléments à ôter, d'une manière symétrique de la structure, doivent satisfaire à la fonction objective suivante :

$$\frac{\sum_{i=1}^k (SENER(t) - SENER(t'))_{\text{chaque élément}}}{\text{Max}(\sum_{i=1}^k (SENER(t) - SENER(t'))_{\text{chaque élément}})} < RJ$$

avec $SENER(t) > SENER(t')$
 $n = \text{nombre d'élément du maillage}$
 $k = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

Le rapport de rejection, RJ , est lié directement à la notion de fatigue, en prenant en considération la variation de la densité d'énergie de déformation SENER, simplifiant les calculs en s'adaptant à l'aspect aléatoire du chargement pour éviter l'extraction des cycles « rainflow » et le calcul de la durée de vie dans tous les éléments permettant ainsi à optimiser le poids de la pièce par rapport à sa durée de vie et ses modes propres dans des délais de temps raisonnables. Les fluctuations des valeurs de la SENER d'une étape d'optimisation à une autre sont dues aux fluctuations du rapport de maillage, lié directement au schéma d'intégration implicite utilisé dans la présente étude. La masse diminue de 4,6% en passant de 3,5 kg à 3,34 kg. Le premier mode des fréquences naturelles de la pièce passe de 416 Hz à 439 Hz et le deuxième mode de 1754 Hz à 1883 Hz, s'éloignant ainsi de la gamme de fréquence de la PSD, comme illustrée par la figure 50. Tel que a été démontré, la durée de vie prédite de la pièce est de l'ordre de 5×10^7 à 10^8 . Deux autres étapes d'enlèvement ont été réalisées pour diminuer la masse. La figure 51 et la figure 52 montrent les résultats de la deuxième et la troisième étape d'optimisation. On obtient ainsi une diminution du poids de la pièce sans affecter d'une

manière significative sa durée de vie et son premier mode propre. La masse diminue de 3,5 kg à 3,1 kg, ce qui correspond à un gain en poids de 11,42%. Les éléments critiques sont tous situés à l'encastrement. La figure 53 montre l'évolution de la géométrie de la pièce lors du processus non exhaustive de l'optimisation de la forme de la pièce étudiée.

tableau 18. Les résultats d'optimisation de la pièce de référence.

Pièce	Masse en Kg	Durée de vie	Mode 1	Mode 2
Pièce de référence	3,5	$5,2 \times 10^7$	416 Hz	1754 Hz
Pièce de la 1 ^{ière} étape d'optimisation	3,34	10^8	439 Hz	1883 Hz
Pièce de la 2 ^{ème} étape d'optimisation	3,32	2×10^7	440 Hz	1889 Hz
Pièce de la 3 ^{ème} étape d'optimisation	3,1	$5,2 \times 10^7$	438 Hz	1861 Hz

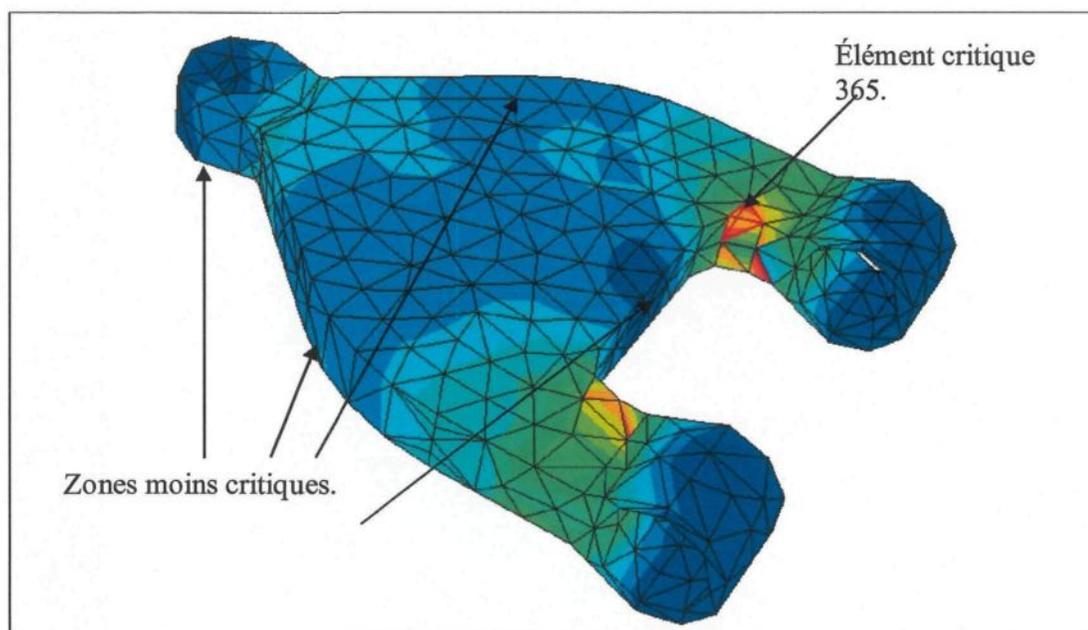


figure 49. Visualisation des zones critiques et à faible SENER dans la pièce de référence et des paramètres d'optimisation.

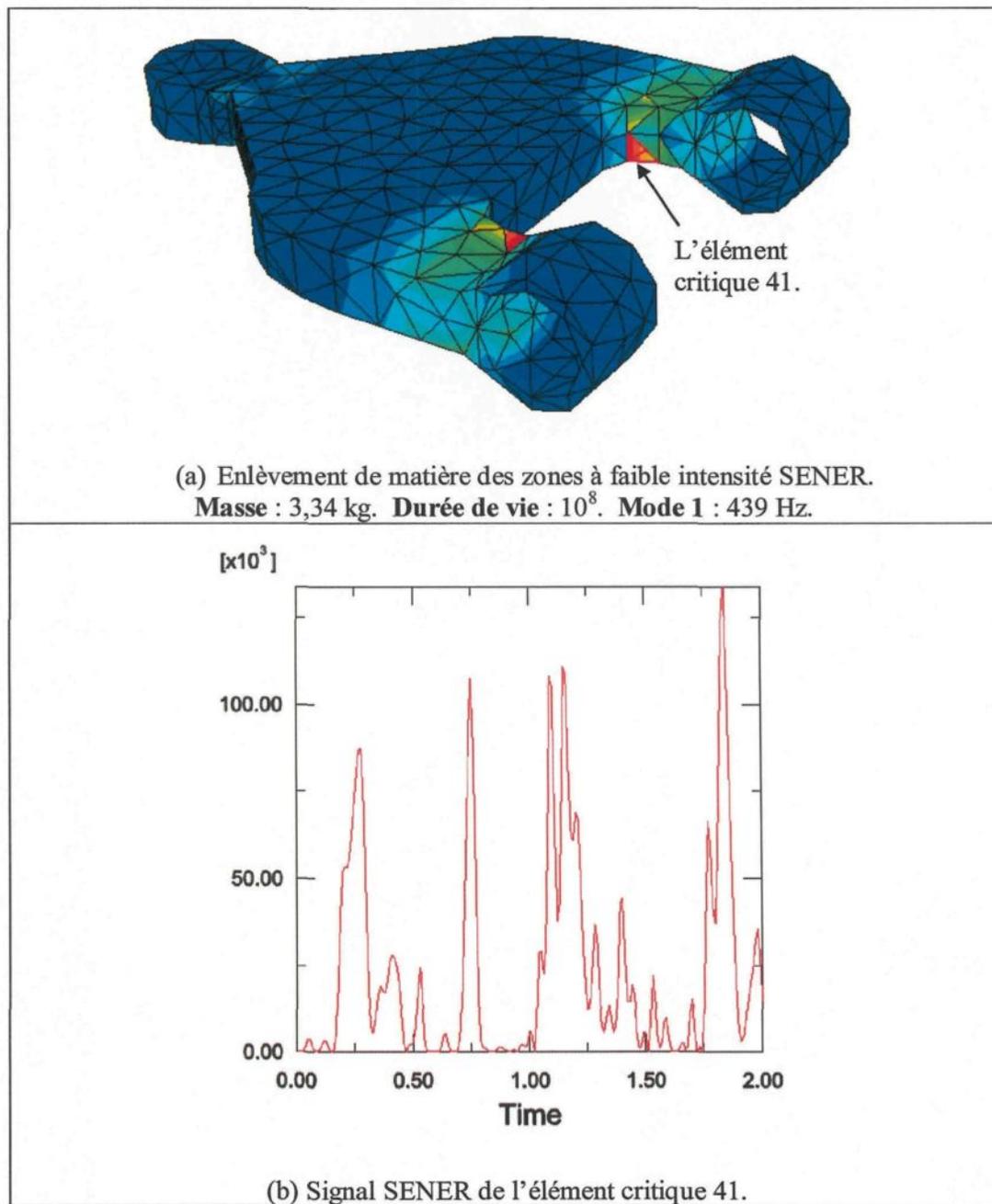


figure 50. Première étape d'optimisation.

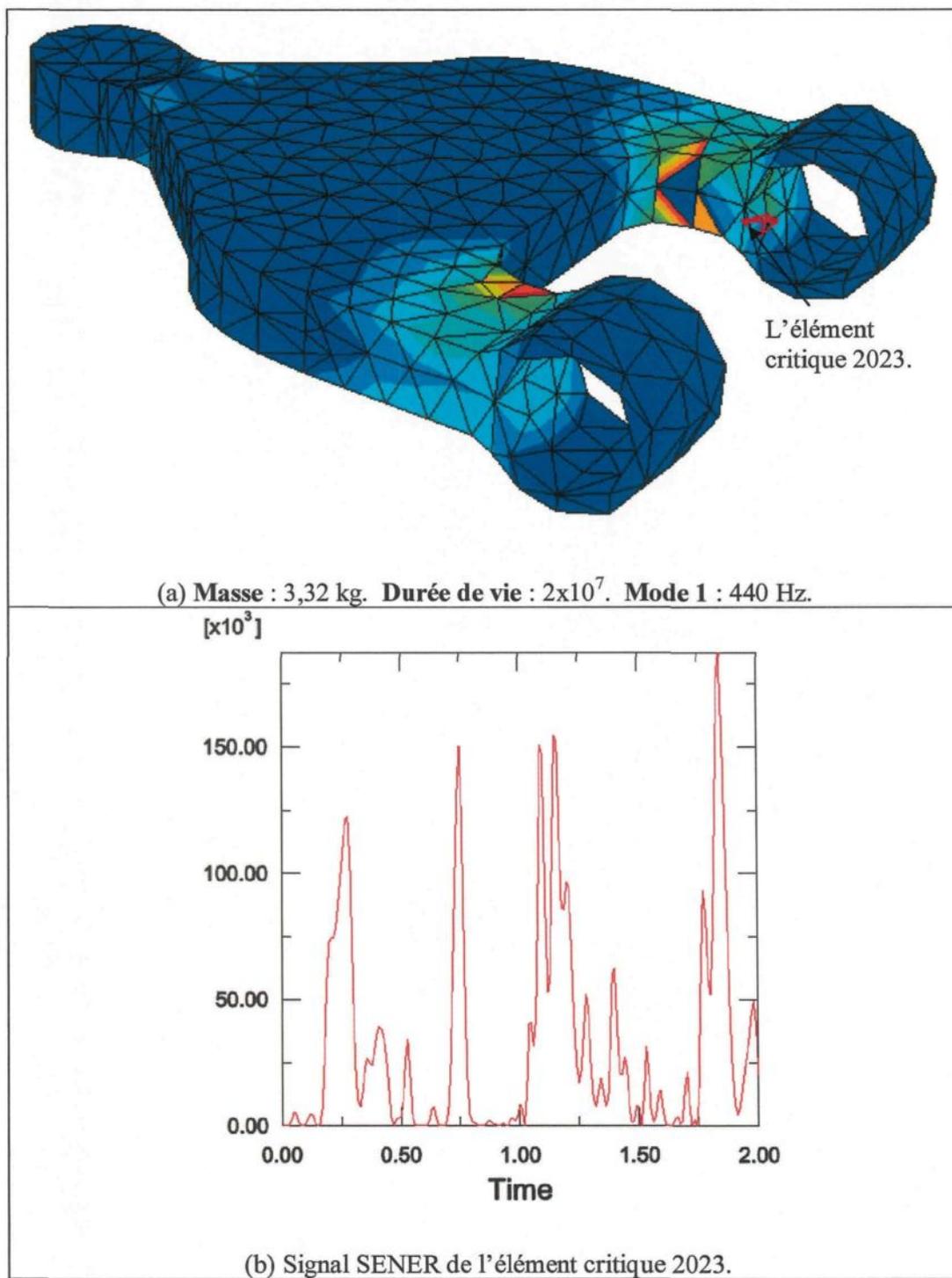


figure 51. Deuxième étape d'optimisation.

