

Tesi di Dottorato di Ricerca in
Ingegneria Aerospaziale

STUDIO E CONTROLLO DI STRUTTURE
VORTICOSE DI PARETE

Michele Ferlauto



POLITECNICO DI TORINO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA
AERONAUTICA E SPAZIALE

Corso Duca degli Abruzzi, 24 - 10129 Torino (Italia)

POLITECNICO DI TORINO UNIVERSITÀ DI PISA

POLITECNICO DI MILANO

Corso di Dottorato in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Dottorato

Studio e Controllo di Strutture Vorticose di Parete

Direttore di ricerca
Prof. Luca Zannetti

Michele Ferlauto

Nono Ciclo

Indice

1	Introduzione	7
1.1	La metodologia numerica	9
1.2	L'indagine fisica	11
2	Il metodo a vortici	13
2.1	Le equazioni del moto	13
2.2	Il modello matematico	15
2.3	Convergenza del metodo	17
2.4	Le funzioni di smoothing	20
2.5	L'estensione ai flussi viscosi	25
2.5.1	La formula di Chorin-Marsden	27
2.5.2	Diffusione e Random Walk	29
3	Flussi Non Viscosi	33
3.1	Il potenziale complesso	33
3.2	Le trasformazioni conformi	35
3.3	Il teorema di Routh	36
3.4	Modelli di generazione di vorticità	37
3.4.1	Metodo della posizione variabile	38
3.4.2	Metodo della posizione fissa	40
3.4.3	Metodo ad accumulo di vorticità	41
4	Metodo agli sviluppi multipolari	43
4.1	Introduzione	43
4.2	La metodologia	44
4.3	L'algoritmo numerico	48
4.4	Analisi delle prestazioni	51
5	La Cornice	53
5.1	Introduzione	53
5.2	Descrizione del problema fisico	53
5.3	La trasformazione conforme	57
5.4	Studio del campo di moto	58
5.4.1	Condizione di equilibrio del vortice	59
5.4.2	Stabilità delle configurazioni di equilibrio	61
5.4.3	Analisi dei risultati	67
5.5	Il transitorio di avviamento	67

5.5.1	Intensità dei vortici nascenti	68
5.5.2	Determinazione del campo di velocità	69
5.5.3	Analisi dei risultati	70
6	Cresta periodica	81
6.1	Introduzione	81
6.2	Parete piana periodica	81
6.3	Trasformazione conforme piano-cresta	82
6.4	Posizioni di equilibrio del vortice	84
6.5	Determinazione della funzione hamiltoniana del vortice	84
6.6	Studio di alcune geometrie della cresta	85
6.6.1	Cresta M1	85
6.6.2	Cresta M2	86
6.6.3	Creste M3 e M4	86
6.7	Il transitorio di avviamento	94
6.7.1	Imposizione delle condizioni al contorno	94
6.7.2	Intensità dei vortici nascenti	95
6.7.3	Determinazione del campo di velocità	96
6.7.4	Analisi dei risultati	97
7	Il Rotore	102
7.1	Introduzione	102
7.2	La trasformazione conforme	102
7.3	Determinazione del potenziale complesso	103
7.4	Condizione di equilibrio del vortice	105
7.5	Analisi della stabilità	106
7.6	Il transitorio di avviamento	108
7.6.1	Determinazione del campo di velocità	108
7.6.2	Intensità del vortice nascente	109
7.6.3	Analisi dei risultati	109
8	Conclusioni	115
	Bibliografia	118

Elenco dei simboli

z^*	complesso coniugato di generico numero complesso z
\hat{f}	trasformata di Fourier della funzione f
$f(r)$	funzione di smoothing o cutoff
h	dimensione lineare di una maglia della griglia Λ
H_p	Hamiltoniana di una particella fluida
H_v	Hamiltoniana di un vortice (funzione di Routh)
i	unità immaginaria
$\Im()$	parte immaginaria
$J(\zeta)$	giacobiano
K	nucleo dell'integrale di Biot-Savart
n	numero di cuspidi del rotore
N	numero dei vortici presenti nel campo di moto
$\Re()$	parte reale
Re	numero di Reynolds
$R(\zeta)$	termine di Routh
s	distanza di emissione
q_∞	velocità uniforme asintotica
t	tempo
\mathbf{u}	vettore velocità
u, v	componenti cartesiane del vettore velocità
X_g	ascissa del baricentro di un sistema di vortici
Y_g	ordinata del baricentro di un sistema di vortici
$z = x + iy$	punto sul piano fisico (piano di Argand)
$z_v = x_v + iy_v$	posizione del vortice sul piano fisico
W	potenziale complesso
β_m	errore assoluto derivante dallo smoothing
β_s	errore di integrazione
β_d	errore di discretizzazione

δ	parametro di smoothing o cutoff δ_{blob} Nel cap. 5 δ è l'anomalia di ζ_1
ε	errore assoluto commesso nella valutazione della traiettoria
Φ	potenziale della velocità
γ	intensità del vortice (= circolazione/ 2π)
Γ	circolazione
λ	ulteriore piano trasformato
Λ	griglia su cui idealmente vengono disposti gli N vortici con cui viene rappresentata una distribuzione continua di vorticità
Ψ	funzione di corrente
σ	generico punto sul cerchio di raggio unitario nel piano complesso
ν	viscosità cinematica
Ω	velocità angolare
ω	vettore vorticità
$\zeta = \xi + i\eta$	punto sul piano trasformato (piano di Argand)
ζ_1	parametro di controllo della trasformazione piano-cornice
$\zeta_v = \xi_v + i\eta_v$	posizione del vortice sul piano trasformato

Elenco delle figure

2.1	Legge di distribuzione della vorticità e di legge di interazione per tre diverse funzioni di cutoff	26
2.2	Profilo di Blasius ($x/l = 0.5$) mediante un Random Vortex Method.	31
3.1	Metodo della Posizione variabile: valutazione della velocità della scia nell'intorno del punto di separazione	39
3.2	Metodo ad Accumulo di Vorticità.	41
4.1	Nubi di vortici completamente separate nel piano.	46
4.2	Shift degli sviluppi multipolari. I vortici sono tutti contenuti all'interno del cerchio D_1	47
4.3	Griglia di catalogazione ad un solo livello di infittimento. Le celle \mathbf{c} sono dette <i>colleghe</i> di \mathbf{a}	48
4.4	Griglia di catalogazione a più livelli di infittimento. \mathbf{a} = cella <i>senior</i> , \mathbf{b} = cella <i>junior</i>	49
4.5	Tempi di elaborazione	51
5.1	Schema della cornice di neve e modello di Ringleb.	54
5.2	Interazione vortice-parete.	54
5.3	La trasformazione conforme. Contorni del campo di moto al variare del parametro δ della trasformazione.	56
5.4	Schema del campo di moto sul piano fisico e sul piano trasformato	58
5.5	Posizioni di equilibrio per il vortice sul piano trasformato ζ . Linea continua: $\Re(z_v) = 0$. Linea a tratti: $\Im(z_v) = 0$	60
5.6	Linee di livello dell'hamiltoniana del vortice e linee di corrente nella configurazione di equilibrio ($\delta = 10^0$)	63
5.7	Linee di livello dell'hamiltoniana del vortice e linee di corrente nella configurazione di equilibrio ($\delta = 30^0$)	64
5.8	Linee di livello dell'hamiltoniana del vortice e linee di corrente nella configurazione di equilibrio ($\delta = 50^0$)	65
5.9	Linee di livello dell'hamiltoniana del vortice e linee di corrente nella configurazione di equilibrio ($\delta = 70^0$)	66
5.10	Influenza della distanza s di emissione.	70
5.11	Circolazione globalmente emessa nel tempo e circolazione del vortice emesso ($\delta = 40^0$).	72
5.12	Andamenti di Xg e Yg nel tempo e loro confronto con il valore relativo ad un unico vortice in equilibrio ($\delta = 40^0$).	72

5.13	Sequenze del campo di vorticit� ($\delta = 40^0$).	73
5.14	Sequenze del campo di vorticit� ($\delta = 40^0$).	74
5.15	Circolazione globalmente emessa nel tempo e circolazione del vortice emesso ($\delta = 20^0$).	75
5.16	Andamenti di X_g e Y_g nel tempo e loro confronto con il valore relativo ad un unico vortice in equilibrio ($\delta = 20^0$).	75
5.17	Sequenze del campo di vorticit� ($\delta = 20^0$).	76
5.18	Sequenze del campo di vorticit� ($\delta = 20^0$).	77
5.19	Circolazione globalmente emessa nel tempo e circolazione del vortice emesso ($\delta = 90^0$).	78
5.20	Andamenti di X_g e Y_g nel tempo ($\delta = 90^0$).	78
5.21	Sequenze del campo di vorticit� ($\delta = 90^0$).	79
6.1	Schema del modello.	82
6.2	Forme della cresta	83
6.3	Posizioni di equilibrio per il vortice sul piano trasformato ζ . Linea continua: $\Re(z_v^*) = 0$. Linea a tratti: $\Im(z_v^*) = 0$	88
6.4	Configurazione di equilibrio M1-A. (1) - Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.	89
6.5	Configurazione di equilibrio M1-B. (1) - Curve di livello della hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.	89
6.6	Configurazione di equilibrio M1-C. (1) - Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.	90
6.7	Configurazione di equilibrio M1-D. (1) - Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.	90
6.8	Configurazione di equilibrio M2-A. (1) - Curve di livello della hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.	91
6.9	Configurazione di equilibrio M2-B. (1) - Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.	91
6.10	Configurazione di equilibrio M2-C. (1) - Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.	92
6.11	Configurazione di equilibrio M3. (1) - Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.	92
6.12	Configurazione di equilibrio M4. Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice e linee di corrente.	93
6.13	Trasformazione conforme cerchio - semistriscia - cresta periodica	94
6.14	Influenza della distanza s di emissione.	97
6.15	Andamento nel tempo della circolazione totale e della circolazione dell'ultimo vortice emesso.	98
6.16	Andamento nel tempo di X_g e Y_g e loro confronto con la posizione di un unico vortice in equilibrio.	98
6.17	Sequenze del campo di vorticit�.	100
6.18	Sequenze del campo di vorticit�.	101
7.1	Schema del rotore	103
7.2	Configurazione di equilibrio del vortice ($n=7$). (1) - Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.	107

7.3	Raggio di equilibrio e circolazione del vortice intrappolato al variare del numero di cuspidi	107
7.4	Circolazione globalmente emessa nel tempo e circolazione del vortice emesso (n=7).	111
7.5	Andamenti di X_g e Y_g nel tempo e traiettoria del baricentro $X_g + iY_g$	111
7.6	Sequenze delle posizioni dei vortici(n=7).	112
7.7	Sequenze del campo di vorticità (n=7).	113

Elenco delle tabelle

2.1	Coefficienti relativi alle funzioni di cutoff di Beale e Majda	23
2.2	Risultati dei test numerici di convergenza. Valori assunti dal parametro χ per una crescita dell'errore di legge $cost \cdot h^\chi$	25
5.1	Posizioni di equilibrio ed intensità del vortice.	61
6.1	Posizioni di equilibrio ed intensità del vortice.	87
7.1	Posizione di equilibrio e circolazione del vortice al variare del numero di cuspidi	106

Capitolo 1

Introduzione

Tema del presente lavoro è lo studio di flussi rotazionali incomprimibili confinati da pareti dalla forma complessa. Si considerano casi in cui il flusso possa essere ritenuto bidimensionale, la dinamica della vorticità sia dominata dalle forze d'inerzia e gli effetti viscosi possano essere trascurati. In sintesi, il moto avvenga nei limiti di applicabilità delle equazioni di Eulero. Si intende studiare l'effetto che la geometria di parete ha sulla genesi ed evoluzione di strutture vorticose.

Il modello matematico assunto risulta particolarmente appropriato nei casi in cui singolarità geometriche delle pareti, quali cuspidi o punti angolosi, definiscano i luoghi di elezione di separazione per il flusso. In questi casi è semplice simulare l'iniezione di vorticità in seno al fluido, la generazione di strutture e la loro evoluzione. Tipicamente si descrive il transitorio successivo ad un avviamento impulsivo del campo di moto.

I *Metodi a Vortici* sono storicamente quelli più impiegati a questo fine ([39], [56], [98], [102], [119], [163]). In estrema sintesi essi consistono nel discretizzare il campo continuo di vorticità, in singolarità (*vortici puntiformi*), o in piccole regioni (*blobs*) dalla dinamica assegnata. Il campo di moto risulta dunque costituito da un flusso potenziale con punti o piccole isole in cui è concentrata la vorticità. La descrizione del campo di moto è ottenuta seguendo lagrangianamente l'evoluzione di tali elementi vorticosi, secondo la legge di Biot-Savart, con il complemento di un modello di generazione di vorticità a parete.

Tale strumento di approssimazione delle equazioni di Eulero può essere anche utilizzato per l'approssimazione delle equazioni di Navier-Stokes, mettendo in atto strumenti di simulazione della diffusione viscosa [39, 51], [64].

Il presente lavoro si situa in questo ambito e tradizione di ricerca, le cui fondamenta risalgono agli anni trenta [157], [179], e il cui sviluppo moderno è principalmente dovuto a Chorin [39]. I temi ancora aperti e oggetto di ricerca, schematicamente, riguardano gli aspetti matematico-metodologici legati alla convergenza ed economicità del metodo, i limiti di applicabilità a geometrie complesse, la modellizzazione della viscosità e della generazione di vorticità a parete. In questo lavoro si sono tentati approcci originali verso la metodologia di accelerazione del calcolo e verso tecniche miste analitico-numeriche per lo studio di geometrie complesse. Per quanto concerne gli aspetti legati alla simulazione degli effetti della viscosità, viene descritto e discusso il modello stocastico.

Si sono inoltre ripercorse alcune vie classiche, basate sullo studio analitico del flusso potenziale secondo la teoria delle funzioni di variabile complessa, che, per quanto classiche, presentano aspetti di originalità per l'impiego che ne è stato fatto in associazione alle tecniche numeriche rese possibili dai moderni strumenti di calcolo automatico. In particolare, per via analitica, sono stati individuati modelli di flusso potenziale in grado di fornire utili termini di confronto per le soluzioni numeriche. Studiando la dinamica dei vortici secondo il formalismo della meccanica Hamiltoniana vengono individuate, per geometrie arbitrarie, le configurazioni di equilibrio di un vortice puntiforme, discutendone inoltre la stabilità.

L'organizzazione del lavoro è la seguente. Nelle successive due sezioni del presente capitolo introduttivo, si sintetizzano in un iter storico le problematiche inerenti la metodologia numerica e l'indagine fenomenologica, mettendo in evidenza alcuni dei risultati conseguiti dai lavori precedenti.

Nel secondo capitolo vengono discussi gli aspetti principali del metodo a vortici per le equazioni di Eulero, del modello matematico e dei requisiti di convergenza. Viene illustrata la metodologia stocastica di estensione del metodo alle equazioni di Navier-Stokes.

Il capitolo successivo introduce gli strumenti analitici e modelli utilizzati per l'imposizione delle condizioni al contorno. In particolare vengono illustrati il formalismo di variabile complessa, la tecnica delle trasformazioni conformi e alcuni semplici modelli di generazione di vorticità a parete.

Il capitolo quarto è dedicato alle metodologie numeriche di abbattimento del costo computazionale del metodo a vortici. Viene discussa la tecnica di accelerazione agli sviluppi multipolari [85]. Di questa vengono anche descritte le linee principali dell'algoritmo, analizzando di seguito le prestazioni ottenute da una realizzazione pratica del metodo, sviluppata nel corso della presente ricerca.

Dal capitolo quinto parte una serie di studi, i cui presupposti sono da ricercarsi in lavori di Saffman[161], Sheffield[165], Ringleb[154] nei quali si indaga sull'effettiva possibilità di catturare un vortice tramite una opportuna forma della parete.

In particolare nel capitolo quinto viene sondata la capacità di una parete, in virtù della sua forma geometrica, di regolarizzare il flusso favorendo la creazione e la successiva cattura di vortici, rivedendo in questo il lavoro di Ringleb[154], nel quale si rileva una imprecisione. Numericamente, mediante il *metodo a vortici*, viene poi simulato l'instaurarsi impulsivo del campo di moto a partire dalla quiete. Il transitorio che segue viene descritto rilasciando in modo discreto vorticità nel fluido e seguendo nel tempo le traiettorie dei vortici. Le geometrie di interesse vengono realizzate avvalendosi della tecnica delle trasformazioni conformi.

Secondo le stesse modalità, l'analisi viene estesa, nel capitolo sesto, a forme della parete caratterizzate da periodiche creste. Viene dapprima indagato il moto di una schiera di vortici investita da una corrente uniforme in una regione delimitata inferiormente da una parete rettilinea. Successivamente alla parete rettilinea viene sostituita una parete dotata di periodiche creste. Allo studio analitico mediante il modello di flusso potenziale, viene fatta seguire una simulazione numerica di partenza impulsiva del campo di moto inizialmente in quiete.

Infine nel capitolo settimo si conduce uno studio analogo per un corpo rotante, un cilindro presentante un numero discreto di cuspidi equispaziate. Viene indagata l'esistenza di punti di equilibrio stabile per il vortice nel campo di moto generato dal corpo in rotazione con velocità angolare costante. Allo studio del modello di flusso potenziale, ancora possibile (cfr.

Milne-Thomson[136]), segue la simulazione del transitorio della impulsiva messa in rotazione del corpo in seno al fluido.

1.1 La metodologia numerica

Come anticipato, l'attenzione è stata rivolta ai metodi a vortici, in particolare a quei metodi in cui la vorticità, concentrata in piccole regioni con legge opportuna (*Blob Methods*), viene seguita lagrangianamente nel tempo. I *Blob Method* nascono storicamente come metodi a vortici puntiformi (*Point Vortex Methods*). Il primo uso del metodo risale al 1932 ed è dovuto a Rosenhead [157] che analizzò l'instabilità di una superficie vorticoso (*vortex sheet*), perturbata mediante un disturbo sinusoidale. Lo strato continuo di vorticità venne rappresentato con una serie di dodici vortici puntiformi e al campo imposte condizioni al contorno periodiche. Il calcolo, condotto manualmente, mostrò l'evoluzione iniziale, regolare, della superficie vorticoso, la quale assumeva una forma prossima alle creste delle onde marine (il meccanismo che le genera è infatti lo stesso). Poco dopo in modo analogo Westwater [179] studia l'evoluzione di un elemento di superficie vorticoso con distribuzione ellittica di circolazione per unità di lunghezza. Malgrado il passo di integrazione nel tempo fosse molto grande rispetto ai tempi caratteristici del fenomeno, i risultati ottenuti parvero ragionevoli.

Simulazioni più accurate della dinamica di superfici vorticoso, condotte negli anni cinquanta (Birkhoff & Fisher[26], e più tardi da Hama & Burke[91]), contrariamente alle aspettative, mostrarono i vortici puntiformi attorcigliarsi in modo più irregolare e contorto, con la possibilità di assumere configurazioni casuali. Questi risultati misero in dubbio la validità dei metodi a vortici.

Chorin & Bernard[50] successivamente mostrarono che la discretizzazione di una superficie vorticoso è tanto più accurata quanto più è ridotto il gradiente di vorticità lungo lo strato rispetto alla distanza tra due vortici successivi. Diversamente viene meno l'equilibrio tra le velocità indotte su di un vortice da quelli che si trovano ai suoi lati ed è possibile che nascano dei moti spurii di rotazione, privi di significato fisico. Come rimedio Chorin propose di operare lo '*smoothing*', ossia di modificare il nucleo del vortice puntiforme, rendendolo non singolare. Lo stesso Chorin[39] propose di seguito l'estensione del metodo a vortici per lo studio di flussi viscosi, mediante un algoritmo a passi frazionati (*formula di Chorin-Marsden*[51]). Alla soluzione del problema viscoso Chorin giunse risolvendo ad ogni passo nel tempo il flusso potenziale per il trasporto materiale della vorticità e sovrapponendo a questa la soluzione di un problema di pura diffusione viscoso, ottenuta assoggettando tutti i blob ad un *random walk* [70] a media nulla e varianza pari a $2\sqrt{\nu\delta t}$. L'imposizione della condizione di aderenza fornisce infine il tasso di vorticità, generatasi nel contempo a parete e da introdurre nel campo di moto. Lo studio di Chorin[39] della partenza impulsiva di un cilindro circolare in un fluido viscoso è idealmente il punto di partenza dei moderni metodi a vortici. L'attrattiva di questi metodi è l'approccio lagrangiano, che non utilizza griglie di calcolo e perciò non è affetto da problemi di *viscosità numerica*, come strumento di indagine di flussi ad alti numeri di Reynolds, laddove i metodi euleriani necessiterebbero di griglie proibitivamente fitte.

Lo sviluppo dei metodi a vortici è comunque storia recente, degli ultimi vent'anni. Volendo citare alcune delle numerose applicazioni del metodo possiamo iniziare dalla più studiata ossia il flusso attorno ad un cilindro circolare (ad es. Cheer [37], Chorin [39], Smith & Stansby [167], Stansby & Dixon [169], Koumoutsakos & Leonard [111], Chew [38]). Con il metodo a vortici è stato studiato il flusso su profili alari, specie alle alte incidenze (Cherr [37], Katz

[98] Riccardi et al. [152]), e su lamina piana (Chorin[52], Kiya & Arie[102], Sarpkaya[162], Gilbertini[80], Riccardi e al. [152]), e ancora flussi su corpi tozzi (Clements[56], Smith & Stansby[166]). Il campo all'interno di un canale con gradino a vari numeri di Reynolds è stato analizzato da Sethian[163] e da Gagnon et al.[78]), come pure flussi in cavità chiuse oppure dotate di un sistema pistone-valvola [164]. Tutte queste applicazioni mirano allo studio della dinamica di vortici di larga scala, di scie vorticose, dei fenomeni di mescolamento.

In letteratura sono altresì reperibili diverse prove di convergenza per il metodo sia in due che in tre dimensioni, anche per il caso di flussi viscosi. Alla iniziale estensione al caso viscoso mediante una rappresentazione stocastica (Chorin[39]), Goodman [81], Long [123][124]) si è successivamente affiancata una formulazione completamente deterministica (Cottet [60] [61], Cottet & Mas-Gallic[62], Degond & Mas-Gallic[64], Koumoutsakos & Leonard[111]).

La struttura di un metodo a vortici rimane estremamente modulare. Il primo passo consiste nel risolvere il problema descritto dal flusso potenziale, rispettoso della condizione di impermeabilità dei contorni solidi del campo. A questo viene sovrapposta la soluzione di un problema di pura diffusione per effetto dei fenomeni viscosi; infine viene imposta la condizione di aderenza e da questa dedotta la vorticità generatasi nel contempo a parete. Dal punto di vista numerico la fase più complessa è la prima. La ricostruzione numerica delle traiettorie dei vortici infatti viene effettuata per integrazione numerica a partire dal campo di velocità, dedotto a sua volta dal campo di vorticità. Quest'ultima operazione è il punto cruciale: il suo costo computazionale è proporzionale ad N^2 , dove N è il numero totale di vortici con i quali si discretizza l'istantanea distribuzione di vorticità.

Solo nell'ultimo decennio si sono rese praticabili accurate simulazioni mediante il metodo a vortici, sia grazie alle aumentate prestazioni dei nuovi elaboratori, sia, e soprattutto, grazie alla ideazione di algoritmi acceleratori del calcolo, altrimenti onerosissimo, della dinamica connessa alla mutua induzione dei blob (*algoritmi di accelerazione agli sviluppi multipolari o 'Fast Multipole Methods'*, Greengard e Rokhlin[85], Carrier, Greengard e Rokhlin[34]). Mediante questi algoritmi, che a differenza di altre tecniche di accelerazione [54][55][160] non introducono *viscosità numerica*, è possibile ridurre il costo computazionale alla proporzionalità diretta con il numero di vortici [85].

La struttura dell'algoritmo è piuttosto complessa poichè consiste in una tecnica *multigrid, selettiva* (in quanto per ogni vortice si distingue una zona di forte interazione, nella quale le velocità vengono valutate direttamente, dal resto del campo, nel quale le interazioni vengono valutate attraverso gli sviluppi multipolari) e *adattativa*.

Si è dunque voluto sviluppare un codice che appartenesse a questa classe di metodi numerici e che alle elevate prestazioni, derivanti dall'utilizzo di algoritmi acceleratori, unisse la possibilità di trattare domini, bidimensionali, dalla geometria complessa.

Lo scopo è stato raggiunto mediante l'utilizzo della strategia completa, di ricostruzione del campo di velocità, basata sugli sviluppi multipolari [85], accoppiata alla tecnica delle trasformazioni conformi di campi di moto. Questo connubio fra le due tecniche, che preserva la lagrangianità del metodo in ogni sua parte, non ha, a tutt'oggi, altri riscontri applicativi in letteratura.

¹Le applicazioni del metodo a vortici reperibili in letteratura, anche per i più recenti *Fast Vortex Methods* (classe a cui l'algoritmo qui presentato appartiene), si riferiscono in generale a geometrie semplici quali il cerchio o la lamina piana. In studi su geometrie bidimensionali più complesse, quale ad esempio, il flusso all'interno di un canale con gradino, non vengono utilizzate tecniche di accelerazione in concomitanza con trasformazioni conformi (cfr. Sethian[163], Gagnon[78]), limitando fortemente il numero dei vortici presenti del dominio di calcolo; oppure si ricorre a tecniche di accelerazione più semplici (cfr. Sethian[164]), derivate dalla tecniche *'Cloud-In-Cell'* di Christiansen[54]) introducendo in tal modo non trascurabili effetti di *'viscosità*

Pur ponendo, da un lato maggiori restrizioni nell'utilizzo dell'algoritmo di accelerazione, a causa della presenza di termini metrici, questa soluzione apporta per altro verso notevoli benefici alla metodologia, rendendola di carattere più generale ed *estendendo la validità della tecnica di accelerazione anche a casi nei quali essa non sarebbe direttamente applicabile*².

Per quanto riguarda le applicazioni del metodo proposte nel contesto del presente lavoro si è condotta un'analisi essenzialmente non viscosa dei problemi esaminati. Si è affiancato perciò alla parte 'convettiva' dell'algoritmo un modello di generazione di vorticità (Sarpkaya[162], Kiya & Arie[102], Clements[56], Riccardi[152]). Il metodo è particolarmente efficace quando la separazione dal corpo è fissa, geometrica, imposta per esempio da uno spigolo vivo o da una cuspidi, come nel nostro caso. In Sarpkaya[162] e Kiya & Arie[102] ci si serve della condizione di Kutta per stabilire un legame fra l'intensità dei vortici nascenti e la posizione da cui essi vengono immessi nel flusso, differenziandosi poi circa l'utilizzo di tale relazione. In modo analogo Clements[56] studiò flussi intorno a profili con base tronca e spigoli vivi tra i fianchi e la base, ipotizzando che il flusso rimanesse attaccato sui fianchi e separasse sugli spigoli. Gli strati di taglio che nascevano dai punti di separazione venivano rappresentati mediante vortici discreti, immessi nell'intorno del punto di separazione geometrica. La circolazione dei vortici nascenti era però stimata come $\Gamma = \frac{1}{2}U_s^2 dt$ essendo U_s la velocità, fuori dallo strato limite, nell'intorno del punto di separazione. Questi semplici modelli di rilascio di vorticità permettono di dedurre l'evoluzione delle strutture di larga scala del flusso.

1.2 L'indagine fisica

La nostra indagine riguarda geometrie della parete che l'osservazione sperimentale ha messo in luce esercitare una qualche forma di controllo sul flusso e sulla sua regolarizzazione [154], [178]. È noto ad esempio che la presenza di singolarità geometriche, quali spigoli aguzzi o cuspidi, sulle pareti che confinano il campo di moto di un fluido, innescano separazioni e formazione di strutture vorticosi. Particolari geometrie della parete sono in grado tuttavia di favorire la formazione di una zona di circolazione subito a valle della singolarità, regolarizzando il flusso. L'ispirazione alla ricerca in tale direzione, viene dal un lavoro di Ringleb[154] nel quale si mostra come le cornici di neve sulle creste delle montagne assumano forme che, intrappolando un vortice, attuano un sistema naturale ed automatico di controllo e di stabilizzazione del flusso.

Sulla base di considerazioni analoghe si è studiata, in passato, la possibilità di ottenere flussi dalle desiderate proprietà. Si è pensato ad esempio di esaltare le prestazioni di un profilo cercando forme che intrappolassero in modo stazionario un vortice sul dorso [161] [95]. Un ben noto esempio dei benefici effetti di un simile connubio è la portanza addizionale prodotta

numerica'. Più frequente è invece la ricostruzione approssimata dei contorni mediante singolarità distribuite su di esso ('Boundary Element Methods') [121], come alternativa alla trasformazione conforme. La metodologia mostra però problemi ai quali si è solo in parte posto rimedio [121], [111], [109].

²Il metodo di accelerazione agli sviluppi multipolari si basa sulla espansione in serie di Laurent della legge di interazione di un vortice puntiforme (o, equivalentemente, di un blob, se il punto di valutazione cade al di fuori della regione su cui è distribuita la vorticità che gli compete) nello spazio libero. L'imposizione, ad esempio, di contorni periodici fa corrispondere ad un singolo vortice una schiera infinita di vortici, il che equivale a considerare una differente legge di interazione (cfr. Milne-Thompson[136]). Mediante l'opportuna trasformazione conforme, come vedremo nel capitolo 6 ci si può però ricondurre ad un altro campo di moto nel quale la legge di interazione torni formalmente ad essere quella del vortice nello spazio libero, recuperando la validità della tecnica di accelerazione.

dall'avvolgersi di una vortex sheet sul bordo di attacco di un'ala a delta ad elevati angoli di incidenza.

Su ali rettangolari di elevato allungamento, si potrebbe generare e mantenere un vortice sul dorso, utilizzando flaps di forma opportuna, come suggerito da Kasper [63], il quale sostiene inoltre che un simile meccanismo potrebbe innalzare la portanza fino ad un $C_L = 3.15$. I test condotti in varie gallerie hanno portato a risultati controversi [176] [115].

Rosow[158] riuscì a dimostrare sia analiticamente che mediante prove sperimentali, che è possibile catturare un vortice sul dorso di un profilo sistemando un'aletta verticale vicino al bordo di attacco ed attuando nel contempo una aspirazione lungo l'asse del vortice. In questo modo è possibile raggiungere valori di $C_L = 10$ variando opportunamente la posizione dell'aletta e l'intensità dell'aspirazione. Come diretta conseguenza però anche i valori del coefficiente di resistenza aumentano in modo rilevante.

Saffman & Sheffield[161] condussero uno studio teorico relativo alla lamina piana, determinando per essa una regione nella quale un vortice libero, di intensità opportuna, si troverebbe in una configurazione di equilibrio con la corrente esterna senza l'ausilio di alcun dispositivo esterno e sarebbe in grado di fornire incrementi analoghi delle prestazioni. Tale configurazione risulta un equilibrio stabile alle piccole perturbazioni.

Successivamente Sheffield[165] Huang & Chow[95] presero in considerazione profili di Joukowski. Il risultato ultimo di questi studi teorici fu l'esistenza di una configurazione di equilibrio stabile per il vortice libero sul dorso del profilo, ma con un bacino di stabilità della soluzione troppo piccolo per poter sperare in un qualche riscontro applicativo.

Ringleb[154], analizzando il meccanismo con il quale si generano le cornici di neve³ sulle creste aguzze delle montagne, intuì che ciò che si attuava era un esempio di controllo della separazione, ottenuto per effetto della presenza simultanea di una cuspid e di una opportuna geometria a valle della stessa. Geometria alla quale, nel caso specifico, era il flusso stesso a dar vita, trasportando via neve da alcune zone che successivamente andava a depositarsi in punti di ristagno. Ringleb spiegò che il contorno della *cornice* di neve era in grado di intrappolare un vortice il cui effetto era quello di regolarizzare il flusso. Mediante modelli di flusso potenziale e basandosi su considerazioni inerenti le trasformazioni conformi di campi moto, Ringleb progettò un diffusore a cuspid e per galleria del vento nel quale si avvaleva dell'effetto da lui battezzato *effetto cornice* per ritardare la separazione [153]. Il progetto fu effettivamente realizzato presso l'Università di Princeton e diede buoni risultati.

³Fenomeno per la prima volta descritto negli anni trenta da Welzenbach[178]

Capitolo 2

Il metodo a vortici

Introduzione

Uno dei vantaggi offerti dai metodi a vortici è strettamente legato alle caratteristiche fenomenologiche dei flussi vorticosi. La vorticità infatti manifesta spesso la tendenza a risiedere addensata in piccole regioni del campo di moto, all'esterno delle quali tende rapidamente a valori nulli. L'evoluzione dell'intero sistema rimane in tal caso dettata dall'evoluzione temporale e spaziale di queste regioni.

Del tutto analoga è la situazione che si prospetta nello studio del campo gravitazionale indotto dai pianeti. La massa del sistema solare infatti è concentrata in relativamente limitate regioni dello spazio. Facendo riferimento alle posizioni e alla quantità di massa presente in ognuno degli aggregati, e seguendone l'evoluzione, è possibile dedurre in modo semplice ed efficace il campo gravitazionale in ogni punto del sistema.

Ritornando al nostro problema, ciò che si vuole mettere in evidenza è dunque che la descrizione del flusso in termini di vorticità riduce la descrizione matematica del problema alle sue componenti essenziali.

Per quanto riguarda la risoluzione numerica del problema questa caratteristica posseduta dal modello matematico risulta alquanto favorevole, poichè permetterà una concentrazione delle risorse computazionali nelle regioni a vorticità non nulla.

2.1 Le equazioni del moto

In termini adimensionali le equazioni che reggono il moto di un fluido incompressibile e viscoso, confinato in una regione D dello spazio delimitata dal contorno ∂D sono

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } D \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} & \text{in } D \\ \mathbf{u} = 0 & \text{su } \partial D \end{array} \right. \quad (2.1)$$

dove $\mathbf{x} \in R^3$, Re è il numero di Reynolds, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è il vettore velocità, p è la pressione ed \mathbf{f} le forze esterne agenti sul fluido, che supporremo essere tutte conservative. Applicando allora il rotore ad entrambi i membri della (2.1) e tenuto conto che $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ otteniamo

un'espressione equivalente in termini di $\boldsymbol{\omega}$, detta *equazione di trasporto della vorticità o equazione di Helmholtz*

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{Re}\Delta\boldsymbol{\omega} \quad (2.2)$$

Il primo termine a secondo membro dell'equazione corrisponde allo stiramento dei filetti vorticosi ('*stretching*') dovuto ad effetti di natura tridimensionale, mentre il secondo termine è espressione dei fenomeni di diffusione per effetto viscoso.

Al fine di chiudere il problema (2.2) è necessario poter ricostruire il campo di velocità una volta noto il campo di vorticità. Ciò è possibile in quanto, data una funzione \mathbf{u} tale che

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \quad (2.3)$$

esiste certamente una funzione $\Psi(\mathbf{x})$ tale che

$$\mathbf{u} = \nabla \times \Psi(\mathbf{x}), \quad \text{e} \quad \Delta\Psi(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\omega} \quad (2.4)$$

Nel caso bidimensionale la funzione Ψ coincide con la *funzione di corrente*, mentre in tre dimensioni essa è nota come *potenzial vettore*. Notiamo inoltre che in ogni caso Ψ ed $\boldsymbol{\omega}$ sono vettori normali al piano del moto.

Ψ , come messo in evidenza dalla (2.4), soddisfa a un'equazione di Poisson nella quale a secondo membro compare la distribuzione di vorticità.

Facendo uso della soluzione fondamentale per l'operatore di Laplace Δ , potremo allora esprimere Ψ e conseguentemente \mathbf{u} , in termini di vorticità $\boldsymbol{\omega}$. In altre parole la soluzione della seconda delle (2.4) è data da

$$\Psi(\mathbf{x},t) = \int L(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.5)$$

dove la funzione $L(\mathbf{x})$, nel caso di dominio illimitato, assume la forma

$$\begin{cases} L(\mathbf{x}) = -\frac{\log|\mathbf{x}|}{2\pi} & \text{per } \mathbf{x} \in R^2 \\ L(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} & \text{per } \mathbf{x} \in R^3 \end{cases} \quad (2.6)$$

Conseguentemente, poichè è $\mathbf{u} = \nabla \times \Psi(\mathbf{x})$, otterremo per la velocità

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \int K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.7)$$

Il nucleo $K(\mathbf{x})$, per il caso di dominio illimitato, assume la forma

$$\begin{cases} K(\mathbf{x}) = -\frac{(-x_2, x_1)}{2\pi|\mathbf{x}|^2} & \text{per } \mathbf{x} \in R^2 \\ K(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|^3} \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & -x_2 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix} & \text{per } \mathbf{x} \in R^3 \end{cases} \quad (2.8)$$

dove con (x_1, x_2, x_3) si sono designate le componenti del vettore posizione \mathbf{x} .

Notiamo ancora che il nucleo $K(\mathbf{x})$ è singolare sia in due che in tre dimensioni, caratteristica questa che, come vedremo, rappresenterà uno dei primi scogli da superare nello sviluppo del modello matematico.

2.2 Il modello matematico

Proponiamoci ora di seguire il moto di una particella fluida e denotiamo con α la sua posizione iniziale. La legge oraria del moto $\mathbf{x}(\alpha, t)$ della particella è soluzione del seguente problema ai valori iniziali

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(\alpha, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\alpha, t), t) \\ \qquad \qquad \qquad = \int K(\mathbf{x}(\alpha, t) - \mathbf{y}) \omega(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ \qquad \qquad \qquad = \int K(\mathbf{x}(\alpha, t) - \mathbf{x}(\beta, t)) \omega(\mathbf{x}(\beta, t), t) d\beta \\ \mathbf{x}(\alpha, 0) = \alpha \end{array} \right. \quad (2.9)$$

nel quale si è espressa in forma di traiettoria la variabile muta \mathbf{y} tenendo in conto che, data l'incompressibilità del flusso, il volume della generica particella di fluido rimane costante nel tempo, sicché lo jacobiano della trasformazione operata vale uno. L'equivalenza tra il sistema (2.9) e le equazioni di Eulero è discussa in McGrath [132], Cottet[59].

L'ideale punto di partenza, dal quale ha preso il via lo sviluppo del *metodo a vortici (MV)* è proprio la ricerca di una soluzione numerica del sistema integro-differenziale (2.9) per il caso bidimensionale. La condizione iniziale del sistema, in generale consistente in un campo di moto con distribuzione continua di vorticità, viene sostituita da una sua rappresentazione in termini discreti, mediante *elementi vorticosi*¹. Dalla ricostruzione numerica, basata su (2.9) delle traiettorie di tali elementi di vorticità, si ottiene la rappresentazione della successiva evoluzione del sistema vorticoso.

Nei metodi a vortici l'integrale a secondo membro di (2.9) viene approssimato con una somma finita, risolvendo il sistema per un numero discreto di particelle di vorticità.

Le particelle, delle quali viene tracciata la traiettoria, sono quelle che all'istante iniziale si trovavano idealmente sui nodi di una griglia Λ^n . Più rigorosamente denotiamo con Λ^n l'insieme dei nodi di una griglia rettangolare, centrata sull'origine e avente celle di dimensione lineare h , contenuti all'interno della regione vorticoso. Quindi Λ^n consiste dei punti $\alpha_i = h \cdot \mathbf{i} = (h \cdot i_1, h \cdot i_2)$ per i quali $\omega_0(\alpha_i) \neq 0$.

Si potrebbe pensare, come inizialmente fu fatto, di poter utilizzare il *vortice puntiforme* come elemento base di discretizzazione del campo di vorticità.

Denotando allora con $x_i(t)$ la traiettoria del vortice che parte dalla posizione α_i , occorrerebbe risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(\alpha_i, t) = \sum_{j \in \Lambda^n, j \neq i} K(\mathbf{x}(\alpha_i, t) - \mathbf{x}(\alpha_j, t)) \omega(\mathbf{x}(\alpha_j, t), t) d\alpha_j \\ \mathbf{x}(\alpha_i, 0) = \alpha_i \end{array} \right. \quad (2.10)$$

dove $\omega_j = \omega_0(\alpha_j, 0)$ e dove l' i -esimo termine è escluso dalla sommatoria poichè, trattandosi di vortici puntiformi, l'integrale in (2.9) risulta singolare.

L'integrazione numerica del sistema (2.10) è noto con il nome di *Metodo a Vortici Puntiformi* (*Point Vortex Method*). È evidente dalla (2.8) che $K(\mathbf{x})$ presenta un polo del primo ordine nell'origine e che quindi, allorchè due vortici si avvicinano indefinitamente l'uno all'altro, le velocità che si inducono reciprocamente tendono ad un valore infinito.

¹Con elemento vorticoso o vortice si intenda l'elemento base con il quale si opera la discretizzazione del campo di vorticità: lo si consideri in generale un vortice puntiforme o un suo *smoothing*.

Chorin [39] introdusse l'idea di sostituire il sistema (2.10) con il seguente

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}_i, t) = \sum_{j \in \Lambda^n} K_\delta(\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}_i, t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}_j, t)) \omega(\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}_j, t), t) d\boldsymbol{\alpha}_j \\ \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}_i, 0) = \boldsymbol{\alpha}_i \end{cases} \quad (2.11)$$

definendo un nuovo nucleo K_δ coincidente con K ovunque tranne che nell'intorno dell'origine, dove viene sostituito da una opportuna funzione limitata (*'smoothing'* del nucleo $K(\mathbf{x})$).

Hald [87] ha dimostrato che è conveniente utilizzare un nucleo K_δ , ottenuto per convoluzione di K con una *funzione di smoothing* f_δ del tipo

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta^2} f\left(\frac{x}{\delta}\right) \quad x \in R^2 \quad (2.12)$$

definendo

$$K_\delta = K * f_\delta \quad (2.13)$$

Il sistema (2.11) costituisce la forma più generale del modello matematico.

In alcune formulazioni del metodo i termini ω_j di (2.11) rappresentano i valori medi dell'iniziale distribuzione di vorticità nell'intorno dei punti $\boldsymbol{\alpha}_j$.

È utile derivare (2.11) seguendo un approccio differente che renderà più chiaro il significato del nome, *'Vortex Blob Method'*, dato a questa formulazione.

Supponiamo di voler approssimare la soluzione dell'equazione di Eulero risolvendo il sistema di equazioni differenziali

$$\tilde{x}_j(0) = \boldsymbol{\alpha}_j \quad \frac{d}{dt} \tilde{x}_j(0) = \tilde{u}(x, t) \quad (2.14)$$

nel quale $\tilde{u}(x, t)$ sia un'approssimazione del campo di velocità desunta a partire dalle informazioni in nostro possesso: le posizioni $\tilde{\mathbf{x}}_j$ e i valori di vorticità ω_j .

Potremmo ottenere il campo di velocità $\tilde{\mathbf{u}}$ creando per prima cosa una rappresentazione approssimata $\tilde{\omega}_j$ della distribuzione spaziale di vorticità, da utilizzare in seguito nella (2.9).

Supponiamo di rappresentare $\tilde{\omega}_j$ come somma di un certo numero di *blob*² di intensità $\omega_j h^2$, posti nei punti \tilde{x}_j del piano ed aventi forma comune f_δ . Il campo di vorticità sarà esprimibile come

$$\tilde{\omega}_j(\mathbf{x}, t) = \sum_{j \in \Lambda^n} f_\delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_j(t)) \omega_j h^2 \quad (2.15)$$

Il campo di velocità corrispondente a tale distribuzione è dato da

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{x}, t) &= K * \tilde{\omega}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in \Lambda^n} (K * f_\delta)(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_j(t)) \omega_j h^2 \\ &= \sum_{j \in \Lambda^n} K_\delta(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_j(t)) \omega_j h^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Che è esattamente il campo di velocità utilizzato per muovere le particelle nel metodo a vortici.

²Intendiamo per *blob* una distribuzione spaziale radialsimmetrica e *compatta* di vorticità, tendente cioè esponenzialmente a valori nulli al di fuori della piccola regione sulla quale rimane definita. Il blob può essere anche inteso come il risultato finale di una operazione di mollificazione del vortice puntiforme.

2.3 Convergenza del metodo

In questa sezione presentiamo alcuni dei risultati degli studi di convergenza per il metodo a vortici. Le nostre considerazioni saranno limitate al caso bidimensionale, illimitato e non viscoso. Supporremo inoltre che il campo di vorticità iniziale sia *a supporto compatto*. Questa ipotesi assicura che la velocità indotta dal campo di vorticità sia nulla all'infinito ed è stata usata da Dushane[68], Del Prete e Hald[65], Hald[87], Beale e Majda[20][21], Anderson e Greengard[7], Beale[18], Hou[93]. Per ulteriori approfondimenti sull'argomento si vedano [7], [59], [81], [36] [87], [90], [20], [21], [19], [25], [140], [49].

Scopo della nostra trattazione sarà mettere in evidenza due punti fondamentali:

- la principale fonte di errore nel metodo a vortici è la valutazione dell'integrale di convoluzione in (2.9)
- l'accuratezza del metodo dipende fortemente dalle proprietà della funzione f_δ di smoothing utilizzata.

Consideriamo dunque N blob inizialmente nelle posizioni $\alpha_j \in \Lambda^n$ con $j = 1..N$, ossia α_j siano idealmente i nodi di una griglia Λ^n avente dimensione di maglia pari ad h . Tale griglia dovrà ovviamente ricoprire l'intera porzione di campo in cui la vorticità è non nulla.

Denotiamo con $\mathbf{x}(\alpha_j, t)$ la traiettoria vera di una particella inizialmente posta in α_j e con $\tilde{\mathbf{x}}(\alpha_j, t)$ la traiettoria calcolata numericamente.

Sia inoltre

$$\varepsilon_j(t) = \mathbf{x}_j(\alpha, t) - \tilde{\mathbf{x}}_j(\alpha, t) \quad (2.17)$$

l'errore assoluto commesso nella valutazione della traiettoria della particella j -esima (per brevità ometteremo l'indice j nel seguito della trattazione).

La variazione di $\varepsilon(t)$ nel tempo, lungo una determinata traiettoria sarà data da

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \dot{\mathbf{x}}(\alpha, t) - \frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt}d\alpha, t) \\ &= \dot{\mathbf{x}}(\alpha, t) - \sum_{jh \in \Lambda^n} K_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tilde{\omega}(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dalla genesi del modello matematico possiamo distinguere per la (2.18) tre fonti di errore

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \beta_m + \beta_d + \beta_s \quad (2.19)$$

con

$$\beta_m = \int K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \omega(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' - \int K_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \omega(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (2.20)$$

$$\beta_d = \int K_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \omega(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' - \sum_j K_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tilde{\omega}(\mathbf{x}') \quad (2.21)$$

$$\beta_s = \sum_j K_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tilde{\omega}(\mathbf{x}') - \sum_j K_\delta(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}') \tilde{\omega}(\mathbf{x}') \quad (2.22)$$

- β_m deriva dallo smoothing del nucleo K in K_δ
- β_d è l'errore di discretizzazione, causato dalla sostituzione dell'integrale mediante una sommatoria
- β_s è conseguenza dello stimare la sommatoria non nella reale posizione dei blob ma in quella calcolata numericamente.

Nella determinazione di una stima per i suelencati errori, teniamo presente ancora una volta che, dall'ipotesi di incomprimibilità del fluido discende che ogni integrazione in \mathbf{x} o \mathbf{x}' può essere vista come una integrazione in $\boldsymbol{\alpha}$ o $\boldsymbol{\alpha}'$ in quanto lo jacobiano della trasformazione $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\alpha}$ risulta unitario.

Ai fini dell'integrazione, la griglia può dunque essere sempre vista come regolare, anche se la disposizione dei blob nello spazio perdesse nel tempo qualsiasi parvenza di regolarità, quale risultato del moto reciproco di questi ultimi. Con una notazione equivalente, la definizione di β_m può essere riscritta come

$$\beta_m(\mathbf{x}, t) = K * \omega - K_\delta * \omega \quad (2.23)$$

dove con $(*)$ si intenda una convoluzione.

Applicando ora ad entrambi i membri della (2.23) la trasformata di Fourier

$$\hat{\beta}_1(\boldsymbol{\kappa}, t) = (\hat{K} - \hat{K}_\delta) * \hat{\omega} \quad (2.24)$$

sia $\boldsymbol{\kappa}$ la variabile coniugata ad \mathbf{x} e si intenda con $(\hat{\cdot})$ l'operatore trasformata di Fourier.

Avremo ancora

$$\hat{\beta}_1(\boldsymbol{\kappa}, t) = \hat{K}(1 - \hat{f}_\delta) * \hat{\omega} = \hat{K}(\hat{f}(0) - \hat{f}(\delta\boldsymbol{\kappa})) * \hat{\omega} \quad (2.25)$$

poichè dalla definizione di f discende che

$$\int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 = \hat{f}(0) \quad (2.26)$$

I momenti della funzione f vengono definiti mediante la seguente espressione

$$\int \mathbf{x}^{|\boldsymbol{\alpha}|} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x}^{|\boldsymbol{\alpha}|} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, |\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (2.27)$$

si può dimostrare che l'annullarsi di tali momenti sino ad un ordine p garantisce che le derivate di \hat{f} sino all'ordine $p - 1$ siano nulle, portando alla seguente stima per l'errore β_m

$$\|\beta_m\|_{L_1} \leq C \delta^p \quad (2.28)$$

L'accuratezza nella risoluzione del campo di vorticità dipende dalle caratteristiche dell'elemento base (il *blob*) con cui si opera la discretizzazione. Influiscono direttamente sia la dimensione del blob, attraverso il *parametro di cutoff* δ , sia l'espressione della funzione di smoothing $f_\delta(r)$ attraverso il termine p . Anche la stima dell'errore β_d è intimamente legata alle caratteristiche della funzione di smoothing $f_\delta(r)$. In particolare si dimostra che l'approssimazione dell'integrale di una funzione a supporto compatto mediante la formula dei trapezi è una procedura il cui ordine di accuratezza viene limitato solo dal grado di differenziabilità della funzione integranda (Anderson & Greengard [7]). La stima di β_d rimane così legata ad una stima delle derivate successive di $K_\delta = K * f_\delta$. K_δ possiede tante derivate quante sono quelle non nulle di f_δ .

Ipotizzando allora che f abbia L derivate non nulle, in un intervallo finito di tempo T si ha che

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\beta_d\|_{L^\infty} \leq C_d \left(\frac{h}{\delta}\right)^L \delta \quad (2.29)$$

Questa relazione mette in luce che l'errore dipende anche dalla dimensione lineare h della griglia sulla quale erano idealmente posti i vortici all'istante iniziale e in particolare dall'accuratezza con la quale la distribuzione iniziale viene rappresentata.

Per quanto riguarda invece l'errore β_s possiamo dire che esso è influenzato dai due precedentemente descritti e che una sua stima [7] è la seguente

$$\|\beta_s\| \leq C_s (\|\beta_m\| + \|\beta_d\|) \quad (2.30)$$

In definitiva, la stima dell'errore assoluto complessivo è della forma

$$\|\beta_{totale}\|_{L_1} \leq C \left(\delta^p + \left(\frac{h}{\delta}\right)^L \delta \right) \quad (2.31)$$

che bene mette in luce la polivalenza del parametro δ .

Se L è sufficientemente elevato, una scelta di $h/\delta < 1$ (il che equivale a dire che i blob debbano in parte sovrapporsi l'un l'altro) garantisce che l'errore nella valutazione delle traiettorie sia dell'ordine di $o(h^p)$.

In definitiva l'accuratezza del metodo numerico rimane strettamente dipendente dall'ordine della funzione di smoothing f .

Quanto detto si basa su di un'analisi per tempi brevi. Per tempi lunghi infatti si ha una crescente irregolarità della distribuzione dei blob nel campo, alla quale corrisponde un incremento dell'errore β_d come effetto dell'incremento dei valori delle derivate che concorrono alla valutazione dell'errore per la formula dei trapezi.

La metodologia proposta per rimediare a questo inconveniente è il *periodicoriposizionamento* ('*Rezoning*') delle particelle su di una nuova griglia, al fine di ripristinare le caratteristiche di regolarità del campo (cfr. Nordmark[140], Koumoutsakos[111]). Non solo la posizione, ma anche l'intensità dei blob viene alterata, ricreando una nuova discretizzazione dell'intero campo di vorticità. Il *rezoning* introdurrà in generale un lieve effetto di viscosità numerica, ma risulta necessario per ripristinare le condizioni imposte dai requisiti di convergenza del metodo a vortici.

2.4 Le funzioni di smoothing

Il nucleo $K(\mathbf{x})$ della (2.8) esprime la legge di interazione di un vortice puntiforme con il campo esterno ed è singolare sia in due che in tre dimensioni.

L'inadeguatezza del vortice puntiforme quale modello matematico per la descrizione della dinamica delle particelle 'cariche' di vorticità nel contesto di un metodo a vortici fu ben presto manifesta.

Al lavoro di Rosenhead 1932 [157], nel quale con pochi vortici si riuscì a cogliere il *roll up* di una superficie vorticoso, seguirono negli anni cinquanta lavori che coinvolsero un maggior numero di vortici. Contrariamente a quanto ci si aspettasse però, il discretizzare una superficie vorticoso con un numero maggiore di vortici puntiformi portava a risultati del tutto inattendibili (cfr. Krasny [113]).

Si deve a Chorin, agli inizi degli anni settanta, l'introduzione dello *smoothing* della funzione di interazione $K(\mathbf{x})$ [39], [50].

Operare lo smoothing della funzione $K(\mathbf{x})$ significa modificarne il comportamento nell'intorno dell'origine di modo che la velocità rimanga sempre una funzione limitata.

Come visto nella precedente sezione viene definito un nuovo nucleo K_δ coincidente con K ovunque tranne che nell'intorno dell'origine, dove viene sostituito da una opportuna funzione limitata.

Hald [87] ha dimostrato che è conveniente utilizzare un nucleo K_δ ottenuto per convoluzione di K con una *funzione di smoothing* f_δ del tipo

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta^2} f\left(\frac{x}{\delta}\right) \quad x \in R^2 \quad (2.32)$$

definendo

$$K_\delta = K * f_\delta \quad (2.33)$$

Ovviamente lo smoothing di K non è per nulla univoco. Ciò non costituisce realmente un problema poichè l'accuratezza complessiva del metodo a vortici dipende piuttosto dal soddisfacimento di alcune relazioni integrali da parte di $f(r)$ e in particolare della (2.27).

Storicamente la prima espressione di K_δ si deve a Chorin ed è della forma

$$K_\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{(-y, x)}{2\pi\delta r} & 0 < r \leq \delta \\ \frac{(-y, x)}{2\pi r^2} & \delta < r < \infty \end{cases} \quad (2.34)$$

dove con (x, y) si intendono le coordinate cartesiane in un sistema di riferimento con origine nel centro del vortice e $r^2 = x^2 + y^2$. Il parametro δ definisce la distanza dall'origine al di là della quale la legge di interazione torna ad essere *esattamente* quella di un vortice puntiforme e viene anche denominato *cutoff length*. Tutta la vorticità che compete al blob è contenuta all'interno del cerchio di raggio δ .

In teorie più recenti K_δ viene determinato in maniera del tutto differente e non è detto che il parametro di cutoff δ abbia un preciso significato geometrico. Osserviamo ancora che la (2.34) non è continua nell'origine. Le velocità in una coppia di punti $(\pm\varepsilon, 0)$ sono opposte ed elevate. Il valore di K_δ nell'origine non è definito ma viene spontaneo porre $K_\delta(0) = 0$, confidando nel fatto che l'incidenza statistica di una simile posizione è, da un punto di vista numerico, pressoché nulla.

Un'altra delle iniziali espressioni per $K_\delta(\mathbf{x})$ fu proposta da Milinazzo e Saffman(1977) [134]

$$K_\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{(-y, x)}{2\pi\delta^2} & 0 \leq r \leq \delta \\ \frac{(-y, x)}{2\pi r^2} & \delta < r < \infty \end{cases} \quad (2.35)$$

Nei suoi studi sulla convergenza dei metodi a vortici e sul problema dello smoothing Hald pone l'accento sul fatto che, allorché si vogliono determinare delle funzioni di smoothing di ordine superiore, è utile pensare a K_δ non tanto come a un'approssimazione di $K(\mathbf{x})$ quanto a un campo di velocità. La corrispondente distribuzione spaziale di vorticità, che coincide peraltro con la funzione di smoothing, può essere determinata come

$$f_\delta(\mathbf{x}) = \nabla \times K_\delta(\mathbf{x}) \quad (2.36)$$

Nel caso del vortice puntiforme $f(\mathbf{x}) = \Gamma\delta(\mathbf{x}_v)$, dove \mathbf{x}_v è la posizione del vortice e con $\delta(\mathbf{x})$ si intenda la funzione delta di Dirac. L'operazione di smoothing del nucleo $K(\mathbf{x})$ comporta una redistribuzione della circolazione complessiva del vortice su di una piccola regione circolare (*blob di vorticità*) la cui forma e dimensione rimangono costanti nel tempo.

Ad esempio la distribuzione di vorticità corrispondente alla (2.34) proposta da Chorin risulta essere

$$f_\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi r\delta} & 0 < r < \delta \\ 0 & \delta < r < \infty \end{cases} \quad (2.37)$$

mentre per quanto riguarda la (2.35), utilizzata da Milinazzo e Saffman si ha

$$f_\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\delta^2} & 0 < r \leq \delta \\ 0 & \delta < r < \infty \end{cases} \quad (2.38)$$

Il fatto che la (2.37) sia singolare nell'origine complica di molto le prove di convergenza ma non le rende tuttavia impossibili (Hald [90]).

Volendo riassumere le caratteristiche salienti dei blob descritti dalle espressioni (2.37) e (2.38) potremmo dire che le relative funzioni $f_\delta(r)$

1. sono discontinue in $r = \delta$
2. sono a supporto compatto
3. sono ovunque positive
4. sono riscalabili e radialsimmetriche
5. soddisfano alla relazione $\int_{R^2} f_\delta(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$

Nella ricerca di funzioni di smoothing di ordine superiore le proprietà **1** e **2** si sono dimostrate irrilevanti. La proprietà **3** non è necessaria e per di più pregiudica la velocità di convergenza ad un secondo ordine al massimo. Le proprietà **4** e **5** sono invece fondamentali. La prima delle due può essere anche espressa come

$$f_\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\delta^2} f\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta^2} f\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\delta}\right) \quad (2.39)$$

mentre la seconda è conseguenza del fatto che la circolazione complessiva del blob deve essere indipendente dal parametro δ .

Matematicamente il problema della ricerca di funzioni di smoothing $f_\delta(\mathbf{x})$ diviene il problema della ricerca di funzioni approssimanti la delta di Dirac e che soddisfino sino al gradop, il più elevato possibile, alla *condizione sui momenti* (2.27) imposta dall'analisi di convergenza del metodo a vortici.

Per questa strada il parametro δ , pur conservando il nome di *parametro di cutoff*, perde ben presto il proprio significato geometrico.

Beale & Majda nei loro studi [20] [21] formulano tre condizioni per la rapida convergenza di un metodo a vortici. Innanzitutto essi ipotizzano che la funzione $f(\mathbf{x})$ sia due volte differenziabile e radialsimmetrica. Di seguito richiedono che la $f(\mathbf{x})$ soddisfi alle condizioni

$$\int_{R^2} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1 \quad (2.40)$$

$$\int_{R^2} \mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0 \quad 1 \leq \alpha \leq m - 1 \quad (2.41)$$

$$f(\mathbf{x}) \quad \text{sia } \textit{smooth e rapidamente decrescente} \quad (2.42)$$

La (2.41) è la già citata condizione sui momenti³. La condizione (2.42) non è essenziale ma facilita di molto la valutazione di alcuni integrali, per cui si ritrova spesso una qualche sua formulazione in letteratura.

Matematicamente Beale & Majda formulano la (2.42) in diversi modi [21] [22], imponendo delle condizioni di vincolo per la trasformata di Fourier di $f(\mathbf{x})$. Più in generale si pensò dapprima a funzioni a supporto compatto derivabili sino ad un ordine n . Hald [87] considera il caso in cui sia $n = 3$, Cottet [59] il caso $n \leq 2$, Raviart [150] il caso $n \leq 1$.

Successivamente si prese in considerazione anche il caso di funzioni che decadessero a zero all'incirca esponenzialmente. In particolare Anderson & Greengard[7] suppongono che $f(\mathbf{x})$ sia n volte differenziabile e che soddisfi le seguenti relazioni

$$|\mathbf{x}|^{4+m}|f(\mathbf{x})| \leq C \quad (2.43)$$

$$|\mathbf{x}|^{2+|\beta|} \left| \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \beta} \right| \leq C \quad |\beta| \leq n \quad (2.44)$$

$$\int_{R^2} |\mathbf{x}|^m |f(\mathbf{x})|d\mathbf{x} \leq C \quad (2.45)$$

I due autori definiscono inoltre una classe di funzioni denominata $M^{n,m}$ (la lettera M deriva da *Mollifier*) alla quale appartengono tutte le funzioni $f(\mathbf{x})$ che soddisfano contemporaneamente alle (2.40) e (2.41) nonché alle (2.43)-(2.45). Una classe di funzioni lievemente più estesa viene studiata da Raviart [150].

Continuiamo ora analizzando alcuni rappresentativi esempi di funzioni di smoothing. Una delle classi tra le più eleganti è stata suggerita da Beale & Majda [22] e comprende funzioni

³Il nome deriva dalla somiglianza del termine integrale a primo membro con la definizione di momento di una funzione di distribuzione della Teoria della Probabilità.

della forma

$$f_\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi\delta^2} P\left(\frac{r^2}{\delta^2}\right) e^{-r^2/\delta^2} \quad (2.46)$$

$$K_\delta(\mathbf{x}) = \frac{(-y, x)}{2\pi r^2} \left[1 - Q\left(\frac{r^2}{\delta^2}\right) e^{-r^2/\delta^2} \right] \quad (2.47)$$

dove $P_n = Q_n - Q'_n$ e con Q_n sono polinomi di Laguerre opportunamente normalizzati in modo che il termine costante abbia valore unitario. Le espressioni analitiche di P_n e Q_n vengono fornite in tabella 2.1. In questo caso l'ordine di accuratezza è pari a $m = 2n + 2$, dove n corrisponde al grado del polinomio P_n . Osserviamo che per $n = 0$ $f(\mathbf{x})$ è sempre positiva e coerentemente si ha $m = 2$. Un'altra osservazione molto importante è che nelle (2.46) (2.47) il parametro di cutoff δ non ha un chiaro significato geometrico. Anche il tentativo di determinare in maniera ragionevole la dimensione radiale del blob non è univoca. Decidendo ad esempio di assumere come dimensione significativa il raggio del cerchio che contiene il 99% della circolazione complessiva del blob, l'andamento oscillante della funzione $f(\mathbf{x})$ per $n = 2$ fa sì che esistano ben tre possibili soluzioni $r_{c_1} = 0.757 \delta$, $r_{c_2} = 1.925 \delta$, $r_{c_3} = 2.662 \delta$.

Tuttavia le funzioni definite in (2.46) soddisfano la condizione (2.42), poichè il termine $P(r^2)exp(-r^2)$ è *smooth* e decade rapidamente all'infinito.

Lo smoothing del nucleo $K(\mathbf{x})$ espressa dalla (2.47) è stata quindi inclusa nelle teorie di Anderson & Greengard [7], di Beale & Majda [21], Cottet [59] [60], Hald [87] [90], Raviart [150]. Studi numerici dell'efficienza dello smoothing (2.47) sono stati eseguiti dagli stessi Beale & Majda, mentre una classe di funzioni poco differente è stata utilizzata da Perlman [146]. Brevemente, la conclusione che gli autori traggono è che inizialmente la velocità di convergenza osservabile è quella suggerita dalla teoria ma che con il progredire nel tempo la soluzione va deteriorandosi.

In [20] Beale & Majda notano inoltre che è teoricamente plausibile l'esistenza di funzioni di cutoff di ordine di accuratezza infinita. Si deve però ad Hald [90] una esemplificazione esplicita

$$f_\delta(\mathbf{x}) = \frac{4}{45\pi\delta^2(r/\delta)^3} \left[16J_3\left(\frac{4r}{\delta}\right) - 10J_3\left(\frac{2r}{\delta}\right) + J_3\left(\frac{r}{\delta}\right) \right] \quad (2.48)$$

$$K_\delta(\mathbf{x}) = \frac{(-x_2, x_1)}{2\pi r^2} \left\{ 1 - \frac{8}{45(r/\delta)^2} \left[4J_2\left(\frac{4r}{\delta}\right) - 5J_2\left(\frac{2r}{\delta}\right) + J_2\left(\frac{r}{\delta}\right) \right] \right\} \quad (2.49)$$

Tabella 2.1. Coefficienti relativi alle funzioni di cutoff di Beale e Majda. n è il grado dei polinomi, m è l'ordine di accuratezza della funzione di cutoff.

n	$P_n(s)$	$Q_n(s)$	m
0	1	1	2
1	$2 - s$	$1 - s$	4
2	$3 - 3s + s^2/2$	$1 - 2s + s^2/2$	6
3	$4 - 6s + 2s^2 - s^3/6$	$1 - 3s + 3s^2 + s^3/6$	8

dove J_2 e J_3 sono le funzioni di Bessel di secondo e terzo ordine.

La (2.48) non soddisfa alle condizioni espresse da Beale & Majda o Anderson & Greengard. La convergenza di un metodo a vortici utilizzando le (2.48) (2.49) richiede quindi ulteriori argomentazioni (Hald [90]).

Gli studi numerici condotti da Nordmark [140] confermano le caratteristiche di convergenza per la funzione di smoothing di ordine infinito. In particolare dai test numerici risulta che la velocità di convergenza dipende essenzialmente dalla regolarità della distribuzione iniziale di vorticità. A differenza di quanto accade per le funzioni di cutoff di ordine finito non vi è dunque un peggioramento nel tempo della accuratezza rispetto all'approssimazione iniziale. Nordmark individua una intera classe di funzioni di cutoff di ordine infinito, tutte espresse mediante funzioni di Bessel.

L'effettivo utilizzo di queste funzioni di cutoff in un metodo a vortici è però alquanto difficoltoso per diversi ordini di motivi. In primo luogo la valutazione numerica delle funzioni di Bessel è piuttosto dispendiosa. Inoltre la (2.48) rimane definita e diversa da zero sull'intero dominio di definizione.

Al di là dei problemi che ciò può comportare nell'imposizione delle condizioni al contorno⁴, questa caratteristica mal si concilia con le esigenze dettate dalle moderne tecniche di valutazione del campo di velocità [83].

Dopo la scoperta di tecniche di accelerazione basate su sviluppi multipolari (Greengard & Rokhlin [83]), l'attenzione si è spostata verso funzioni di smoothing a supporto finito. Innanzitutto osserviamo che non esistono funzioni di smoothing di ordine infinito e di supporto finito (Hald [90]).

Un interessante esempio di queste funzioni è il seguente

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{52}{\pi\delta^2} (1 - 21\eta + 105\eta^2 - 140\eta^3) \beta^9 & \text{per } r \leq \delta \\ 0 & \text{per } r > \delta \end{cases} \quad (2.50)$$

$$K(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{(-x_2, x_1)}{2\pi r^2} [1 + (286 - 1092\beta + 1365\beta^2 - 560\beta^3) \beta^{10}] & r \leq \delta \\ \frac{(-x_2, x_1)}{2\pi r^2} & r > \delta \end{cases} \quad (2.51)$$

con

$$\eta = \frac{r^2}{\delta^2}, \quad \beta = \left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right) \quad (2.52)$$

La funzione (2.50) è dell'ottavo ordine ed è stata proposta da Nordmark [140]. L'autore valuta le effettive prestazioni di un metodo a vortici utilizzando questa funzione di cutoff simulando numericamente campi di vorticità della forma

$$\omega(r, t) = (1 - r^2)^k \quad \text{con } k = 3, 7, 14 \quad (2.53)$$

distribuzioni tridimensionali, stazionarie e a simmetria radiale per le quali i risultati di convergenza vengono confrontati con studi analoghi condotti da Nakamura et al.[138] e relativi alla funzione

⁴ad esempio in Fishelow [76] vengono proposte funzioni di cutoff apposite per la trattazione dei domini periodici

	$\omega(r,t) = (1 - r^2)^3$	$\omega(r,t) = (1 - r^2)^7$	$\omega(r,t) = (1 - r^2)^{14}$
Nakamura et al.	3.0	4.1	8.3
Nordmark	2.8	4.5	4.1

Tabella 2.2. Risultati dei test numerici di convergenza. Valori assunti dal parametro χ per una crescita dell'errore di legge $cost \cdot h^\chi$

di smoothing di ordine infinito (2.48). In tabella 2.2 vengono messi a confronto i risultati dei due esperimenti. La legge di crescita dell'errore è del tipo *costante* $\cdot h^\chi$. Vengono riportati i valori assunti dal parametro χ nei due casi. Nordmark sceglie $\delta = 1.7\sqrt{h}$ e usa la tecnica del *rezoning* [141]. In Nakamura et al. [138] si pone $\delta = 0.3\sqrt{h}$. Anche se la funzione di smoothing di ordine infinito porta a risultati più accurati (qualora la distribuzione iniziale di vorticità sia 'smooth') dal confronto operato in tabella 2.2 si desume che, per la pratica numerica, l'utilizzo della funzione (2.50), eventualmente associato alla tecnica del *rezoning* [141]), è una scelta più che adeguata.

Come visto le funzioni di smoothig sono tutte regolate da un parametro δ . Certamente in quanto requisito di convergenza, dovrà essere posto $\delta > h$. Ci si chiede però se esista un valore ottimale di δ per una fissata rappresentazione, in termini discreti, del campo di vorticità (in pratica si pensi a una griglia A^n di vortici spazati di h).

Gli studi teorici, nei quali si individua il valore ottimale di δ affinché una qualche stima dell'errore sia resa minima, forniscono vari criteri di scelta. Del Prete & Hald [65] usano $\delta = h^q$, dove il parametro q dipende dalla regolarità della distribuzione iniziale di vorticità. Anche Beale & Majda [18] usano la stessa formula, salvo valutare q su altre basi. Cottet [59] modifica in $c \cdot h^q$ il criterio di scelta, dove c rappresenta una ulteriore costante. Hald [87], per distribuzioni non smooth individua in $\delta = \sqrt{h}$ un valore ottimale. Anche Nordmark [140] nella sua ricerca di funzioni di cutoff di ordine superiore e nella sperimentazione numerica finisce per utilizzare in effetti tale scelta. La determinazione pratica del valore ottimale si basa in genere su scelte di compromesso. Questo punto è infatti una delle problematiche aperte della metodologia.

2.5 L'estensione ai flussi viscosi

L'estensione del metodo a vortici ai problemi viscosi risale agli anni settanta, allorché Chorin pose le basi teoriche [51] per la separata trattazione di termini convettivi e termini diffusivi all'interno delle equazioni di Navier-Stokes, mediante una tecnica numerica basata su di un algoritmo a passi frazionati.

In un successivo lavoro Chorin stesso mise a punto una prima applicazione del metodo [39], calcolando la scia dietro un cilindro. In quel lavoro, gran parte dell'ossatura portante di un moderno metodo a vortici è presente sin dall'inizio. A Chorin si devono infatti l'introduzione del *blob* al posto del vortice puntiforme e l'approssimazione dei fenomeni di diffusione di vorticità mediante un processo stocastico ('*Random Walk*'), basato su di un'analogia formale delle equazioni di Helmholtz con l'equazione di Fokker-Planck, per la quale Einstein [70] nel 1956 aveva suggerito una metodologiaolutiva del tutto simile.

La convergenza del metodo è stata stabilita da Benfatto & Pulvirenti [25], Goodman [81], Long [123].