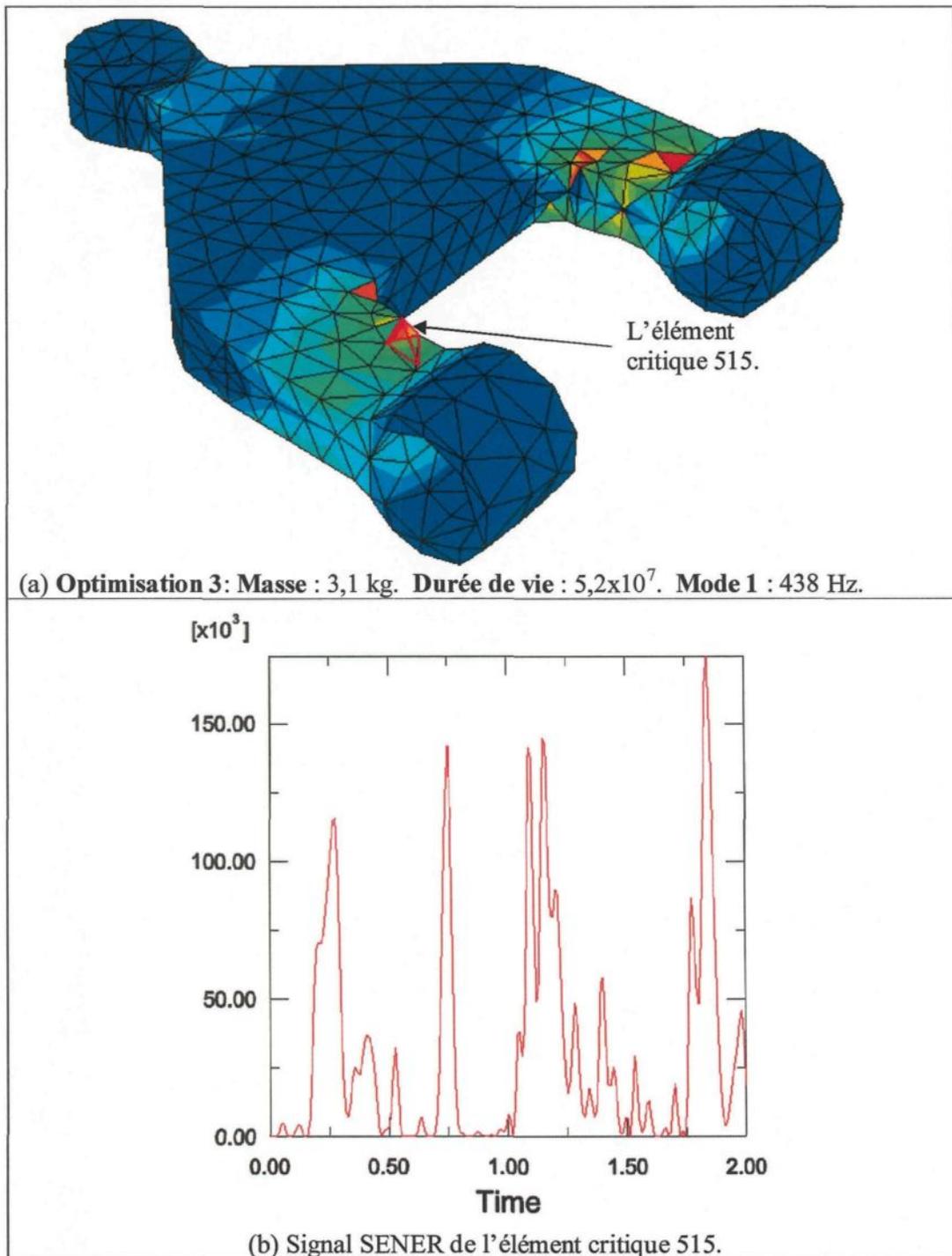


figure 52. Troisième étape d'optimisation.

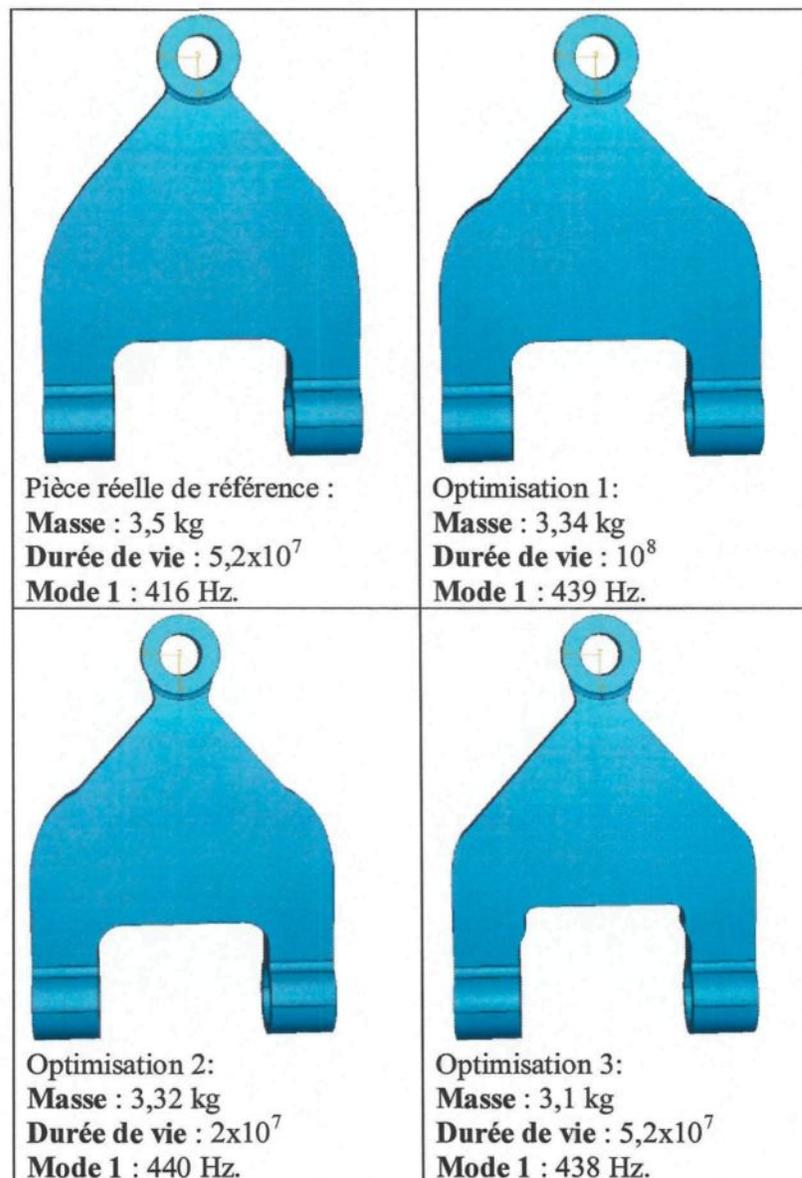


figure 53. Évolution de la géométrie de la pièce lors du processus d'optimisation.

6.2 Analyse dynamique et fréquentielle de la pièce de référence : bras de suspension supérieur d'un véhicule :

Le bras de suspension supérieur du système Macpherson est l'une des pièces automobile les plus sollicitées dynamiquement. Il est excité directement par l'irrégularité de la route à travers le pneu. Il diffère du bras de suspension inférieur par le fait qu'il ne fait pas partie du système de contrôle : action (excitation de la route à travers le pneu) et la contre réaction (ressort et amortisseur). Le système ressort amortisseur doit passer à travers le bras de suspension supérieur pour contrôler le bras de suspension inférieur comme illustré par la figure 54.

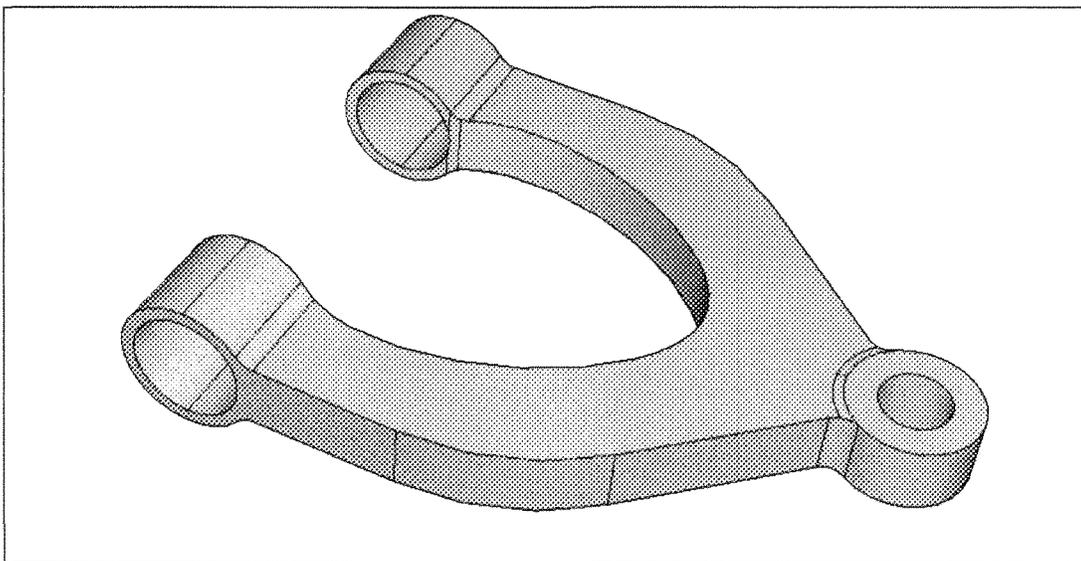


figure 54. Bras de suspension supérieur d'un système de suspension d'un véhicule.

Le rapport de maillage est aussi contrôlé de façon à rester constant afin d'analyser les résultats sous la même précision. Le même rapport de rejection est utilisé dans le processus d'optimisation du poids du bras de suspension supérieur. L'étape finale d'optimisation devrait présenter une pièce avec des congés pour éviter la concentration

des contraintes. Les figures 55, 56, 57 et 58 résument les résultats de la procédure d'optimisation selon le rapport de réjection défini dans la présente étude en l'occurrence RJ . Les fluctuations des valeurs de la SENER sont dues principalement aux fluctuations du rapport de maillage R avant d'atteindre la limite d'optimisation. Pendant ces trois étapes d'optimisation, on obtient un gain de 5% en poids sans affecter d'une manière significative la durée de vie de la pièce ni ses fréquences naturelles. En effet la durée de vie de la pièce fluctue autour de la valeur moyenne $N_m = 4,5 \times 10^7$ cycles. Le premier mode des fréquences naturelles de la pièce fluctue autour de la valeur moyenne 433 Hz.

Les résultats de l'étude d'optimisation sont comparables aux travaux de M. Haiba *et al.*[62]. En effet, ils ont réalisé une étude détaillée sur l'optimisation de la forme géométrique d'une pièce mécanique simple. Par contre, leur étude de la fatigue est basée principalement sur l'extrapolation de la courbe expérimentale de Wöhler, alors notre approche est essentiellement analytique et empirique utilisant le critère multiaxial de la densité d'énergie de déformation équivalent au cas uniaxial. M. Haiba *et al.*[62] ont étendu la méthode ESO (Evolutionary structural optimisation) dans le cas de la fatigue, qui a été implanté dans le cas de la contrainte Von Mises qui consiste à répéter les deux étapes suivantes :

- comparer la contrainte Von Mises de chaque élément σ_e et la contrainte Von Mises maximale de toute la structure σ_{\max} ,
- enlever les éléments qui satisfont à la condition $\frac{\sigma_e}{\sigma_{\max}} < RR$, avec RR est le rapport de réjection.

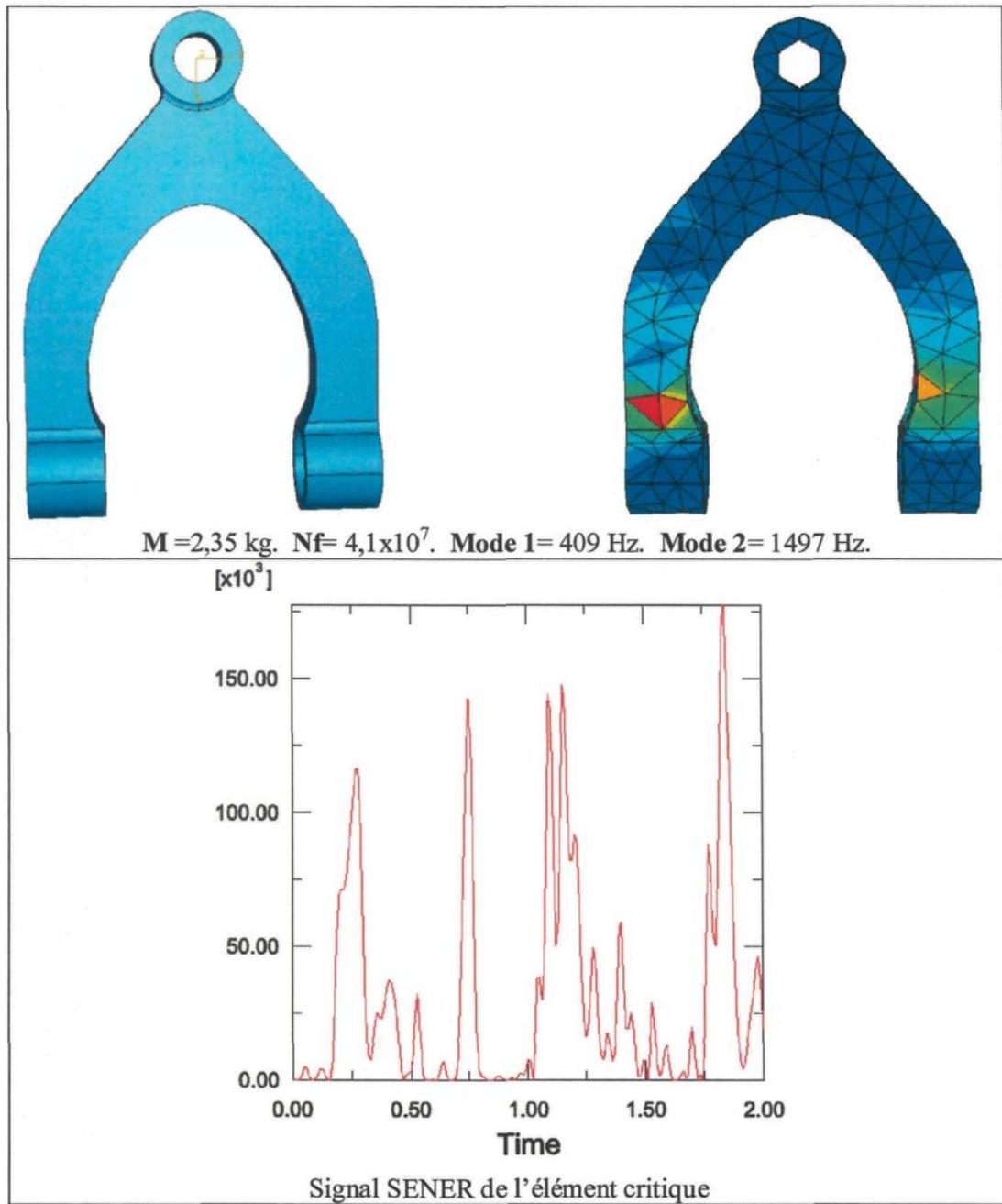


figure 55. Analyse des résultants de la pièce de référence.