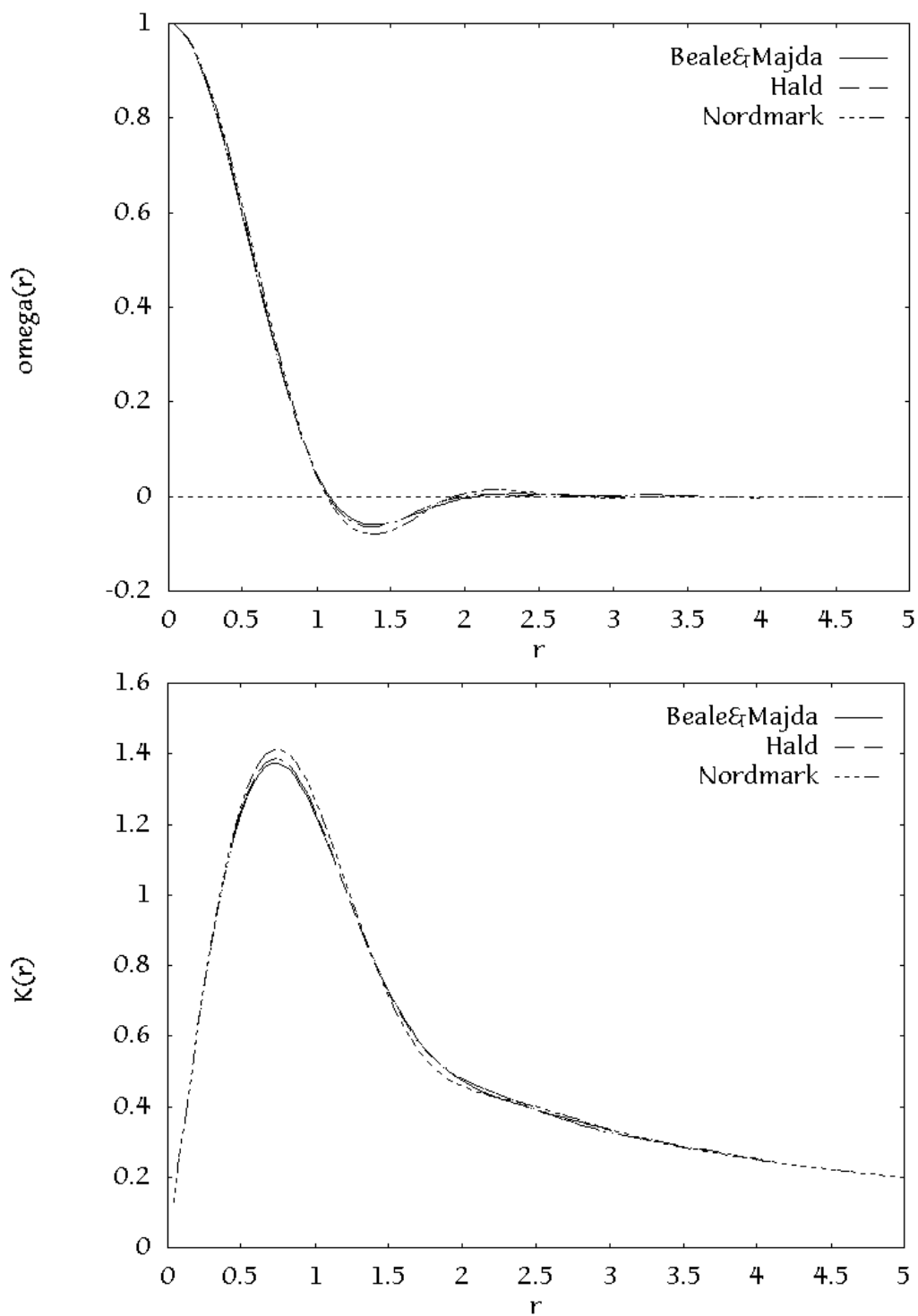


Figura 2.1. Legge di distribuzione della vorticit  e di legge di interazione per tre diverse funzioni di cutoff: blob di Beale & Majda (ottavo ordine), blob di Hald (ordine di accuratezza infinito), blob di Nordmark (ottavo ordine). I parametri di cutoff δ sono stati scelti in modo che $\omega_{max} = 1$.

Accanto alla metodologia utilizzando il random walk nella trattazione del termine viscoso sono fiorite proposte ibride nelle quali il processo stocastico viene rimpiazzato con il calcolo del laplaciano della vorticità su di una griglia strutturata e non (cfr. [160], [155]). Viene in questo modo distrutta parte della struttura puramente lagrangiana del metodo.

Si è pure provato ad inglobare il processo diffusivo all'interno della funzione caratterizzante il blob stesso [119], ma tale metodologia si è dimostrata non consistente con le equazioni di Navier-Stokes [84].

In Cottet[61], Cottet & Mas-Gallic[60], Degond & Mas-Gallic[64], viene sviluppata una metodologia completamente deterministica, che, pur conservando una struttura lagrangiana, modifica tuttavia di volta in volta la circuitazione della singola particella vorticoso (*Particle Strength Exchange Method*), secondo quanto dettato da un'approssimazione integrale dell'equazione della pura diffusione della vorticità. Recenti sviluppi di quest'ultima metodologia sono da attribuirsi a Koumoutsakos & Leonard[111] [109] [110] [108].

In questa sezione ci limiteremo a descrivere la prima delle due formulazioni, eseguendo di seguito due test numerici; il primo riguardante il random walk, mentre il secondo è un'applicazione della metodologia a vortici per la determinazione dello strato limite su di una lamina piana (profilo di Blasius).

2.5.1 La formula di Chorin-Marsden

Consideriamo le equazioni di Navier-Stokes

$$\begin{cases} \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{Re} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \end{cases} \quad (2.54)$$

Esse mostrano un'analogia formale con l'equazione di Fokker-Planck [13] e possono essere ricondotte al seguente sistema di equazioni differenziali stocastiche alle derivate ordinarie

$$\begin{cases} d\mathbf{x}_i = \sum \mathbf{K}_\delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j dt + \frac{d\mathbf{w}(t)}{\sqrt{2/Re}} \\ d\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = ((\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u})_{x_i} dt \end{cases} \quad (2.55)$$

dove con $\mathbf{w}(t)$ si intenda un moto browniano in tre dimensioni.

Il sistema (2.55) può essere risolto secondo una metodologia numerica a passi frazionati [51] e fornire una adeguata rappresentazione della soluzione di (2.54).

Per comprendere come ciò sia possibile, consideriamo per semplicità una generica equazione della forma

$$u_t = (A + B)u \quad \text{con } u(0) = u_0 \quad (2.56)$$

A e B siano degli operatori, per esempio operatori differenziali, t sia il tempo e u_0 sia un set di condizioni iniziali sufficienti a garantire l'unicità della soluzione $u = u(t)$. Sia $S = S(t)$ l'operatore soluzione ossia

$$u(t) = Su_0 \quad (2.57)$$

Definiamo come equazioni componenti le seguenti

$$v(t) = Av \quad \text{con } v(0) = v_0 \quad (2.58)$$

$$w(t) = Aw \quad \text{con } w(0) = w_0 \quad (2.59)$$

poniamo ancora

$$v(t) = S_A v_0 \quad w(t) = S_B w_0 \quad (2.60)$$

dove v_0 e w_0 sia dati e S_A, S_B siano gli *operatori soluzione* per i due problemi (2.58) e (2.59) rispettivamente. Chorin et al.[51] dimostrarono che è possibile esprimere $S(t)$ come

$$S(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_A \left(\frac{t}{n} \right) S_B \left(\frac{t}{n} \right) \right)^n \quad (2.61)$$

ossia la soluzione di (2.56) può essere ottenuta risolvendo su brevi intervalli di tempo, in successione e ripetutamente le due equazioni componenti. La formula (2.61) è nota come *formula prodotto* e la tecnica numerica viene definita come *metodo a passi frazionati* [51].

In base a considerazioni del tutto analoghe il sistema (2.54) può essere risolto [51] mediante un metodo a passi frazionati nel quale alternativamente si risolve il problema puramente convettivo

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0 \quad (2.62)$$

e il problema puramente diffusivo

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{Re} \quad (2.63)$$

La soluzione del problema (2.62) può essere ottenuta con un metodo a vortici non viscoso, mentre il problema (2.63) può essere interpretato come un moto browniano del sistema di vortici nello spazio (*Random Walk*).

D'altra parte, anche per il sistema stocastico (2.55), si può pensare di dare una soluzione mediante una tecnica a passi frazionati. Ad esempio, nel caso bidimensionale, la soluzione può essere ottenuta risolvendo alternativamente le equazioni differenziali alle derivate ordinarie

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{u}_i \quad (2.64)$$

e le semplici equazioni differenziali stocastiche

$$d\mathbf{x}_i = \sqrt{2/Re} d\mathbf{w} \quad (2.65)$$

la cui soluzione è

$$\mathbf{x}(t + \delta t) = \mathbf{x}(t) + \frac{\mathbf{w}}{\sqrt{2/Re}} \quad (2.66)$$

dove $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ è una variabile aleatoria gaussiana le due componenti W_1, W_2 hanno media nulla e varianza $\sigma^2 = \delta t/2$. Ricordiamo ancora che \mathbf{w} è un processo stocastico con incrementi gaussiani indipendenti.

Risulta dunque che i due metodi a passi frazionati descritti, l'uno per le equazioni differenziali, l'altro per il set di equazioni stocastiche, si approssimano a vicenda, almeno formalmente.

Nel caso in cui siano presenti contorni, un meccanismo di produzione di vorticità deve essere preso in considerazione, rendendo l'analisi più difficoltosa [51] [129] e per molti versi ancora non risolta.

2.5.2 Diffusione e Random Walk

Vediamo ora come sia possibile simulare un problema di diffusione mediante un processo stocastico, studiando l'evoluzione di un vortice, inizialmente puntiforme, in un fluido viscoso.

Il moto di un vortice inizialmente puntiforme, soggetto solo a fenomeni diffusivi, è descritto dal seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \Delta \omega \\ \omega(\mathbf{x}, 0) = \Gamma \delta(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.67)$$

che in coordinate polari diviene

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] \\ \omega(r, \theta, 0) = \Gamma \delta(r) \end{cases} \quad (2.68)$$

La soluzione di (2.68) si dimostra facilmente essere (cfr. Batchelor[17])

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp(-r^2/4\nu t) \quad (2.69)$$

Formalmente la (2.69) è interpretabile come una distribuzione gaussiana di vorticità nello spazio, avente valor medio nullo e varianza $\sigma = 2\sqrt{\nu t}$.

Su tale osservazione Chorin[39] fornisce un'interpretazione stocastica del problema (2.67) basata su di un'approssimazione numerica del processo di diffusione di vorticità mediante un equivalente riposizionamento dei vortici con la quale la distribuzione iniziale era stata discretizzata. Il vortice iniziale, di intensità Γ , è pensato come formato da N vortici di circolazione Γ/n , al tempo $t_0 = 0$ tutti posizionati nell'origine, *ognuno libero di muoversi indipendentemente dall'altro*. In tempi successivi tali vortici dovranno essere mossi nello spazio in modo da rappresentare correttamente l'evoluzione temporale del campo di vorticità, come descritto dalla (2.69). Si dimostra che attribuendo ad ogni elemento vorticoso spostamenti del tutto casuali, ma dalle proprietà statistiche consistenti con la (2.69), si ottiene una distribuzione spaziale di vorticità che tende alla soluzione esatta per $N \rightarrow \infty$. Le traiettorie che si ottengono per il singolo elemento vorticoso hanno forti similarità con il moto browniano.

Assumiamo che n siano gli elementi che, assoggettati al random walk, vengano a trovarsi, in un tempo t successivo, a occupare una piccola porzione di area $\delta A = r\delta\theta\delta r$. La quota parte della vorticità complessiva del campo, trasferitasi in δA sarà

$$\chi = \frac{n}{N} = \frac{1}{4\pi\nu t} \exp(-r^2/4\nu t) r\delta\theta\delta r \quad (2.70)$$

da un punto di vista statistico potremo dire che χ rappresenta la probabilità che uno degli elementi vorticosi ha di cadere nell'area elementare δA . La consistenza del metodo numerico è perseguita assoggettando, nell'intervallo di tempo δt , l'elemento i -esimo a spostamenti r_i e θ_i nella direzione radiale e tangenziale rispettivamente, tali da soddisfare la (2.70) per ogni generica area elementare δA su cui la vorticità è diffusa con valori significativi.

Allo scopo osserviamo che per motivi di simmetria ogni direzione θ è ugualmente probabile. Possiamo definire lo spostamento angolare θ_i , indipendentemente dallo spostamento radiale r_i , mediante la seguente relazione

$$\theta_i = 2\pi h_\theta \quad (2.71)$$

dove h_θ è un numero casuale nell'intervallo $0 < h_\theta < 1$.
Integrando ora la (2.70) tra $\theta = 0$ e 2π si ottiene

$$\chi_r' = \frac{1}{2\pi\nu t} \exp(-r^2/4\nu t) r \delta r \quad (2.72)$$

probabilità che un generico elemento vorticoso venga a cadere tra r ed $r + \delta r$.
Integrando ancora tra $r = 0$ ed r otteniamo

$$\chi_r = 1 - \exp(-r^2/4\nu t) \quad (2.73)$$

dove la costante di integrazione è stata posta pari ad 1 in quanto la probabilità deve essere nulla per $r = 0$.

La (2.73) è di fatto una distribuzione normale. I valori possibili per χ_r sono tutti compresi tra 0 e 1 e possono essere riprodotti attraverso un numero casuale $0 < h_r < 1$.

Per il generico elemento vorticoso i -esimo, la (2.73) diviene

$$h_r = 1 - \exp(-r_i^2/4\nu t) \quad (2.74)$$

dalla quale si ricava lo spostamento radiale

$$r_i = \sqrt{4\nu t \log(1/h_r)} \quad (2.75)$$

Il risultato di una simulazione relativa al problema trattato viene mostrato in figura???. In figura 2.2 viene simulato uno strato limite su lamina piana (soluzione di Blasius) secondo le indicazioni fornite da Chorin [39]. Alla fine del passo convettivo viene messa in atto la tecnica del random walk per simulare i fenomeni diffusivi. Successivamente viene imposta una condizione di non slittamento a parete e da questa determinate le intensità dei blob da introdurre nel campo, assoggettando anche questi ad un random walk.

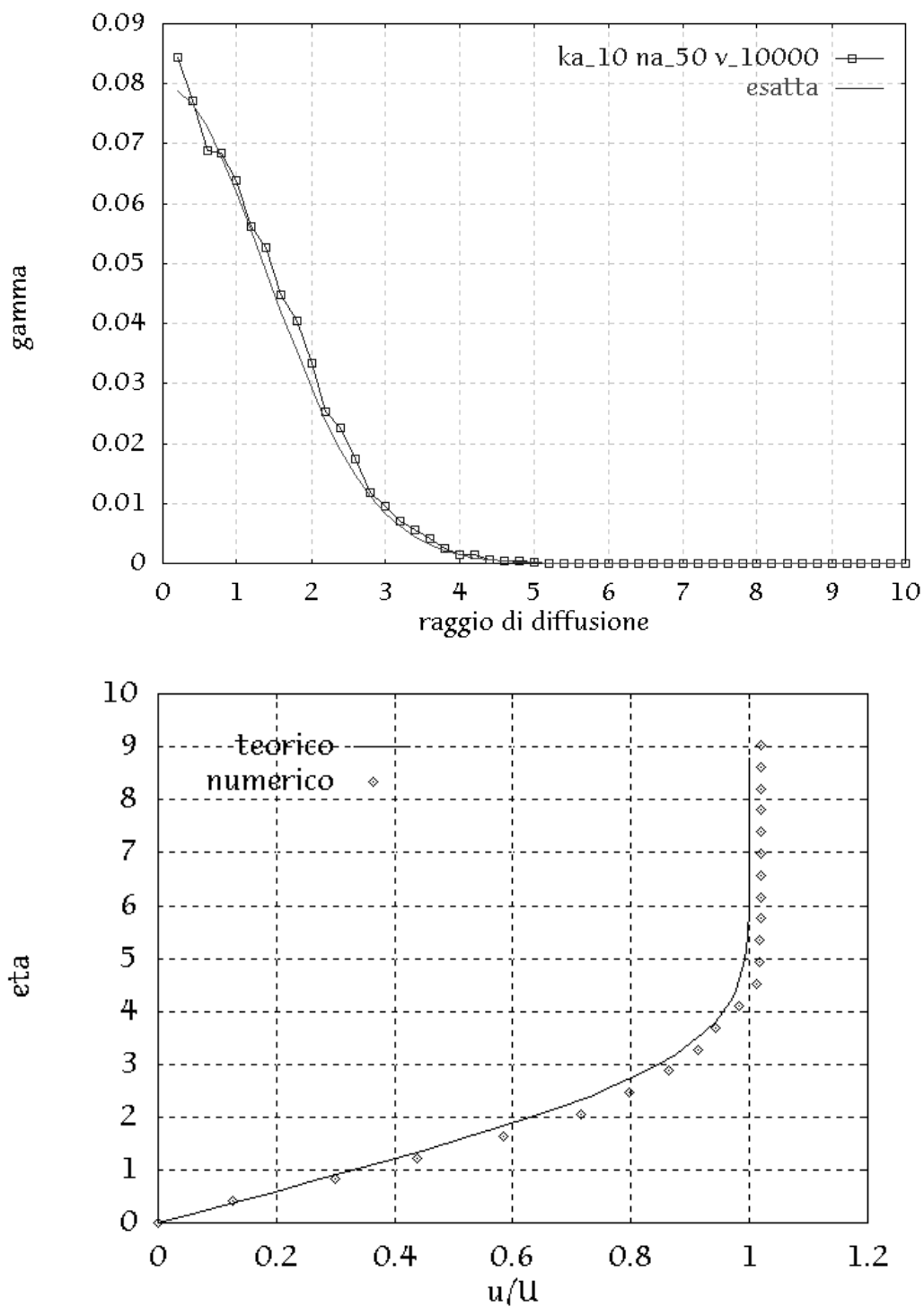


Figura 2.2. Profilo di Blasius ($x/l = 0.5$) mediante un Random Vortex Method.

Capitolo 3

Flussi Non Viscosi

La simulazione numerica diretta di flussi ad elevati numeri di Reynolds rimane a tutt'oggi estremamente onerosa. Per questo motivo rimangono sempre attuali i modelli approssimati, presenti e passati, utilizzati per studiare le principali caratteristiche di questi flussi.

I modelli di tipo potenziale furono tra i primi ad essere introdotti nello studio di campi di moto attorno a corpi dalla forma affusolata e mostrarono di essere in buon accordo con l'osservazione sperimentale, almeno laddove non vi fossero forti gradienti di velocità che rendessero non trascurabili i fenomeni di natura viscosa, in particolare in vicinanza di parete.

Una metodologia che in tal caso ha mostrato di essere efficace consiste nell'affiancare alla soluzione esterna, potenziale, il calcolo iterativo dello strato limite sul corpo.

Questo approccio, di tipo interattivo, flusso potenziale-strato limite, presuppone che il flusso rimanga sempre attaccato al corpo si traduce in algoritmi molto complicati, con i quali si cerca di supplire alla mancanza di generalità del metodo.

Una metodologia di carattere più generale, nata per lo studio di flussi bidimensionali separati, ricorre direttamente alla modellizzazione del meccanismo di generazione di vorticità a parete. La vorticità viene discretizzata e immessa direttamente all'interno del campo non viscoso sottoforma di vortici (*Metodi a Vortici*). Le semplificazioni che, in questo modo, si effettuano possono essere più o meno drastiche a seconda della maggiore o minore aderenza del modello alla fenomenologia del flusso che si considera.

In questo capitolo ripercorriamo i principali aspetti matematici connessi con l'ipotesi di flusso non viscoso e di interesse nello sviluppo del metodo a vortici. Vengono introdotti inoltre il formalismo di variabile complessa e la tecnica delle trasformazioni conformi. Di seguito si discutono alcuni semplici modelli 'non viscosi' di generazione di vorticità.

3.1 Il potenziale complesso

La condizione di irrotazionalità

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \tag{3.1}$$

unitamente all'identità vettoriale

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0 \tag{3.2}$$

nella quale con Φ si intenda una funzione scalare, consente di esprimere il vettore velocità come

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \tag{3.3}$$

ovvero

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3.4)$$

Lo scalare ϕ è denominato *potenziale della velocità*.

Dalla condizione di incomprimibilità per il caso piano otteniamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.5)$$

se ne deduce che $-vdx + udy$ è un differenziale esatto ed è quindi possibile introdurre uno scalare ψ tale che

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.6)$$

Lo scalare ψ è definito *funzione di corrente*.

Le relazioni trovate per u e v

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.7)$$

coincidono con le *condizioni di monogeneità*, anche dette *condizioni di Cauchy-Riemann*, per la funzione di variabile complessa

$$W(z) = \phi + i\psi \quad (3.8)$$

denominata *potenziale complesso* del flusso. $W(z)$ è una funzione analitica in quanto ϕ e ψ sono funzioni armoniche, poiché è nullo il loro laplaciano, e soddisfano alle condizioni di Cauchy-Riemann.

Osserviamo ancora che in base alle condizioni di monogeneità risulta

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3.9)$$

ovvero

$$\frac{dW}{dz} = u - iv \quad (3.10)$$

La derivata del potenziale complesso rispetto a z rappresenta dunque il complesso coniugato della velocità: dW/dz è definita *velocità complessa*.

Risulta perciò assai conveniente descrivere l'intero campo fluidodinamico in termini di potenziale complesso, evitando di ricorrere in questo modo alla esplicita integrazione delle equazioni del moto.

Data la linearità delle equazioni del moto è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Per quanto detto potremo esprimere il potenziale complesso globale del campo di moto come somma di più campi elementari

$$W(z) = W_\infty(z) + \sum_{i=1}^N W_i(z) \quad (3.11)$$

dove W_i rappresenta il potenziale complesso della i -esima singolarità eventualmente presente e W_∞ è il termine del potenziale privo di singolarità e contenente informazioni relative alle condizioni al contorno.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno certamente deve essere

$$\Im(W) = \psi = \text{costante} \quad (3.12)$$

a parete, mentre all'infinito potremmo avremo ad esempio

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dW}{dz} = q_{\infty}^* \quad (3.13)$$

dove sia q_{∞}^* un'assegnata velocità asintotica all'infinito sul piano del moto $z = x + iy$.

3.2 Le trasformazioni conformi

La soluzione di problemi relativi a geometrie complesse può essere ottenuta mediante la tecnica delle trasformazioni conformi.

Essa consente di attribuire una soluzione, ottenuta per un corpo dalla forma più semplice, a un corpo dalla geometria più complicata, una volta individuata la trasformazione che consente di passare dal corpo semplice al corpo complicato.

Ricordiamo che, in base a un teorema sulle trasformazioni dovuto a Riemann, esiste sempre una trasformazione conforme in grado di ricondurre a un cerchio una qualsiasi regione semplicemente connessa.

Sia allora W' il potenziale complesso del campo sul piano ζ ; poichè $\zeta = \zeta(z)$, il potenziale complesso sul piano z sarà

$$W(z) = W[\zeta(z)] \quad (3.14)$$

$W(z)$ è una funzione analitica perchè funzione composta di funzioni analitiche per cui la sua parte reale ϕ e la sua parte immaginaria ψ sono funzioni armoniche e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann.

È da notare che la (3.14) attribuisce ai punti del piano z il potenziale complesso dei punti corrispondenti sul piano ζ . In particolare i punti del contorno su z posseggono lo stesso potenziale complesso dei punti del contorno sul piano ζ , e dunque anche la funzione di corrente ψ , costante sulle pareti del corpo in ζ , risulterà costante sulle pareti del corpo in z . Rimane in tal modo automaticamente soddisfatta la condizione di impermeabilità delle pareti solide. In generale linee di corrente ($\psi = \text{costante}$) su z rimangono linee di corrente su ζ . Per quanto riguarda le condizioni al contorno all'infinito sui due piani avremo che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dW}{dz} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left(\frac{dW'}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \right) \quad (3.15)$$

che comporterà la seguente espressione per le rispettive velocità asintotiche

$$q_{\infty}^* = Q_{\infty}^* \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)_{\zeta \rightarrow \infty} \quad (3.16)$$

sempre ammesso che per $z \rightarrow \infty$ si abbia $\zeta \rightarrow \infty$.

È ancora utile ricordare che se un vortice e/o una doppietta esiste in un campo di moto, allora esisterà un vortice e/o una sorgente di uguale intensità nel punto corrispondente dell'altro campo [159].

3.3 Il teorema di Routh

Dalla materialità delle linee vorticose nel caso incompressibile, un vortice viene trasportato come un punto materiale con la velocità assunta in corrispondenza del suo centro, peraltro non influenzata dal vortice stesso (in problemi su domini bidimensionali).

Essa è pari alla somma della velocità indotta dal flusso irrotazionale e di quella indotta da tutti gli altri vortici.

Affrontiamo ora il caso in cui entri in gioco una corrispondenza fra due o più piani. Abbiamo visto nel precedente paragrafo che il potenziale complesso è invariante rispetto ad una trasformazione conforme e che il campo di moto dovuto ad un vortice si trasforma in quello dovuto ad un altro vortice avente uguale intensità e collocato nel punto trasformato corrispondente. Pertanto possiamo ricavare la velocità complessa in un generico punto del piano fisico valutando le posizioni occupate dai vortici nel piano trasformato, calcolando in esso la velocità complessa e riportandola sul piano fisico mediante la relazione

$$u - iv = \frac{dW}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \quad (3.17)$$

Se nel punto analizzato è collocato un vortice, il ritorno al piano fisico è complicato dal teorema di Routh.

Data l'invarianza del potenziale complesso rispetto ad una generica trasformazione possiamo scrivere

$$W_{z_1}(z) - i\gamma \log(z - z_1) = W_{\zeta_1}(\zeta) - i\gamma \log(\zeta - \zeta_1) \quad (3.18)$$

dove $W_{z_1}(z)$ e $W_{\zeta_1}(\zeta)$ sono i potenziali in z_1 e ζ_1 dovuti a tutte le cause eccetto i vortici di intensità γ collocati in z_1 e ζ_1 rispettivamente. Si ricava

$$W_{z_1}(z) = W_{\zeta_1}(\zeta) - i\gamma \log\left(\frac{\zeta - \zeta_1}{z - z_1}\right) \quad (3.19)$$

Essendo $\zeta = \zeta(z)$, consideriamo l'espansione in serie di Taylor nell'intorno di z_1

$$\zeta - \zeta_1 = \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{\zeta_1} (z - z_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right)_{\zeta_1} (z - z_1)^2 + O(z^2) \quad (3.20)$$

da cui

$$W_{z_1}(z) = W_{\zeta_1}(\zeta) - i\gamma \log\left[\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{\zeta_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right)_{\zeta_1} (z - z_1) + O(z^2)\right] \quad (3.21)$$

Derivando

$$\frac{dW_{z_1}}{dz} = \frac{dW_{\zeta_1}}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} - i\gamma \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right)_{\zeta_1} + O(z)}{\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{\zeta_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right)_{\zeta_1} (z - z_1) + O(z^2)} \quad (3.22)$$

e considerando il limite per $z \rightarrow z_1$ e $\zeta \rightarrow \zeta_1$ ricaviamo

$$\dot{z}_1^* = \frac{\dot{\zeta}_1^*}{\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{\zeta_1}} - i\frac{\gamma}{2} \frac{\left(\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right)_{\zeta_1}}{\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{\zeta_1}} \quad (3.23)$$

Essendo ancora

$$\frac{\frac{d^2\zeta}{d\zeta^2}}{\frac{dz}{d\zeta}} = \frac{d}{dz} \left[\log \left(\frac{d\zeta}{dz} \right) \right] = \frac{d}{d\zeta} \left[-\log \left(\frac{dz}{d\zeta} \right) \right] \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{\frac{d^2z}{d\zeta^2}}{\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^2} \quad (3.24)$$

si ha che la velocità con cui si muove un vortice di intensità γ sul piano fisico è data da

$$\dot{z}_1^* = \frac{\dot{\zeta}_1^*}{\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta_1}} + i \frac{\gamma}{2} \frac{\left(\frac{d^2z}{d\zeta^2} \right)_{\zeta_1}}{\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta_1}^2} \quad (3.25)$$

Dalla (3.25) si deduce che le traiettorie dei vortici non si corrispondono per trasformazione conforme. In virtù della (3.25) la velocità fittizia \dot{z}_1^* con la quale si muove il vortice sul piano trasformato ζ , immagine del suo moto reale sul piano fisico z , differisce dalla velocità $\dot{\zeta}_1^*$ che lo stesso vortice libero avrebbe se immerso nel campo di moto sul piano ζ . Tale differenza è espressa dal termine di Routh.

Operativamente potremo condurre comunque tutta la simulazione sul piano trasformato. Infatti, potremo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta^*}{dt} &= \frac{dz^*}{dt} \left(\frac{dz^*}{d\zeta^*} \right)^{-1} \\ &= \left[\dot{\zeta}^* \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} + i \frac{\gamma}{2} \left(\frac{d^2z}{d\zeta^2} \right) \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-2} \right] \cdot \left(\frac{dz^*}{d\zeta^*} \right)^{-1} \\ &= \left[\dot{\zeta}^* + i \frac{\gamma}{2} \left(\frac{d^2z}{d\zeta^2} \right) \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} \right] \cdot \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^{-2} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Definendo ora le funzioni Jacobiano $J(\zeta)$ e termine di Routh $R(\zeta)$ come

$$J(\zeta) = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^{-2} \quad R(\zeta) = \frac{\left(\frac{d^2z}{d\zeta^2} \right)}{\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)} \quad (3.27)$$

potremo riscrivere l'espressione (3.26) come

$$\frac{d\zeta^*}{dt} = \left[\dot{\zeta}^* + i \frac{\gamma}{2} R(\zeta) \right] J(\zeta) \quad (3.28)$$

formulazione alla quale si farà riferimento nel seguito della trattazione.

3.4 Modelli di generazione di vorticità

In questa sezione vengono discussi alcuni modelli non viscosi per la generazione di vorticità (anche noti come '*Discrete Kutta Condition Models*'). L'intento di questi modelli è di descrivere

i principali effetti della viscosità in flussi a elevati numeri di Reynolds, simulando la generazione di vorticità a parete. A tal fine si operano drastiche semplificazioni. Innanzitutto si fissano i punti di separazione del flusso, deducendone la posizione o sulla base di prove sperimentali oppure in base a considerazioni sulla fenomenologia del flusso, tipicamente legate alla presenza di singolarità geometriche. La vorticità nascente viene rilasciata in termini discreti nello spazio e nel tempo, introducendo un sistema di vortici all'interno del campo di moto.

La posizione iniziale e la circolazione assegnate a ciascun vortice variano a seconda del modello di generazione di vorticità. Essi forniscono una stima, per la quantità globale di vorticità immessa nel campo nell'unità di tempo, che si basa solo sulla conoscenza del flusso esterno. Si possono individuare tre filoni principali in cui confluiscono gli sforzi degli autori, a seconda che si fissi a priori l'intensità del vortice nascente, la sua posizione o si ipotizzi la sua genesi a partire da una particella fluida prossima a parete. Sostanzialmente questi modelli riducono il fenomeno allo studio di un numero minimo di punti, solitamente uno o due, che si vuole siano rappresentativi del meccanismo di emissione di vorticità dal punto di separazione. Attraverso questi modelli non è in generale possibile valutare *il campo effettivo nell'intorno del punto di separazione*¹, ma piuttosto la quantità globale di vorticità immessa nell'unità di tempo. L'errore che si commette nella valutazione di una grandezza del campo dipende ovviamente da quanto essa nella realtà viene influenzata dai fenomeni (viscosi) trascurati. Facendo riferimento, ad esempio, al problema dell'avviamento impulsivo di un profilo alare e schematizzando la generazione di vorticità dal bordo di uscita mediante uno di questi modelli approssimati, la valutazione locale del campo di moto in prossimità del punto di separazione non è in generale corretta. Questo comporta, ad esempio, l'impossibilità di determinare buone stime per la resistenza del profilo. L'errore che, trascurando i fenomeni viscosi, complessivamente si introduce nella valutazione della portanza è invece di tutt'altra entità. In particolare esso sta nel rapporto C_D/C_L , rapporto tra forze viscosi e forze d'inerzia, dove in generale è $C_D \ll C_L$. Il modello di generazione risulta del tutto adeguato qualora l'intento è lo studio e la descrizione della dinamica, essenzialmente inerziale, delle strutture vorticosi che si generano dal punto di separazione.

3.4.1 Metodo della posizione variabile

Il *Metodo della Posizione Variabile (MVP)*, proposto da Sarpkaya[162], prevede l'utilizzo della condizione di Kutta per determinare la posizione del vortice emesso, dopo averne già calcolato l'intensità in altro modo.

La posizione in cui vengono introdotti i vortici nel campo viene valutata in modo da rendere finita all'istante di generazione la velocità nel punto di distacco. Lo stesso approccio è stato utilizzato da Katz[98] per lo studio del campo di moto su di un profilo alare oscillante. Sarpkaya e Katz partono dall'osservazione che il tasso di separazione di vorticità dal profilo è approssimativamente pari a

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) \approx \frac{1}{2}v_1^2 \quad (3.29)$$

essendo v_1 e v_2 le velocità sul bordo esterno ed interno dello strato vorticoso e Γ la vorticità che viene liberata nella scia.

¹Nell'intorno di tale punto il campo effettivo che localmente si genera dipende dalla quantità di vorticità immessa nella scia nell'unità di tempo. La vorticità emessa nell'unità di tempo è poi funzione delle velocità all'esterno degli strati limite dai due lati del punto di separazione. velocità non note a priori e dipendenti dalle caratteristiche degli strati limite stessi, dettagli questi che un modello non viscoso non può cogliere.

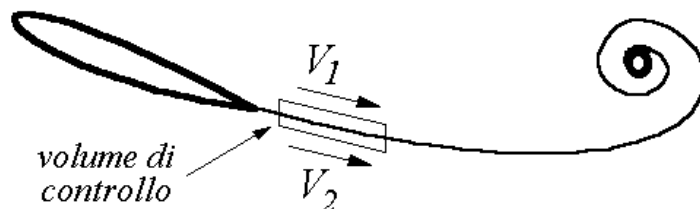


Figura 3.1. Metodo della Posizione variabile: valutazione della velocità della scia nell'intorno del punto di separazione

Considerando infatti due velocità medie v_1 e v_2 sulle due facce dello strato vorticoso con il quale idealizziamo la scia che si separa, ad esempio, dal bordo di fuga del profilo alare, potremo scrivere che la circolazione associata ad un tratto ds di shear layer vicino al B.d.F. vale

$$\Gamma = v_1 ds - v_2 ds \quad (3.30)$$

ritenendo costanti i valori delle velocità medie nell'intervallo di tempo, ricaviamo inoltre

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}(v_1 ds - v_2 ds) = \frac{d}{dt}((v_1 - v_2) ds). \quad (3.31)$$

Dovendo valutare $\frac{d}{dt}(ds)$ si sceglie una velocità media

$$\frac{d}{dt}(ds) = (v_1 + v_2)/2 \quad (3.32)$$

ottenendo in tal modo

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) \quad (3.33)$$

Il problema diviene ora la valutazione di v_1 .

Sono possibili diverse scelte:

- assumere per v_1 la velocità massima misurata nello strato limite vicino al punto di separazione;
- scegliere un punto rappresentativo del flusso vicino al punto di separazione ed usare la velocità ivi calcolata v_{sh} ;
- isolare una superficie di controllo a valle del punto di separazione e valutare il flusso di vorticità attraverso di esso;
- determinare una stima della velocità nello strato vorticoso.

Sarpkaya[162] segue l'ultima delle vie prospettate e stima v_{sh} come media delle velocità di trasporto condotta su un numero prefissato di vortici rilasciati.

$$v_{sh} = \sum_j^N |\mathbf{u}_j|/N \quad (3.34)$$

e quindi

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{2}v_{sh}^2. \quad (3.35)$$

Sarpkaya[162] sostiene inoltre che l'oscillazione del punto di nascita dei vortici sia di vitale importanza per l'oscillazione della resistenza e che il MVP simula bene la retroazione delle fluttuazioni in seno alla scia sulle fluttuazioni della $\partial\Gamma/\partial t$. A riguardo Kiya & Arie[102] osservano che quando, come avviene sulla lamina piana, la separazione è fissa, imposta da considerazioni di natura geometrica, non c'è ragione di pensare che una fluttuazione della scia debba necessariamente condurre anche ad una così accentuata fluttuazione delle posizioni dei punti di nascita.

In effetti i metodi a vortici furono usati all'inizio nella simulazione di transitori di avviamento di scie dietro un cilindro, caso in cui i punti di separazione degli strati vorticosi non sono noti a priori e oscillano in modo non ben definito, sicché vennero fatte ipotesi semplificative in tal senso.