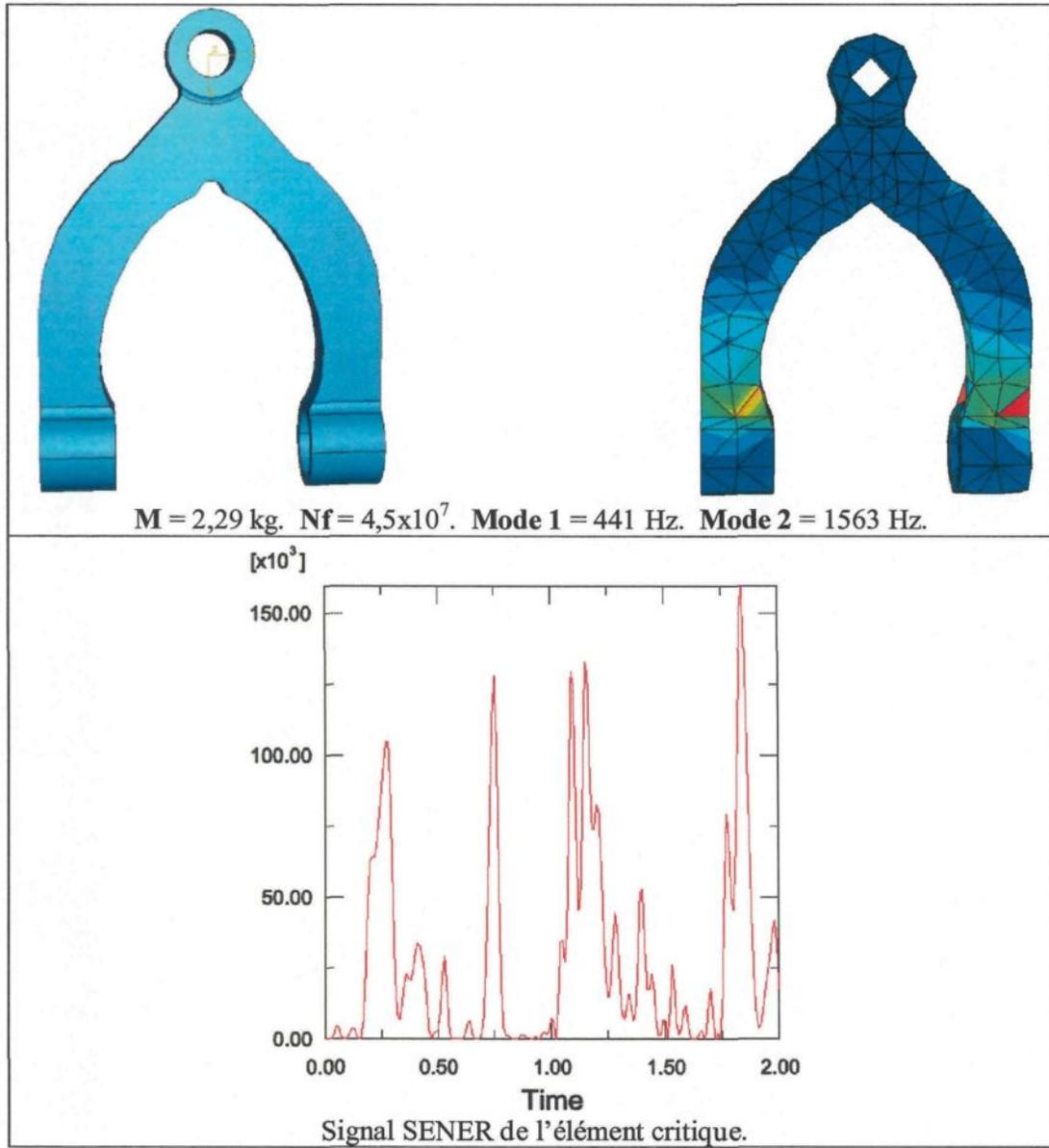


figure 56. Analyse des résultats de la première étape d'optimisation.

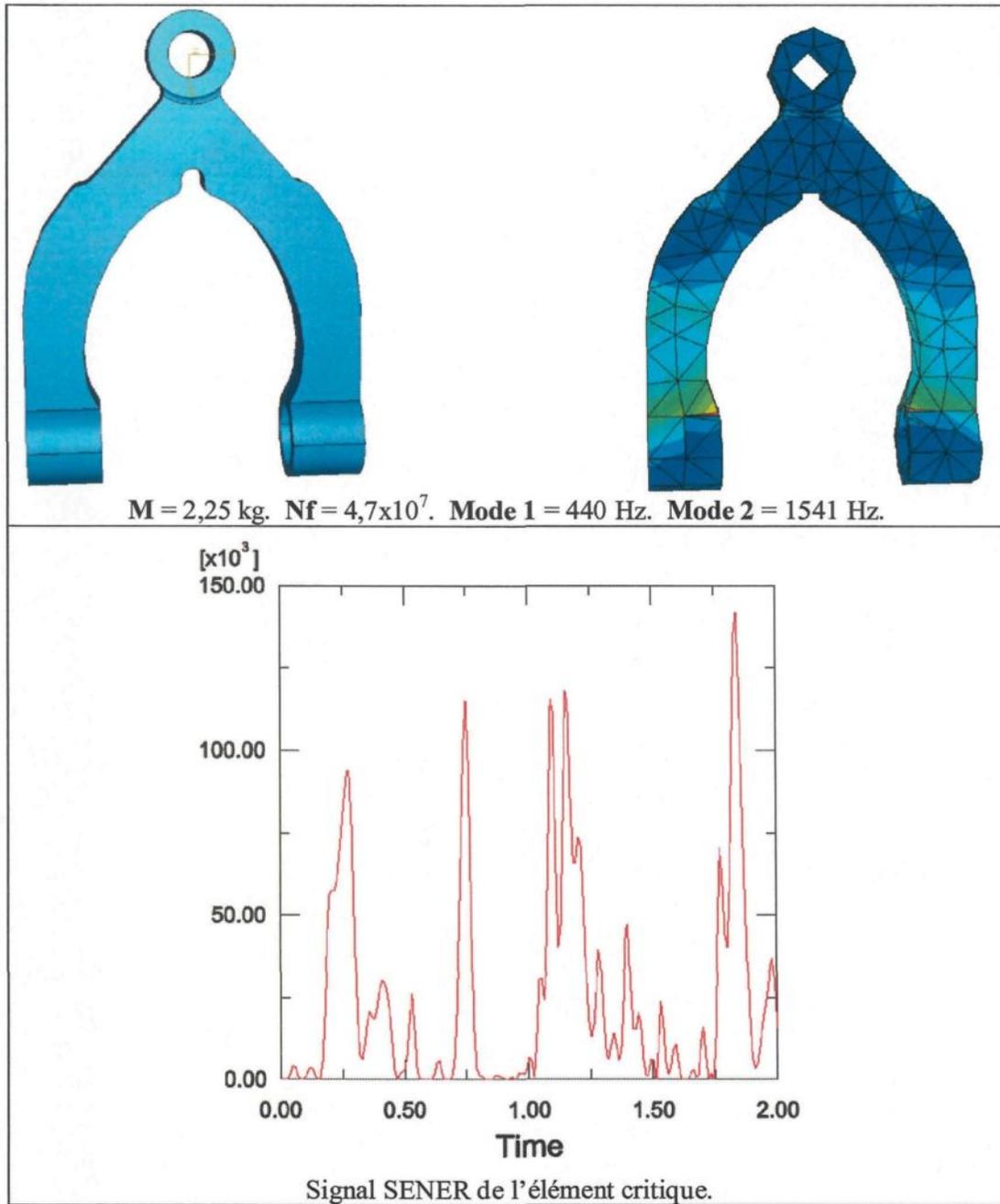


figure 57. Analyse des résultats de la deuxième étape d'optimisation.

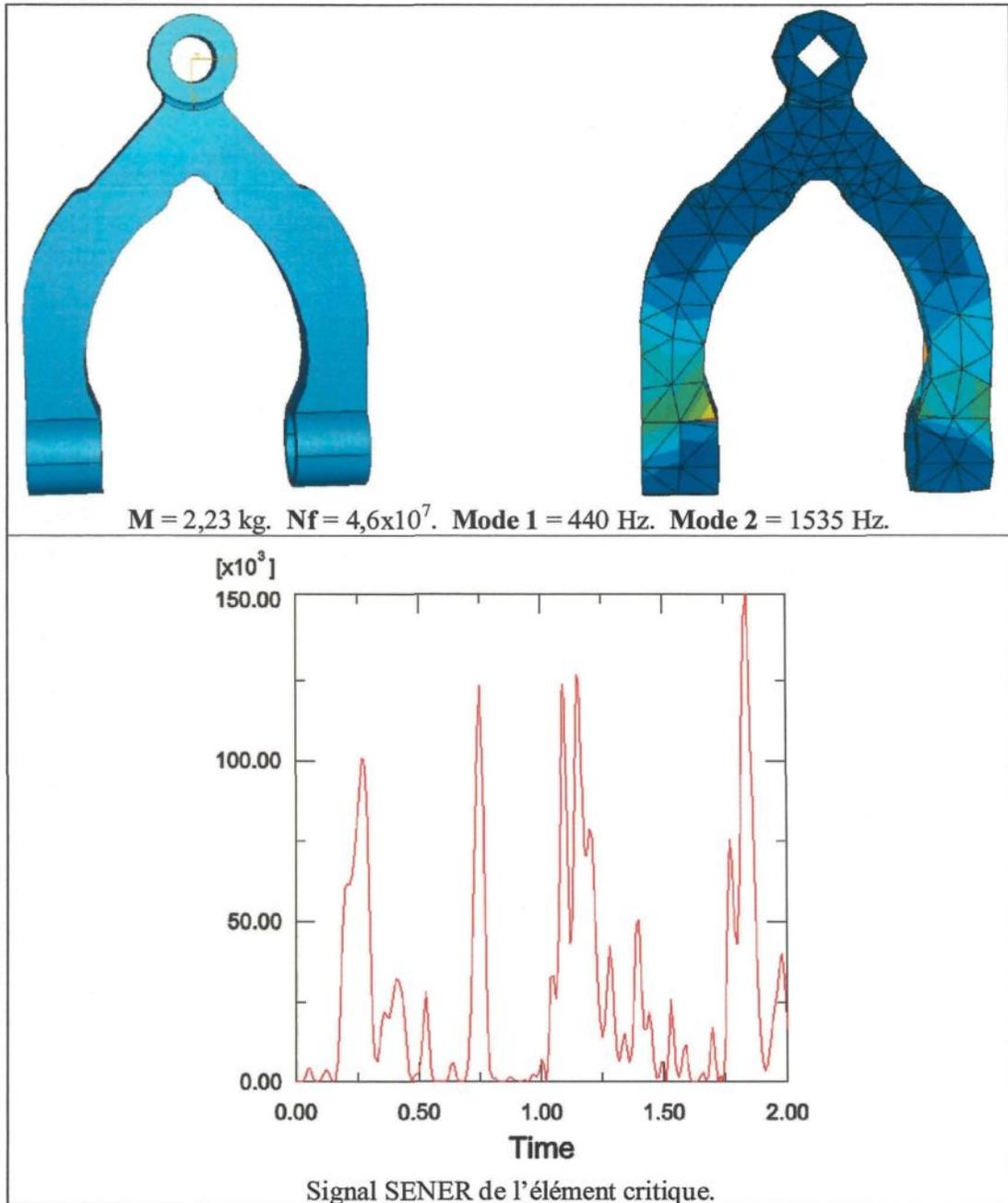


figure 58. Analyse des résultats de la troisième étape d'optimisation.

M. Haiba *et al.*[62] ont défini le rapport de réjection comme suit :

$$\frac{(Durée\ de\ vie)_{min}}{(Durée\ de\ vie)_{maxi}} \langle RR$$

où $(Durée\ de\ vie)_{min}$ est la durée de vie minimum par rapport à la fatigue sur tout l'espace conçu, $(Durée\ de\ vie)_{maxi}$ est la durée de vie maximum par rapport à la fatigue du $i^{ème}$ élément et RR est le rapport de réjection de la boucle instantanée d'optimisation.

M. Haiba *et al.*[62] ont utilisé l'extrapolation de la courbe de Whöler pour le calcul de la durée de vie partielle des cycles « rainflow ». Les résultats obtenus par ces derniers sont semblables à ceux de cette section et se résument comme suit :

- augmenter le seuil d'enlèvement de matière est une technique pour étendre une durée de vie finie sans affecter la distribution des durées de vie des éléments de la structure,
- l'augmentation du seuil d'enlèvement de matière n'est pas toujours suffisante pour avoir une structure avec une durée de vie finie dans chacun de ses éléments,
- la technique d'enlèvement de matière basée sur l'élimination des éléments qui ont une durée de vie de fatigue égale à la durée de vie de fatigue maximale associée au seuil est une approche qui donne des résultats de topologie optimale similaires obtenus par les méthodes mathématiques d'optimisation comme celle de la forme et de l'homogénéisation,
- la méthode d'enlèvement de matière augmente la contrainte. Comme l'augmentation de la contrainte due à l'optimisation de la géométrie prédite par

la méthode ESO, peut être moins efficace que la méthode d'optimisation de la forme,

- une technique optimale avec des conditions de durée de vie de fatigue devrait utiliser la méthode ESO et les méthodes d'optimisation de la forme. La méthode ESO change séquentiellement la base de la structure pour finir avec le design initiale alors que la méthode d'optimisation de la forme débute avec un design initial suggéré par la méthode ESO et conclut avec un design optimum.

Dans la présente étude nous n'avons pas renforcé la pièce aux points critiques. Le renforcement des régions critiques pourra être l'objet d'un autre travail de recherche consacré seulement à l'optimisation exhaustive de la pièce par les algorithmes génétiques utilisant le rapport de rejection développé dans la présente étude. La démarche d'optimisation que nous avons proposé permet d'alléger la pièce, est analogue à la méthode de M. Haiba *et al.*[62] qui ont utilisé la méthode simple dans le calcul des durées de vie à savoir l'extrapolation de la courbe standard de Wöhler. Cependant le rapport de rejection que nous avons développé dans la présente étude, est lié directement à la notion de fatigue, sans même calculer les durées de vie de tous les éléments du maillage, contrairement au travail de M. Haiba *et al.*[62], en utilisant un critère plus rationnel en l'occurrence le critère de la densité d'énergie de déformation. Le rapport de réjection que nous avons développé simplifie les calculs en s'adaptant à l'aspect aléatoire du chargement pour éviter l'extraction des cycles « rainflow » et le calcul de la durée de vie dans tous les éléments permettant ainsi à optimiser le poids de la pièce par rapport à sa durée de vie et ses modes propres dans des délais de temps raisonnables dans un maillage grossier ou raffiné.

Chapitre 7

Conclusion et recommandations

L'objectif principal de cette recherche consistait à développer un modèle hybride afin d'étudier le potentiel d'utilisation du bras de suspension d'un véhicule, en alliage d'aluminium, sous des sollicitations dynamiques dues à l'irrégularité de la route. Dans cet optique, nous avons élaboré un modèle analytique et numérique pour simuler le plus adéquatement possible le comportement dynamique d'un système de suspension ainsi que l'état des contraintes et de la densité d'énergie de déformation dans le bras de suspension inférieur d'un véhicule. Suite à une calibration par la courbe expérimentale de Whöler, utilisé par d'autres chercheurs, et par une solution analytique dans un cas particulier, il fut possible d'analyser la durée de vie de fatigue d'un bras de suspension d'un véhicule, en alliage d'aluminium, et d'optimiser sa forme de façon à améliorer sa fiabilité mécanique, augmenter ses fréquences propres et alléger son poids.

Au chapitre 2, nous avons présenté une description détaillée des propriétés mécaniques et de fatigue de différents alliages en particulier l'acier et les alliages d'aluminium. En outre, plusieurs critères de fatigue ont été présentés et analysés. Nous avons présenté des études de l'aspect spectral de la fatigue, le comportement dynamique d'un système de suspension d'un véhicule, un rappel sur les fréquences naturelles d'une

structure et une introduction à la méthode des calculs numériques par la méthode des éléments finis. Nous avons conclu que le critère multiaxial de densité d'énergie de déformation équivalent au cas uniaxial est une approche plus rationnelle puisqu'on compare deux tenseurs de même ordre en l'occurrence un tenseur d'ordre zéro. En plus, le critère de densité d'énergie, indépendant de la valeur moyenne d'un chargement, est plus pratique que le modèle de Morrow qui nécessite des corrections dû à l'effet de la valeur moyenne du chargement.

Au chapitre 3 nous avons étudié en détail le comportement dynamique d'un système de suspension d'un véhicule. Nous avons élaboré les équations de mouvement qui décrivent le contrôle dans le système de suspension qui est constitué d'une chaîne d'action représentée par un pneu de raideur K_p et de coefficient d'amortissement négligeable et une chaîne de contre réaction représentée par un ressort de raideur K_s monté en parallèle avec un amortisseur de coefficient d'amortissement C_s . Nous avons estimé la force maximale d'impact entre un dos d'âne et le pneu d'un véhicule mesuré dans une fraction de 0,5 seconde à 10000N. La valeur maximale de la force transmise par le pneu est de l'ordre de 4000N. Nous avons établi un modèle de la chaîne d'action et de contre réaction dans le cas du bras de suspension inférieur d'un véhicule, qui est soumis à des efforts dynamiques importantes. Les calculs numériques donnent une force de contre réaction maximale en cas d'amortissement de 1200N et 3750N dans le cas rigide qui correspond au quart du poids du véhicule.

Nous avons consacré le chapitre 4 à l'étude du gain en poids lorsqu'on utilise les alliages d'aluminium à la place de l'acier comme bras de suspension inférieur d'un véhicule. En effet, nous avons obtenu un gain en poids de 36% pour une même durée de vie lorsqu'on utilise l'alliage d'aluminium 7075-T6 à la place de l'acier Ausformed-

H11, confirmé par la courbe expérimentale de Wöhler. Dans ce chapitre, nous avons aussi négligé le comportement plastique de l'alliage 7075-T6 pour étudier un cas particulier dont nous avons développé une solution analytique approchée, en l'occurrence le cas élastique multiaxial sous chargement réel. Les résultats montrent que l'approche analytique proposée surestime la durée de vie de la pièce. Pour filtrer l'élément critique, nous avons généré une interface Matlab pour localiser les éléments critiques sans appliquer l'algorithme de Newton-Raphson dans tous les éléments du maillage, pour extraire la durée de vie de la pièce. En effet, ce filtre généralise le cas où l'excitation est multipoint décalée dans le temps donnant un enchevêtrement des signaux des contraintes des éléments du maillage du matériau. Les résultats de la solution analytique sont comparables à ceux du cas numérique obtenus par le code élément fini commercial Abaqus.

Quant au chapitre 5, nous l'avons consacré aux cas non linéaire élasto-plastique. Cette non linéarité a été décrite par la relation uniaxial de Ramberg-Osgood liant la contrainte à la déformation. Le code commercial élément fini Abaqus version 6.4 extrapole cette relation dans le cas multiaxial. Dans ce chapitre, le calcul par la méthode des éléments finis demande beaucoup d'attention car la sensibilité de certains type d'élément de maillage rend difficile l'exécution du schéma d'intégration implicite, stable, possible : éléments quadratiques sont sensibles aux distorsions, sont remplacés par les éléments linéaires. La contrainte maximale $(\sigma_a)_{\max}$ du cycle « rainflow » de l'élément critique, filtrée par une interface Matlab, d'une pièce d'épaisseur 2,5cm, est de l'ordre de 31MPa et une déformation maximale correspondante de l'ordre de $4,3 \times 10^{-4}$. Ces valeurs, légèrement faibles, peuvent être encore atténuées pour sécuriser la pièce en la renforçant aux points critiques. Les résultats de la simulation numérique, montrent

que le signal de chargement étudié doit se répéter $8,86 \times 10^{11}$ fois jusqu'à la rupture de la pièce, en alliage d'aluminium 7075-T6 ayant une épaisseur de 2,5cm. La durée de vie augmente lorsqu'on augmente l'épaisseur de la pièce. En variant l'épaisseur on peut identifier les paramètres de sécurité minimum et maximum de référence pour réaliser une optimisation tenant en compte la durée de vie de fatigue de la pièce, son poids et ses fréquences propres.

Dans le chapitre 6, nous avons proposé une procédure d'optimisation rationnelle, avec un rapport de rejection lié directement à la fatigue. La démarche d'optimisation que nous avons proposé permet d'alléger la pièce, est analogue à la méthode de M. Haiba *et al.*[62] qui ont utilisé la méthode simple dans le calcul des durées de vie à savoir l'extrapolation de la courbe standard de Wöhler. Cependant, le rapport de rejection que nous avons développé dans la présente étude, est lié directement à la notion de fatigue, sans même calculer les durées de vie de tous les éléments du maillage, contrairement au travail de M. Haiba *et al.*[62], en utilisant un critère plus rationnel en l'occurrence le critère de la densité d'énergie de déformation. Le rapport de réjection que nous avons développé simplifie les calculs en s'adaptant à l'aspect aléatoire du chargement pour éviter l'extraction des cycles « rainflow » et le calcul de la durée de vie dans tous les éléments permettant ainsi à optimiser le poids de la pièce par rapport à sa durée de vie et ses modes propres dans des délais de temps raisonnables dans un maillage grossier ou raffiné.

Finalement, pour les travaux futurs le développement d'un modèle complet est suggéré pour étudier les différents cas de figure. En effet, l'intervention des butées en caoutchouc « Jounce bumper » lorsqu'on dépasse les déplacements limites imposés par le design, lors d'une excitation engendrant un déplacement qui dépasse le déplacement

maximum du bras de suspension inférieur d'un véhicule, donnera un signal de la densité d'énergie de déformation présentant un enchevêtrement dans le temps. Étudier l'effet des différents types de route ayant des densités spectrales de puissance PSD différentes telle que l'autoroute etc... Réaliser une étude exhaustive de la méthode d'optimisation de la forme de la pièce pour construire une fonction objective faisant partie d'un organigramme complet, contenant le comportement dynamique du véhicule, l'étude la fatigue de la pièce et l'analyse fréquentielle dans différentes situations, en utilisant le rapport de réjection développé dans la présente étude.

Les résultats de la présente étude ont été diffusés dans les journaux et congrès suivants :

Publications dans les journaux internationaux:

1. A. Saoudi, M. Bouazara and D. Marceau «A Study of Fatigue Failure in the Lower Suspension Arm of a Vehicle Using a Multiaxial Criterion of the Strain Energy Density» (FFEMS-4135). *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* (soumis, décembre 2007).
2. A. Saoudi, M. Bouazara and D. Marceau «Study of Fatigue Life and Weight Optimization of Automobile Aluminium Alloy Part under Random Road Excitation» *Journal of Shock and Vibration* (soumis Mars 2008).

Conférences nationales et internationales:

1. A. Saoudi, M. Bouazara and D. Marceau «Prediction of Fatigue Life of Automotive Aluminium Alloy Suspension Part» International Conference of Fracture, Alger, Juin 2008, Algeria.
2. A. Saoudi, M. Bouazara and D. Marceau «Prédiction de la durée de vie des pièces automobile en alliage Al» Congrès international : mécanique appliquée CANSAM 2007, Toronto, Canada.
3. A. Saoudi, M. Bouazara and D. Marceau «Prédiction de la durée de vie des pièces automobile en alliage Al» Congrès international de métallurgie : COM2006 à Montréal, octobre 2006, Montréal, Canada.
4. A. Saoudi, M. Bouazara and D. Marceau : «Prédiction de la rupture par fatigue dans les pièces automobiles en alliage d'aluminium» Synergie Al-2006, du 22 au 23 octobre 2003, Canada.
5. A. Saoudi, M. Bouazara and D. Marceau «Étude de la prédiction de la rupture par fatigue dans les alliages légers par le critère de densité d'énergie (étude

- analytique dans le cas uniaxial)» Congrès de l'ACFAS 2005 à Chicoutimi, Canada.
6. A. Saoudi, M. Bouazara and D. Marceau «étude de la prédiction de la fissuration par fatigue dans les pièces d'automobile en alliages d'aluminium» Synergie Al-2003 au centre de technologie de l'aluminium de Chicoutimi CTA, du 22 au 23 octobre 2003, Chicoutimi, Canada.
 7. A. Saoudi and M. Bouazara «Étude de la prédiction de la rupture par fatigue dans les alliages légers par calcul numérique» congrès de l'ACFAS 2003 à Rimouski, Canada.

Références et annexes

-
- [1] A Bignonnet "Approche globale d'allégement des véhicules " Mec. Ind. (2001) 2, pp 173-180.
- [2] W.S. Miller, L. Zhuang, J. Bottema, A.J. Wittebrood, P. De Smet, A. Haszler et A. Vieregge "Recent development in aluminium alloys for the automotive industry" Materials Science and Engineering, A280 (2000), pp 37-49.
- [3] Masaaki Saito, Shuuichiro Iwatsuki, Kunihiro Yasunaga, Kimitaka Andoh "Development of aluminium body for the most fuel efficient vehicle" JSAE Review 21 (2000) pp 511-516.
- [4] K. Wilfred, P.M. Jean et Z. Gérald "Introduction à la science des matériaux" Presse Polytechniques et Universitaires Romandes, 2ieme édition, 404 pages, 1991.
- [5] Norman E. Dowling " Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue" Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1999, 830 pages.
- [6] Carl Villeneuve "Neutralisation et dissolution des intermétalliques de fer dans les alliages Al-Si" Mémoire Présenté à l'Université du Québec à Chicoutimi Comme Exigence Partielle de la Maîtrise en Ingénierie, Août 1998.
- [7] William F. Smith, "Materials science and engineering: structure and properties of engineering alloys" 2nd Edition, McGraw-Hill Series in Materials Science and Engineering, 1993, 630 pages.
- [8] Claude Bathias et Jean-Paul Baïlon, "La fatigue des matériaux et des structures" Maloine S.A. Éditeur, les Presses de l'Université de Montréal, 1980, 547 pages.
- [9] Marthinsen, K.; Nes, E. "Modelling strain hardening and steady state deformation of Al-Mg alloys" Materials Science and Technology v. 17 no4 Apr. 2001, pp 376-88.
- [10] André Bazergui, Thang Bui-Quo, André Biron, Georges McIntyre et Charles Laberge, "Résistance des matériaux" Deuxième Édition, Éditions de l'École Polytechnique de Montréal, 1993, 595 pages.
- [11] Bernard Barthélémy, "Notions pratiques de mécaniques de la rupture" Éditions Eyrolles, Paris, 1980, 291 pages.
- [12] A. Banvillet, T. Lagoda, E. Macha, A. Nieslony, T. Palin-Luc, J.-F. Vittori "Fatigue life under non-Gaussian random loading from various models" International Journal of Fatigue , 26 (2004), pp 349-363.
- [13] R. Sunder "Spectrum load fatigue- Underlying mechanisms and their significance in testing and analysis" International Journal of Fatigue, Vol 25, Issues 9-11, September-November 2003, pp 971-981
- [14] S. Ustilovsky, R. Arone "Random fatigue crack growth in aluminum alloys" International Journal of Fatigue, Vol 21 (1999), pp 275-282.