3.4.2 Metodo della posizione fissa

Il *Metodo della Posizione Fissa (MFP)* è stato proposto da Kuwahara[116] e da Kiya & Arie[102] e consiste nel fissare la posizione iniziale dei vortici nascenti scegliendo un opportuno valore della loro intensità per rendere finita la velocità sul punto di distacco. Dunque mentre la condizione di Kutta viene usata nel MVP per determinare la posizione di rilascio dei vortici nascenti, nel MFP essa consente di valutarne la circolazione.

Laddove le separazioni della corrente siano fissate e dettate da considerazioni geometriche, il MFP consente un approccio certamente di maggior senso fisico perchè rispetto al MVP si avvale di informazioni aggiuntive, geometriche, sul problema.

Per la lamina piana, Kiya & Arie[102] fissano la posizione dei vortici nascenti sulla base del confronto con i dati sperimentali per alcune grandezze globali quali il numero di Strouhal e il coefficiente di resistenza medio. Essi osservarono che la vortex street conseguente all'avvio impulsivo della lamina si allontana dalla lente con direzione diversa da quella della corrente asintotica, comportamento questo non riprodotto da MVP di Sarpkaya[162].

Le sperimentazioni numeriche effettuate (cfr. figg. 5.10 e 6.14) hanno rilevato una sostanziale insensibilità del sistema alla variazione, entro limiti ragionevoli, della posizione del punto di emissione. In particolare la circolazione del vortice nascente, emesso nella direzione definita dalla bisettrice della cuspidè, varia in modo pressoché lineare con la distanza dalla cuspidè stessa.

Risultati analoghi sono reperibili ad esempio in Riccardi et al. [152].

Maggiore influenza [152] sembra avere invece l'utilizzo di algoritmi di fusione di più vortici in uno solo (*algoritmi di compattazione*). In Riccardi et al.[152] si riscontra inoltre che l'adozione di un passo Δt_{gen} di generazione della vorticità diverso dal passo Δt_{conv} di integrazione della dinamica dei vortici provoca, per la lamina piana, una variazione del numero di Strouhal e di conseguenza una considerevole variazione della frequenza di distacco. La pratica della 'compattazione', come pure l'uso di passi di generazione multipli di Δt_{conv} nascono dall'esigenza di limitare la crescita del numero di vortici, esigenza non più così stringente allorché si ricorra, come nel presente lavoro, ad un algoritmo di accelerazione [83].

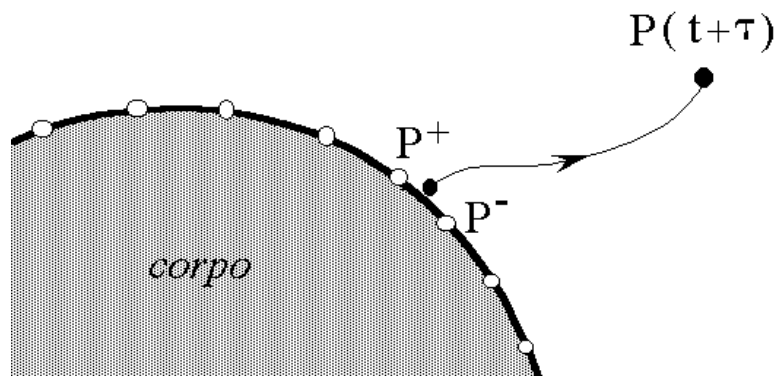


Figura 3.2. Metodo ad Accumulo di Vorticità.

3.4.3 Metodo ad accumulo di vorticità

Un terzo metodo sviluppato più di recente e denominato *Metodo ad Accumulo di Vorticità (MAV)* [152] si ispira alle discretizzazioni agli elementi di contorno [82].

Secondo questo modello una particella, inizialmente neutra e introdotta nel campo in corrispondenza del punto di distacco, viene idealmente seguita per un certo intervallo di tempo e ad essa viene alla fine assegnata la vorticità che nel contempo sarebbe fuoriuscita dal punto di separazione.

Assegnata alla particella la velocità iniziale

$$u_p(t_i) = \frac{u(P^+, t_i) + u(P^-, t_i)}{2} \quad (3.36)$$

dove P^+ e P^- rappresentano due opportuni punti prossimi al punto di separazione, di questa viene seguita l'evoluzione col flusso e al successivo istante di generazione t_{i+1} le si attribuisce una circolazione Γ pari alla densità di circolazione per unità di lunghezza della scia uscente dal punto di separazione nell'intervallo (t_i, t_{i+1}) stimata come

$$\gamma(t) = u(P^+, t) \cdot \tau(P^+) + u(P^-, t) \cdot \tau(P^-) \quad (3.37)$$

(τ è il versore tangente al corpo) distribuita sull'arco di scia che sarebbe stato prodotto nel contempo

$$\Gamma = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma(t) |u_p(t)| dt \quad (3.38)$$

essendo u_p la velocità della particella neutra sul piano fisico. In questo modello la produzione di vorticità non dipende esplicitamente da parametri, come accade nel MFP, tuttavia vengono fatte assunzioni molto forti sia sulla velocità iniziale della particella neutra sia sulla densità di circolazione rilasciata γ .

Capitolo 4

Metodo agli sviluppi multipolari

4.1 Introduzione

L'approssimazione di una regione estesa di vorticità mediante un numero N di vortici conduce, nella successiva fase di ricostruzione del campo di velocità, ad un problema analogo a quello gravitazionale di N -corpi, in quanto ogni vortice interagisce con i restanti $N-1$. La valutazione diretta di tutte le mutue interazioni ha un costo computazionale proporzionale a N^2 , onerosissimo già per valori di N dell'ordine di 10^4 .

Si sono ricercate allora metodologie ed algoritmi di accelerazione (*'Fast Summation Methods'*) in grado di ridurre il numero delle operazioni necessarie.

L'approccio iniziale è stato quello di riformulare il problema in termini di funzione di corrente Ψ e vorticità ω

$$\Delta\Psi = -\omega \quad (4.1)$$

e risolvere quest'ultimo mediante una discretizzazione alle differenze finite. Il campo di vorticità, noto in termini discreti, viene ridistribuito mediante interpolazioni sui nodi-griglia più vicini e il problema (4.1) viene risolto mediante un *fast Poisson solver*.

Determinato l'andamento della funzione Ψ , si procede, sempre in base ad una approssimazione alle differenze finite, alla valutazione delle seguenti

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (4.2)$$

con le quali si determina il campo di velocità nei nodi della griglia e, per successiva interpolazione, nelle varie posizioni dei vortici.

Questo metodo denominato *'Cloud-In-Cell'* (*CIC*) è stato proposto ed utilizzato nelle prime simulazioni numeriche da Christiansen [54], Christiansen & Zabusky[55]. Il costo computazionale è proporzionale a $O(N \log N)$.

Il metodo si ispira alle tecniche *'Particle-in-Cell'* impiegate per la soluzione di problemi analoghi (cfr. Eastwood & Hockney [69]). Il metodo può dar luogo a sensibili errori nel calcolo della mutua interazione tra vortici vicini. Infatti l'operazione intermedia di redistribuzione della vorticità sulla griglia di calcolo può introdurre una viscosità artificiale piuttosto elevata. Cercando di tenere in qualche modo sotto controllo questo inconveniente, si sono rese possibili applicazioni del metodo a vortici che coinvolgessero un ben più elevato numero di particelle (cfr. Leonard[119], Baker[15], Tryggvason[174]). Il rimedio consiste nella valutazione diretta delle interazioni tra vortici vicini, che in effetti è la maggiore responsabile della crescita dell'errore.

Sono così nati vari metodi denominati 'Particle-Particle-Particle-Mesh' (P^3M) (cfr. Hockney & Eastwood[92], Anderson[4], e ancora Appel[10], Barnes & Hut[16], Boris[27]).

Persiste comunque in questi algoritmi una dipendenza dell'accuratezza dall'infittimento della griglia, nonché l'esistenza di viscosità di natura numerica.

La vera svolta si è avuta con l'avvento dei *Metodi Accelerati agli Sviluppi Multipolari* ('*Fast Multipole Methods*') proposti da Greengard & Rokhlin[85] e Carrier, Greengard e Rokhlin [34]. Il metodo è basato su di uno sviluppo in serie di Laurent della legge di interazione vortice-vortice. L'idea è di sostituire alle singole interazioni la ridotta n -esima della serie in questione (rappresentante in uno il contributo di più vortici), laddove questa converga.

Vedremo in seguito nel dettaglio che tale metodologia è svincolata dalla dimensione di una eventuale griglia, introdotta per motivi di comodo, che non introduce viscosità numerica e che il costo computazionale dell'algoritmo completo è direttamente proporzionale al numero N di vortici.

Ricordiamo ancora il metodo proposto da Anderson[6], le cui prestazioni sono paragonabili al FMM[85]. Concettualmente esso non differisce dal FMM, si basa però uno sviluppo in serie di Fourier piuttosto che in serie di Laurent, e sull'utilizzo della formula di Poisson.

Allo stato attuale il metodo agli sviluppi multipolari pare essere il metodo solutivo più efficiente, grazie anche alla sua adattabilità su macchine di tipo parallelo [14][99].

In questo capitolo riassumiamo i principali risultati ottenuti da Greengard & Rokhlin[85], fornendo fondamenti matematici della metodologia, illustrando l'algoritmo nelle sue linee essenziali. Vengono infine analizzate le prestazioni del codice, sviluppato nel corso della nostra ricerca. Strutturalmente esso differisce dalla formulazione [34] per una tecnica di ricostruzione delle relazioni parentali tra gli insiemi di vortici più efficiente e dai minori requisiti di memoria.

4.2 La metodologia

Due sono le componenti principali del *metodo di accelerazione agli sviluppi multipolari (FMM)*[85]. La prima consiste nel combinare insieme l'effetto di più vortici in un singolo elemento computazionale. La seconda consiste in una costruzione gerarchica degli elementi computazionali, secondo una tecnica *multigrid*, che permette di minimizzare il numero di interazioni vortice-vortice da calcolare direttamente.

Nel *FMM* l'elemento computazionale è rappresentato da uno sviluppo in serie di multipoli (serie di Laurent) nell'intorno del punto z_0 , centro del cerchio contenente gli m vortici in considerazione. Matematicamente ciò corrisponde a sostituire ad una funzione, presentantem poli del primo ordine, un'altra avente una singolarità essenziale posta in z_0 , come risulta dai seguenti

Lemma 1 *Dato un vortice di intensità γ posto nel punto z_0 , per ogni z tale che $|z| > |z_0|$, il suo potenziale complesso $\Phi_{z_0}(z)$ ¹ può essere espresso come*

$$\Phi_{z_0}(z) = -i\gamma \log(z - z_0) = -i\gamma \left(\log(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z}\right)^k \right) \quad (4.3)$$

¹In questo capitolo, per mantenersi coerente con la simbologia adottata in [85], con Φ e Ψ viene designato un potenziale complesso. Non si confondano Φ e Ψ rispettivamente con il potenziale della velocità e con la funzione di corrente, entrambe funzioni reali.

Teorema 1 *Sviluppi Multipolari (SM).* Supponiamo che m vortici di intensità γ_i siano posti nei punti z_i , con $|z_i| < r$. In un generico punto $z \in C$, $|z| < r$, il potenziale complesso

$$\Phi(z) = -i \sum_{k=1}^m \gamma_k \log(z - z_k) \quad (4.4)$$

sarà riscrivibile come

$$\Phi(z) = a_0 \log(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \quad (4.5)$$

con

$$a_0 = -i \sum_{i=1}^m \gamma_i \quad a_k = - \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i z_i^k}{k} \quad (4.6)$$

inoltre, per ogni $p \geq 1$

$$\left| \Phi(z) - a_0 \log(z) - \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{z^k} \right| \leq \alpha \left| \frac{r}{z} \right|^{p+1} \leq \left(\frac{A}{c-1} \right) \left(\frac{1}{c} \right)^p \quad (4.7)$$

dove

$$c = \left| \frac{r}{z} \right| \quad A = \sum_{i=1}^m \gamma_i \quad e \quad \alpha = \frac{A}{1 - |r/z|} \quad (4.8)$$

In particolare ponendo $c \geq 2$ si ottiene

$$\varepsilon = \left| \Phi(z) - a_0 \log(z) - \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{z^k} \right| \leq A \left(\frac{1}{2} \right)^p \quad (4.9)$$

che mette in relazione la precisione ε voluta con p , numero di termini dello sviluppo multipolare necessari per ottenerla

$$p \approx -\log_2 \varepsilon \quad (4.10)$$

Supponiamo ora che n vortici $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ siano posti nei punti $x_1, x_2, \dots, x_n \in C$ (fig 4.1) e che $\{y_1, y_2, \dots, y_m\} \in C$ sia un altro insieme di punti. Diremo che i due insiemi $\{x_i\}$ e $\{y_j\}$ sono *completamente separati* se esistono punti x_0, y_0 ed un reale $R > 0$ tali che

$$\begin{cases} |x_i - x_0| < R & i = 1, \dots, n \\ |y_j - y_0| < R & j = 1, \dots, m \\ |x_0 - y_0| < 3R \end{cases} \quad (4.11)$$

Possiamo allora dare una prima stima di quanto l'utilizzo di uno *Sviluppo Multipolare (SM)* possa accelerare il calcolo. Soddisfatte le condizioni (4.11) di completa separazione di due insiemi di vortici nel piano, traduzione del vincolo $c \geq 2$, l'utilizzo di p termini dello SM comporta un errore dato dalla (4.10).

Il calcolo diretto del potenziale complessivo nei punti $y_j \in C$ richiederebbe nm operazioni (n contributi in m punti). Supponiamo ora di calcolare i coefficienti di p termini dello SM del potenziale dovuto agli n vortici γ_i nell'intorno di x_0 mediante la (4.6). Allo scopo sono

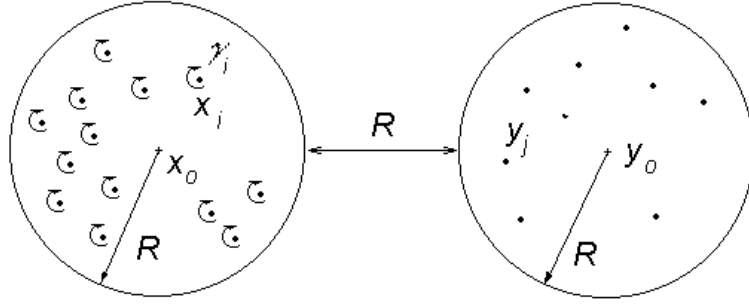


Figura 4.1. Nubi di vortici completamente separate nel piano.

necessarie np operazioni.

La valutazione mediante la (4.5) del potenziale richiede un onere computazionale proporzionale ad mp .

Globalmente dunque, fissato un livello di precisione ε , è richiesto un numero di operazioni proporzionale ad $(n + m)$, significativamente minore di mn all'aumentare di n e di m .

Enunciamo qui alcuni lemmi che ci saranno utili nel seguito della trattazione. Per ulteriori approfondimenti rimandiamo ai lavori [34][85].

Brevemente, dal lemma 2 si desume come sia possibile ricavare lo SM relativo ad un prefissato punto, noti che siano i coefficienti dello SM in un punto differente ma relativi sempre allo stesso insieme di vortici; il lemma 3 regola le modalità di conversione di uno SM in uno sviluppo in serie di Taylor all'interno di una regione circolare di analiticità della originaria funzione di interazione; il lemma 4, infine, fornisce i mezzi per operare lo *shift* del centro dello sviluppo di Taylor all'interno di una regione di analiticità.

Lemma 2 *Shift SM junior-senior. Supponiamo che*

$$W(z) = a_o \log(z - z_o) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(z - z_o)^k} \quad (4.12)$$

sia lo SM del potenziale dovuto ad un insieme di m vortici di intensità γ_i , tutti posizionati all'interno del cerchio D di raggio R e centro z_o . In un generico punto z all'esterno del cerchio D_1 di raggio $(R + |z_o|)$ con centro nell'origine degli assi si avrà

$$W(z) = a_o \log(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j}{z^j} \quad (4.13)$$

con

$$b_j = \left(\sum_{k=1}^j a_k z_o^{j-k} \binom{j-1}{k-1} \right) - \frac{a_o z_o^j}{j} \quad (4.14)$$

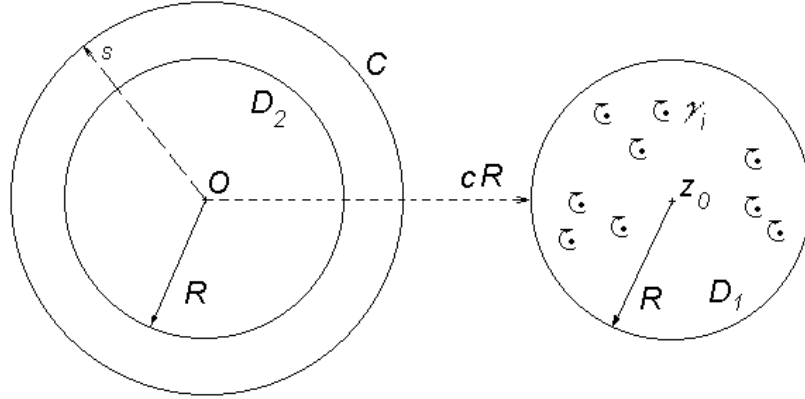


Figura 4.2. Shift degli sviluppi multipolari. I vortici sono tutti contenuti all'interno del cerchio D_1 .

Lemma 3 *Sviluppi multipolari Ψ . Supponiamo che m vortici di intensità γ_i siano tutti posti all'interno di un cerchio D_1 di raggio R e centro z_0 e che sia $|z_0| > (c + 1)R$, con $c > 1$. In tal caso il corrispondente sviluppo multipolare converge all'interno del cerchio D_2 di raggio R e centrato nell'origine. All'interno del cerchio D_2 il potenziale $W(z)$ è descritto dalla serie di potenze*

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{(z - z_0)^j} \quad (4.15)$$

con

$$B_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z_0^k} (-1)^k + a_0 \log(-z_0) \quad (4.16)$$

e

$$B_j = \left(\frac{1}{z_0^k} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z_0^k} \binom{j+k-1}{k-1} (-1)^k \right) - \frac{a_0}{j z_0^j} \quad \forall j \geq 1 \quad (4.17)$$

Lemma 4 *Shift senior junior SM Ψ . Per qualsiasi z_0, z , e $\{a_k\}$, $k=0,1,2,\dots,n$ rimane valida la seguente relazione*

$$\sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=j}^n a_k \binom{k}{j} (-z_0)^{k-j} \right) z^j \quad (4.18)$$

Questo lemma è una conseguenza del teorema di Maclaurin e descrive una operazione di esatta traslazione, con un numero finito di termini, della serie.

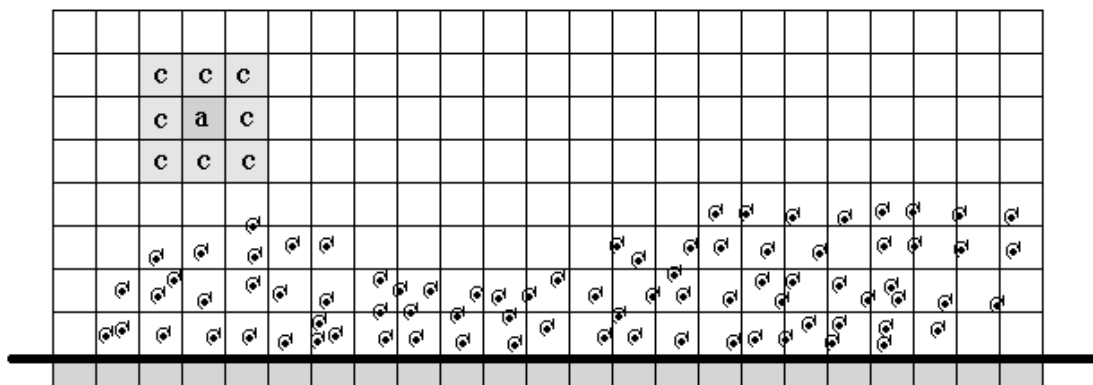


Figura 4.3. Griglia di catalogazione ad un solo livello di infittimento. Le celle **c** sono dette *colleghe* di **a**.

4.3 L'algoritmo numerico

Per sommi capi la struttura del più semplice algoritmo agli SM è composta dai seguenti moduli

1. definizione degli insiemi di vortici e loro catalogazione
2. determinazioni dei coefficienti dei singoli SM tramite la (4.6)
3. calcolo del potenziale tramite gli SM per insiemi *completamente separati*
4. calcolo diretto delle rimanenti interazioni vortice-vortice per quegli insiemi che non soddisfano la condizione di completa separazione

Operativamente, al **punto 1**, viene introdotta una griglia di lavoro, a celle quadre e di infittimento opportuno (fig.4.3). Tutti i vortici che si trovano all'interno della medesima cella appartengono allo stesso insieme.

Di ogni cella si definiscono come *colleghe* le celle direttamente adiacenti. Solo gli insiemi non vuoti vengono presi in considerazione.

Per ogni insieme non vuoto vengono dunque calcolati, tramite la (4.6), i coefficienti dello SM nel centro della relativa cella (**punto 2**).

La valutazione del potenziale complessivo, **punti 3-4**, viene effettuata considerando che in base alla (4.11) lo SM è utilizzabile al di fuori dell'insieme costituito dalla cella in questione e dai suoi colleghe. Si vuol far notare che l'utilizzo di una o più griglie di lavoro non deteriora in nessun modo i risultati del calcolo, nè le caratteristiche geometriche della griglia possono dar luogo ad effetti di *viscosità numerica* poichè il metodo è 'grid-free'.

L'introduzione di griglie di lavoro è essenzialmente un puro espediente, un sistema rapido di catalogazione dei vortici e di determinazione delle relazioni parentali tra gli insiemi.

L'efficienza di un algoritmo di accelerazione basato sugli SM è legata all'utilizzo degli SM ogni qualvolta ciò sia possibile, limitando al minimo il calcolo diretto delle interazioni vortice-vortice.

La strategia proposta dagli autori[34] è di innestare una tecnica *multigrid* all'interno del metodo numerico, ricreando una gerarchia piramidale nella quale molte delle caratteristiche degli insiemi di vortici possano essere desunte le une dalle altre. In particolare dagli sviluppi SM dei vari sottoinsiemi si può risalire allo SM dell'insieme somma.

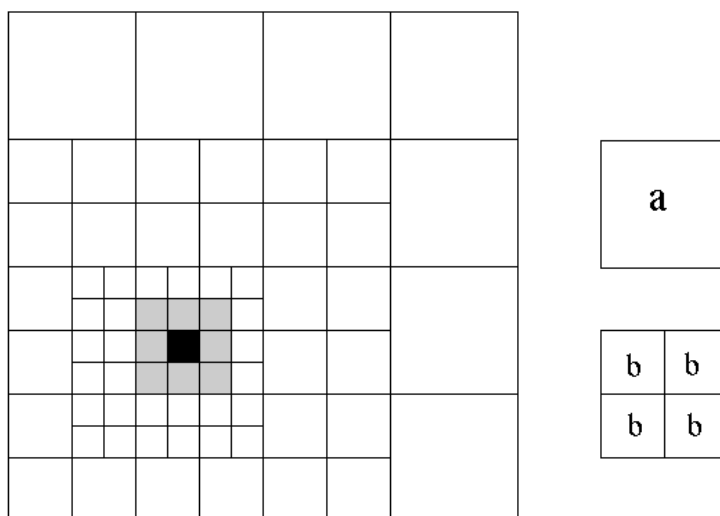


Figura 4.4. Griglia di catalogazione a più livelli di infittimento. **a** = cella *senior*, **b** = cella *junior*.

Le interazioni dirette vengono calcolate solo sulla griglia più fitta, coinvolgendo così il numero minore possibile di interazioni.

Introduciamo dunque una griglia ad $\ell = levmax$ livelli di infittimento.

Costruiamo tale griglia in modo ricorsivo mediante le seguenti operazioni

- si sovrappone inizialmente allo spazio occupato da tutti i vortici presenti nel campo una griglia, che chiameremo griglia di livello $\ell = 0$, composta da una sola maglia
- si suddivide questa in quattro parti uguali
- si determina quali e quanti vortici appartengano alle nuove celle
- si procede alla nuova suddivisione delle celle non vuote sino al raggiungimento del livello $\ell = levmax$ desiderato.

Dunque ad un valore di ℓ superiore corrisponde una griglia con infittimento maggiore, più precisamente il numero di celle al generico livello ℓ sarà pari a $nc = 4^\ell$.

Denominiamo (vedi fig 4.4) inoltre come cella *senior* la generica cella non vuota al livello ℓ e con cella *junior* ognuna delle quattro celle al livello $\ell + 1$ nelle quali la precedente verrà suddivisa. Le linee essenziali dell'algoritmo completo vengono di seguito riportate.

1. Inizializzazione.

Scelta del livello di infittimento $levmax$ e del livello di precisione ε . Si pone $p \approx \log_2 \varepsilon$.
Determinazione delle dimensioni lineari ottimali della griglia.

2. Catalogazione dei vortici al livello $levmax$.

determinazione delle celle non vuote al livello di infittimento massimo. Catalogazione dei vortici e costituzione degli insiemi. È necessario cioè archiviare il numero minimo

di informazioni necessarie ad una rapida ed univoca individuazione delle relazioni di appartenenza vortice-cella.

3. Ricostruzione della gerarchia piramidale

Utilizzando le informazioni ricavate al livello inferiore si continua l'opera di catalogazione di celle e vortici al livello superiore, determinando gli insiemi non vuoti e le loro relazioni parentali con il livello direttamente superiore ed inferiore.

4. Calcolo dei coefficienti degli SM al livello levmax

Per tutte le celle non vuote al livello *levmax* si calcolano direttamente mediante la (4.6) i coefficienti dello SM del potenziale dei vortici nell'intorno di z_0 centro della cella. Tale sviluppo $\Phi_i(z)$, dato dalla (4.6) va inteso come *il contributo che i vortici dell'insieme considerato apportano al potenziale totale*

5. Costituzione degli SM del potenziale Φ ai livelli inferiori.

Partendo dal livello *levmax*, dai coefficienti degli SM di Φ delle celle junior si ricavano, mediante il lemma 2, i coefficienti dello SM della cella senior.

6. Determinazione degli sviluppi in serie di Taylor $\Psi(z)$.

Al livello $l = 2$, dai coefficienti degli SM del potenziale $\Phi(z)$ si ricavano, mediante le (4.16)(4.17), i coefficienti dello sviluppo in serie di Taylor relativo ad ogni cella allo stesso livello.

Occorre a questo punto fare una precisazione. Il significato di siffatti sviluppi in serie di Taylor $\Psi(z)$ è il seguente: essi rappresentano *il contributo al potenziale complessivo nel centro della cella in esame dovuto a tutte le altre celle non colleghe*

Al livello $l = 2$ l'operazione viene eseguita solo avvalendosi degli SM di $\Phi(z)$, mentre ai livelli superiori si riutilizza, dal lemma 4, lo sviluppo di Taylor della cella senior per calcolare quello delle celle junior, aggiungendo poi tramite la (4.15) il contributo mancante, contributo che potremmo definire come *contributo dei juniores dei colleghi di senior non colleghi di junior*

7. Valutazione del potenziale di ogni vortice

Per ogni vortice si calcolano direttamente i termini di interazione relativi a tutti gli altri vortici presenti nella stessa cella e nelle colleghe. Ad esso di somma il contributo dovuto a tutti gli altri dato dalla (4.15).

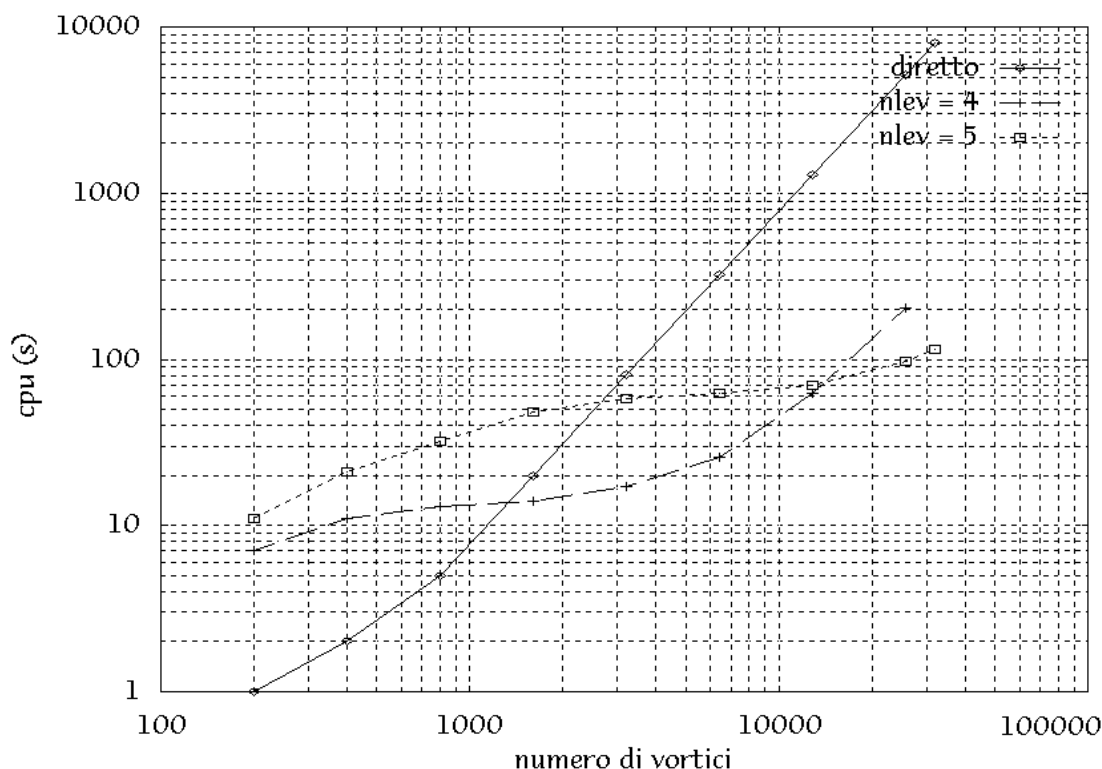


Figura 4.5. Tempi di elaborazione necessari per il calcolo del campo di velocità attorno ad un cerchio unitario partendo da N vortici più relative immagini. Si sono utilizzati SM con ventidue termini ed aritmetica in doppia precisione. L'errore relativo è $O(10^{-8})$.

4.4 Analisi delle prestazioni

Infine riportiamo i risultati di un test² implementato.

Sono stati rilevati i tempi di elaborazione necessari alla ricostruzione del campo di velocità prodotto da N vortici attorno ad un cilindro a sezione circolare e di raggio unitario. I vortici vengono posizionati in modo casuale attorno al corpo. Quest'ultimo viene ricreato mediante il metodo delle immagini. Il campo complessivo presenterà N vortici, più altrettanti vortici immagine, sicché il numero totale di interazioni da valutare ammonta a $2N^2$.

I risultati in figura 4.5 sono relativi a due prove condotte a numero di livelli di infittimento costante, più precisamente $nlev_1 = 4$ e $nlev_2 = 5$. Questi risultati sono del tutto indicativi ma mettono in luce alcuni dei fattori che influenzano l'efficienza del metodo.

Si nota, ad esempio, come ad un numero di livelli di infittimento maggiore non corrisponda sempre un aumento delle prestazioni. Queste infatti dipendono sia dal numero medio di vortici per cella, fattore di compromesso tra calcolo diretto e calcolo accelerato, sia dal tempo di CPU speso nella costruzione della griglia e nella valutazione dei coefficienti degli sviluppi in serie. La parte complessa dell'algorithm consiste proprio nell'ideazione di una metodologia di catalogazione dei vortici nella struttura multigrad e della ricostruzione delle relazioni parentali tra i vari gruppi e ai vari livelli di infittimento, in quanto si vuole che essa sia la più veloce possibile e

²I tempi macchina si riferiscono ad un test eseguito su di un PC con processore Pentium 133Mhz. È possibile un confronto immediato con i risultati riportati in [85] perchè, in tale configurazione si sono ottenuti, per il metodo diretto, tempi macchina del tutto simili a quelli riportati in [85], relativi ad un VAX8600.

mantenga contenuti requisiti di memoria, esigenze spesso antitetiche in quanto la necessità di costruire relazioni bidirezionali tra vortici e struttura costringe all'archiviazione di informazioni a volte ridondanti, eliminabili sì ma con un costo computazionale aggiuntivo. Per archiviare tutte le informazioni necessarie abbiamo utilizzato un sistema di catalogazione a mappe logiche, simile a quella proposta da Van Dommelen[175] ma che evita le operazioni di riordino.

La figura 4.5 mostra inoltre che l'efficienza del metodo è legata anche alle sue caratteristiche di adattatività. Infatti le migliori prestazioni si ottengono variando, quando necessario, il numero dei livelli di infittimento.

Osserviamo ancora che l'adozione del metodo delle immagini per ricreare il contorno del corpo, ben si adatta a questa tecnica di accelerazione. La catalogazione dei vortici immagine e la determinazione dei coefficienti infatti può essere desunta per riflessione. Qualora, come nel caso del cerchio, sia necessario catalogare direttamente anche le immagini, la loro forte concentrazione fa sì che, nella successiva fase di valutazione del campo di velocità, il contributo da esse apportato rimanga calcolabile mediante i termini relativi a poche celle.

Questa è una caratteristica favorevole per un metodo a vortici, soprattutto qualora si pensi ad una estensione al caso viscoso, in quanto il metodo delle immagini permette di ricreare esattamente i contorni del campo e permette di avvicinarsi indefinitamente ad essi, garantendo così la possibilità di rispettare le scale imposte vicino a parete dai fenomeni viscosi.

In presenza di una trasformazione conforme il quadro si complica e le condizioni di lavoro dell'algoritmo divengono meno ottimali. A piccole regioni del piano fisico l'applicazione di una trasformazione conforme spesso fa corrispondere una regione ben più estesa sul piano trasformato. Il problema nasce dal fatto che spesso questa 'dilatazione' del campo è fortemente anisotropa. Talora risulta conveniente l'utilizzo della tecnica di accelerazione solo in determinate regioni del piano trasformato. La precisione nella valutazione delle velocità dei vortici è poi un requisito essenziale in quelle regioni del piano trasformato in cui lo jacobiano della trasformazione assume valori tali da rendere significative tutte le cifre con le quali si è calcolata la velocità.

Capitolo 5

La Cornice

5.1 Introduzione

È noto che la presenza di singolarità geometriche, quali spigoli aguzzi, sulle pareti che confinano il campo di moto di un fluido, innesca separazioni e formazione di strutture vorticosi. Particolari geometrie della parete sono in grado tuttavia di favorire la formazione di zone di ricircolazione, a valle della discontinuità, in grado di regolarizzare il flusso. L'ispirazione alla ricerca in tale direzione viene dal un lavoro di Ringleb [154] nel quale si mostra come le cornici di neve sulle creste delle montagne assumano forme che, intrappolando un vortice, attuano un sistema naturale ed automatico di controllo e di stabilizzazione del flusso. Dal punto di vista pratico, si è pensato di sfruttare questa fenomenologia per ottenere campi di moto con desiderate proprietà. Ad esempio, si è pensato a profili alari che, grazie a opportune forme, fossero in grado di realizzare una forte portanza intrappolando un vortice [154], [158], [161], [95]. Ringleb stesso propose e curò, presso l'Università di Princeton, la realizzazione di un diffusore in grado di fornire alte prestazioni grazie proprio all'effetto regolarizzante esercitato dalla presenza di una cuspidi nella geometria della parete, prevenendo premature separazioni del flusso [153].

Ringleb [154] descrive il campo di moto attraverso un modello potenziale del flusso e facendo ricorso classicamente alla tecnica delle trasformazioni conformi. Il flusso viene considerato bidimensionale ed irrotazionale, il vortice viene considerato avente nucleo puntiforme. L'analisi di Ringleb giunge sino alla determinazione delle configurazioni di equilibrio e dell'intensità del vortice in funzione della forma della cornice che lo intrappola. In questo capitolo ripercorreremo le linee essenziali dell'analisi condotta in [154], nel quale si rileva una imprecisione [35], proseguendo con uno studio della stabilità delle configurazioni di equilibrio del vortice e con la simulazione numerica del transitorio di avviamento mediante il metodo a vortici.

5.2 Descrizione del problema fisico

In natura il formarsi della cornice di neve è dovuto all'azione combinata di vento e neve sulla cima della montagna. Il vento lambendo la punta crea a valle una zona di ricircolazione, mentre la neve trasportata dal fluido altera la geometria della cresta, ricreando una forma a cuspidi, come schematicamente mostrato nella figura 5.1.

Una linea di corrente lasciando la vetta A termina in un punto di stagnazione B delimitando la zona di ricircolazione. In B la neve viene depositata a causa della bassa velocità del flusso,

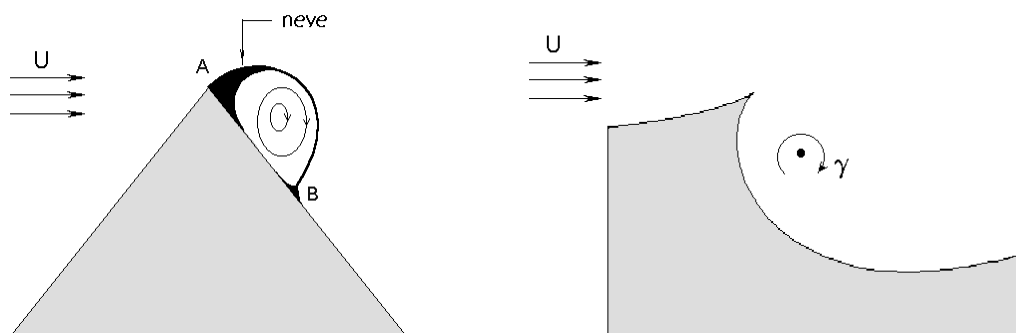


Figura 5.1. Schema della cornice di neve e modello di Ringleb.

rendendo visibile il punto di arresto, mentre oltre B essa è trasportata verso A dove si crea una cornice a forma di cuspid.

La cornice di neve rappresenta un sistema di controllo del flusso, poichè diversamente il flusso avrebbe una elevatissima velocità sulla punta, mentre, al cambio di pendenza della parete, la velocità diminuirebbe rapidamente provocando una inevitabile separazione in prossimità della punta. La formazione della cornice, con la caratteristica cuspid, costituisce un cambiamento del contorno del campo di moto che crea un vortice in equilibrio nel flusso e previene, o per lo meno controlla, la separazione della corrente. In luogo di un flusso altamente instazionario caratterizzato dalla continua emissione di vorticità dalla cima, si è realizzato un flusso stazionario in media. Alterazioni dunque, più o meno marcate, della geometria della parete, modificando fortemente le caratteristiche del flusso, possono svolgere un'azione preventiva nei confronti della separazione.

Allorché un vortice si trovi a stazionare in prossimità di parete, una linea di corrente

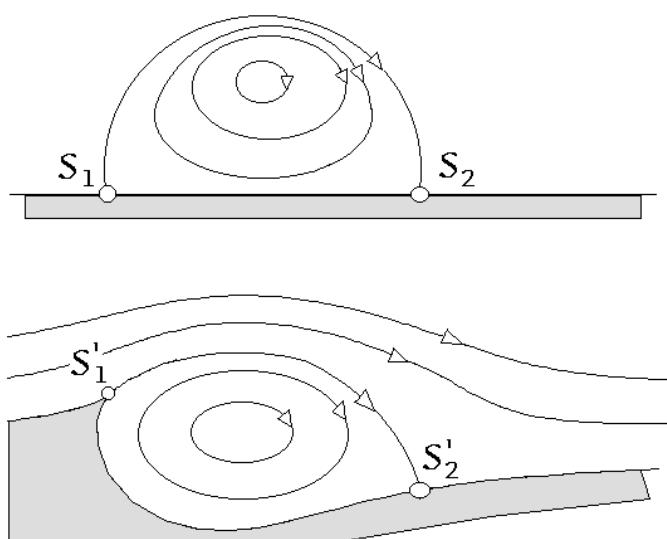


Figura 5.2. Interazione vortice-parete.

certamente separerà la zona di ricircolazione dal resto del campo di moto. Tale linea di corrente si dipartirà dal contorno e su di esso, in generale, tornerà a chiudersi, individuando due punti di arresto S_1, S_2 . Lungo la direzione di efflusso, la velocità diminuirà man mano che ci si avvicina al primo punto di stagnazione S_1 , mentre la pressione andrà seguentemente aumentando. In queste condizioni si osserva spesso che il flusso separa prima ancora di giungere sul punto di arresto.

La separazione può essere evitata cambiando la geometria della parete e ricreando una cuspidè laddove prima era situato il punto di arresto. In questo modo la linea di corrente lascerà tangenzialmente la cuspidè con un valore finito di velocità. Mediante un'appropriata forma della parete nella zona vicino alla cuspidè, si potrà inoltre fare in modo che ivi il gradiente di velocità risulti positivo evitando l'insorgere di gradienti avversi di pressione e scongiurando in tal modo la possibilità di ulteriori separazioni prima che il flusso giunga in prossimità di S_2 . D'altro canto anche la velocità del flusso sottostante, nella zona di ricircolazione, aumenterà, una volta lasciato il punto di cuspidè. Lungo la linea di flusso ($S'_1-S'_2$) che delimita le due regioni del campo di moto, la velocità andrà dunque diminuendo fino ad annullarsi sul secondo punto di arresto. Se l'equilibrio del vortice risultasse stabile si sarebbe raggiunto lo scopo di controllare il fenomeno della separazione del flusso per mezzo di un vortice intrappolato.

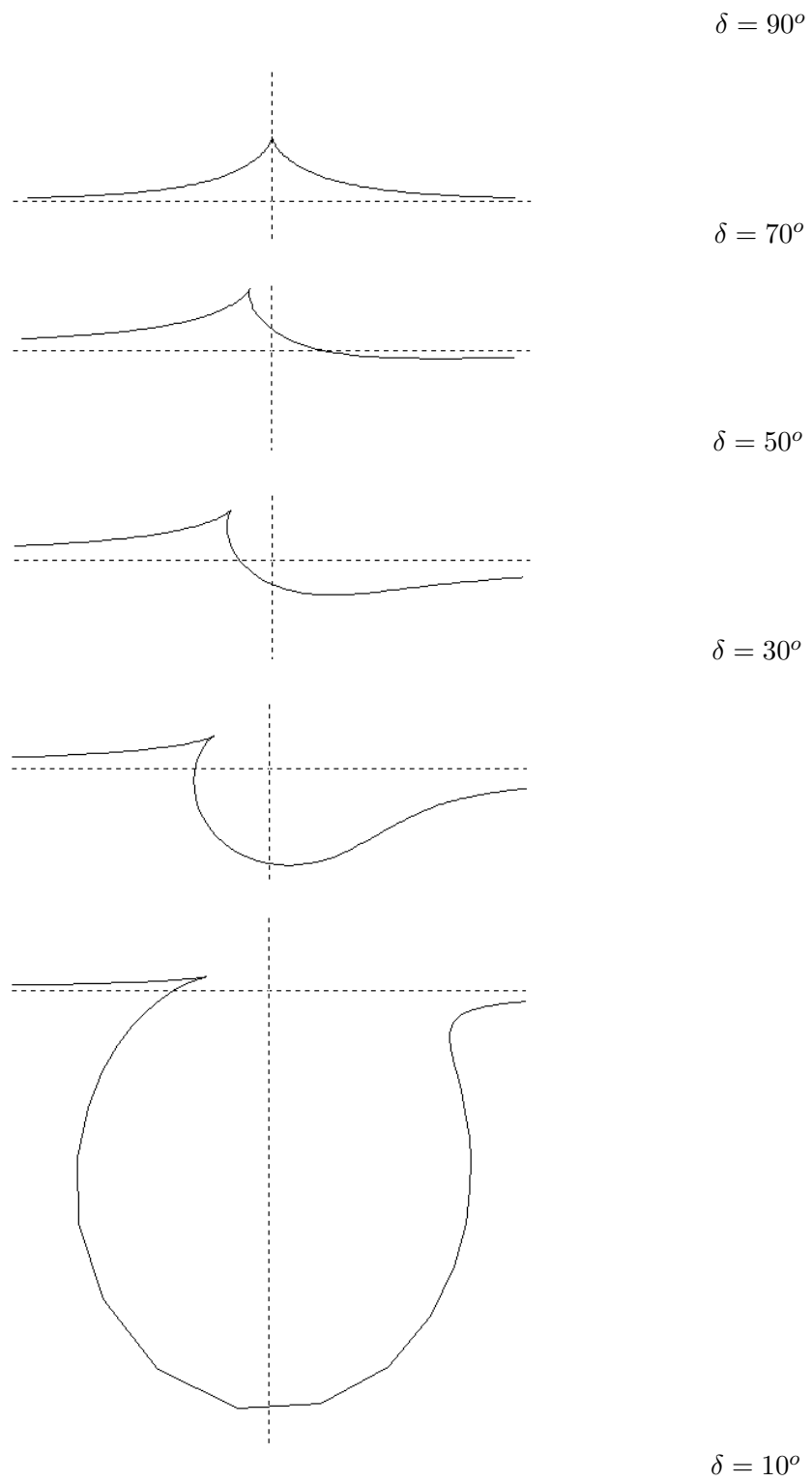


Figura 5.3. La trasformazione conforme. Contorni del campo di moto al variare del parametro δ della trasformazione.

5.3 La trasformazione conforme

Il campo di moto è, nel nostro modello bidimensionale, una regione semplicemente connessa Ω delimitata da una curva analitica \mathcal{C} che si estende in entrambe le direzioni all'infinito.

La regione Ω sia una porzione del piano fisico $z = x + iy$. Essa può essere ottenuta come immagine del semipiano positivo del piano trasformato $\zeta = \xi + i\eta$ attraverso una ancora non ben individuata trasformazione conforme $z = f(\zeta)$.

La funzione di trasformazione deve essere tale che $z = \infty$ e $\zeta = \infty$ siano punti corrispondenti e che la derivata prima calcolata all'infinito sia unitaria. In questo modo la corrente uniforme che caratterizza il campo sul piano fisico sarà la stessa che lambisce l'asse reale sul piano trasformato sia in modulo sia in direzione.

Una delle più semplici funzioni che soddisfa alle condizioni precedenti è

$$z(\zeta) = \zeta + \frac{A}{\zeta - \zeta_1} \quad (5.1)$$

dove ζ_1 è un arbitrario punto nel semipiano negativo del piano ζ ed A è una costante complessa da determinarsi in modo che $f'(0) = 0$ e $f''(0) \neq 0$, condizioni che garantiscono che nel punto corrispondente a $\zeta = 0$ esisterà una cuspid.

La condizione $f'(0) = 0$ è soddisfatta se

$$A = \zeta_1^2 \quad (5.2)$$

la funzione di trasformazione diviene dunque

$$z(\zeta) = \zeta + \frac{\zeta_1^2}{\zeta - \zeta_1} \quad (5.3)$$

Riportiamo di seguito per convenienza le derivate f' e f'' e l'espressione dello Jacobiano $J(\zeta)$ della trasformazione

$$f'(\zeta) = \frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{\zeta_1^2}{(\zeta - \zeta_1)^2} \quad (5.4)$$

$$f''(\zeta) = \frac{2\zeta_1^2}{(\zeta - \zeta_1)^3} \quad (5.5)$$

$$J(\zeta) = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^{-2} = \left| 1 - \frac{\zeta_1^2}{(\zeta - \zeta_1)^2} \right|^{-2} \quad (5.6)$$

nonchè l'espressione del termine metrico di Routh $R(\zeta)$ (3.27)

$$R(\zeta) = \frac{d^2z}{d\zeta^2} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} = \frac{2\zeta_1^2}{(\zeta - \zeta_1) [(\zeta - \zeta_1)^2 - \zeta_1^2]} \quad (5.7)$$

Al variare del modulo di ζ_1 , le curve \mathcal{C} che si ottengono per la forma della parete risultano *selfsimilari*; è possibile cioè, attraverso un opportuno fattore di scala, sovrapporre l'una sull'altra. Analiticamente questo si dimostra osservando che, scelto $\bar{\zeta} = a\zeta$, si ottiene

$$\bar{z} = \bar{\zeta} + \frac{\bar{\zeta}_1^2}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_1} = a\zeta + \frac{a^2\zeta_1^2}{a\zeta - a\zeta_1} = a \left(\zeta + \frac{\zeta_1^2}{\zeta - \zeta_1} \right) = az \quad (5.8)$$

Il modulo di ζ_1 costituisce dunque un semplice fattore di scala.

Diverso è invece l'effetto che sortisce una variazione dell'anomalia δ di ζ_1 sulla forma della curva \mathcal{C} . Come evidenziato nella figura 5.3 si passa dalla generazione di cavità (per bassi valori di δ) alla generazione di una cresta simmetrica ($\delta = 90^\circ$).

5.4 Studio del campo di moto

Analizziamo ora, mediante un modello potenziale molto semplice, le caratteristiche principali del campo di moto.

L'osservazione della realtà fisica ci suggerisce che nel caso della cornice di neve, la corrente è parallela al contorno del campo di moto all'infinito e possiede un vortice libero. Conseguentemente una prima schematizzazione del flusso sul piano fisico può essere definita come immagine di un flusso ottenuto sovrapponendo una corrente uniforme parallela all'asse ξ ed un vortice collocato nel punto ζ_v del semipiano positivo in ζ . Poichè l'asse ξ deve essere una linea di corrente, in base alla tecnica delle riflessioni un vortice di uguale intensità e verso opposto verrà collocato simmetricamente rispetto alla parete in ζ_v^* . Il potenziale complesso di una particella fluida sul piano ζ varrà

$$W(\zeta) = q_\infty \zeta - i\gamma \log \left(\frac{\zeta - \zeta_v}{\zeta - \zeta_v^*} \right) \quad (5.9)$$

essendo q_∞ la velocità della corrente all'infinito e γ l'intensità del vortice.

Il campo di moto sul piano ζ rimane univocamente determinato una volta definiti i valori di q_∞ , γ e ζ_v ; da qui è poi possibile ricavare il campo di moto sul piano z come immagine del precedente attraverso la funzione di trasformazione $z(\zeta)$.

La velocità complessa di una particella in ζ vale

$$\frac{dW}{d\zeta} = q_\infty - i\gamma \left[\frac{1}{\zeta - \zeta_v} - \frac{1}{\zeta - \zeta_v^*} \right] \quad (5.10)$$

mentre sul piano z

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{dW}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \frac{dW}{d\zeta} \frac{1}{f'(\zeta)} \\ &= \frac{1}{f'(\zeta)} \left[q_\infty - i\gamma \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_v} - \frac{1}{\zeta - \zeta_v^*} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Essendo $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} f'(\zeta) = 1$, il valore della corrente asintotica sul piano z è ancora q_∞ e l'angolo che la direzione del flusso forma con l'asse x all'infinito è zero.

Chiaramente un punto d'arresto sul piano ζ rimane tale nel suo corrispondente sul piano z se $f'(\zeta) \neq 0$, condizione ovunque verificata nel semipiano positivo di ζ tranne che per $\zeta = 0$.

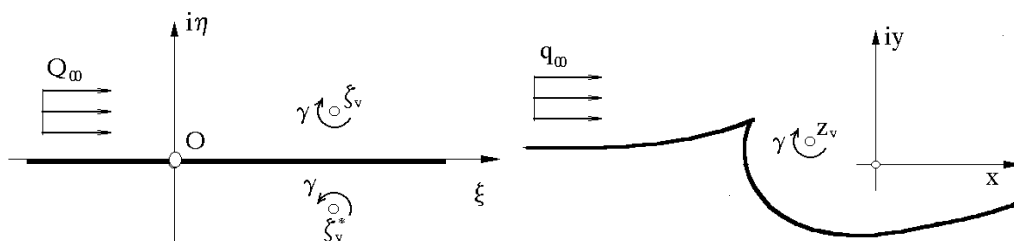


Figura 5.4. Schema del campo di moto sul piano fisico e sul piano trasformato

Tenendo presente che, valendo in tal caso $f'(0) = 0$, avremo $z^*(0) \rightarrow \infty$ qualora $\dot{\zeta}^*(0) \neq 0$, in modo analogo a quanto accade nel caso di un profilo alare, si impone che $dW/d\zeta$ si annulli in $\zeta = 0$, cosicchè nel punto corrispondente dW/dz assume la forma indeterminata $0/0$.

Il punto d'arresto all'interno del piano z scompare e la velocità del flusso assume un valore non nullo, ottenuto mediante un'operazione di limite per $\zeta \rightarrow 0$ della relazione (5.11).

La condizione per cui

$$\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)_{\zeta=0} = 0 \quad (5.12)$$

è anche nota come *condizione di Kutta*. Sostituendo la (5.12) in (5.11) otteniamo

$$q_\infty + i\gamma \left(\frac{1}{\zeta_v} - \frac{1}{\zeta_v^*}\right) = 0 \quad (5.13)$$

da cui

$$\frac{\gamma}{q_\infty} = -\frac{|\zeta_v|^2}{2\eta_v} \quad \text{con } \zeta_v = \xi_v + i\eta_v \quad (5.14)$$

che fornisce il valore dell'intensità del vortice tale per cui sulla cuspidè non si abbia una discontinuità nella velocità e la linea di corrente lasci la parete tangenzialmente.

È evidente che il valore di γ dipende dal punto in cui il vortice è inizialmente collocato nonché dalla velocità della corrente all'infinito a monte. È interessante osservare che la relazione precedente può essere scritta nella forma

$$\xi_v^2 + \eta_v^2 + \frac{2\gamma}{q_\infty}\eta_v = 0 \quad (5.15)$$

che rappresenta una circonferenza con centro sull'asse immaginario e passante per l'origine del piano ζ . Pertanto ragionando a ritroso si può dire che, prefissato il rapporto γ/q_∞ , esiste un luogo di punti nei quali il vortice può essere collocato in modo da rispettare la condizione di Kutta e tale luogo è, sul piano trasformato, una circonferenza.

5.4.1 Condizione di equilibrio del vortice

Data la materialità delle linee vorticose, un vortice viene trasportato come un punto materiale con la velocità assunta in corrispondenza del suo centro, peraltro non influenzata dal vortice stesso. Sul piano ζ il vortice di intensità γ è in equilibrio se $\gamma = -2q_\infty\eta_v$, in quanto esso interagisce con una parete rettilinea indefinita, lambita da una corrente asintotica uniforme. Introducendo la trasformazione (5.3) che consente di passare al piano fisico z entra in gioco il termine di Routh, il che a priori non consente la conservazione su z dei punti di equilibrio del vortice trovati sul piano ζ . Possiamo perciò affermare che non esisterà più una linea di stazionarietà per il vortice sul piano fisico, in accordo con il teorema di Poincaré-Birkhoff (cfr. Tabor [173]) in base al quale permarrà un numero finito, certamente pari, di punti di equilibrio, alternativamente ellittici ed iperbolici.

Ringleb in [154] commette una inesattezza in quanto deduce l'esistenza di una configurazione di equilibrio per il vortice basandosi solo su considerazioni inerenti le proprietà delle trasformazioni conformi, dimenticando in questo modo il ruolo ricoperto dal termine di Routh. Le traiettorie dei vortici, come visto nel capitolo 3, non sono infatti invarianti rispetto ad una trasformazione conforme.

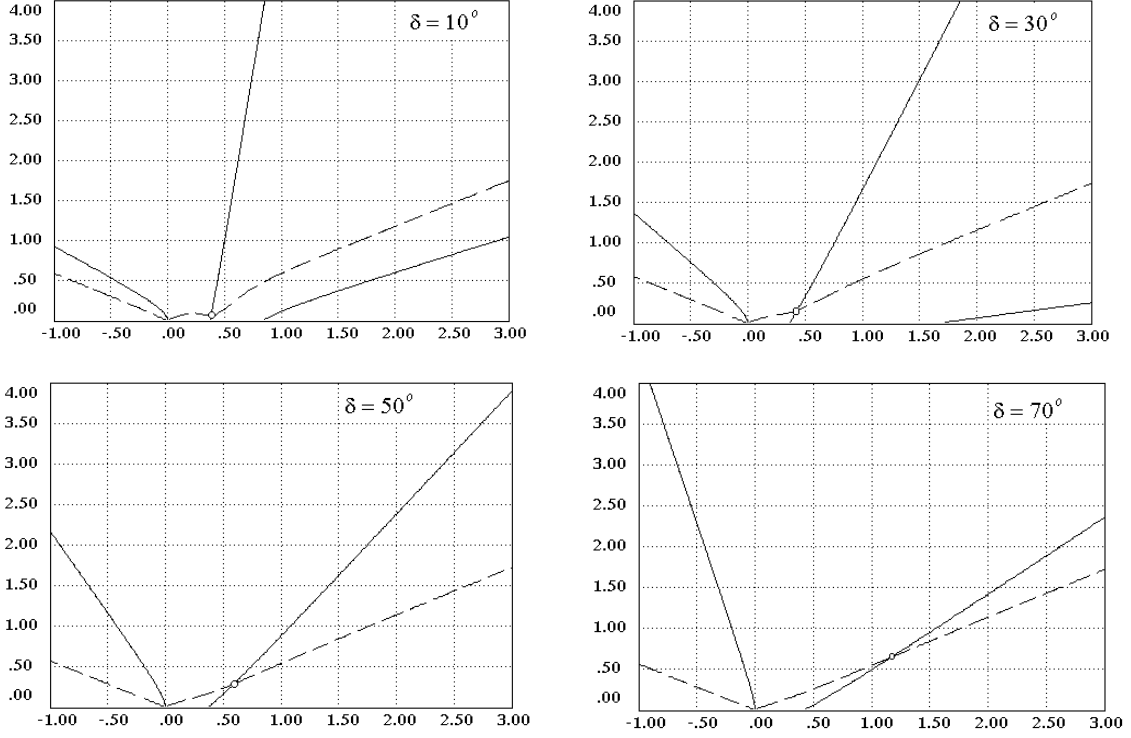


Figura 5.5. Posizioni di equilibrio per il vortice sul piano trasformato ζ . Linea continua: $\Re(\dot{z}_v) = 0$. Linea a tratti: $\Im(\dot{z}_v) = 0$.

Nella nostra analisi segue una via più immediata che ricorre alla determinazione per via numerica delle configurazioni di equilibrio.

La velocità del vortice libero nel piano trasformato ζ è

$$\dot{\zeta}_v^* = q_\infty + i\gamma \frac{1}{\zeta - \zeta_v^*} \quad (5.16)$$

Dalle espressioni (5.5) e (5.6) per le derivate della funzione di trasformazione, e sulla base del teorema di Routh, si perviene alla seguente relazione

$$\dot{z}_v^* = \left(q_\infty + i\gamma \frac{1}{\zeta_v - \zeta_v^*} \right) \frac{1}{1 - \frac{\zeta_1^2}{(\zeta_v - \zeta_1)^2}} + i\gamma \frac{2 \frac{\zeta_1^2}{(\zeta_v - \zeta_1)^3}}{\left[1 - \frac{\zeta_1^2}{(\zeta_v - \zeta_1)^2} \right]^2} \quad (5.17)$$

che fornisce la velocità complessa indotta sul vortice nel piano fisico z .

Nelle eventuali configurazioni di equilibrio la velocità del vortice dovrà risultare necessariamente nulla ($\dot{z}_v^* = 0$). Inoltre il vortice dovrà soddisfare ad una condizione di Kutta per il punto di cuspidè. Si ottiene così la seguente relazione

$$\zeta_v(\zeta_v - \zeta_1)(\zeta_v - 2\zeta_1) \left[\frac{1}{2\eta_v} + \frac{q_\infty}{\gamma} \right] + i\zeta_1^2 = 0 \quad (5.18)$$

che rappresenta una equazione nella variabile complessa ζ_v .

In base alla condizione di Kutta, γ è funzione di ξ_v e η_v . La ricerca della soluzione viene poi

effettuata per via numerica, ricordando che un ulteriore vincolo da imporre è che sia $\Im(\zeta_v) > 0$, poichè il flusso è tutto confinato nel semipiano delle η_v positive.

È comunque chiaro che quanto detto vale una volta stabilite la geometria della cornice (ξ_1 prefissato) e il valore q_∞ della corrente uniforme. Ricavata la posizione di equilibrio del vortice, dalla condizione di Kutta discende il valore γ della sua intensità.

5.4.2 Stabilità delle configurazioni di equilibrio

L'equazione (5.18), scissa nelle sue parti reale ed immaginaria, può essere sinteticamente riscritta come

$$\begin{cases} \dot{\xi}_v^* = r(\xi_v, \eta_v) \\ \dot{\eta}_v^* = s(\xi_v, \eta_v) \end{cases} \quad (5.19)$$

Nel punto di equilibrio $(\bar{\xi}_v, \bar{\eta}_v)$ le funzioni $r(\xi_v, \eta_v)$ ed $s(\xi_v, \eta_v)$ si annullano. La stabilità della configurazione di equilibrio può essere studiata esaminando l'evoluzione di uno spostamento infinitesimo $(\delta\xi_v, \delta\eta_v)$ da $(\bar{\xi}_v, \bar{\eta}_v)$.

Espandendo $r(\xi_v, \eta_v)$ ed $s(\xi_v, \eta_v)$ in serie di Taylor otteniamo

$$\begin{cases} \delta\dot{\xi}_v^* = r_{\xi_v}(\bar{\xi}_v, \bar{\eta}_v)\delta\xi_v + r_{\eta_v}(\bar{\xi}_v, \bar{\eta}_v)\delta\eta_v + r_{\xi_v\eta_v}(\bar{\xi}_v, \bar{\eta}_v)\delta\xi_v\delta\eta_v + \dots \\ \delta\dot{\eta}_v^* = s_{\xi_v}(\bar{\xi}_v, \bar{\eta}_v)\delta\xi_v + s_{\eta_v}(\bar{\xi}_v, \bar{\eta}_v)\delta\eta_v + s_{\xi_v\eta_v}(\bar{\xi}_v, \bar{\eta}_v)\delta\xi_v\delta\eta_v + \dots \end{cases} \quad (5.20)$$

da cui, arrestandoci ai termini del primo ordine, otteniamo un set di equazioni linearizzate che in forma matriciale scriviamo come

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta\xi_v \\ \delta\eta_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{\xi_v}(\bar{\xi}_v, \bar{\eta}_v) & r_{\eta_v}(\bar{\xi}_v, \bar{\eta}_v) \\ s_{\xi_v}(\bar{\xi}_v, \bar{\eta}_v) & s_{\eta_v}(\bar{\xi}_v, \bar{\eta}_v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\xi_v \\ \delta\eta_v \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

La matrice 2×2 , che chiameremo M , è la *matrice di stabilità*.

Il sistema (5.21) viene risolto valutando gli autovalori di M , i cui elementi sono valori noti perchè noti sono $\bar{\xi}_v$ e $\bar{\eta}_v$. Indicando dunque con λ_1 e λ_2 gli autovalori di M avremo

$$\delta\zeta_v = c_1 \mathbf{a}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{a}_2 e^{\lambda_2 t} \quad (5.22)$$

Tabella 5.1. Posizioni di equilibrio ed intensità del vortice.

δ	ξ_v	η_v	X_v	Y_v	γ_v	Γ_v
10	0.9952	0.1696	0.0822	-2.5954	-3.0041	-18.8755
20	1.0247	0.3072	0.2031	-0.9804	-1.8627	-11.7035
30	1.1090	0.4278	0.3675	-0.3052	-1.6512	-10.3746
40	1.2626	0.5641	0.6153	0.1539	-1.6951	-10.6504
50	1.5263	0.7517	0.9919	0.5551	-1.9253	-12.0973
60	2.0039	1.0573	1.5983	1.0001	-2.4277	-15.2534
70	3.0145	1.6695	2.7475	1.6896	-3.5563	-22.3449
80	6.1664	3.5209	6.0388	3.5598	-7.1602	-44.9892

essendo \mathbf{a}_1 ed \mathbf{a}_2 gli autovettori associati a λ_1, λ_2 rispettivamente, questi ultimi classicamente ricavabili imponendo la condizione

$$\det [M - \lambda I] = 0 \quad (5.23)$$

dove I è la matrice unitaria. Lo studio della stabilità del sistema proseguirebbe con la determinazione dei valori assunti da λ_1 e λ_2 . In particolare se per essi si ottengono valori puramente immaginari, gli spostamenti del sistema ruoteranno attorno al punto di equilibrio e le traiettorie del vortice saranno ellissi chiuse, chiara manifestazione di un equilibrio stabile. Se anche uno degli autovalori avesse invece parte reale positiva, il punto di equilibrio risulterebbe instabile.

Una seconda metodologia per l'analisi della stabilità del nostro sistema è applicabile ricordando che esso ammette una formulazione di tipo hamiltoniano. Esiste infatti una funzione $H(\xi, \eta)$, detta *hamiltoniana del sistema* [96] tale che

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial \eta} \\ \dot{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial \xi} \end{cases} \quad (5.24)$$

nelle variabili canoniche ξ, η , qui da intendersi come le componenti cartesiane del vettore posizione. Notiamo che in questo caso spazio delle fasi e spazio delle configurazioni vengono a coincidere. Qualora il sistema sia costituito da un solo vortice (o una sola particella fluida) H è esclusivamente funzione di una posizione. Una curva ad $H = \text{cost}$ è interpretabile direttamente come traiettoria del vortice. $H(\xi, \eta)$ rappresenta l'*energia cinetica totale* posseduta dal vortice (cfr. Batchelor [17]).

In tal senso la funzione hamiltoniana permette una analisi di stabilità alla Lyapunov. In particolare un punto di equilibrio stabile è caratterizzato da un minimo relativo di H . L'analisi della stabilità può essere quindi condotta tracciando le linee di livello dell'hamiltoniana del vortice e osservandone l'andamento.

La funzione hamiltoniana del vortice viene dedotta, nel caso generale, a partire dalla funzione di Green per l'operatore di Laplace per il dominio in esame. In questo caso è ottenibile dal sistema (5.24) per formale integrazione. Intendendo con $\dot{\zeta}^* = \dot{\xi} - i\dot{\eta}$, le componenti della velocità sono ricavabili dalla (5.17). Sul piano ζ è

$$H_{v\zeta} = \frac{\gamma}{2} \log \eta_v + q_\infty \eta_v \quad (5.25)$$

applicando la regola di Routh [159] deduciamo che

$$H_v = \frac{\gamma}{2} \log \left[\eta_v \exp \left(2 \frac{q_\infty}{\gamma} \eta_v \right) \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta_v} \right] \quad (5.26)$$

per cui le possibili traiettorie sono curve tali che

$$\eta_v \exp \left(2 \frac{q_\infty}{\gamma} \eta_v \right) \left| 1 - \frac{\zeta_1^2}{(\zeta_v - \zeta_1)^2} \right| = \text{costante} \quad (5.27)$$

Prefissate la geometria (ζ_1) e la corrente uniforme (q_∞) e avendo a disposizione gli andamenti delle linee di livello della velocità indotta sul vortice e delle linee ad $H_v = cost$, risulta agevole analizzare la stabilità di un punto di equilibrio.

Operativamente, individuato l'eventuale punto di stazionarietà si osserva se ad esso corrisponde un punto ellittico o un punto iperbolico nelle linee a $H_v = cost$: nel primo caso il punto di equilibrio è stabile, nel secondo instabile.