-
- [15] Michel Olagnon "Practical computation of statistical properties of «rainflow» counts" *International Journal of Fatigue*, 16, Issue 5, July 1994, pp 306-314.
- [16] Cervello, S.; Donzella, G. ; Pola, A "Analysis and design of a low-noise railway wheel" *Proceedings of the Institution of mechanical Engineers. Part F, Journal of Rail*, Vol 215, 3 fevrier 2001, pp 179-92.
- [17] A. Elmarakbi, H. El-hage et S. Bhattacharjee, "Multiaxial fatigue crack initiation by strain energy density using finite element method" *CSME Forum 2002*, Kingston, may 21-24.
- [18] Mars W.V., "Cracking energy density as a predictor of fatigue life under multiaxial conditions" *Rubber Chemistry and Technology*, Akron, Mar/Apr 2002, pp 1-17.
- [19] Asok Ray, Sekhar Tangirala, Shashi Phoha, "Stochastic modeling of fatigue crack propagation" *Applied Mathematical Modeling*, 22 (1998), pp 197-204.
- [20] Asok Ray et Ravindra Patankar, "A stochastic model of fatigue crack propagation under variable-amplitude loading" *Engineering Fracture Mechanics*, 62 (1999), pp 477-493.
- [21] Asok Ray et Ravindra Patankar, "Fatigue crack growth under variable-amplitude loading: Part II – Code development and model validation" *Applied Mathematical Modeling*, 25 (2001), pp 995-1013.
- [22] M.S. Bruzzi et P.E. McHugh, "Methodology for modelling the small crack fatigue behaviour of aluminium alloys" *International Journal of Fatigue*, 24 (2002), pp 1071-1078.
- [23] Jia-Zhen, Jia-Zhong Zhang et Shan Yi Du, "Elastic-Plastic finite element analysis and experimental study of short and long fatigue crack growth" *Engineering Fracture Mechanics*, 68 (2001), pp 1591-1605.
- [24] A. de-Andrés, J.L.Pérez et Ortiz M., "Elastoplastic finite element analysis of three-dimensional fatigue crack growth in aluminium shafts subjected to axial loading" *International Journal of Solids and Structures*, 36 (1999), pp 2231-2258.
- [25] Visvanatha S.K., Straznicky P.V. et Hewitt R.L., "Influence of strain estimation methods on life predictions using the local strain approach" *International Journal of Fatigue*, 22 (2000), pp 675-681.
- [26] T.H. Toppers, R.M. Wetzal et JoDeanMorrow "Neuber's rule applied to fatigue of notched specimens" *Journal of Materials* Vol 4(1), 1969, pp 200-9.
- [27] Duyi Ye, Saburo Matsuoka, Naoyuki Suzuki et Yoshio Maeda "Further investigation of Neuber's rule and the equivalent strain energy density (ESED) method" *International Journal of Fatigue*, Volume 26, Issue 5, Mai 2004, pp 447-455.
- [28] H. Neuber "A physically nonlinear notch and crack model" *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol 16, Issue 4, August 1968, pp 289-294.

-
- [29] M.Knop, R. Jones, L. Molent et C. Wang "On the Glinka and Nuber methods for calculating notch tip strains under cyclic load spectra" *International Journal of Fatigue*, 22 (2000), pp 743-755.
- [30] Chen, Chuin-Shan, ; Wawrzynek, Paul A. ; Ingrassia, Anthony R "Prediction of residual strength and curvilinear crack growth in aircraft fuselages" *Aiaa Journal*, Vol v. 40 no 8, Aug. 2002, pp 1644-52.
- [31] Kuang-Hua Fuh et Chih-Fu Wu "A residual-stress model for the milling of aluminium alloy (2014-T6)" *Journal of Materials Processing Technology* 51 (1995), pp 87-105.
- [32] S.Curtis, E.R. De los Rios, C.A. Rodopoulos et A.Levers "Analysis of the effects of controlled shot peening on fatigue damage of high strength aluminium alloys" *International Journal of Fatigue*, 25 (2003), pp 59-66.
- [33] Lindgren, M et Lepisto, T "Effect of mean stress on residual stress relaxation in steel specimen" *Materials science and Technology*, August 2002, Vol. 18, pp 845-849.
- [34] Ph. Trompette "Mécanique des structures par la méthode des éléments finis, statique et dynamique" Masson Éditeur, Dépôt légal avril 1992, 270 pages.
- [35] Abaqus User's Manual, Version 6.4.
- [36] Xavier Pitoiset, "Méthodes spectrales pour une analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux" thèse soumise pour l'obtention du grade de docteur en sciences appliquées (30 mars 2001), 149 pages.
- [37] M. A. Julien "Dynamique de la voiture automobile", société des éditions Techno, 1968, 210 pages.
- [38] Thomson, William Tyrell "Theory of vibration with application" 4th edition, by Prentice Hall, 1993, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 546 pages.
- [39] Athanasios C., Chasalevris, et Chris A. Papadopoulos "Identification of multiple cracks in beams under bending" *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20 (2006), pp 1631-1673.
- [40] N.G. Stephen et Y. Zhang "Coupled tension-torsion vibration of repetitive beam-like structures" *Journal of Sound and Vibration*, 293 (2006), pp 253-265.
- [41] H. Salarieh et M. Ghorashi "Free vibration of Timoshenko beam with finite mass rigid tip load and flexural-torsional coupling" *International Journal of Mechanical Sciences* 48 (2006), pp 763-779.
- [42] E. Hamed et Y. Frostig "Natural frequencies of bonded and unbonded prestressed beams-prestress force effects" *Journal of Sound and Vibration*, accepted and will be published.
- [43] Andreas Kyprianou, John E. Mottershead et Huajiang Ouyang "Structural modification. Part2: assignment of natural frequencies and antiresonances by an added beam" *Journal of Sound and vibration*, 284 (2005), pp 267-281.

-
- [44] Andreas Kyprianou, John E. Mottershead et Huajiang Ouyang "Assignment of natural frequencies by an added mass and one or more springs" *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18 (2004), pp 263-289.
- [45] H. Rahnejat, "Multi-Body-Dynamics: vehicles, machines and mechanisms", Society of Automotive Engineers, Inc., 1998, 355 pages.
- [46] Bouazara Mohamed "Étude et analyse de la suspension active et semi-active des véhicules routiers" Thèse de doctorat Présentée à la faculté des études supérieures de l'université Laval à Québec, pour l'obtention du grade de Philosophiae Doctor en génie mécanique, Août 1997.
- [47] Hyungyil Lee, Heon Seo et Gyung-Jin Park "Design enhancements for stress relaxation in automotive multi-shell-structures" *International Journal of Solids and Structures*, 40 (2003), pp 5319-5334.
- [48] M. Haiba, D.C. Barton, P.C. Levesley "The development of an optimization algorithm based on fatigue life" *International Journal of Fatigue* 25 (2003) 299-310.
- [49] Gbadebo M. Owolabi, Meera N.K. Sing "A comparaison between analytical models that approximate notch-root elastic-plastic strain-stress components in two-phase, particule-reinforced, metal matrix composites under multiaxial cyclic loading: Theory" *International Journal of Fatigue*, 28, (2006) pp 910-917.
- [50] Gbadebo M. Owolabi, Meera N.K. Sing "A comparaison between analytical models that approximate notch-root elastic-plastic strain-stress components in two-phase, particule-reinforced, metal matrix composites under multiaxial cyclic loading: experiments" *International Journal of Fatigue*, 28, (2006) pp 918-925.
- [51] Lachowicz C.T "Calculation of the elastic-plastic strain energy density under cyclic and random loading" *International Journal of Fatigue*, 23, (2001) pp 643-652.
- [52] Pan W-F, Hung C-Y et Chen L-L "Fatigue life estimation under multiaxial loadings" *International Journal of Fatigue*, 21, (1999), pp 3-10.
- [53] B.L. Lee, K.S. Kim et K.M. Nam "Fatigue analysis under variable amplitude loading using ana energy parameter" *International Journal of Fatigue*, 25, (2003), pp 621-631.
- [54] B. Li, L. Reis, M. De Freitas "Simulation of cyclic stress/strain evolutions for multiaxial fatigue life prediction" *International Journal of Fatigue*, 28 (2006), pp 451-458.
- [55] Sun J.S, Lee K.H. et Lee H.P. "Comparaison of implicit and explicit finite element methods for dynamic problems" *Journal of Materials Processing Technology* 105 (2000) pp 110-118.
- [56] Rebelo N., Nagategaal J.C., Taylor L.M. "Comparaison of implicit and explicit finite element methods in the simulation forming processes" *Numerical methods in industrial forming processes: proceedings 4th international 1992* pp 99-108.

-
- [57] Hibbitt, Karlsson and Sorensen Inc., "Application of implicit and explicit finite element techniques to metal forming" *Journal of material processing technology*, Number 45, pp 649-656.
- [58] N.V. Banichuk, M. Serra and A. Sinitsyn "Shape optimization of quasi-brittle axisymmetric shells by genetic algorithm" *Computers & Structures*, Volume 84, Issues 29-30, November 2006, Pages 1925-1933.
- [59] Roberto Brighenti, Andrea Carpinteri and Sabrina Vantadori "A genetic algorithm applied to optimisation of patch repairs for cracked plates " *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 196, Issues 1-3, 1 December 2006, Pages 466-475.
- [60] Association canadienne des automobiles, manuel complet de l'automobile.
- [61] M. Géradin et D. Rixen "Théorie des vibrations : Application à la dynamique des structures" Collection Masson, 1993, 415 pages.
- [62] M. Haiba, D.C. Barton, P.C. Brooks et M.C. Levesley "Evolutionary structural optimisation of Dynamically loaded components in consideration of fatigue life" *Advances in Engineering Software*, 36 (2005), pp 49-57.

Annexe 1

Données spectrales: déplacement et vitesse.

Temps Δt (s)	PSD $S(\gamma)$ (m)	PSD normalisée	$x_1 = \frac{L_1}{L_2} x_2$ (m)	$\dot{x}_1 = \frac{x_1(t + \Delta t) - x_1(t)}{\Delta t}$ (m/s)
0	0,00E+00	0,00E+00	0,0E+00	4,01E-02
0,01	8,01E-04	2,81E-02	4,0E-04	-7,38E-02
0,02	-6,75E-04	-2,37E-02	-3,4E-04	5,38E-02
0,03	4,01E-04	1,41E-02	2,0E-04	1,31E-01
0,04	3,03E-03	1,06E-01	1,5E-03	9,25E-02
0,05	4,88E-03	1,71E-01	2,4E-03	-1,65E-02
0,06	4,55E-03	1,60E-01	2,3E-03	-9,65E-02
0,07	2,62E-03	9,19E-02	1,3E-03	-9,99E-02
0,08	6,23E-04	2,19E-02	3,1E-04	-6,81E-02
0,09	-7,38E-04	-2,59E-02	-3,7E-04	-5,96E-02
0,1	-1,93E-03	-6,77E-02	-9,7E-04	-7,35E-02
0,11	-3,40E-03	-1,19E-01	-1,7E-03	-5,75E-02
0,12	-4,55E-03	-1,60E-01	-2,3E-03	1,55E-02
0,13	-4,24E-03	-1,49E-01	-2,1E-03	9,05E-02
0,14	-2,43E-03	-8,53E-02	-1,2E-03	8,03E-02
0,15	-8,24E-04	-2,89E-02	-4,1E-04	-4,13E-02
0,16	-1,65E-03	-5,79E-02	-8,3E-04	-1,98E-01
0,18	-1,11E-02	-3,89E-01	-5,6E-03	-2,30E-01
0,19	-1,57E-02	-5,51E-01	-7,9E-03	-1,10E-01
0,2	-1,79E-02	-6,28E-01	-9,0E-03	-1,00E-02
0,21	-1,81E-02	-6,35E-01	-9,1E-03	0,00E+00
0,22	-1,81E-02	-6,35E-01	-9,1E-03	-2,50E-02
0,23	-1,86E-02	-6,53E-01	-9,3E-03	-6,00E-02
0,24	-1,98E-02	-6,95E-01	-9,9E-03	-6,00E-02
0,25	-2,10E-02	-7,37E-01	-1,1E-02	-6,00E-02
0,26	-2,22E-02	-7,79E-01	-1,1E-02	-4,50E-02
0,27	-2,31E-02	-8,11E-01	-1,2E-02	0,00E+00
0,28	-2,31E-02	-8,11E-01	-1,2E-02	1,05E-01
0,29	-2,10E-02	-7,37E-01	-1,1E-02	2,35E-01
0,3	-1,63E-02	-5,72E-01	-8,2E-03	2,85E-01
0,31	-1,06E-02	-3,72E-01	-5,3E-03	2,03E-01
0,32	-6,55E-03	-2,30E-01	-3,3E-03	3,55E-02
0,33	-5,84E-03	-2,05E-01	-2,9E-03	-9,70E-02
0,34	-7,78E-03	-2,73E-01	-3,9E-03	-1,11E-01
0,35	-1,00E-02	-3,51E-01	-5,0E-03	-4,00E-02
0,36	-1,08E-02	-3,79E-01	-5,4E-03	2,00E-02
0,37	-1,04E-02	-3,65E-01	-5,2E-03	5,00E-03
0,38	-1,03E-02	-3,61E-01	-5,2E-03	-5,00E-02
0,39	-1,13E-02	-3,96E-01	-5,7E-03	-6,50E-02
0,4	-1,26E-02	-4,42E-01	-6,3E-03	-2,50E-02
0,41	-1,31E-02	-4,60E-01	-6,6E-03	1,00E-02
0,42	-1,29E-02	-4,53E-01	-6,5E-03	3,50E-02
0,43	-1,22E-02	-4,28E-01	-6,1E-03	6,50E-02

Données spectrales: force de réaction F_2 et contre réaction F_1 .