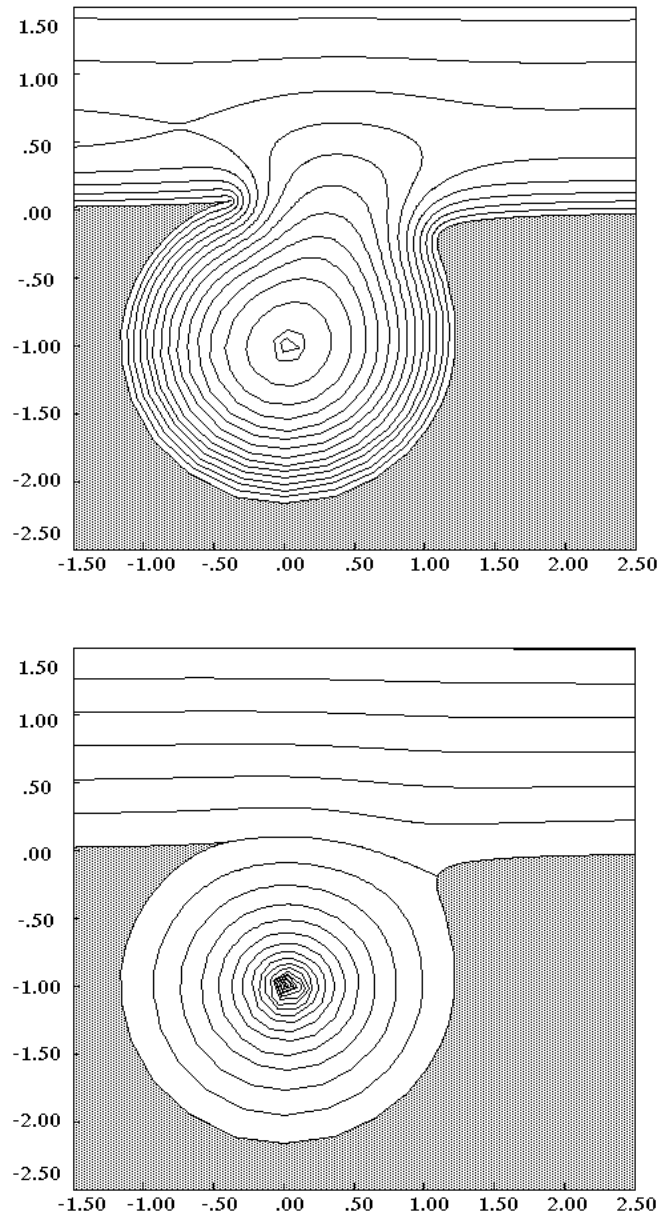


Figura 5.6. Linee di livello dell'hamiltoniana del vortice e linee di corrente nella configurazione di equilibrio ($\delta = 10^0$)

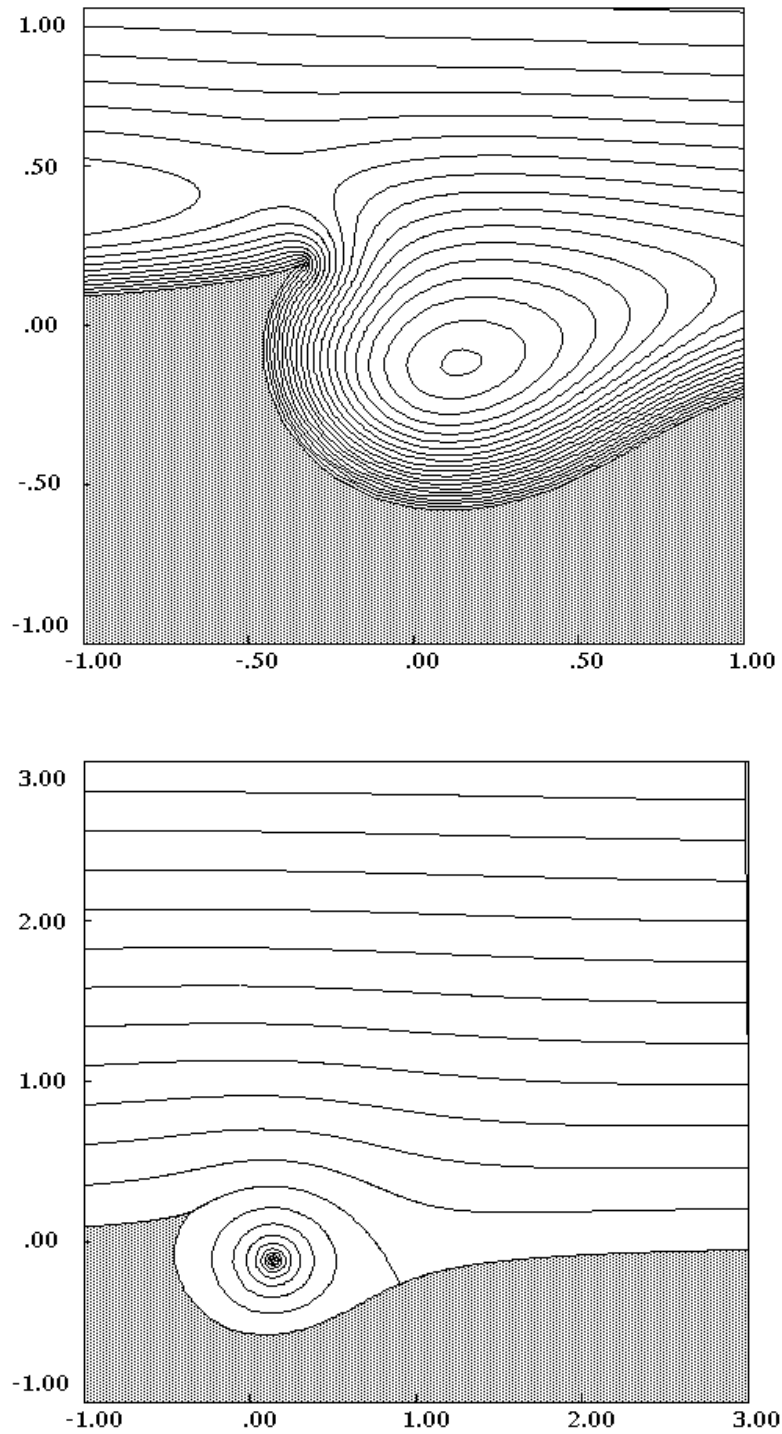


Figura 5.7. Linee di livello dell'hamiltoniana del vortice e linee di corrente nella configurazione di equilibrio ($\delta = 30^0$)

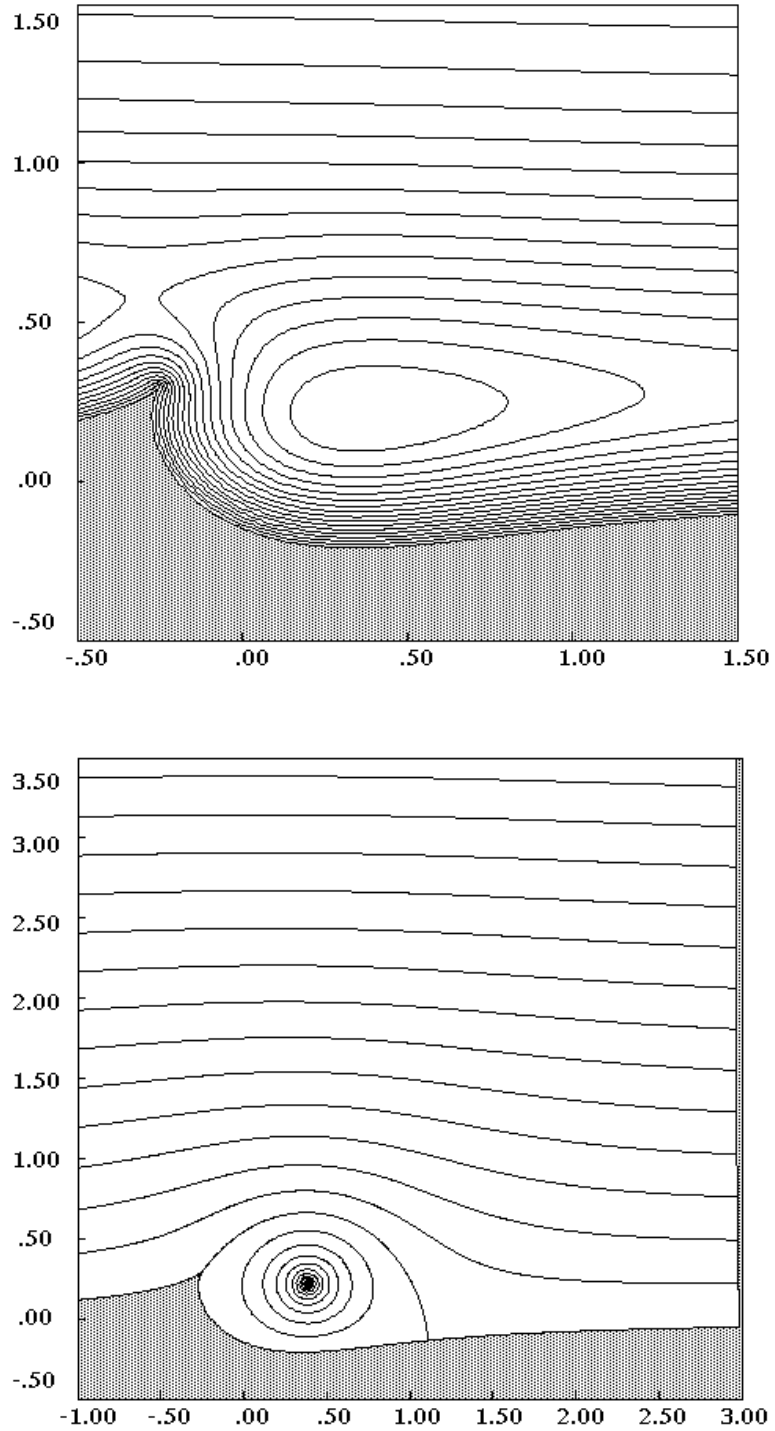


Figura 5.8. Linee di livello dell'hamiltoniana del vortice e linee di corrente nella configurazione di equilibrio ($\delta = 50^0$)

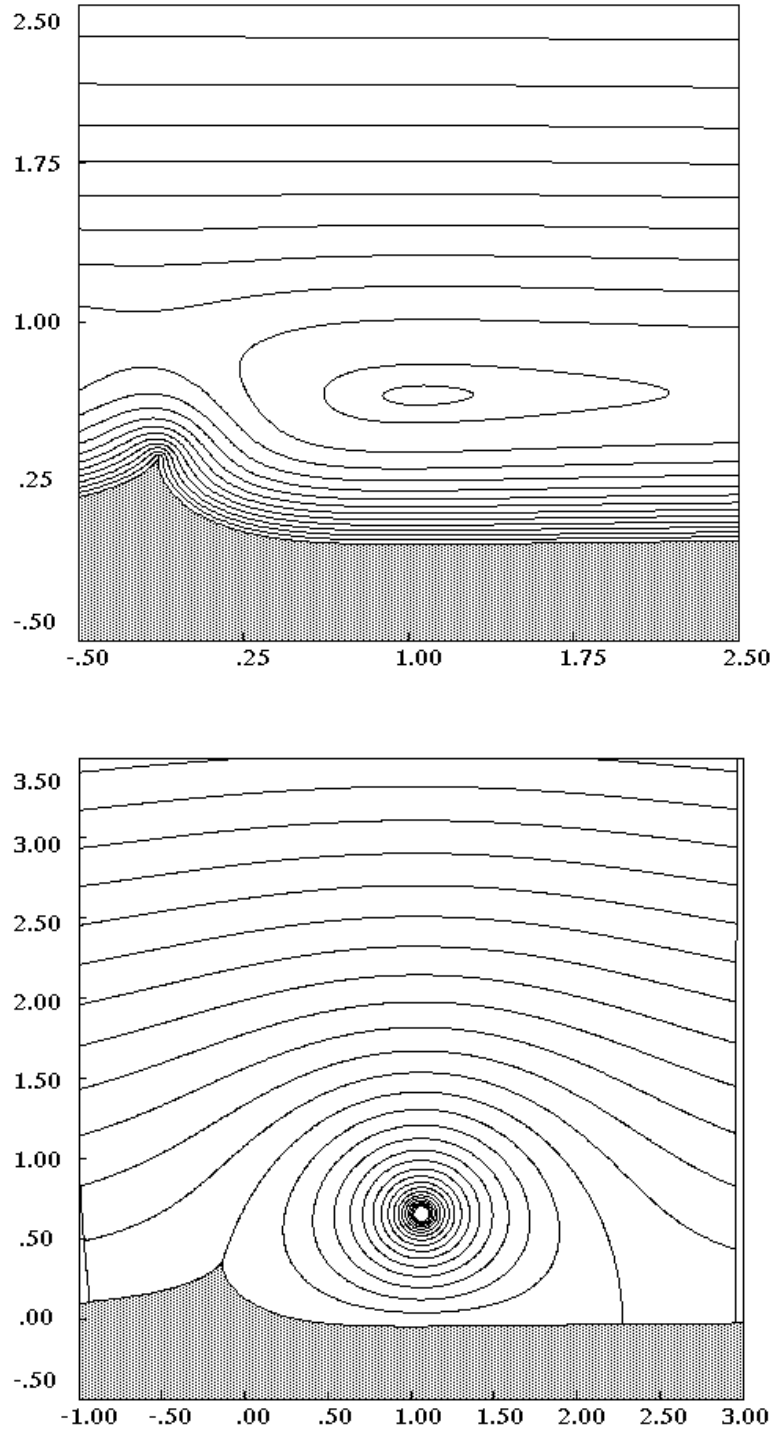


Figura 5.9. Linee di livello dell'hamiltoniana del vortice e linee di corrente nella configurazione di equilibrio ($\delta = 70^\circ$)

5.4.3 Analisi dei risultati

Con il modello potenziale sinora discusso si è inteso individuare, al variare della geometria della cornice, eventuali punti di equilibrio stabile per il vortice. Si sono trascurati gli effetti della viscosità. L'unica manifestazione fisica della risposta viscosa del sistema sia la presenza del vortice, necessaria a mantenere finita la velocità sul punto di cuspidale. Il sistema (5.18), che ne definisce la condizione di stazionarietà, dipende unicamente da ζ_1 (cioè dalla geometria) ma non da γ o da q_∞ in quanto l'intensità del vortice è legata alla corrente uniforme dalla condizione di Kutta; eventuali punti di equilibrio dipendono allora solo dalla forma della parete. Prefissata quest'ultima e nel rispetto della condizione di Kutta, l'analisi dell'andamento delle linee di livello della velocità indotta sul vortice evidenzia l'esistenza per esso di un solo punto di equilibrio (fig. 5.5). Si è fatto variare il parametro δ , anomalia di ζ_1 , tra 10° e 90° , imponendo $|\zeta_1| = \text{costante}$ in virtù della selfsimilarità della trasformazione conforme (5.1). Gli andamenti di ξ_v ed η_v sono crescenti con δ . Il punto di equilibrio del vortice si allontana sia dall'origine, nel piano trasformato, sia dal punto di cuspidale, sul piano fisico. In particolare per $\delta \rightarrow 90^\circ$ (cornice simmetrica) ξ_v ed η_v tendono ad infinito. Dunque in questo caso non esisterebbero, per il vortice, punti di equilibrio prossimi a parete. Dalla (5.14) si deduce che necessariamente dovrà essere sempre $\gamma < 0$. In questo modo il verso del vortice è tale da favorire il riattacco della corrente dopo la separazione sulla cuspidale. Lo studio della stabilità dei punti di stazionarietà del vortice viene condotto analizzando le linee di livello dell'hamiltoniana. Nell'intorno delle configurazioni di equilibrio trovate l'hamiltoniana del vortice assume valori di estremo che individuano sempre punti ellittici (figg. 5.6, 5.7, 5.8, 5.9). Concludiamo pertanto che, prefissata una geometria della cornice, individuata univocamente dal valore dell'angolo δ (a meno di un fattore di scala), esiste un solo punto di equilibrio del vortice (eventualmente all'infinito per una cornice simmetrica), che risulta essere sempre stabile, e la cui intensità è tale da rendere finita la velocità sul punto di cuspidale.

Osserviamo che l'analisi delle linee ad $H_v = \text{cost}$ mostra l'esistenza di eventuali altri punti di estremo, oltre a quello corrispondente all'effettiva configurazione di equilibrio stabile del vortice. Questo si spiega tenendo conto che il rapporto γ/q_∞ presente nell'hamiltoniana è calcolato a posteriori sfruttando la condizione di Kutta e dopo aver valutato il punto di equilibrio del vortice che la rispetta: non si può pertanto escludere che esistano altri punti di equilibrio che però non la soddisfano.

Questi sono visualizzabili, ad esempio, tracciando le linee di livello del modulo della velocità del vortice per valori prefissati di γ/q_∞ . È chiaro però che un approccio corretto al problema non può prescindere dal rispetto della condizione di Kutta, che ci riconduce a un'osservazione fisica: la velocità non può assumere un valore infinito in un punto di discontinuità geometrica della parete.

Potremmo ancora osservare che, se la trasformazione fosse regolare in $\zeta = 0$, non avremmo la cuspidale e perciò cadrebbe la necessità, nel modello matematico, di imporre la condizione di Kutta; in questo caso, prefissata la geometria e il rapporto γ/q_∞ , avremmo in generale più punti singolari nelle possibili traiettorie del vortice e quindi più di un punto di equilibrio per lo stesso.

5.5 Il transitorio di avviamento

Studiamo ora per via numerica, secondo il metodo a vortici, il transitorio che, con partenza impulsiva, porta all'instaurarsi del flusso caratterizzato dal vortice intrappolato a valle della

cornice. Il modello di generazione di vorticità che adotteremo sarà quello della *emissione a punto fisso*.

Al tempo iniziale il campo di moto che lambisce la parete è quello potenziale, non affetto da vortici. La singolarità fluidodinamica dovuta alla presenza della cuspide viene quindi rimossa introducendo, in prossimità della punta, un primo vortice che soddisfi alla condizione di Kutta. Non essendo in generale il vortice in una posizione di equilibrio, si innescherà un transitorio. Ad intervalli di tempo prefissati vengono introdotti in successione, e seguiti numericamente lungo le loro traiettorie, ulteriori vortici di intensità tale che, all'istante di emissione, sia soddisfatta la condizione di Kutta. In questo modo si ottiene una descrizione discreta sia dello *shear layer* che si separa dalla punta, sia della struttura vorticoso che si forma a valle della cornice e che rimane intrappolata.

Il calcolo viene condotto in forma adimensionata, scegliendo quale lunghezza di riferimento $|\zeta_1|$, che rappresenta un fattore di scala per la trasformazione $z = \zeta + \zeta_1^2/(\zeta - \zeta_1)$, e quale velocità di riferimento q_∞ . Soprassegnando le grandezze adimensionate avremo dunque

$$\bar{x} = \frac{x}{|\zeta_1|} \quad \bar{y} = \frac{y}{|\zeta_1|} \quad \bar{u} = \frac{u}{q_\infty} \quad \bar{v} = \frac{v}{q_\infty} \quad (5.28)$$

per cui risultano automaticamente definiti un tempo adimensionato ed una circolazione adimensionata

$$\bar{t} = \frac{q_\infty t}{|\zeta_1|} \quad \bar{\Gamma} = \frac{\Gamma}{q_\infty |\zeta_1|} \quad (5.29)$$

5.5.1 Intensità dei vortici nascenti

Il potenziale complesso per una particella di fluido immersa nel campo dovuto a n vortici e alla corrente asintotica, sul piano trasformato ζ , vale

$$W(\zeta) = q_\infty \zeta - i \sum_{k=1}^n \gamma_k \log \left(\frac{\zeta - \zeta_k}{\zeta - \zeta_k^*} \right) \quad (5.30)$$

da questa, derivando rispetto a ζ si ottiene l'espressione per la velocità complessa

$$\frac{dW(\zeta)}{d\zeta} = q_\infty - i \sum_{k=1}^n \gamma_k \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_k} - \frac{1}{\zeta - \zeta_k^*} \right) \quad (5.31)$$

L'imposizione della condizione di Kutta sul punto di cuspide ($\zeta = 0$) al generico istante t fornirà l'intensità del $n + 1$ -esimo vortice nascente, secondo la relazione

$$\left(\frac{dW(\zeta)}{d\zeta} \right)_{\zeta=0} = 0 \quad (5.32)$$

sviluppando i calcoli otteniamo

$$\begin{aligned} & q_\infty + i \sum_{k=1}^n \gamma_k \left(\frac{1}{\zeta_k} - \frac{1}{\zeta_k^*} \right) + i \gamma_{n+1} \left(\frac{1}{\zeta_{n+1}} - \frac{1}{\zeta_{n+1}^*} \right) = \\ & = q_\infty + \sum_{k=1}^n \frac{2\gamma_k \eta_k}{|\zeta_k|^2} - \frac{2\gamma_{n+1} \eta_{n+1}}{|\zeta_{n+1}|^2} = 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

dalla quale

$$\frac{\gamma_{n+1}}{q_\infty} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{q_\infty} \frac{2\eta_k}{|\zeta_k|^2} \right) \left(\frac{2\eta_{n+1}}{|\zeta_{n+1}|^2} \right)^{-1} \quad \text{con } \zeta_{n+1} = \xi_{n+1} + i\eta_{n+1} \quad (5.34)$$

nell'ipotesi di emissione a punto fisso avremo $\zeta_{n+1} = \zeta_{emis}$. La (5.34) dovrà essere modificata se la legge di interazione adottata non fosse più quella del vortice puntiforme ma quella di un blob.

5.5.2 Determinazione del campo di velocità

Le traiettorie dei vortici, e quindi le successive rappresentazioni della evoluzione del sistema, sono ottenute per integrazione numerica a partire dal campo di velocità.

La velocità del vortice libero sul piano trasformato ζ vale

$$\dot{\zeta}_j^* = q_\infty - i \sum_{k=1}^n \gamma_k \left(\frac{1}{\zeta_j - \zeta_k} - \frac{1}{\zeta_j - \zeta_k^*} \right) + i\gamma_j \frac{1}{\zeta_j - \zeta_j^*} \quad (5.35)$$

La simulazione viene condotta interamente sul piano ζ , adottando per il vortice la velocità comprensiva della correzione di Routh

$$\frac{d\zeta_j^*}{dt} = \left[\dot{\zeta}_j^* + i\frac{\gamma}{2}R(\zeta_j) \right] J(\zeta_j) \quad (5.36)$$

Per la trattazione dell'interazione tra vortici vicini viene utilizzata la funzione di smoothing (2.50), caratterizzante il blob di Nordmark, blob dell'ottavo ordine a supporto limitato. La (2.50) modifica la legge di interazione solo per $r \leq \delta$, distanza tra due vortici da valutarsi sul piano fisico z . Lo schema di integrazione adottato è il seguente

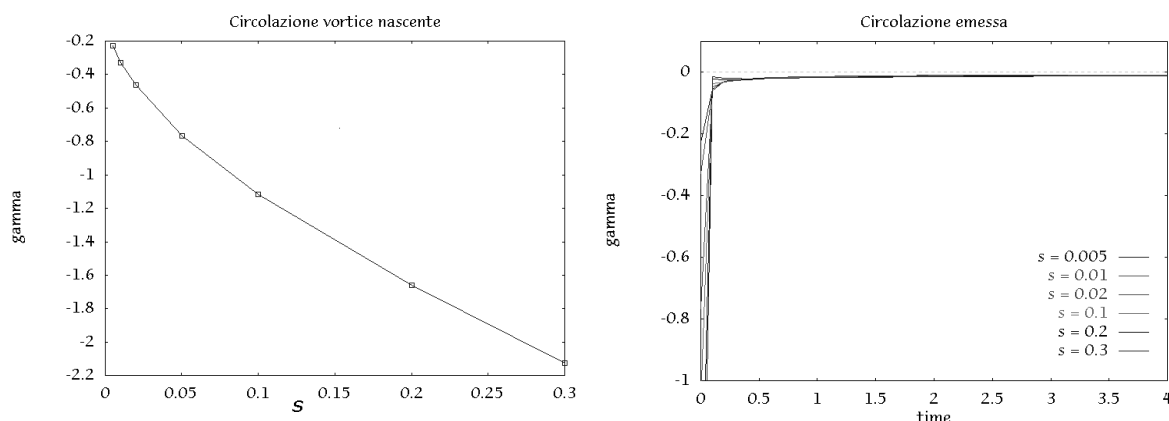
$$\zeta(t + \delta t) = \zeta(t) + \frac{1}{2} \left[3\frac{d\zeta}{dt}(t) - \frac{d\zeta}{dt}(t - \delta t) \right] dt \quad (5.37)$$

ed è del secondo ordine. Lo schema soddisfa ai requisiti di reversibilità espressi in [121] e richiede solo le informazioni relative a due tempi differenti. Il passo di integrazione utilizzato nelle simulazioni è compreso tra $0.001 \leq \Delta t \leq 0.01$. Il punto di emissione viene collocato sulla bisettrice della cuspidè, che sul piano trasformato corrisponde a un punto dell'asse immaginario. Si dimostra infatti che in tal caso la velocità sul punto di cuspidè ζ_c

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_c} \frac{\frac{dW}{d\zeta}}{\frac{d\zeta}{dz}} = \mathbf{v}_c \quad (5.38)$$

è indipendente dalla distanza di emissione.

Le prove numeriche effettuate per stabilire l'importanza del punto di emissione dei vortici hanno mostrato che esso assume rilevanza nei primissimi passi in cui si modella l'iniziale vortice di avviamento mentre il suo successivo sviluppo ne è indipendente (figura 5.10). La figura 5.10 evidenzia inoltre che la circolazione del vortice emesso varia pressoché linearmente con la distanza di emissione. Ciò significa che la circolazione per unità di lunghezza di scia può essere ritenuta pressoché costante per un buon tratto. Questo fatto riduce la distanza di

Figura 5.10. Influenza della distanza s di emissione.

emissione al rango di una scala locale di cui ben presto il sistema perde memoria. Nella scelta del parametro di cutoff si è posto $\delta_{blob} \leq s$ per evitare che l'intensità del vortice nascente potesse dipendere dalla funzione di smoothing utilizzata. In particolare nelle simulazioni si emette vorticità ad ogni passo, adottando valori di δ_{blob} che garantiscano il rispetto dei requisiti di convergenza del metodo a vortici (i blob devono in parte sovrapporsi) e fissando di conseguenza il valore della distanza di emissione dalla cuspid.

5.5.3 Analisi dei risultati

Sono stati affrontati i tre casi corrispondenti ai valori $\delta = 20^\circ$, $\delta = 40^\circ$, $\delta = 90^\circ$. La forma della parete che si ottiene per $\delta = 40^\circ$ fra le tre è quella che meglio interpreta l'effetto cornice, mentre $\delta = 20^\circ$ presenta una maggiore analogia con i flussi all'interno di cavità. Nel caso $\delta = 90^\circ$ la parete assume la forma di una cresta simmetrica.

Caso A: $\delta = 40^\circ$.

La simulazione coglie tutte le fasi della dinamica inerziale delle strutture vorticosi. L'instaurarsi impulsivo del campo di moto provoca la nascita di una superficie vorticosi a spirale che successivamente invade il campo continuando ad attorcigliarsi su se stessa (figure 5.13 e 5.14). Gli strati più interni danno origine ad un nucleo centrale, mentre in quelli più esterni si manifestano ad un certo istante i fenomeni di instabilità di Kelvin-Helmholtz. Questi fenomeni di instabilità sono di natura puramente inerziale e preludono al *pairing* vorticosi. La loro scala è strettamente connessa al profilo iniziale di velocità attraverso lo strato vorticosi. Nel nostro caso questa scala è implicitamente dettata dall'entità dello smoothing che regola la distribuzione di vorticità attraverso la strato.

L'evoluzione iniziale, universale, della struttura vorticosi, viene progressivamente modificata dall'interazione con la forma della parete a valle della cuspid. Interazione che porta infine alla rottura della struttura vorticosi primaria e alla sua deflessione all'interno della regione prospiciente il punto di cuspid. Nel suo moto la struttura transita nuovamente vicino alla cuspid, sul lato a valle, provocando una forte perturbazione, responsabile della nascita di una struttura secondaria di egual segno, a cui fa seguito l'interazione instazionaria fra le due strutture e il loro decadimento, per effetto puramente inerziale. Trasportate dalla corrente, esse vengono nuovamente costrette dalla parete a deflettere e ad invertire il loro moto. Il processo continua ciclicamente mentre le strutture che si generano e si spezzano tendono

ad occupare l'intera regione a valle della cuspidale. L'effetto regolarizzante della parete si manifesta nel mantenere confinata in una limitata regione del campo le strutture vorticosi che si vanno generando, di intensità via via minore, convertendole ed inglobandole nella zona di ricircolazione stazionaria a ridosso della cuspidale.

Benché il moto non possa che risultare stazionario solo in media, le previsioni del modello potenziale vengono confermate. La circolazione complessiva della bolla vorticosi (figura 5.11) che staziona sul lato a valle della cuspidale è prossima a quella dell'unico vortice puntiforme. Il baricentro della struttura vorticosi, definito come

$$X_g + iY_g = \frac{\sum_{j=1}^N \gamma_j z_j}{\sum_{j=1}^N \gamma_j} \quad (5.39)$$

assume una posizione vicina a quella prevista per il vortice¹ (figura 5.12).

Il fatto poi che il moto delle strutture rimanga sempre confinato nella limitata regione del campo di moto a valle della cresta, viene interpretato come significativo della stabilità della configurazione.

Osserviamo ancora che in un flusso reale la viscosità provvederebbe, in una scala di tempi sicuramente più lunga di quella su cui avvengono i fenomeni inerziali, a ridistribuire la vorticità in seno alla bolla sino a trasformarla, intuitivamente, in una regione a vorticità costante.

Caso B: $\delta = 20^0$.

Il campo di moto che si realizza per questa forma della cornice ha similarità con il flusso all'interno di una cavità (cfr. Finaish [74]). Per questo valore del parametro δ la cuspidale continua a trovarsi ad una quota più alta rispetto a quella del bordo opposto della parete. All'avviamento impulsivo segue un transitorio che non differisce qualitativamente da quanto prospettato nel caso precedente. L'estensione della regione che le strutture vorticosi tendono ad invadere (figure 5.17 e 5.18) è maggiore rispetto alla geometria precedente e questo si traduce in un transitorio più lungo. Maggiore è anche la circolazione necessaria affinché sia soddisfatta la condizione di Kutta in quanto il baricentro del sistema di vortici viene a trovarsi più lontano dalla cuspidale.

Anche in questo caso si instaura alla fine un flusso in media stazionario, in una configurazione prossima a quella prevista dal modello potenziale (figure 5.15 e 5.16). L'ipotesi che la maggior responsabile dell'iniezione di vorticità nel flusso sia la cuspidale sembra trovare in questo caso un minor riscontro fisico, tuttavia maggiore è anche la veemenza del transitorio e quindi il peso dei fenomeni inerziali. Uno studio nel quale si mettessero in conto anche i fenomeni viscosi lungo tutta la parete potrebbe in questo caso essere chiarificante.

Caso C: $\delta = 90^0$.

In questo caso il modello di flusso potenziale non determina condizioni di equilibrio in prossimità della parete. In effetti alla partenza impulsiva del campo di moto si assiste alla generazione

¹La (5.39) rappresenta le coordinate del baricentro di N vortici ciascuno di intensità γ_i e collocati nei punti $z_i = x_i + iy_i$. Nel caso che il numero di vortici non vari nel tempo, X_g e Y_g divengono delle costanti del moto (integrali primi) del sistema stesso.

di un vortice che man man invade la regione a valle, accrescendosi quasi linearmente e allontanandosi dalla cuspidale (figure 5.19 e seguenti).

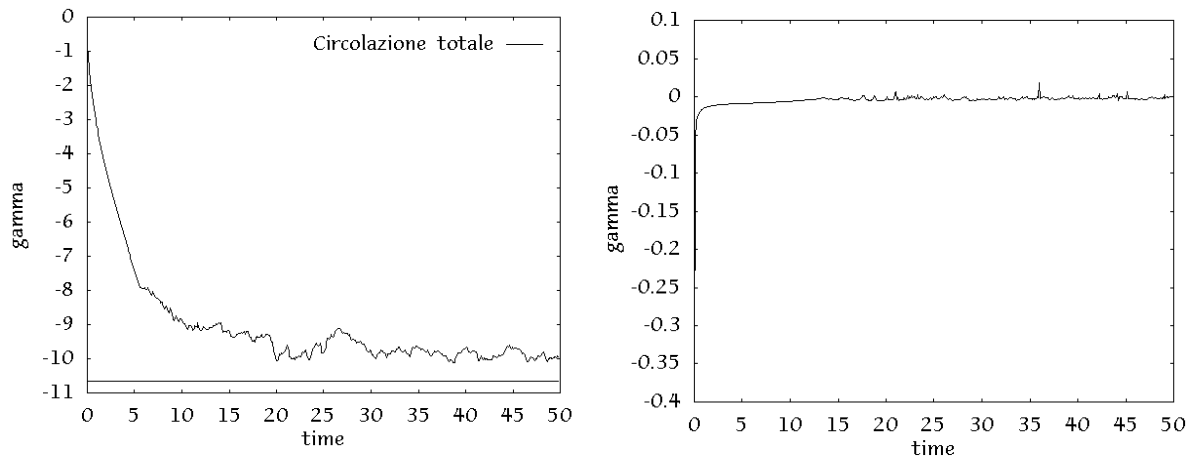


Figura 5.11. Circolazione globalmente emessa nel tempo e circolazione del vortice emesso ($\delta = 40^\circ$).

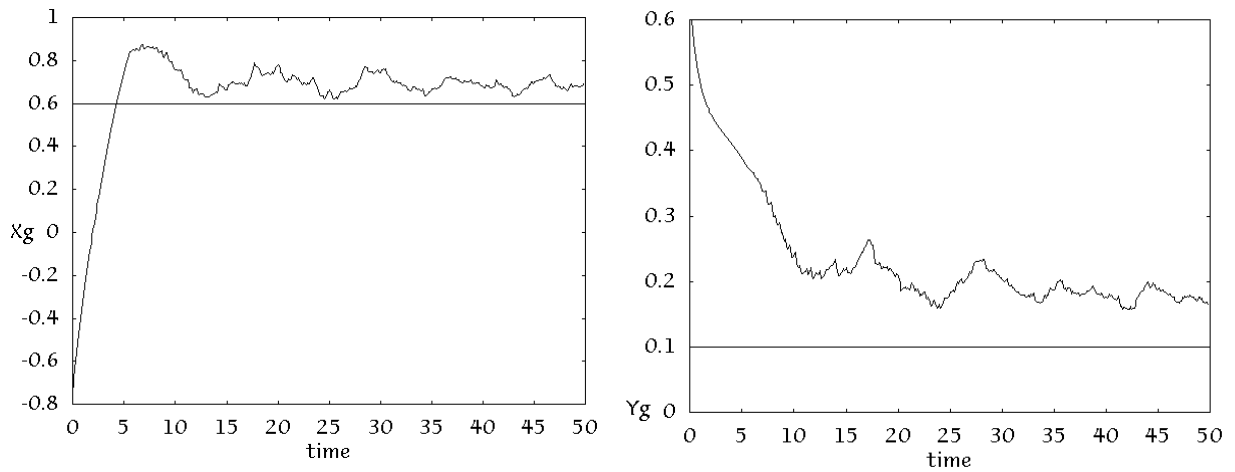


Figura 5.12. Andamenti di X_g e Y_g nel tempo e loro confronto con il valore relativo ad un unico vortice in equilibrio ($\delta = 40^\circ$).

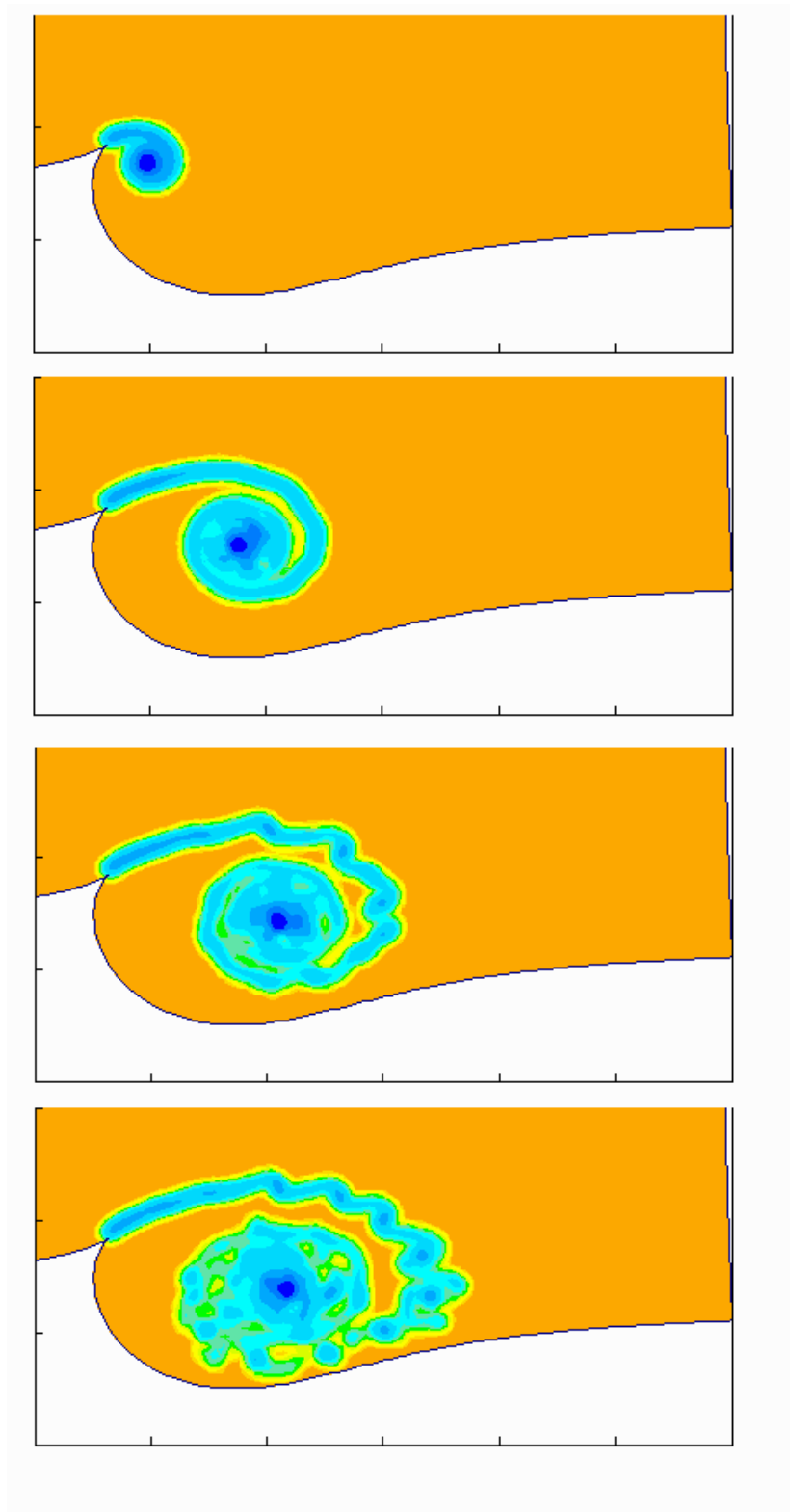


Figura 5.13. Sequenze del campo di vorticità ($\delta = 40^\circ$).