Temps Δt (s)	$F_2 = k_p x_2 =$ 4000x(PSD Normalisée) (N)	F_2 non amorti (N)	$F_1 = K_s x_1 + C_s \dot{x}_1$ (N)
0	0,00E+00	0,00E+00	4,0E+01
0,01	1,12E+02	2,81E+02	-8,0E+01
0,02	-9,47E+01	-2,37E+02	5,9E+01
0,03	5,63E+01	1,41E+02	1,3E+02
0,04	4,25E+02	1,06E+03	6,8E+01
0,05	6,85E+02	1,71E+03	-5,6E+01
0,06	6,39E+02	1,60E+03	-1,3E+02
0,07	3,68E+02	9,19E+02	-1,2E+02
0,08	8,74E+01	2,19E+02	-7,3E+01
0,09	-1,04E+02	-2,59E+02	-5,4E+01
0,1	-2,71E+02	-6,77E+02	-5,8E+01
0,11	-4,77E+02	-1,19E+03	-3,0E+01
0,12	-6,39E+02	-1,60E+03	5,2E+01
0,13	-5,95E+02	-1,49E+03	1,2E+02
0,14	-3,41E+02	-8,53E+02	1,0E+02
0,15	-1,16E+02	-2,89E+02	-3,5E+01
0,16	-2,32E+02	-5,79E+02	-1,8E+02
0,17	-7,87E+02	-1,97E+03	-2,3E+02
0,18	-1,56E+03	-3,89E+03	-1,4E+02
0,19	-2,20E+03	-5,51E+03	1,6E+01
0,2	-2,51E+03	-6,28E+03	1,3E+02
0,21	-2,54E+03	-6,35E+03	1,4E+02
0,22	-2,54E+03	-6,35E+03	1,2E+02
0,23	-2,61E+03	-6,53E+03	8,9E+01
0,24	-2,78E+03	-6,95E+03	9,8E+01
0,25	-2,95E+03	-7,37E+03	1,1E+02
0,26	-3,12E+03	-7,79E+03	1,3E+02
0,27	-3,24E+03	-8,11E+03	1,8E+02
0,28	-3,24E+03	-8,11E+03	2,9E+02
0,29	-2,95E+03	-7,37E+03	4,0E+02
0,3	-2,29E+03	-5,72E+03	4,2E+02
0,31	-1,49E+03	-3,72E+03	2,9E+02
0,32	-9,19E+02	-2,30E+03	8,8E+01
0,33	-8,20E+02	-2,05E+03	-5,0E+01
0,34	-1,09E+03	-2,73E+03	-4,9E+01
0,35	-1,40E+03	-3,51E+03	4,0E+01
0,36	-1,52E+03	-3,79E+03	1,1E+02
0,37	-1,46E+03	-3,65E+03	8,8E+01
0,38	-1,45E+03	-3,61E+03	3,2E+01
0,39	-1,59E+03	-3,96E+03	2,5E+01
0,4	-1,77E+03	-4,42E+03	7,6E+01
0,41	-1,84E+03	-4,60E+03	1,1E+02
0,42	-1,81E+03	-4,53E+03	1,4E+02
0,43	-1,71E+03	-4,28E+03	1,6E+02

Annexe 2

Code Fortran : cas uniaxial (SWT)

```

program simulation
c-----simulation sur plaque triangulaire-----
c-----durée de l'excitation 2 secondes
c-----pas de temps égale à deltat=0.01
c-----maximum d'itération est k=200
c-----
c---- le programme se subdivise en plusieurs parties
c-----Première Partie: déclaration des paramètres
c-----
      integer i,j,k,M
            integer pointx,pointz
            real sigmaa, Iz, sigmamax,pmax,w
c----paramétrisation-----
c----V(temps,distance) : effort tranchant
            dimension V(200)
            dimension resumenergy(200,200), resumesigmaa(200,200),
      &      resumeepsilona(200,200)
            real epsilona
            real localenergy
c----profil de contrainte selon Ox, Oy et Oz
            dimension sigmaxx(200)
            dimension sigmayy(200)
            dimension tauxy(200)
c----contraintes principales
            dimension sigma1(200)
            dimension sigma2(200)
            dimension c(200)
            dimension phi(200)
c----Les dimensions de la plaque
            real Longueur
            real epaisseur
            real largeur
            real dx
            real dz
c----les propriétés du matériau pour l'alliage Al-7075T6.
            real Hprime
c-----hprime=977
            real nprime
c----nprime = 0.106
            real EYoung
c----EYoung=71000

```

```

    real P(200),F2P,F2N,F2(200),F1(200),deltat
c-----Les valeurs numériques
c-----le poids F2 alterne entre deux valeurs: F2P et F2N
        F2P=3750
        F2N=-3750
c-----force d'excitation sans amortissement
c-----P(k)=2975*sin(2*3.14159265*k*deltat)
c-----la réaction dans le joint de suspension F1(k)=P(k)-F2(k)

c-----la plaque est de longueur L=500mm, de largeur l=200mm
c-----et différentes épaisseurs
    deltat=0.01
        largeur=0.2
        epaisseur=0.020
        hprime=977
        nprime=0.106
        EYoung=71000
c    print*,'Entrer epaisseur'
c    read*,epaisseur
        print*,'Entrer pmax:'
        read*,pmax
c-----paramètre de la loi Ramberg-Osgood
c    print*,'Entrer Hprime:'
c    read*, Hprime
c    print*,'Entrer nprime:'
c    read*,nprime
c    print*,'EYoung'
c    read*,EYoung
c-----fin paramètre de la loi Ramberg-Osgood
        Longueur=0.5
        pointx=200
        pointz=200
        dx = Longueur/pointx
        dz = largeur/pointz
        Iz=(largeur*(epaisseur**3))/3

        do k=1,200
c-----Alternance entre excitation force de réaction et poids
            P(k)=pmax*sin(2*3.14159265*k*deltat)

            if (P(k).le.0.999574*pmax .and. P(k).ge.0) then
                F2(k)=F2N
            else
                F2(k)=F2P
            end if
            F1(k)=P(k)-F2(k)

```

```

end do
c-----
c-----
c-----
do i=1,201
do j=1,201

c-----début Délimitation du triangle
IF (i*dx .le. 5*dz*j .and. i*dx .le. -5*dz*j+1) then
do k=1,200

c-----Fin de début la délimitation du triangle
c-----Effort Tranchant
c-----
c-----Partie S: singularités
c-----
if (i .eq. 1) then
V(k)=F1(k)
else
if (i .eq. 100) then
V(k)=(2*F2(k)-3*P(k))/2
else
if (i .eq. 201) then
V(k)=F2(k)
else
c-----fin singularité

if (i .ge. 1 .and. i.LE. 100) then

V(k)= F2(k)-P(k)

else

if (i.LE.201 .AND. i.GE.100) then

V(k)=F2(k)-2*P(k)
end if
end if
end if
end if
end if

```

c-----fin sous programme de singularité

c-----

c-----Profil de contrainte , État plan

```

      sigmaxx(k)=(V(k)*dx*i)/(2*Iz)
      sigmayy(k)=0
      tauxy(k)=(-V(k)*epaisseur)/(2*Iz)
&+ (V(k)*epaisseur*largeur)/(4*Iz)
      sigma1(k)=(sigmaxx(k)+sigmayy(k))/2
&+ sqrt((sigmaxx(k)/2-sigmayy(k)/2)**2+tauxy(k))
      sigma2(k)=(sigmaxx(k)-sigmayy(k))/2
&- sqrt((sigmaxx(k)/2-sigmayy(k)/2)**2+tauxy(k))

      end do
      sigmamax=0.000001*max(maxval(sigma1),maxval(sigma2))
      sigmaa=0.000001*(max(maxval(sigma1),maxval(sigma2))-
&  min(minval(sigma1),minval(sigma2)))/2

      epsilon=(sigmaa/EYoung)+((sigmaa/Hprime)**(1/nprime))

      localenergy=sigmamax*epsilon
      resumenergy(i,j)=localenergy
c      write(80,50) i,j,localenergy
      resumesigmaa(i,j)=sigmaa
      resumeepsilon(i,j)=epsilon
c      print*, 'énergie maximale SWT', resumenergy
c      test biaxialité

```

c-----fin de la limitation du triangle

```

      end if
      end do
      end do

```

```

do i=1,201
  do j=1,201
  IF (i*dx .le. 5*dz*j .and. i*dx .le. -5*dz*j+1) then
    write(80,50) i,j,resumenergy(i,j)
    write(81,50) i,j,resumesigmaa(i,j)
    write(82,50) i,j,resumeepsilon(i,j)
    if(resumenergy(i,j).gt.xmaxenergy)then

```

```

    xmaxenergy=resumenergy(i,j)
    mposx=i
    mposz=j
    else
    endif
    else
    endif
    enddo
    write(80,313)
313 format(//)
    enddo

    print*,'mposx mposz xmaxenergy resumesigmaa resumeepsilona'
    print*,'mposx,mposz,xmaxenergy,resumesigmaa(mposx,mposz),
& resumeepsilona(mposx,mposz)

c    do i=1,201
c    do j=1,201
c----Délimitation du triangle
c    IF (j*dz .le. 5*dx*i .and. j*dz .le. -5*dx*i+1) then

        print*,'sigmamax x epsilon',maxval(resumenergy)

c----Fin de la délimitation du triangle
c    end if
c50 format(I3,I3,E12.5)
50 format(I3,1x,I3,1x,E12.5)
c    print*,'énergie SWT Maximale',maxval(resumenergy)
c    print*,'sigmaa Maximale',maxval(resumesigmaa)
c    end if
c-----
c    stop
c    end do
c    end do

C    *****
    do i=1,200
        do j=1,200
            IF (i*dx .le. 5*dz*j .and. i*dx .le. -5*dz*j+1) then
                do k=1,200
                    do M=1,200
c    biaxialité:

                    c(k)=sigma2(k)/sigma1(k)
                    if (sigmaxx(k).ne.0)
&phi(k)=acos(sigma1(k)/sigmaxx(k))

```

```
    if (k+M.eq.201) go to 25
      if (c(k).eq.0 .and. c(k+M).eq.0)
        &w=1

        if (c(k).ne.c(k+M) .and. phi(k).ne.phi(k+M))
          &w=2

          if (c(k).ne.c(k+M) .and. phi(k).eq.phi(k+M))
            &w=3

          end do
        end do
      end if
    end do

25  if (w.eq.1) print*, 'cas uniaxial'
    if (w.eq.3) print*, 'cas multiaxial proportionnel'
    if (w.eq.2) print*, 'cas multiaxial non proportionnel'

END
```

Annexe 3

Code Matlab de la solution analytique : cas multiaxial élastique

```
%---solution analytique

%fid1=fopen('C:\Documents and Settings\Owner\Bureau\matlab-analytique2\P1.txt');
%P1=fscanf(fid1,'%g',[1 inf]);
%P1=P1';
P1=load('C:\Documents and Settings\Owner\Bureau\matlab-analytique2\P1.txt');
%fid2=fopen('C:\Documents and Settings\Owner\Bureau\matlab-analytique2\F2.txt');
%F2=fscanf(fid2,'%g',[1 inf]);
%F2=F2';
F2=load('C:\Documents and Settings\Owner\Bureau\matlab-analytique2\F2.txt');
V=zeros(200,19950);
sigmaxx=zeros(200,19950);
tauxy=zeros(200,19950);
%U=zeros(200,20000);
F1=zeros(200,1)
la=0.2;
epa=0.07;
lon=0.5;
pointx=200;
pointz=200;
pointy=4;
dx=lon/pointx;
dz=la/pointz;
dy=epa/pointy;
Iz=la*(power(epa,3))/3;

%deltat=0.01;

mu=0.33;
Eyoung=71*(power(10,9));
Ge=2.7*(power(10,10));

%break

n=1;
for i=1:200
```

```

for j=1:200

%-----début du triangle
if (i*dx <= (5*dz*j) & i*dx <= (-5*dz*j) +1)

    for k=1:200
        if i==1
            V(k,n)=-P1(k)-F2(k);
        else
            if i==100
                V(k,n)=F2(k);
            else
                if i==200
                    V(k,n)=P1(k);
                else
                    if (i<100 & i>1)
                        V(k,n)=P1(k)+F2(k);
                    else
                        if (i>100 & i<200)
                            V(k,n)=-P1(k)-2*F2(k);
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
end
end

end
n=n+1;

end
end

%-----calcul de la densité d'énergie de déformation
U=zeros(200,n);

n=1;
for i=1:200
    for j=1:200

```

```
if (i*dx <= (5*dz*j) & i*dx <= (-5*dz*j) +1)

    for k=1:200

        tauxy(k,n)=((-V(k,n)*epa)/(2*Iz))+((V(k,n)*epa*la)/(4*Iz));
        sigmaxx(k,n)=(V(k,n)*dx*i*epa)/(2*Iz);

        U(k,n)=((power(tauxy(k,n),2))/(2*Ge))+((power(sigmaxx(k,n),2)/(2*Eyoung)));
        end

        n=n+1;
        coor(n,:)=[i,j];
    end

end
end
%-----

%-----

n
```

Annexe 4

Résultats du calcul de l'extraction des cycles « rainflow » et du dommage.