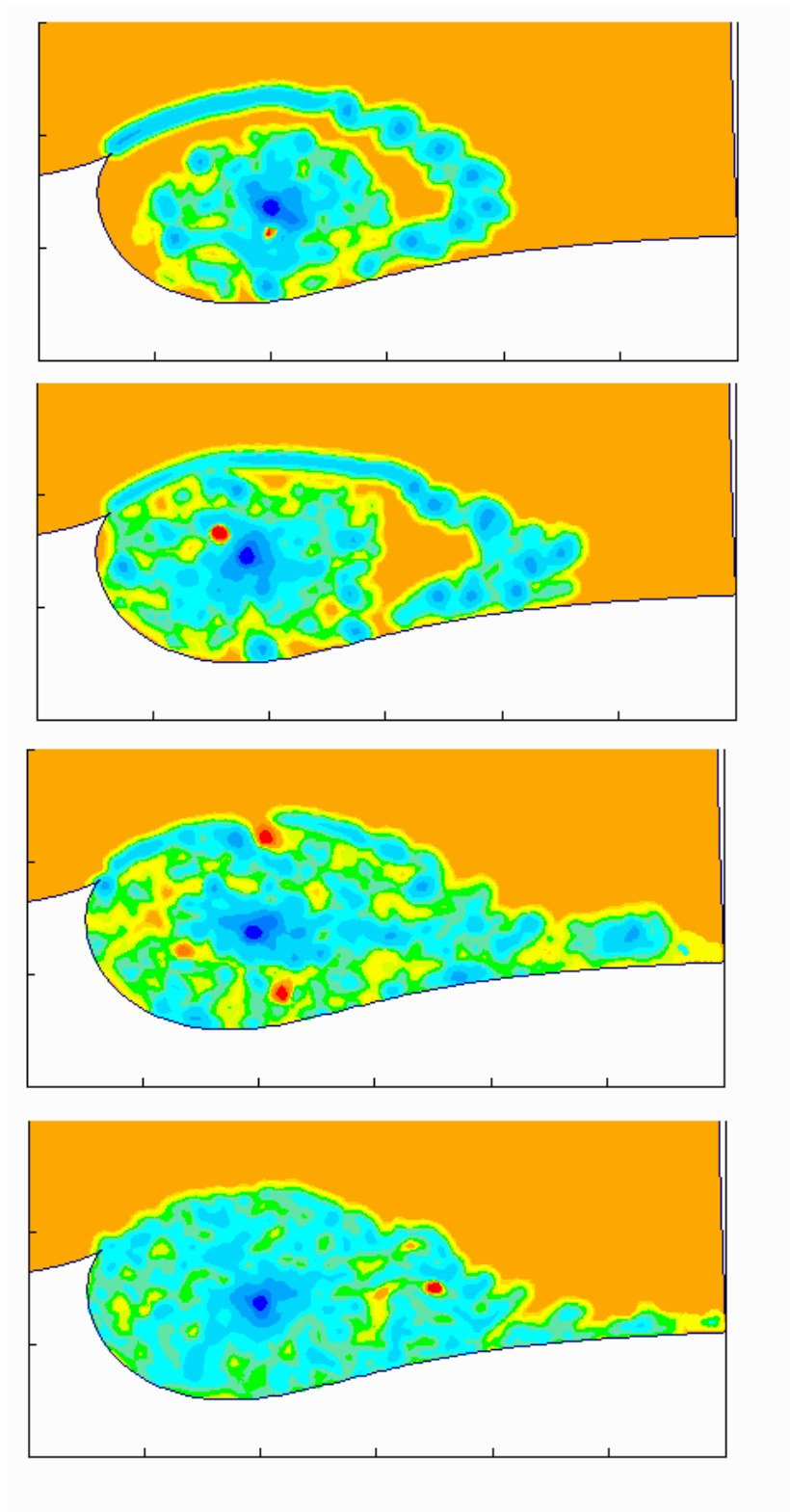


Figura 5.14. Sequenze del campo di vorticità ($\delta = 40^\circ$).

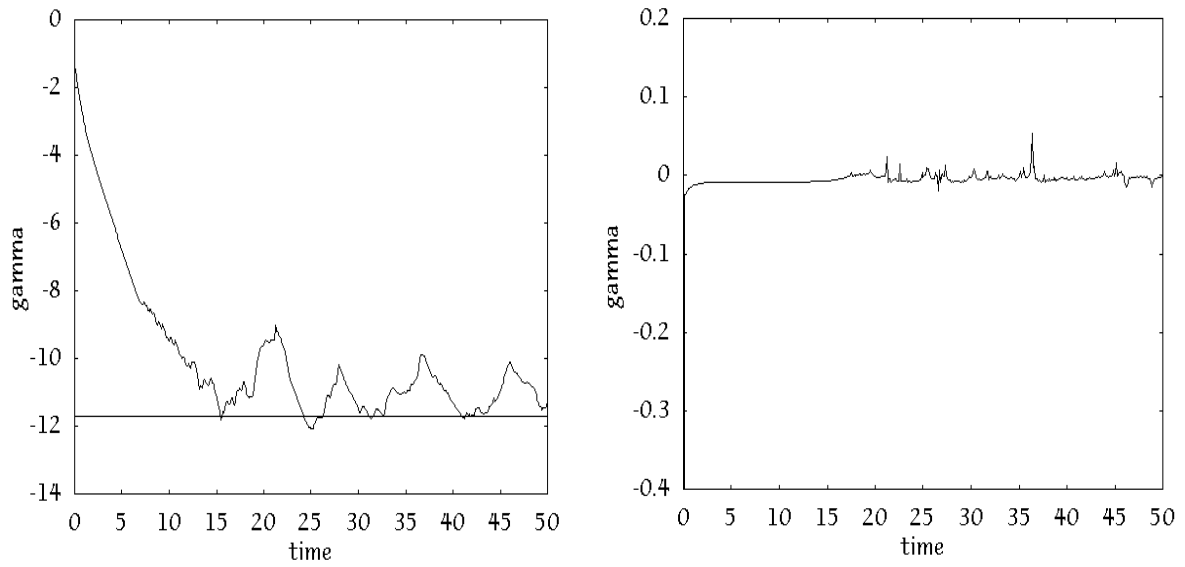


Figura 5.15. Circolazione globalmente emessa nel tempo e circolazione del vortice emesso ($\delta = 20^\circ$).

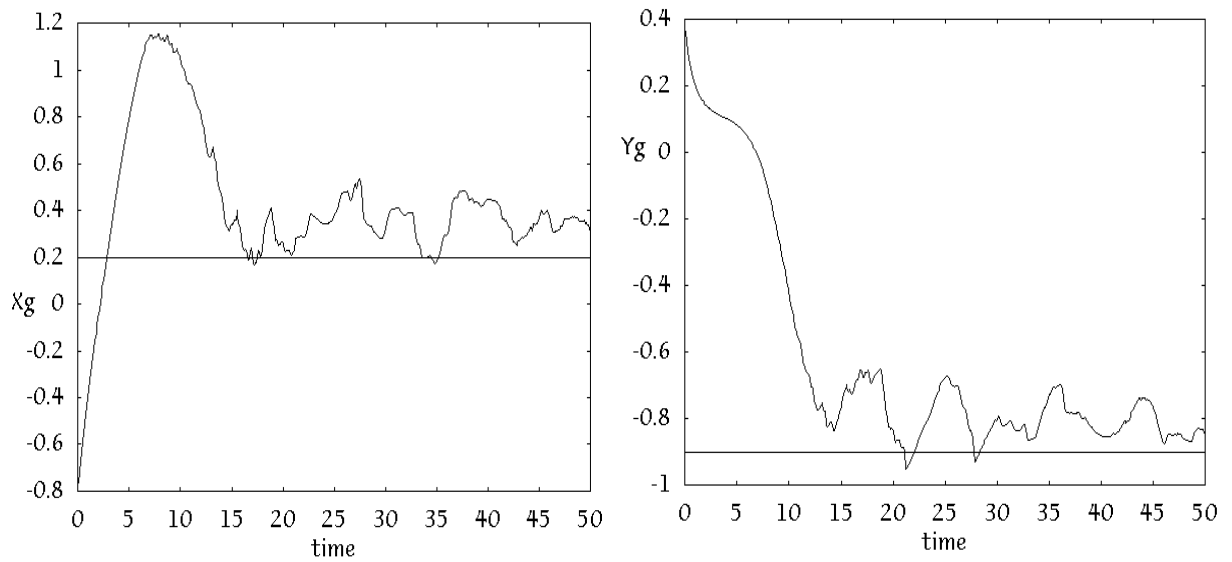


Figura 5.16. Andamenti di X_g e Y_g nel tempo e loro confronto con il valore relativo ad un unico vortice in equilibrio ($\delta = 20^\circ$).

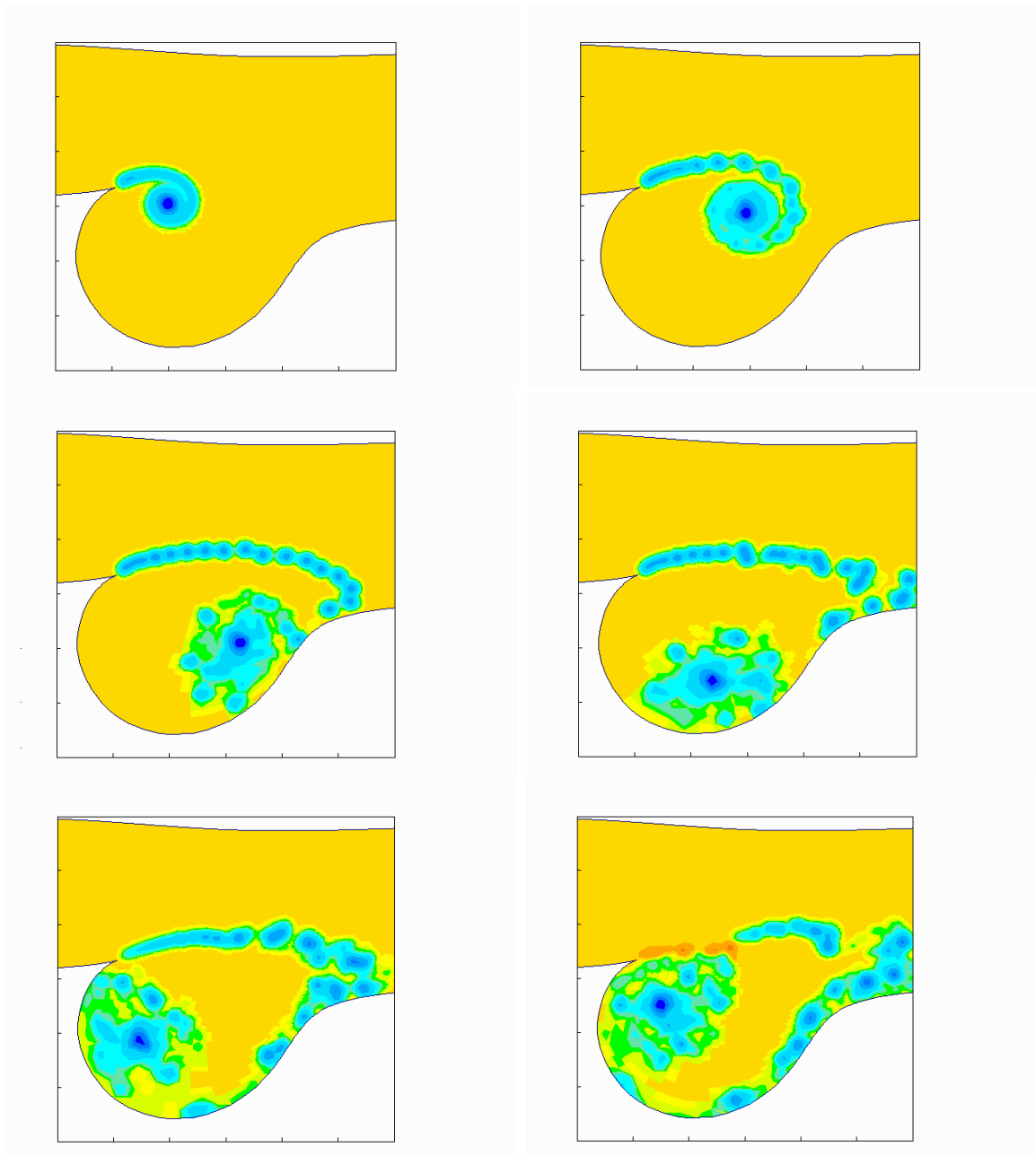


Figura 5.17. Sequenze del campo di vorticità ($\delta = 20^0$).

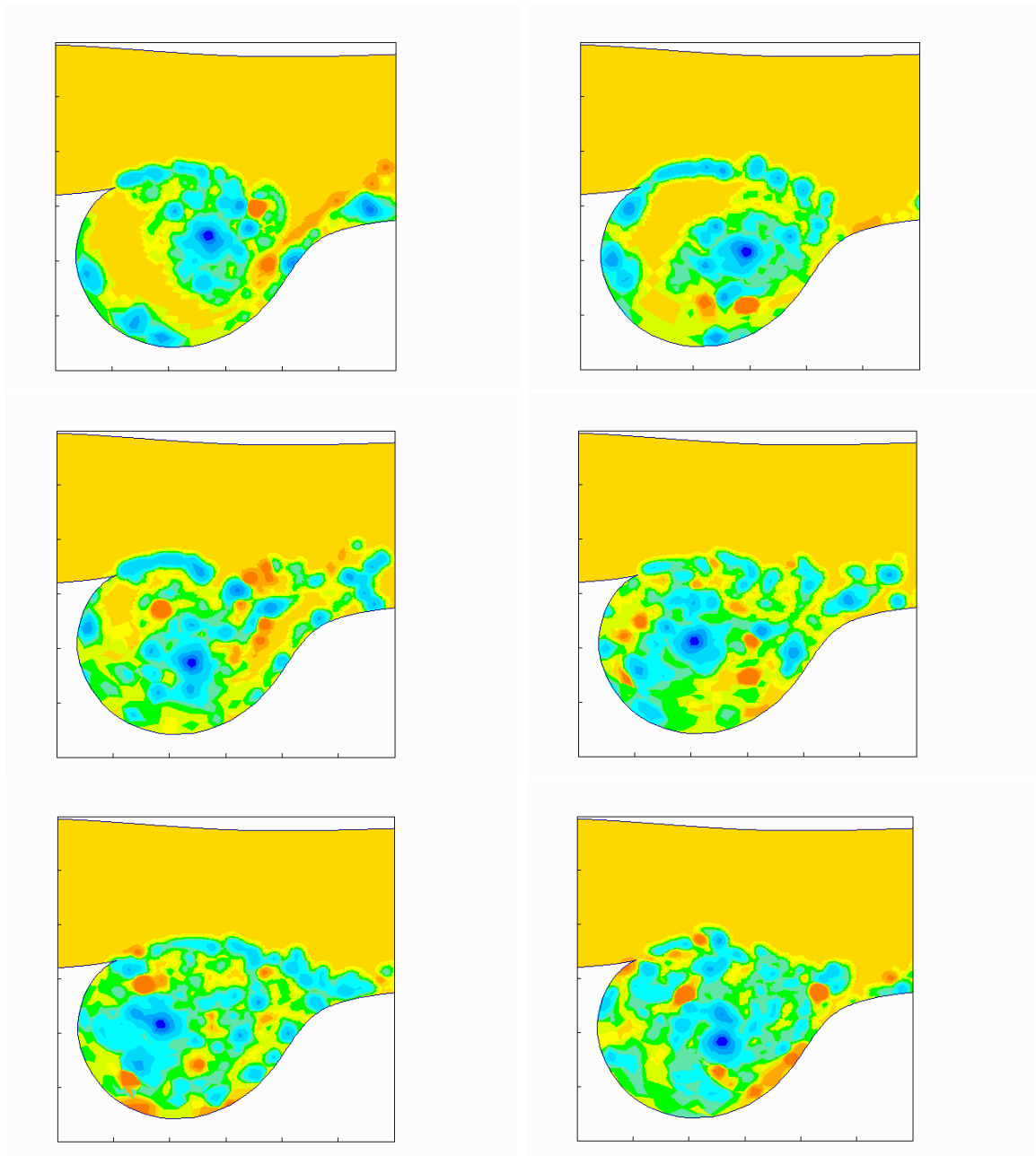


Figura 5.18. Sequenze del campo di vorticità ($\delta = 20^0$).

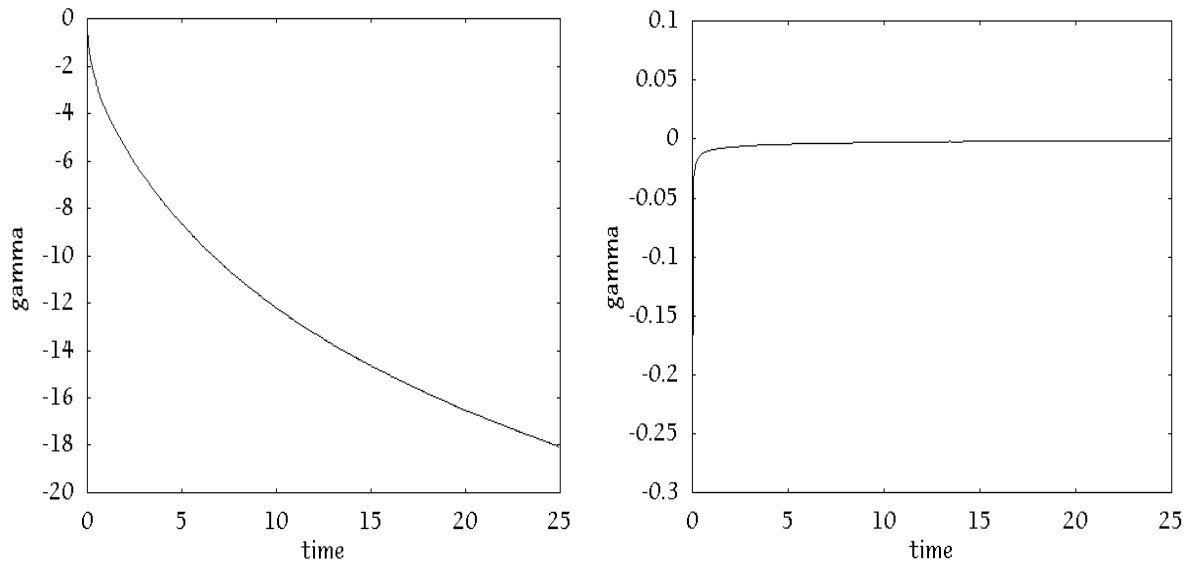


Figura 5.19. Circolazione globalmente emessa nel tempo e circolazione del vortice emesso ($\delta = 90^0$).

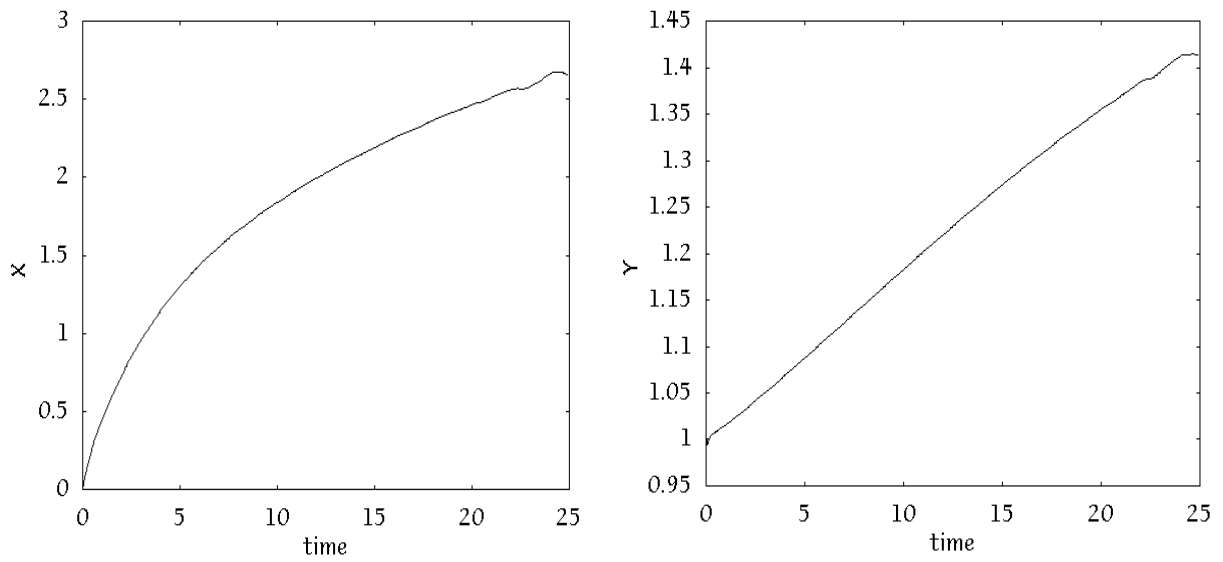


Figura 5.20. Andamenti di X_g e Y_g nel tempo ($\delta = 90^0$).

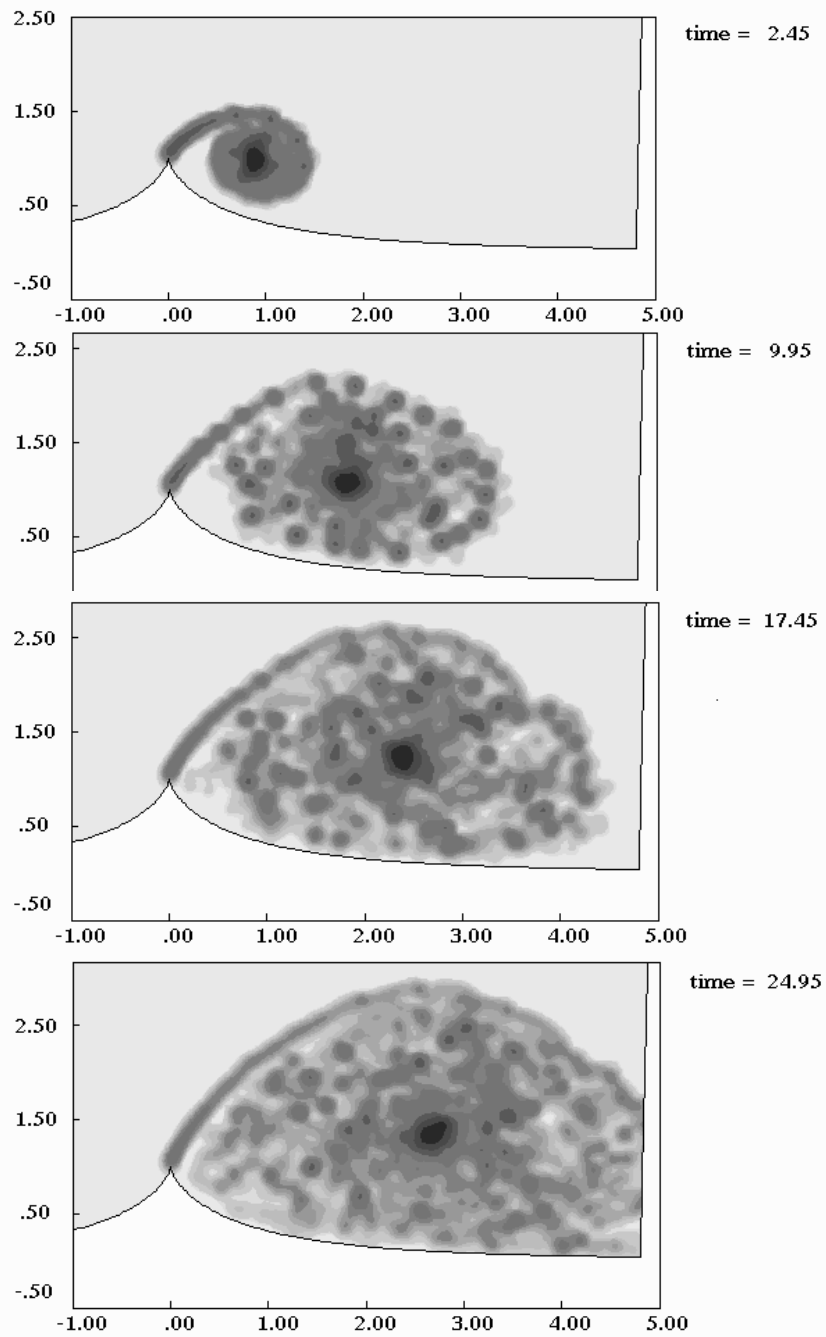


Figura 5.21. Sequenze del campo di vorticità ($\delta = 90^\circ$).

Capitolo 6

Cresta periodica

6.1 Introduzione

In questo capitolo la trattazione viene estesa al caso di flussi su pareti caratterizzate da periodiche creste e avvallamenti. Nel nostro caso lo studio si prefigge l'analisi di configurazioni periodiche del campo di moto analizzato al capitolo precedente, ma per altri versi questa geometria della parete è simile a quella delle *riblets*, frutto di intensi studi in relazione al problema della riduzione dell'attrito aerodinamico. Il nostro intento è comunque l'indagine dell'effetto della periodicità imposta ad un campo di moto. Analizzeremo inizialmente il caso di parete rettilinea, continuando successivamente con forme della parete che presentino una singolarità geometrica. Verrà di seguito studiato il transitorio di avviamento per il caso della cresta simmetrica a fianchi esponenziali.

6.2 Parete piana periodica

Si voglia studiare il campo di moto generato da un vortice, investito da una corrente asintotica uniforme, in una regione periodica delimitata inferiormente da una parete rettilinea (figura 6.1).

La condizione di periodicità del campo viene ricreata mediante l'introduzione di una schiera di vortici immagine, distanziati l'un l'altro di un periodo. La condizione di impermeabilità imposta dalla parete viene soddisfatta mediante il metodo delle immagini, riflettendo rispetto all'asse x l'intera schiera ottenuta dall'imposizione della condizione al contorno precedente.

Il problema viene così ricondotto allo studio del moto di una schiera di vortici, tutti di eguale intensità γ , in presenza di una parete rettilinea indefinitamente estesa.

Il potenziale complesso generato da una schiera infinita di vortici, tutti di eguale intensità γ , avente passo a (cfr. Lamb [117]) è della forma

$$W(\zeta) = -i\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log(\zeta - na) = -i\gamma \log \sin \left(\frac{\pi\zeta}{a} \right) \quad (6.1)$$

Nel seguito della trattazione porremo $a = 2\pi$. Potremo dunque esprimere il potenziale complesso per una particella di fluido immersa nel campo di moto in considerazione come

$$W(\zeta) = q_{\infty}\zeta - i\gamma \log \left[\sin \left(\frac{\zeta - \zeta_v}{2} \right) \right] + i\gamma \log \left[\sin \left(\frac{\zeta - \zeta_v^*}{2} \right) \right]. \quad (6.2)$$

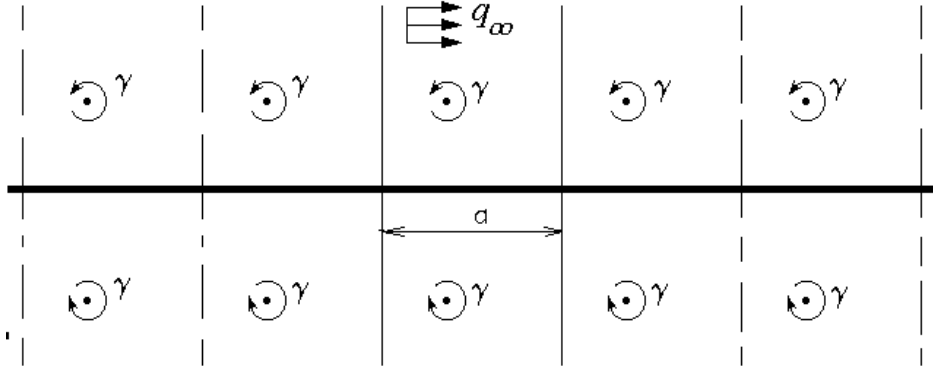


Figura 6.1. Schema del modello.

La velocità in un punto del campo di moto non contenente singolarità, è definita mediante

$$\frac{dW}{d\zeta}(\zeta) = \dot{\zeta}^* = q_\infty - i\frac{\gamma}{2} \cot\left(\frac{\zeta - \zeta_v}{2}\right) + i\frac{\gamma}{2} \cot\left(\frac{\zeta - \zeta_v^*}{2}\right) \quad (6.3)$$

dove con $\zeta_v = (\xi_v, \eta_v)$ si è designata la posizione del vortice e con γ la sua intensità.

La velocità complessa coniugata del vortice si ottiene dalla (6.3), sottraendo il termine di autoinduzione

$$\dot{\zeta}_v^* = q_\infty + i\frac{\gamma}{2} \cot\left(\frac{\zeta_v - \zeta_v^*}{2}\right) \quad (6.4)$$

la (6.4), tenuto conto della identità $\cot(iz) = -i \coth(z)$, diviene

$$\dot{\zeta}_v^* = q_\infty + \frac{\gamma}{2} \coth(\eta_v) \quad (6.5)$$

Ci si chiede ora quale sia, se esiste, il luogo dei punti di equilibrio per il vortice.

Allo scopo si dovrà imporre

$$\dot{\zeta}_v^* = q_\infty + \frac{\gamma}{2} \coth(\eta_v) = 0 \quad (6.6)$$

da cui

$$\eta_v = -\arctan\left(\frac{\gamma}{2q_\infty}\right) \quad (6.7)$$

condizione che risulta una funzione continua in η_v . Esistono infiniti punti di equilibrio per il vortice, come nel caso di parete piana in assenza di condizione periodiche. Nei limiti di validità del modello (la trattazione è essenzialmente non viscosa), se ne deduce l'impossibilità di confinare un vortice in una regione limitata dello spazio. La sola imposizione di caratteristiche di periodicità al campo di moto, a prescindere da fattori di natura puramente geometrica, non permetterebbe dunque di realizzare quelle condizioni nel flusso che si presume abbiano il potere di attuare una qualche forma di stabilizzazione, ovvero la capacità di confinare vorticità in prossimità di parete, evitando che venga trasportata nelle zone più interne del campo.

6.3 Trasformazione conforme piano-cresta

Consideriamo la seguente trasformazione conforme

$$z(\zeta) = \zeta + i\left(1 + Ae^{i\zeta}\right) + \frac{B}{\sin(\zeta - \zeta_1)} \quad (6.8)$$

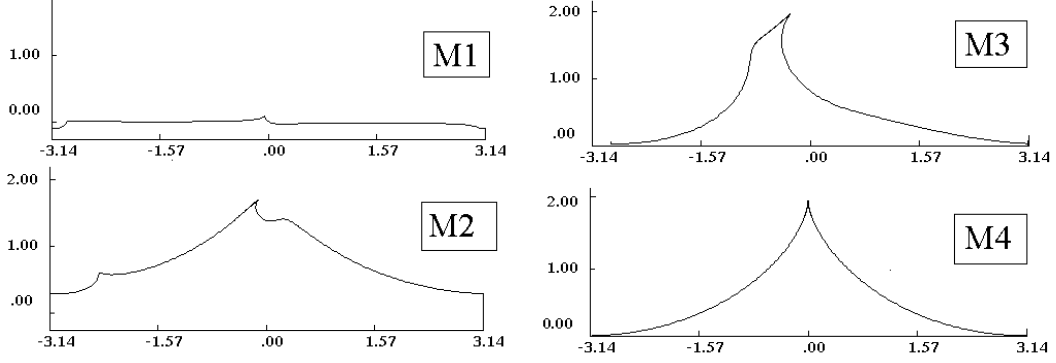


Figura 6.2. Forme della cresta

e determiniamo A, B in modo che la funzione presenti un punto di cuspidè in $\zeta_c = 0$. Dovremo imporre che

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta_c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - Ae^{i\zeta_c} - B \frac{\cos(\zeta_c - \zeta_1)}{\sin^2(\zeta_c - \zeta_1)} = 0 \quad (6.9)$$

ossia

$$1 - A - B \frac{\cos(\zeta_1)}{\sin^2(\zeta_1)} = 0 \quad (6.10)$$

Prefissati dunque due dei tre parametri A, B, ζ_1 , ad es. A e ζ_1 , dalla (6.10) otteniamo per il terzo

$$B = (1 - A) \frac{\sin^2(\zeta_1)}{\cos(\zeta_1)} \quad (6.11)$$

Riportiamo di seguito alcune derivate della trasformazione nonchè le conseguenti espressioni dello Jacobiano $J(\zeta)$ e del termine di Routh $R(\zeta)$

$$\frac{dz}{d\zeta}(\zeta) = 1 - Ae^{i\zeta} - B \frac{\cos(\zeta - \zeta_1)}{\sin^2(\zeta - \zeta_1)} \quad (6.12)$$

$$\frac{d^2z}{d\zeta^2}(\zeta) = -iAe^{i\zeta} + B \frac{1 + \cos^2(\zeta - \zeta_1)}{\sin^3(\zeta - \zeta_1)} \quad (6.13)$$

$$J(\zeta) = \left| 1 - Ae^{i\zeta} - B \frac{\cos(\zeta - \zeta_1)}{\sin^2(\zeta - \zeta_1)} \right|^{-2} \quad (6.14)$$

$$R(\zeta) = \frac{-iAe^{i\zeta} + B \frac{1 + \cos^2(\zeta - \zeta_1)}{\sin^3(\zeta - \zeta_1)}}{1 - Ae^{i\zeta} - B \frac{\cos(\zeta - \zeta_1)}{\sin^2(\zeta - \zeta_1)}} \quad (6.15)$$

6.4 Posizioni di equilibrio del vortice

Tramite un modello potenziale molto semplice ricerchiamo, in modo del tutto analogo a quanto fatto in 6.2, le configurazioni di equilibrio per un singolo vortice trasportato da una corrente asintotica uniforme che lambisce la parete periodica, non più rettilinea, espressa tramite la trasformazione conforme (6.8).

Affinché il vortice si trovi in una posizione di equilibrio, la sua velocità dovrà essere necessariamente nulla.

Sul piano trasformato si avrà

$$\dot{\zeta}_v^* = \frac{dW_v}{d\zeta} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} + i \frac{\gamma}{2} \frac{d^2 z}{d\zeta^2} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-2} = 0 \quad (6.16)$$

alla (6.16) si associa la condizione di Kutta per il punto di cuspid ζ_c

$$\frac{dW}{d\zeta}(\zeta_c) = 0 \quad (6.17)$$

ottenendo quindi il seguente sistema di variabile complessa

$$\begin{cases} q_\infty + i \frac{\gamma_v}{2} \left(\cot \left(\frac{\zeta_v - \zeta_v^*}{2} \right) + R(\zeta_v) \right) = 0 \\ q_\infty + i \frac{\gamma_v}{2} \left(\cot \left(\frac{\zeta_v}{2} \right) - \cot \left(\frac{\zeta_v^*}{2} \right) \right) = 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

Riassumibile nella equazione finale

$$\coth(\eta_v) - \frac{2 \sinh(\eta_v)}{(\cosh(\eta_v) - \cos(\xi_v))} + i R(\zeta_v) = 0 \quad (6.19)$$

con la notazione $\zeta_v = \xi_v + i\eta_v$.

La soluzione di (6.19), per via numerica, fornisce le posizioni di equilibrio per il vortice, mentre la sua intensità rimane fissata dalla condizione di Kutta, una volta nota la posizione.

6.5 Determinazione della funzione hamiltoniana del vortice

Determiniamo in questa sezione l'espressione assunta dalla funzione hamiltoniana nel caso della schiera infinita di vortici. La funzione verrà in seguito utilizzata nello studio della stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate.

Come visto nel precedente capitolo, la funzione hamiltoniana sul piano fisico z può essere ottenuta a partire dalla sua espressione sul piano trasformato ζ mediante la relazione

$$H_v(z) = H_{\zeta_v}(\zeta) + \frac{\gamma}{2} \log \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| \quad (6.20)$$

dove $H_{\zeta_v}(\zeta)$ è proprio l'espressione della funzione hamiltoniana sul piano ζ .

La velocità del vortice su tale piano vale

$$\dot{\zeta}_v^* = q_\infty + i \frac{\gamma}{2} \cot(i\eta_v) = q_\infty + i \frac{\gamma}{2} \coth(\eta_v) \quad (6.21)$$

velocità che potrà essere riespressa secondo il formalismo hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{\xi}_v = \frac{\partial H_{\zeta_v}}{\partial \eta_v} = q_\infty + i\frac{\gamma}{2} \coth(\eta_v) \\ \dot{\eta}_v = -\frac{\partial H_{\zeta_v}}{\partial \xi_v} = 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

Per successiva integrazione si ottiene l'espressione di H_{ζ_v}

$$H_{\zeta_v}(\zeta) = q_\infty + \frac{\gamma}{2} \log |\sinh(\eta_v)| \quad (6.23)$$

Ed infine sostituendo la (6.23) nella (6.20)

$$H_v(\zeta) = q_\infty + \frac{\gamma}{2} \left(\log |\sinh(\eta_v)| + \log \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| \right) \quad (6.24)$$

6.6 Studio di alcune geometrie della cresta

Al variare dei parametri A e ζ_1 si possono ricreare diverse geometrie per la cresta. Fra i vari casi analizzati proponiamo alcune esemplificazioni ritenute in qualche modo interessanti. Per ognuna di queste si sono ricercate le posizioni di equilibrio per il vortice e si è studiata la stabilità delle configurazioni trovate.

La ricerca delle posizioni di equilibrio per il vortice richiede la soluzione, ottenuta per via numerica, dell'equazione di variabile complessa (6.19). È a tal scopo conveniente intraprendere dapprima una ricerca per via grafica, tracciando, per la funzione complessa a primo membro della (6.19), le linee di livello a quota zero per la parte reale e per la parte immaginaria sul piano trasformato ζ , sovrapponendo poi le due curve sullo stesso diagramma. Le eventuali intersezioni di queste ultime corrisponderanno alle soluzioni cercate. Dallo studio grafico si ottiene sia una efficace visione d'insieme, sia un ottimo valore di tentativo per una successiva ricerca degli zeri della (6.19) con le tecniche tradizionali del calcolo numerico.