point	U_{min}	U_{max}	U_a	σ_a (Pa)	ε_a	N_f	$1/N_f$
1	2556	6256	1850	1,4460E+07	2,0800E-04	5,3000E+13	1,88679E-14
2	354	16400	8023	3,1000E+07	4,3000E-04	2,7E+11	3,7037E-12
3	1807	13000	5597	2,5000E+07	3,7000E-04	1,1E+12	9,09091E-13
4	8425	9221	398	6,9600E+06	9,8000E-05	8,84E+15	1,13122E-16
5	1096	15100	7002	2,8900E+07	4,1000E-04	4,17E+11	2,39808E-12
6	734	15500	7383	2,9300E+07	4,1300E-04	3,82E+11	2,6178E-12
7	2208	10400	4096	2,1880E+07	3,0820E-04	2,94E+12	3,40136E-13
8	3719	5557	919	1,0300E+07	1,4500E-04	5,68E+14	1,76056E-15
9	1219	6238	2510	1,6998E+07	2,3900E-04	1,7200E+13	5,81395E-14
10	1635	5214	1790	1,4450E+07	2,0700E-04	5,3129E+13	1,88221E-14
11	1781	3120	670	8,8600E+06	1,2480E-04	1,6400E+15	6,09756E-16
12	1736	3367	816	9,7600E+06	1,3800E-04	8,3000E+14	1,20482E-15
13	3427	4755	664	8,8600E+06	1,2480E-04	1,6400E+15	6,09756E-16
14	3734	6233	1250	1,2100E+07	1,6900E-04	1,8940E+14	5,27983E-15
15	3889	5257	684	8,9100E+06	1,2500E-04	1,5800E+15	6,32911E-16
16	3910	4932	511	7,7000E+06	1,0850E-04	4,3600E+15	2,29358E-16
17	4034	4197	82	3,1000E+06	4,3000E-05	2,6000E+18	3,8462E-19
18	4669	4705	18	1,6000E+06	2,2000E-05	2,8000E+20	3,5714E-21
19	6153	6375	111	3,6166E+06	5,0939E-05	8,6205E+17	1,1600E-18
20	3229	8557	2664	1,7600E+07	2,4800E-04	1,3300E+13	7,5188E-14
21	1818	10200	4191	2,2200E+07	3,1200E-04	2,7000E+12	3,7037E-13
22	2713	7425	2356	1,6500E+07	2,3800E-04	2,0800E+13	4,8077E-14
23	5351	7696	1173	1,1800E+07	1,6800E-04	2,2700E+14	4,4053E-15
24	2511	8974	3232	1,9700E+07	2,7760E-04	6,1100E+12	1,6367E-13
25	4166	7880	1857	1,4700E+07	2,0700E-04	4,7700E+13	2,0964E-14
26	5913	7307	697	8,9400E+06	1,2600E-04	1,5400E+15	6,4935E-16
27	4052	8827	2388	1,6500E+07	2,3200E-04	2,1600E+13	4,6296E-14
28	4113	8543	2215	1,6300E+07	2,2900E-04	2,3300E+13	4,2918E-14
29	2594	5113	1260	1,2100E+07	1,6900E-04	1,8940E+14	5,27983E-15
30	1950	2467	259	5,3000E+06	7,5134E-05	5,6908E+16	1,7572E-17
31	3622	4193	286	5,4000E+06	7,6000E-05	5,1000E+16	1,9608E-17
32	5307	7138	916	1,0300E+07	1,4500E-04	5,6900E+14	1,7575E-15
33	6050	7010	480	7,5000E+06	1,1000E-04	5E+15	2E-16
34	4280	9146	2433	1,6800E+07	2,3700E-04	1,8500E+13	5,40541E-14
35	5657	7816	1080	1,1200E+07	1,5800E-04	3,1600E+14	3,16456E-15

U_{max} , U_{min} et U_a sont en (joule/m³).

 Résultats du calcul de l'extraction des cycles « rainflow » et du dommage (suite).

point	U_{\min}	U_{\max}	U_a	$\sigma_a(\text{Pa})$	ε_a	N_f	$1/N_f$
36	4533	9043	2255	1,6100E+07	2,2700E-04	2,5200E+13	3,9683E-14
37	2707	10530	3912	2,1400E+07	3,0200E-04	3,4100E+12	2,9326E-13
38	1174	12500	5663	2,5500E+07	3,5900E-04	1,0100E+12	9,9010E-13
39	1926	11600	4837	2,3700E+07	3,3400E-04	1,6900E+12	5,9172E-13
40	5371	7170	900	1,0200E+07	1,4300E-04	6,2000E+14	1,6129E-15
41	3144	7194	2025	1,5400E+07	2,1600E-04	3,4400E+13	2,9070E-14
42	3340	5028	844	9,9500E+06	1,4000E-04	7,3000E+14	1,3699E-15
43	3343	4829	743	9,3100E+06	1,3100E-04	1,1600E+15	8,6207E-16
44	2263	2286	12	1,6000E+06	2,2000E-05	2,8000E+20	3,5714E-21
45	2004	4046	1021	1,0800E+07	1,5300E-04	3,9700E+14	2,5189E-15
46	2664	3045	191	4,6000E+06	6,5000E-05	3,2000E+17	3,1250E-18
47	3767	5078	656	8,8600E+06	1,2480E-04	1,6400E+15	6,0975E-16
48	3406	5668	1131	1,1400E+07	1,6100E-04	2,7500E+14	3,6363E-15
49	4912	5550	319	5,9000E+06	8,3000E-05	2,9000E+16	3,4483E-17
50	4518	4801	142	4,1000E+06	5,7000E-05	3,8000E+17	2,6316E-18
51	5567	6350	392	6,9600E+06	9,8000E-05	8,84E+15	1,1312E-16
52	2155	6846	2346	1,6500E+07	2,3800E-04	2,0800E+13	4,8077E-14
53	4367	6538	1086	1,1200E+07	1,5800E-04	3,1600E+14	3,1645E-15
54	3188	9865	3339	1,9700E+07	2,7800E-04	6,1100E+12	1,6366E-13
55	3632	8883	2626	1,7500E+07	2,4600E-04	1,4300E+13	6,9930E-14
56	4392	5906	757	9,3100E+06	1,3100E-04	1,1600E+15	8,6207E-16
57	1634	11980	5173	2,4400E+07	3,4400E-04	1,3700E+12	7,2993E-13
58	6918	6968	25	1,6000E+06	2,2000E-05	2,8000E+20	3,5714E-21
59	3995	7099	1552	1,3600E+07	1,9100E-04	8,3400E+13	1,1990E-14
60	4208	6650	1221	1,1400E+07	1,6000E-04	2,8200E+14	3,5461E-15
61	3616	11100	3742	2,1000E+07	2,9500E-04	3,9500E+12	2,5316E-13
62	2265	3968	852	9,9500E+06	1,4000E-04	7,3000E+14	1,3699E-15
63	2071	6116	2023	1,5400E+07	2,1600E-04	3,4400E+13	2,9070E-14
64	1449	3999	1275	1,2100E+07	1,6900E-04	1,8940E+14	5,2798E-15
65	1831	2223	196	4,6000E+06	6,5000E-05	3,2000E+17	3,1250E-18
66	2908	3798	445	7,1400E+06	1,0100E-04	7,3900E+15	1,3532E-16
67	4492	5935	722	9,0400E+06	1,2700E-04	1,4200E+15	7,0423E-16
68	2839	6828	1995	1,5400E+07	2,1600E-04	6,9500E+13	1,4388E-14
69	5196	5315	60	2,8000E+06	3,9000E-05	5,1000E+18	1,9608E-19
70	4112	4728	308	5,4000E+06	7,6000E-05	5,1000E+16	1,9608E-17
71	3739	4252	257	5,3000E+06	7,5134E-05	5,6908E+16	1,7572E-17
72	3445	5650	1103	1,1300E+07	1,5900E-04	2,9900E+14	3,3445E-15
73	5486	6187	351	6,4000E+06	9,0000E-05	1,6000E+16	6,2500E-17
74	4898	6645	874	1,0100E+07	1,4300E-04	6,4300E+14	1,5552E-15
75	6213	6348	68	2,8000E+06	3,9000E-05	5,1000E+18	1,9608E-19
76	5890	6929	520	7,7800E+06	1,1000E-04	4,0800E+15	2,4510E-16
77	2048	9627	3790	2,1200E+07	2,9900E-04	3,6100E+12	2,7701E-13
78	3258	9458	3100	1,9000E+07	2,6700E-04	7,9300E+12	1,2610E-13
79	2334	7322	2494	1,7000E+07	2,3900E-04	1,7200E+13	5,8140E-14
80	3501	5956	1228	1,1400E+07	1,6000E-04	2,8200E+14	3,5461E-15
81	3168	4977	905	1,0200E+07	1,4300E-04	6,2000E+14	1,6129E-15
82	3480	6095	1308	1,2200E+07	1,7200E-04	1,7400E+14	5,7471E-15
83	3558	5138	790	9,5800E+06	1,3500E-04	9,4600E+14	1,0571E-15

 Résultats du calcul de l'extraction des cycles « rainflow » et du dommage (suite).

point	U_{\min}	U_{\max}	U_a	$\sigma_a(\text{Pa})$	ε_a	N_f	$1/N_f$
84	4504	4946	221	4,6000E+06	6,5000E-05	3,2000E+17	3,1250E-18
85	4772	6196	712	9,0400E+06	1,2700E-04	1,4200E+15	7,0423E-16
86	5879	6539	330	6,1000E+06	8,6000E-05	2,1000E+16	4,7619E-17
87	2619	6736	2059	1,5400E+07	2,1600E-04	3,4800E+13	2,8736E-14
88	2775	4208	717	9,0400E+06	1,2700E-04	1,4200E+15	7,0423E-16
89	2825	2999	87	3,1000E+06	4,3000E-05	2,6000E+18	3,8462E-19
90	2627	4947	1160	1,1800E+07	1,6800E-04	2,2700E+14	4,4053E-15
91	5898	6177	140	4,1000E+06	5,7000E-05	3,8000E+17	2,6316E-18
92	2978	9813	3418	2,0800E+07	2,9300E-04	4,2000E+12	2,3810E-13
93	4463	7573	1555	1,3600E+07	1,9100E-04	8,3400E+13	1,1990E-14
94	4711	7551	1420	1,2900E+07	1,8200E-04	1,1700E+14	8,5470E-15
95	3141	6253	1556	1,3600E+07	1,9100E-04	8,3400E+13	1,1990E-14
96	4285	5625	670	8,8600E+06	1,2480E-04	1,6400E+15	6,09756E-16
97	4618	5599	491	7,5000E+06	1,1000E-04	5,0000E+15	2,0000E-16
98	4697	6634	969	1,0700E+07	1,5000E-04	4,4700E+14	2,2371E-15
99	3691	10200	3255	1,9400E+07	2,7400E-04	6,7300E+12	1,4859E-13
100	4450	6069	810	9,7600E+06	1,3800E-04	8,3000E+14	1,20482E-15
101	4279	9694	2708	1,7200E+07	2,4200E-04	1,6000E+13	6,25E-14
102	4345	10300	2978	1,8500E+07	2,6100E-04	9,3800E+12	1,0661E-13
103	5089	8294	1603	1,3600E+07	1,9100E-04	8,3400E+13	1,1990E-14
104	1670	10400	4365	2,2600E+07	3,1800E-04	2,3400E+12	4,2735E-13
105	4148	8196	2024	1,5400E+07	2,1600E-04	3,4400E+13	2,9070E-14
106	5653	6253	300	6,1000E+06	8,5000E-05	2,3000E+16	4,3478E-17
107	4232	7494	1631	1,3600E+07	1,9100E-04	8,3400E+13	1,1990E-14
108	4381	6193	906	1,0200E+07	1,4300E-04	6,2000E+14	1,6129E-15
109	4486	5357	436	7,1400E+06	1,0100E-04	7,3900E+15	1,3532E-16
110	4779	5246	234	5,3000E+06	7,5134E-05	5,6908E+16	1,7572E-17
111	3818	6140	1161	1,1800E+07	1,6800E-04	2,2700E+14	4,4053E-15
112	4881	5308	214	4,6000E+06	6,5000E-05	3,2000E+17	3,1250E-18
113	5431	7006	788	9,5800E+06	1,3500E-04	9,4600E+14	1,0571E-15
114	3812	8774	2481	1,6900E+07	2,3700E-04	1,8200E+13	5,4945E-14
115	2660	8546	2943	1,7500E+07	2,5100E-04	9,7800E+12	1,0225E-13
116	1901	5480	1790	1,4450E+07	2,0700E-04	5,3129E+13	1,88221E-14
117	3875	4272	199	4,6000E+06	6,5000E-05	3,2000E+17	3,1250E-18
118	2284	6764	2240	1,6100E+07	2,2700E-04	2,5200E+13	3,9683E-14
119	3538	6293	1378	1,2700E+07	1,7800E-04	1,3500E+14	7,4074E-15
120	3490	5456	983	1,0900E+07	1,6000E-04	4,3700E+14	2,2883E-15
121	4212	4234	11	6,8730E+05	9,6803E-06	9,5190E+22	1,0505E-23
122	2993	3785	396	6,9600E+06	9,8000E-05	8,84E+15	1,13122E-16
123	2308	2983	338	6,4000E+06	9,0000E-05	1,6000E+16	6,2500E-17
124	3852	4270	209	4,6000E+06	6,5000E-05	3,2000E+17	3,1250E-18
125	5321	5971	325	6100000	0,000086	2,1E+16	4,7619E-17
126	3160	9621	3231	1,9700E+07	2,7760E-04	6,1100E+12	1,6367E-13
127	4792	7197	1203	1,1800E+07	1,6600E-04	2,2700E+14	4,4053E-15
128	4314	8181	1934	1,5200E+07	2,1400E-04	3,7800E+13	2,6455E-14
129	3889	8523	2317	1,6600E+07	2,3400E-04	2,0000E+13	5,0000E-14
130	6949	7809	430	7,1400E+06	1,0100E-04	7,3900E+15	1,3532E-16
131	923	11200	5139	2,4400E+07	3,4400E-04	1,3700E+12	7,2993E-13

Résultats du calcul de l'extraction des cycles « rainflow » et du dommage (suite).

point	U_{min}	U_{max}	U_a	$\sigma_a(\text{Pa})$	ε_a	N_f	$1/N_f$
132	2480	9797	3659	2,0800E+07	2.9300E-04	4.2000E+12	2.3810E-13
133	2924	7183	2130	1,5800E+07	2.2300E-04	2.8400E+13	3.5211E-14
134	5873	6144	136	4,1000E+06	5.7000E-05	3.8000E+17	2.6316E-18
135	2473	3517	522	7,7800E+06	1.1000E-04	4.0800E+15	2.4510E-16
136	2046	2854	404	6,9600E+06	9.8000E-05	8.84E+15	1.13122E-16
137	3176	3504	164	4,2000E+06	6.0000E-05	2.8000E+17	3.5714E-18
138	3510	4297	394	6,9600E+06	9.8000E-05	8.84E+15	1.13122E-16
139	1511	5195	1842	1,4460E+07	2.0800E-04	5.3000E+13	1.88679E-14
140	3805	4537	366	6,4000E+06	9.0000E-05	1.6000E+16	6.2500E-17
141	3711	3973	131	4,1000E+06	5.7000E-05	3.8000E+17	2.6316E-18
142	4004	4201	99	3,3000E+05	4.6000E-05	1.6100E+25	6.2100E-26
143	3589	4927	669	8,8600E+06	1.2480E-04	1.6400E+15	6.09756E-16
144	2862	3349	244	5,3000E+06	7.5134E-05	5.6908E+16	1.7572E-17
145	4983	6642	830	9,9000E+06	1.3500E-04	7.7000E+14	1.2987E-15
146	5146	6565	710	9,0400E+06	1.2700E-04	1.4200E+15	7.0423E-16
147	2912	8026	2557	1,7200E+07	2.4200E-04	1.6000E+13	6.2500E-14
148	1085	10100	4508	2,3100E+07	3.2500E-04	2.0400E+12	4.9020E-13
149	3004	7632	2314	1,6600E+07	2.3400E-04	2.0000E+13	5.0000E-14
150	4767	5218	226	5,2000E+06	7.3000E-05	2.6000E+16	3.8462E-17
151	3580	7964	2192	1,6300E+07	2.2900E-04	2.3300E+13	4.2918E-14
152	4517	7201	1342	1,2700E+07	1.7800E-04	1.3500E+14	7.4074E-15
153	4788	5498	355	6,4000E+06	9.0000E-05	1.6000E+16	6.2500E-17
154	5215	6610	698	8,9100E+06	1.2500E-04	1.5800E+15	6.32911E-16
155	5495	6545	525	7,7800E+06	1.1000E-04	4.0800E+15	2.4510E-16
156	3695	7778	2042	1,5400E+07	2.1600E-04	3.4800E+13	2.8736E-14
157	4541	4861	160	4,2000E+06	6.0000E-05	2.8000E+17	3.5714E-18
158	4107	4887	390	6,9600E+06	9.8000E-05	8.84E+15	1.13122E-16
159	3701	5170	735	9,3100E+06	1.3100E-04	1.1600E+15	8.6207E-16
160	5597	6215	309	5,9000E+06	8.3000E-05	2.9000E+16	3.4483E-17
161	2659	9967	3654	2,0800E+07	2.9300E-04	4.2000E+12	2.3810E-13
162	5399	7074	838	9,9800E+06	1.3600E-04	7.6000E+14	1.3158E-15
163	4293	6857	1282	1,2100E+07	1.6900E-04	1.8940E+14	5.27983E-15
164	3461	7160	1850	1,4460E+07	2.0800E-04	5.3000E+13	1.88679E-14
165	5576	5582	3	6,8730E+05	9.6803E-06	9.5190E+22	1.0505E-23
166	4101	4884	392	6,9000E+06	9.7000E-05	8.89E+15	1.12486E-16
167	3598	6831	1617	1,3600E+07	1.9100E-04	8.3400E+13	1.1990E-14
168	6202	6453	126	4100000	0.000057	3.8E+17	2.63158E-18
169	3221	6909	1844	1,4460E+07	2.0800E-04	5.3000E+13	1.88679E-14
170	5888	6627	370	6,7600E+06	9.6000E-05	8.98E+15	1.11359E-16
171	5136	6573	719	9,0800E+06	1.3000E-04	1.4000E+15	7.1429E-16
172	1540	6263	2362	1,6500E+07	2.3800E-04	2.0800E+13	4.8077E-14
173	1105	5245	2070	1,6400E+07	2.1600E-04	3.2800E+13	3.0488E-14
174	2157	5061	1452	1,3900E+07	1.9200E-04	1.1500E+14	8.6957E-15

$$B_f = \frac{1}{\sum_i \frac{n_i}{N_i}}, \text{ car } B_f D = B_f \left(\sum_i \frac{n_i}{N_i} \right) = 1$$

$$B_f = 8,86 \times 10^{11}$$

U_{max} , U_{min} et U_a sont en (joule/m³).

Annexe 5

Méthode des éléments finis

L'étude numérique par la méthode des éléments finis des corps déformables demande plus de six degrés de liberté, pour le calcul des déformations. On retient les points les plus importants dans le manuel d'Abaqus [35] concernant l'analyse par la MEF :

- Abaqus a une librairie extensive d'éléments qu'on peut utiliser pour une large gamme d'application structurale,
- le choix du type de l'élément a des conséquences sur la précision et l'efficacité de la simulation,
- les éléments disponibles dans la librairie des éléments de Abaqus/Explicit sont un sous-ensemble de ceux de la librairie des éléments de Abaqus/Standard,
- les degrés de libertés actifs dans chaque nœud dépendent du type de l'élément attaché à chaque nœud,
- le nom complet de l'élément identifie la famille de l'élément, la formulation, le nombre de nœud, et le type d'intégration,
- tous les éléments doivent être référés à la définition des propriétés de section. Les propriétés de section nous donnent toutes les données additionnelles requises pour définir la géométrie de l'élément et identifient aussi les propriétés du matériau défini,
- pour des éléments continus Abaqus définit les variables de sortie de l'élément, comme la contrainte et la déformation, par rapport au système de référence cartésien globale qu'on peut changer,

-
- pour des éléments coquilles tridimensionnels, Abaqus définit les variables de sorties par rapport au système de référence basé sur la surface de la coquille. Cette référence peut être définie par l'utilisateur,
 - pour une analyse informatique efficace n'importe quelle pièce du modèle peut être définie comme un corps rigide, qui a des degrés de libertés seulement au nœud de référence.

La librairie des éléments de Abaqus/Standard, contient des éléments d'interpolation (linéaire) de premier ordre et les éléments d'interpolation de second ordre (quadratique) dans le cas de deux ou trois dimensions ; et tétraèdre, coins triangulaires et cubes hexaédriques, sont disponibles en trois dimensions. Les éléments tétraédriques et triangulaires de second ordre modifiés sont aussi fournis. En plus, les éléments en mode hybrides et incompatibles sont disponibles dans Abaqus/Standard. La librairie des éléments solides de Abaqus/Explicit contient les éléments d'interpolation (linéaire) de premier ordre d'intégration réduite en deux et trois dimensions. Les tétraèdres et les triangles d'interpolation de second ordre sont aussi disponibles. L'intégration complète (full integration) ou les éléments de second ordre réguliers ne sont pas disponibles dans Abaqus/Explicit.

Les éléments quadratiques d'intégration réduite disponibles dans Abaqus/Standard ont aussi des modes sablier « *hourglass* ». Cependant, ces modes sont presque impossibles à propager dans un maillage normal et sont rarement un problème si le maillage est suffisamment fin. Un maillage 1x6 par l'élément C3D20R ne converge pas car le « *hourglassing* » est moins senti même si deux éléments sont utilisés à travers la largeur, mais un maillage plus raffiné convergera même lorsque

seulement un élément est utilisé à travers la largeur. Les éléments quadratiques d'intégration réduite ne sont pas susceptibles au verrouillage, même lorsqu'il s'agit d'un état de contrainte plus compliqué. Par conséquent, ces éléments sont généralement le meilleur choix pour la majorité des simulations contrainte/déplacement, à l'exception dans les simulations des hauts déplacements impliquant des hautes déformations et dans quelques types d'analyse de contact. Les éléments en mode incompatibles peuvent produire des résultats dans les problèmes de flexion qui sont comparables aux éléments quadratiques mais à des coûts de programmation significativement bas.

Le choix correct de l'élément pour une simulation particulière est vital lorsqu'on vise des résultats précis à des coûts raisonnables. Il faut développer un guide Abaqus pour l'application particulière visée. Les recommandations suivantes s'appliquent à Abaqus/Standard et Abaqus/Explicit :

- minimiser si possible la distorsion du maillage. Un maillage grossier avec des éléments linéaires qui ont des distorsions peut donner de mauvais résultats,
- utiliser un maillage fin des éléments de l'intégration réduite linéaire (CAX4R, CPE4R, CPS4R, C3D8R, etc.) pour des simulations provoquant de larges distorsions du maillage (analyse de large déformation),
- en trois dimensions on utilise des éléments hexaédriques en forme de brique partout où c'est possible. Ils donnent de bons résultats pour des coûts minimums. Les géométries complexes peuvent être difficiles à mailler complètement avec des hexaèdres ; ainsi, les éléments coins et les tétraèdres sont nécessaires. Les versions linéaires de ces éléments, C3D4 et C3D6, sont de mauvais éléments (un maillage fin est nécessaire pour obtenir des résultats

précis) ; c'est ainsi que ces éléments doivent être généralement utilisés seulement lorsqu'on veut compléter le maillage et doivent être loin des toutes les régions où des résultats plus précis sont demandés,

- quelques processeurs contiennent des algorithmes de maillage qui réalisent des maillages arbitraires avec des éléments tétraédriques. Les éléments tétraédriques quadratiques dans Abaqus/Standard (C3D10) doivent donner des résultats raisonnables pour les problèmes de petits déplacements sans contact. Une alternative à cet élément est de modifier l'élément tétraédrique quadratique disponible des deux analyses (C3D10M), qui est robuste pour les larges déformations et les problèmes de contact et montrent un cisaillement minimal. Avec n'importe lequel élément, l'analyse prendra beaucoup de temps à s'exécuter par rapport au maillage équivalent des éléments hexaédriques. Il ne faut pas utiliser un maillage contenant seulement des éléments linéaires tétraédriques (C3D4) : les résultats seront imprécis à moins qu'on utilise un nombre extrêmement large d'éléments.

Les utilisateurs de Abaqus/Standard doivent aussi considérer les recommandations suivantes :

- utiliser les éléments quadratiques de l'intégration réduite (CAX8R, CPE8R, CPS8R, C3D20R, etc.) pour un travail d'analyse général, à moins qu'on a besoin de modéliser de très larges déformations ou avoir une simulation avec des conditions complexes de contacts qui changent,
- utiliser les éléments quadratiques de l'intégration complète (CAX8, CPE8, CPS8, C3D20, etc.) où la concentration de contrainte existe localement. Ils

fournissent les meilleures résolutions des gradients de contraintes à des bas coûts,

- pour les problèmes de contact, utiliser un maillage fin pour les éléments linéaires de l'intégration réduite ou les éléments en mode incompatible (CAX4I, CPE4I, CPS4I, C3D8I, etc.).

Annexe 4

Calcul des fréquences naturelles

L'équation des petites oscillations libres est [61] :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0.$$

Nous cherchons une solution particulière dans laquelle toutes les coordonnées généralisées suivent, à un facteur près, la même loi temporelle : $\mathbf{q} = \mathbf{x}\phi(t)$, où \mathbf{x} est un vecteur de constantes constituant la forme propre du mouvement, propre dans ce sens que le rapport de deux coordonnées est indépendant du temps et est toujours égal au rapport des éléments correspondant de \mathbf{x} . Selon la référence [61], le test d'une solution de ce type donne :

$$\text{équation 1 } \ddot{\phi}(t)\mathbf{M}\mathbf{x} + \phi(t)\mathbf{K}\mathbf{x} = 0.$$

On distingue alors deux cas :

1- système d'équilibre stable :

Les matrices \mathbf{K} et \mathbf{M} ; sont non singulières. L'équation 1 peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = -\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)}\mathbf{M}\mathbf{x}$$

où $\mathbf{K}\mathbf{x}$ et $\mathbf{M}\mathbf{x}$ sont non nuls à l'exception de la solution triviale $\mathbf{x} = 0$. Par conséquent,

$$-\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} = \lambda \text{ et } \mathbf{K}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{x}$$

où λ est un réel positif. On peut donc poser $\lambda = \omega^2$ de telle sorte que ω soit réel, et écrire :

$$-\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} = \omega^2$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{x} = 0.$$

Ce dernier système de n équations linéaires et homogènes admet une solution non triviale $\mathbf{x}_{(r)}$ telle que :

$$\text{équation 2 : } (\mathbf{K} - \omega_r^2 \mathbf{M})\mathbf{x}_r = 0.$$

Si ω_r^2 est racine de l'équation algébrique alors $\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$. C'est l'équation aux valeurs propres ω_r^2 . Elle est de degré n en ω^2 , et possède donc n racines ω_r^2 dont M. Geradin et D. Rixen [61] ont démontré le caractère réel et positif des racines. À chaque racine ω_r^2 correspond une solution réelle $\mathbf{x}_{(r)}$: c'est le mode propre associé à la valeur propre ω_r^2 .

2- système à position d'équilibre indifférente :

Dans le cas où le système admet des modes propres de déplacement comme corps rigide, M. Geradin et D. Rixen [61] ont démontré que ces modes, notés \mathbf{u} , vérifient :

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = 0.$$

En comparant cette relation à l'équation 1 du cas stable, les modes rigides peuvent être considérés comme étant des modes propres de pulsation nulle. Selon la relation $\mathbf{K}\mathbf{u} = 0$, les déplacements $\mathbf{q} = \eta(t)\mathbf{u}$, vérifient les équations de mouvement $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0$ si $\ddot{\eta}(t)\mathbf{M}\mathbf{u} = 0$, et puisque \mathbf{M} est positive alors : $\ddot{\eta}(t) = 0$. La partie temporelle de la solution correspond à un mouvement d'entraînement : $\eta(t) = \gamma + \delta t$. Il en résulte que,

lorsqu'un système possède une configuration d'équilibre indifférente, l'étude de ses petites oscillations fournit deux types de solutions :

- des modes rigides $\mathbf{u}_{(i)}$ en nombre égal au degré de singularité de la matrice de raideur, que l'on peut assimiler à des modes de fréquence nulle. À chaque mode rigide correspond une solution modale décrivant un mouvement d'ensemble :

$$(\gamma_i + \delta_i t)\mathbf{u}_i.$$

- des modes propres $\mathbf{x}_{(r)}$ associés chacun à une fréquence ω_r non nulle par :

$$(\mathbf{K} - \omega_r^2 \mathbf{M})\mathbf{x}_r = 0.$$

À chacun d'eux correspond une solution modale représentant une oscillation autour d'un mouvement d'ensemble :

$$(\alpha_r \cos(\omega_r t) + \beta_r \sin(\omega_r t))\mathbf{x}_{(r)}.$$

Du fait que ces modes, contrairement aux modes rigides, impliquent une déformation élastique du système, on les appelle modes propres élastiques.