Determinata con adeguata precisione la posizione dei punti di equilibrio per ognuno di essi si risale alla corrispondente intensità del vortice mediante una delle (6.18). È quindi possibile condurre l'analisi della stabilità delle singole configurazioni di equilibrio determinando, come illustrato in §5.4.2, la funzione hamiltoniana del vortice ed osservando l'andamento delle curve di livello nell'intorno della posizione di equilibrio.

Illustriamo di seguito i risultati relativi alle configurazioni scelte. Precisiamo che tutti i casi hanno periodicità prefissata e pari a 2π . I risultati vengono riassunti in tabella 6.1.

6.6.1 Cresta M1

La prima geometria della cresta analizzata, arbitrariamente denominata *cresta M1*, è una pura perturbazione della geometria piana. Come raffigurato in figura 6.2 la cuspidè si protende verso il campo di moto con un'altezza non superiore al due per cento del periodo.

Si determinano ben quattro posizioni $\zeta_A, \zeta_B, \zeta_C, \zeta_D$ di equilibrio per il vortice.

La posizione ζ_A , la più vicina alla parete, rappresenta un equilibrio stabile per il vortice, poichè soddisfa alla (6.19), come graficamente evidenziato in figura 6.3, e la funzione hamiltoniana del vortice presenta un punto ellittico (figura 6.4). Questa configurazione di equilibrio stabile può essere intesa come un locale 'effetto-cornice' provocato dalla cuspidè e dalla geometria

della parete a valle della punta. Va inoltre osservato che il bacino di stabilità della soluzione è molto piccolo, e perciò la stabilità della configurazione è del tutto marginale.

La posizione ζ_C , la più lontana dalla parete, risulta anch'essa una configurazione stabile (figure 6.3 e 6.6). La sua esistenza scaturisce dalla presenza della singolarità (la cuspidi) e dalla periodicità del campo di moto. Come risultato si ha che la linea di corrente che parte e ritorna sul punto di cuspidi, è costretta a chiudersi sui contorni laterali, periodici, del campo. Una posizione ζ_B (figura 6.3), intermedia tra ζ_A e ζ_C , è ancora una soluzione di (6.19), ma le relative linee di livello dell'hamiltoniana del vortice mostrano un punto iperbolico (figura 6.5), dunque instabile.

La posizione ζ_D (figura 6.3) è una soluzione doppia ed è la più singolare in quanto il vortice verrebbe intrappolato a monte della cuspidi (figura 6.7). La stabilità della configurazione è ancora più marginale di quella in A (figura 6.4).

Il fatto poi che si siano determinati due punti stabili consecutivi non deve stupire. Non vengono infatti considerate tutte le configurazioni di equilibrio per il vortice, ma solo quelle che soddisfano anche alla condizione di Kutta. Questi sono in effetti i presupposti che hanno portato alla equazione (6.19), le cui soluzioni stiamo ora discutendo.

6.6.2 Cresta M2

La cresta M2, malgrado la forma tormentata, non presenta un comportamento particolarmente diverso dalla cresta M1. I punti di equilibrio sono tre, come di evince dalla figura 6.3 due dei quali sono stabili (la configurazione A, in fig. 6.8, e la configurazione C, in fig.6.10), mentre un punto di equilibrio intermedio B è instabile (fig.6.9).

6.6.3 Creste M3 e M4

Le creste M3 e M4 si protendono nel flusso per un'altezza pari a circa un terzo del periodo (figura 6.2). La cresta M4 è caratterizzata da versanti simmetrici e di legge esponenziale, mentre la cresta M3 presenta una cuspidi con tangente non verticale.

Entrambe presentano un unico punto di equilibrio per il vortice (figura 6.3). L'analisi dell'andamento della funzione hamiltoniana in tali configurazioni evidenzia l'esistenza di un punto ellittico (figure 6.11 e 6.12), rappresentativo di un equilibrio stabile.

Sui risultati ottenuti per la cresta simmetrica M4 è utile osservare che la configurazione di equilibrio del vortice è equidistante da due cuspidi successive ed è un puro effetto della periodicità del campo. Infatti avevamo determinato in 5.4.3 che nel caso della cornice simmetrica non esisteva alcun punto di equilibrio in prossimità della stessa.

Comparando i risultati relativi alle geometrie prospettate si nota in tutte l'esistenza di una soluzione di equilibrio stabile per il vortice, posta ad una distanza dalla parete pari (fatte le debite normalizzazioni) a circa un terzo del passo tra le creste; e questo sotto un ampio margine di variazione di parametri quali l'altezza delle creste, la pendenza o la curvatura della parete. Il fatto che una geometria che si discosta lievemente dalla parete piana sia in grado di sortire effetti analoghi ad una forte perturbazione, quale potrebbe essere la cresta M3, è legata alla presenza di una singolarità geometrica: la cuspidi. Una parete infatti che presenti una singolarità geometrica non è una mera perturbazione di una parete simile che ne sia priva.

All'aumentare dell'altezza della cresta il vortice viene intrappolato più vicino alla parete mentre cresce la sua intensità. Si nota inoltre che, fra quelle prospettate, alla cresta simmetrica corrisponde l'intensità maggiore per il vortice intrappolato (tabella 6.1). È chiaro comunque

che non bisogna prescindere dalla semplicità del modello adottato. In particolare nel caso della geometria M1 la consistenza dei fenomeni viscosi a parete fa cadere in difetto l'ipotesi che il flusso possa ritenersi essenzialmente non viscoso e che le quindi interazioni tra strutture vorticoso siano esclusivamente di tipo inerziale.

Tabella 6.1. Posizioni di equilibrio ed intensità del vortice.

			γ_v	ξ_v	η_v	X_v	Y_v
M1	A	m. stabile	-0.301	0.2528	0.1359	0.2129	1.1327
	B	instabile	-1.401	1.5438	0.8672	1.5385	1.8609
	C	stabile	-1.721	2.6981	1.2710	2.7005	2.2649
	D	m. stabile	-1.465	-1.6814	0.9369	-1.6759	1.9425
M2	A	m. stabile	-0.498	0.3711	0.1627	0.0909	1.5849
	B	instabile	-0.642	0.5787	0.3359	0.2990	1.6605
	C	stabile	-1.914	2.9824	1.1532	2.9724	1.9530
M3		stabile	-1.985	2.9058	1.0948	2.9642	1.7610
M4		stabile	-2.000	3.1415	1.0986	3.1415	1.7653

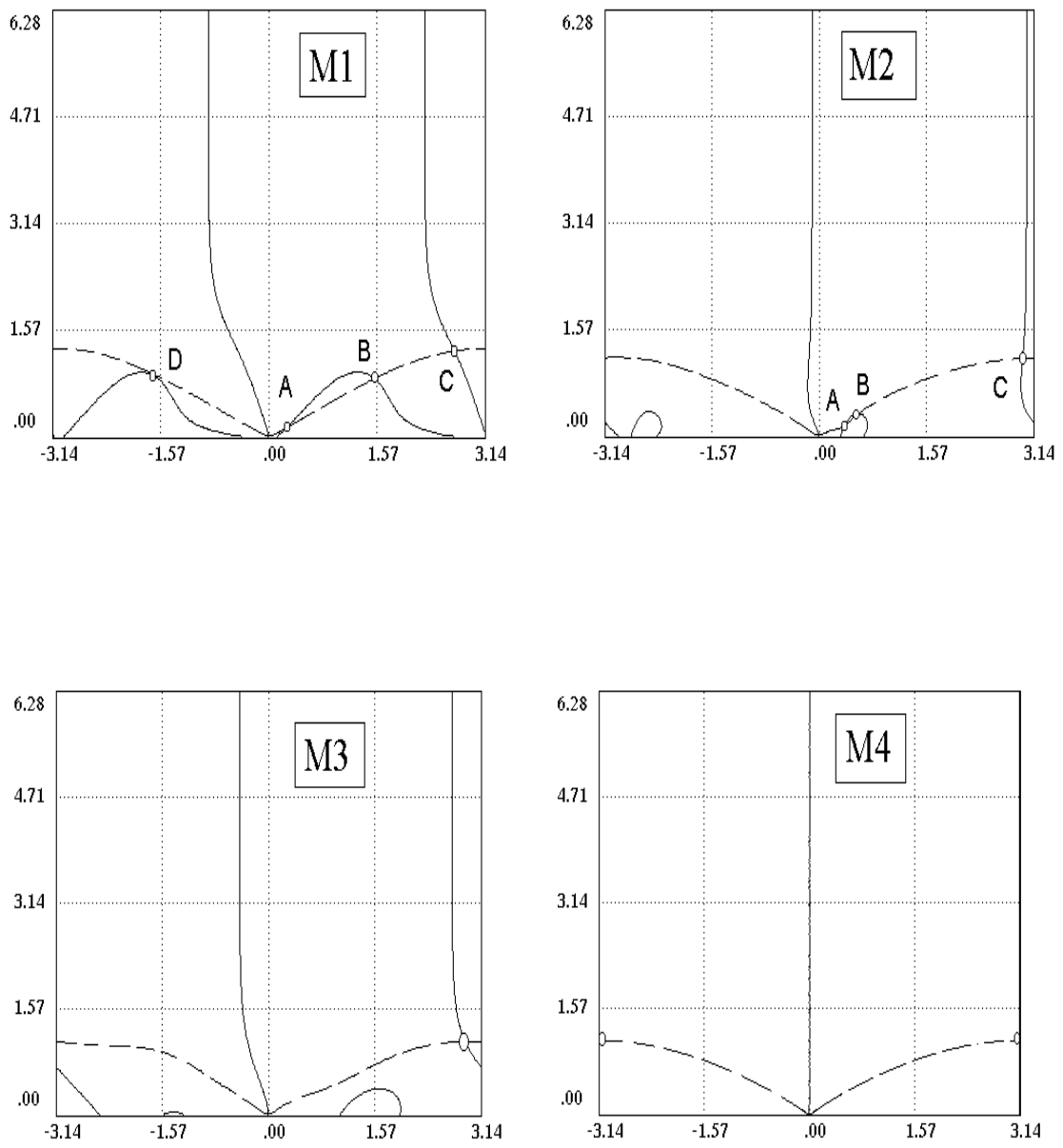


Figura 6.3. Posizioni di equilibrio per il vortice sul piano trasformato ζ . Linea continua: $\Re(z_v^*) = 0$. Linea a tratti: $\Im(z_v^*) = 0$.

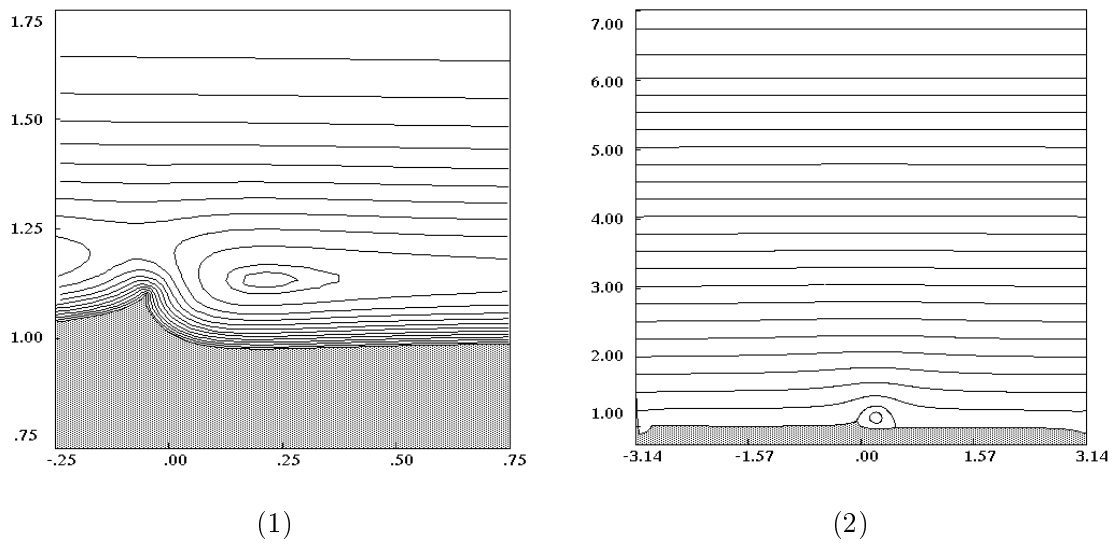


Figura 6.4. Configurazione di equilibrio M1-A. (1) - Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.

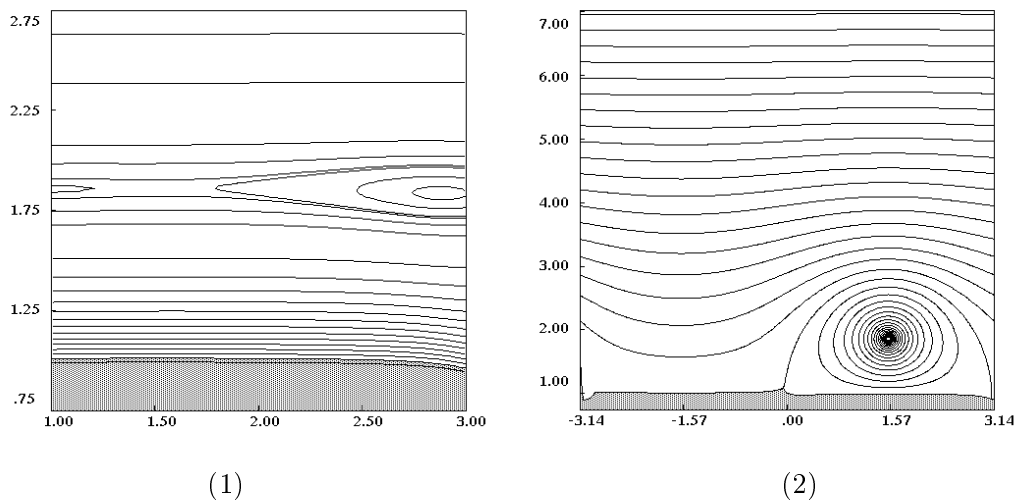


Figura 6.5. Configurazione di equilibrio M1-B. (1) - Curve di livello della hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.

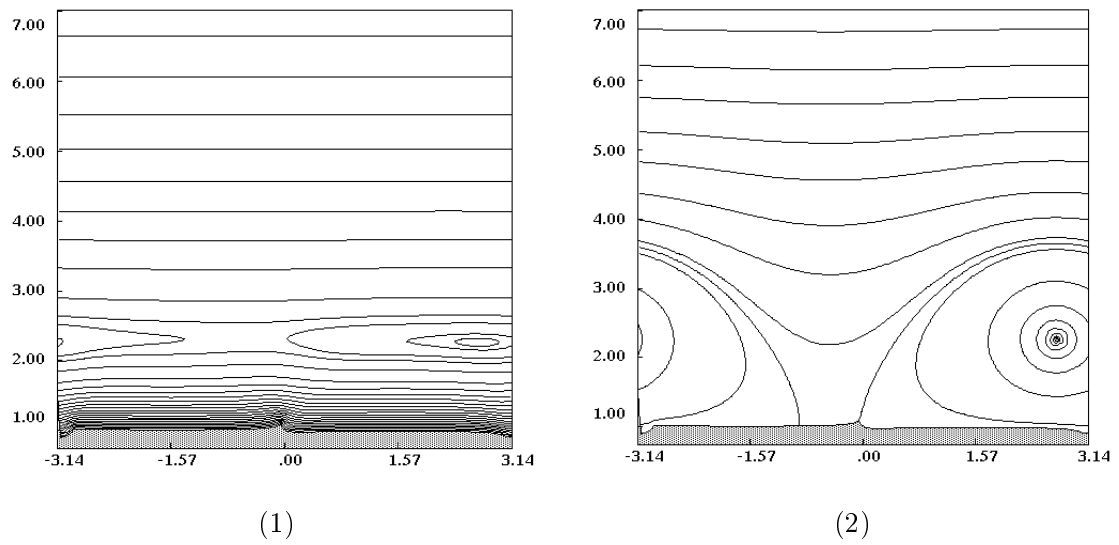


Figura 6.6. Configurazione di equilibrio M1-C. (1) - Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.

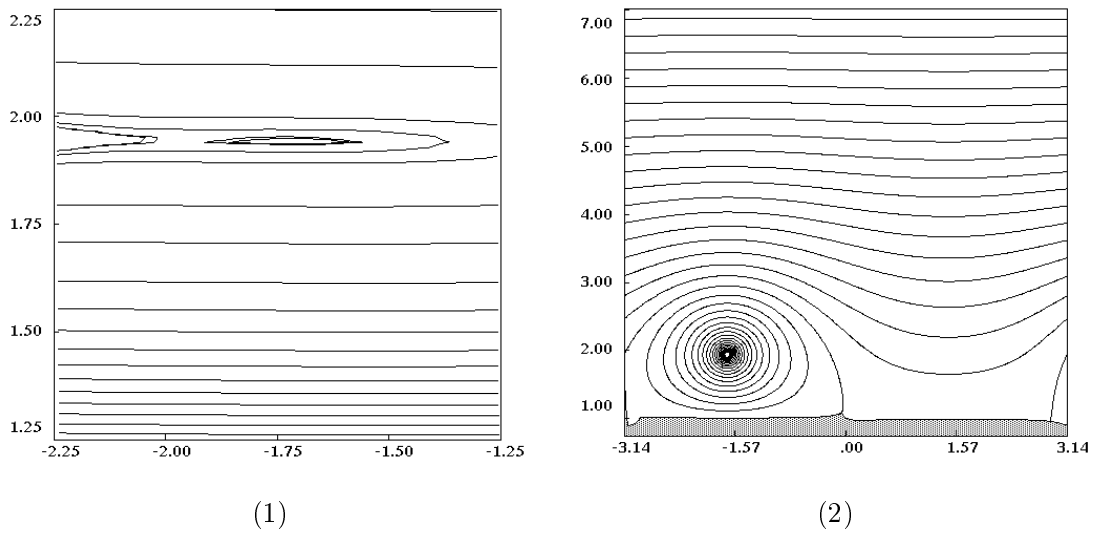


Figura 6.7. Configurazione di equilibrio M1-D. (1) - Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.

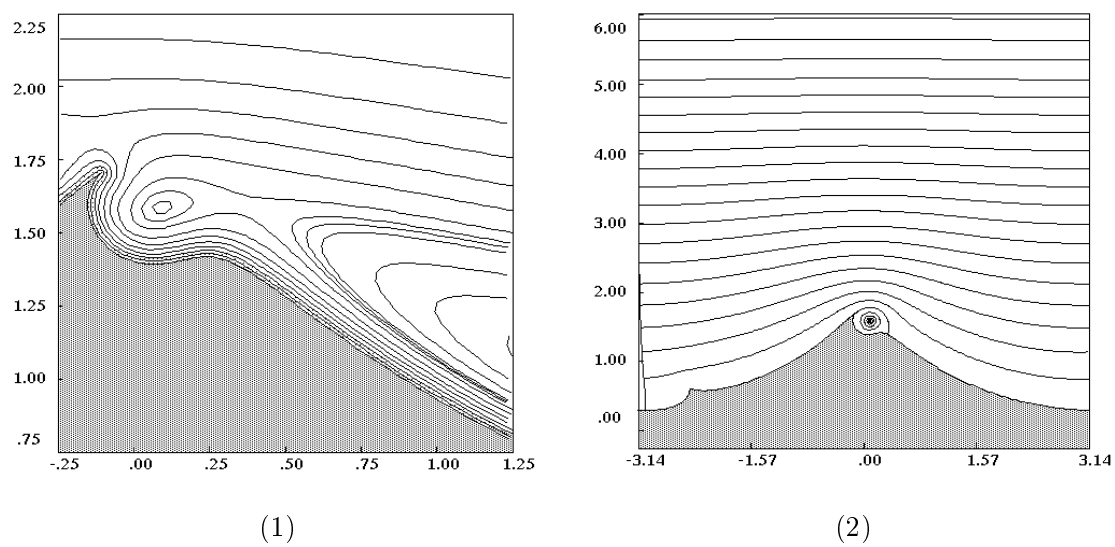


Figura 6.8. Configurazione di equilibrio M2-A. (1) - Curve di livello della hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.

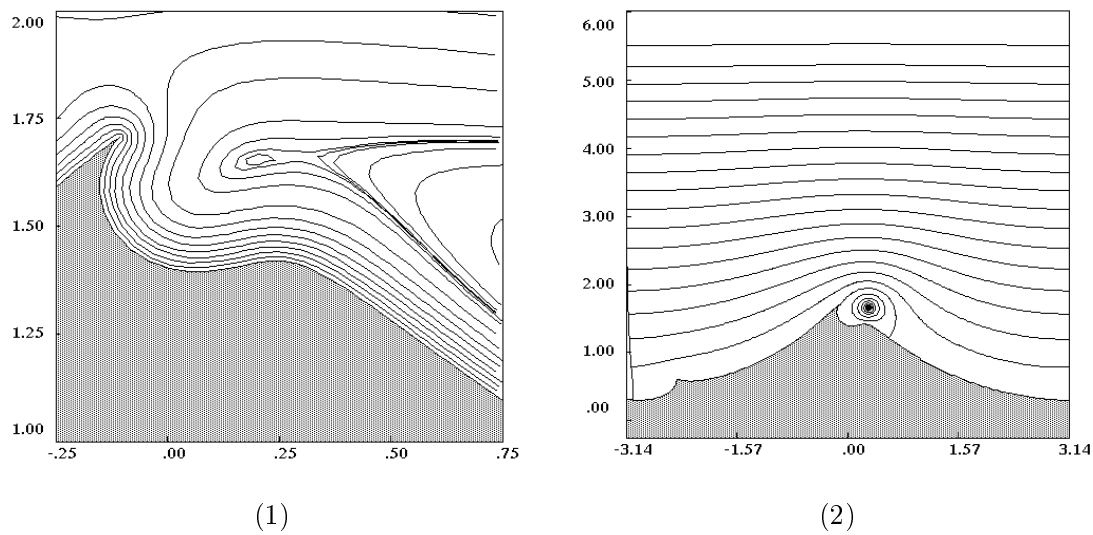


Figura 6.9. Configurazione di equilibrio M2-B. (1) - Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.

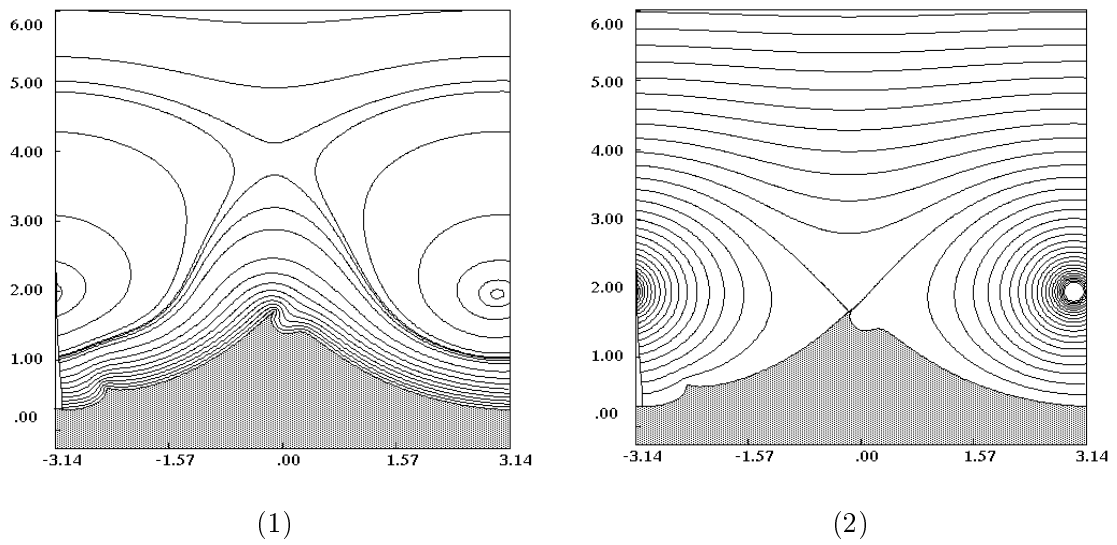


Figura 6.10. Configurazione di equilibrio M2-C. (1) - Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.

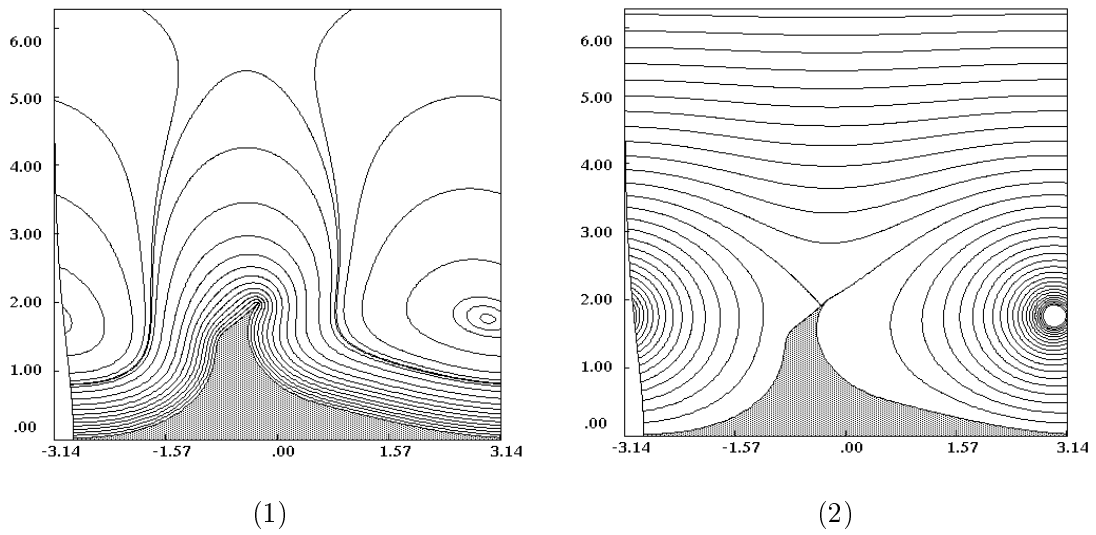


Figura 6.11. Configurazione di equilibrio M3. (1) - Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.

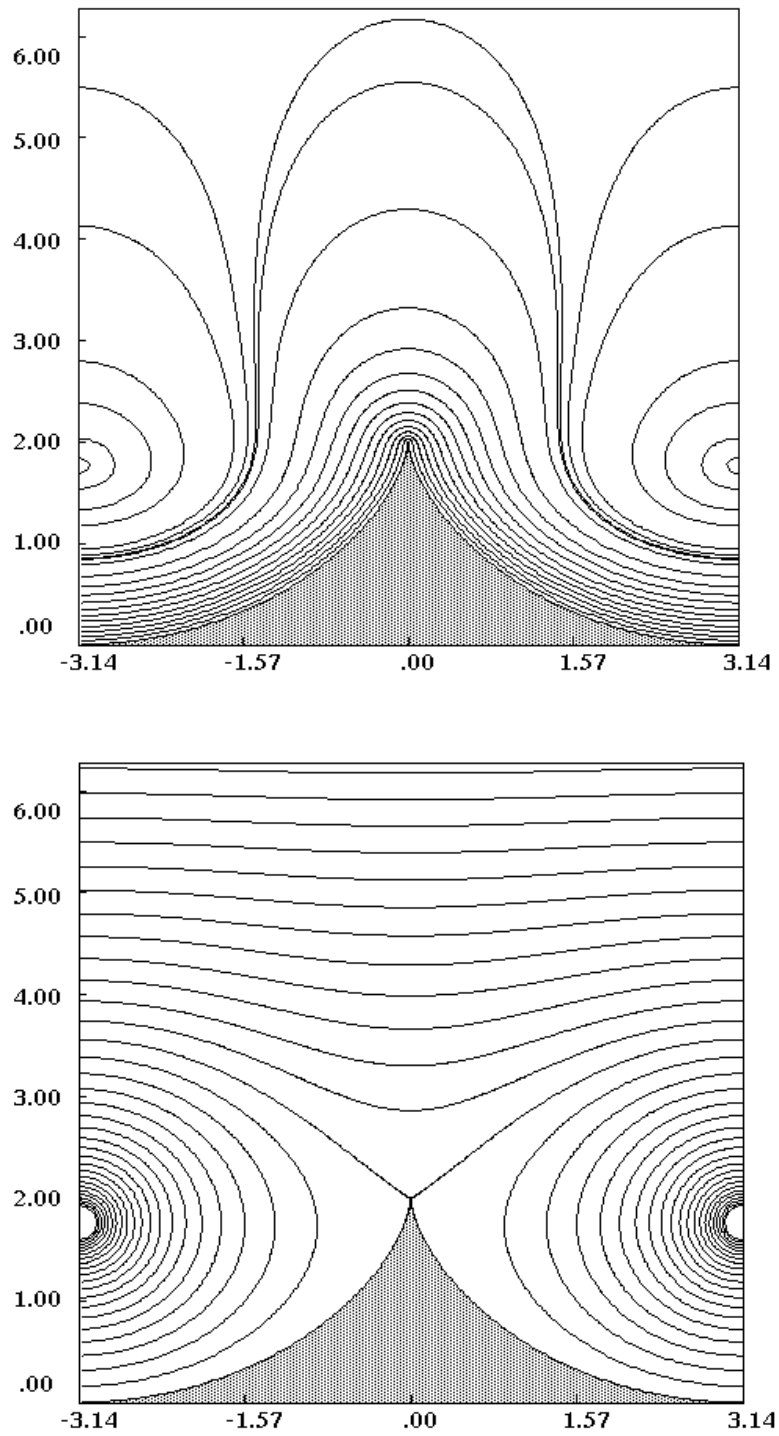


Figura 6.12. Configurazione di equilibrio M4. Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice e linee di corrente.

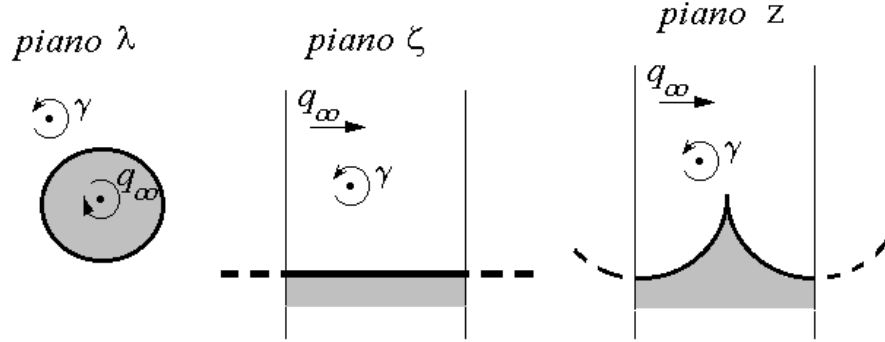


Figura 6.13. Trasformazione conforme cerchio - semistriscia - cresta periodica

6.7 Il transitorio di avviamento

6.7.1 Imposizione delle condizioni al contorno

La metodologia numerica sviluppata nel capitolo 4 accelera il calcolo della dinamica di mutua induzione dei vortici sostituendo alla legge di interazione del vortice il suo sviluppo in serie di multipoli, laddove questo converge rapidamente. La tecnica non è per nulla generale nel senso che a leggi di interazione diverse corrispondono sviluppi multipolari diversi e non è detto che in ogni caso per questa via il metodo porti ad effettivi vantaggi o sia praticabile. Nel nostro caso l'imposizione di contorni periodici porta di fatto all'alterazione della legge di interazione da $f(\zeta) = 1/\zeta$ in $f(\zeta) = \cot(\zeta)$. La tecnica delle trasformazioni conformi consente però di condurre il calcolo su di un altro piano trasformato, nel quale la legge di interazione tra le singolarità sia ancora formalmente quella del vortice puntiforme. Di fatto dunque una trasformazione conforme di piani permette una naturale imposizione delle condizioni al contorno, rendendo applicabile la tecnica di accelerazione anche in casi in cui essa non sarebbe direttamente utilizzabile nella formulazione originaria o sarebbe del tutto inutilizzabile perchè, ad esempio, le proprietà di convergenza dei relativi sviluppi in serie divengono pessime.

Consideriamo la seguente relazione

$$\zeta = i \log(\lambda) \quad (6.25)$$

Essa trasforma conformemente (fig. 6.13) la regione esterna ad un cerchio nell'interno di una semistriscia periodica di ampiezza pari a 2π .

Dall'invarianza del potenziale complesso rispetto ad una trasformazione conforme, noto $W(\zeta)$ si deduce che la corrispondente espressione sul piano λ . Sul piano ζ è

$$W(\zeta) = q_\infty \zeta - \sum_{j=1}^N i\gamma_j \log \left[\sin \left(\frac{\zeta - \zeta_j}{2} \right) \right] + \sum_{j=1}^N i\gamma_j \log \left[\sin \left(\frac{\zeta - \zeta_j^*}{2} \right) \right] \quad (6.26)$$

conseguentemente sul piano λ

$$W(\zeta) = iq_\infty \log \lambda - \sum_{j=1}^N i\gamma_j \log \left(\frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda - 1/\lambda_j^*} \right) \quad (6.27)$$

In particolare osserviamo che una corrente uniforme, parallela all'asse ξ_1 si trasforma sul piano del cerchio in un vortice di intensità $\kappa = -q_\infty$ posto nell'origine.

In virtù della polidromia del logaritmo in campo complesso, un vortice sul piano λ viene trasformato in una serie infinita di vortici sul piano ζ .

Applicando questa ulteriore trasformazione del campo abbiamo ricondotto il moto di una schiera di vortici sul piano z a quello di un vortice attorno ad un cerchio di raggio unitario. Riassumiamo di seguito le espressioni delle funzioni che permettono di mettere in relazione, secondo le consuete notazioni, le grandezze relative a due campi di moto

$$f(\lambda) = i \left(\log(\lambda) + \frac{A}{\lambda} + 1 \right) + \frac{B}{\sin(g)} \quad (6.28)$$

$$f'(\lambda) = \frac{i}{\lambda} \left[1 - \frac{A}{\lambda} - B \frac{\cos(g)}{\sin^2(g)} \right] \quad (6.29)$$

$$R(\lambda) = \frac{i}{\lambda} \left[\left(\frac{A}{\lambda} + iB \frac{1 + \cos^2(g)}{\sin^3(g)} \right) \left(1 - \frac{A}{\lambda} - B \frac{\cos(g)}{\sin^2(g)} \right)^{-1} \right] \quad (6.30)$$

dove $g = g(\lambda) = i \log(\lambda) - \zeta_1$. La relazione intercorrente tra A e B e che garantisce l'esistenza della cuspidè è

$$B = (1 - A) \frac{\sin^2(\zeta_1)}{\cos(\zeta_1)} \quad (6.31)$$

A e ζ_1 rimangono due parametri di forma.

In maniera del tutto analoga a quanto fatto nel capitolo 5 possiamo ora condurre per via numerica, secondo il metodo a vortici, la simulazione dell'avviamento impulsivo del campo di moto.

Dalla quiete la velocità asintotica assuma istantaneamente valore unitario. La rimozione della singolarità fluidodinamica provocata dalla presenza della cuspidè viene effettuata attraverso la generazione di una singolarità libera nel campo, in prossimità della punta. Più precisamente un vortice, di intensità tale da soddisfare alla condizione di Kutta all'istante di generazione, viene immesso nel campo di moto. Non essendo in generale il vortice in una posizione di equilibrio, si innescherà un transitorio. Ad intervalli di tempo prefissati vengono introdotti in successione, e seguiti numericamente lungo le loro traiettorie, ulteriori vortici di intensità tale che, all'istante di emissione, sia soddisfatta la condizione di Kutta. In questo modo si ottiene una descrizione discreta sia degli strati sottili di vorticità che si separano dalla punta, sia della struttura vorticoso che si forma nel vano delimitato da due creste successive e che rimane intrappolata.

6.7.2 Intensità dei vortici nascenti

Il modello di generazione di vorticità adottato è il metodo di emissione a punto fisso. Fissato il punto di emissione z_e in prossimità del punto di separazione, l'intensità del vortice ivi nascente deve essere tale da soddisfare alla condizione di Kutta sul punto di cuspidè z_c . È opportuno che il punto di emissione giaccia sulla bisettrice della cuspidè stessa, perchè in tal caso la velocità su di essa indotta rimane costante al variare della distanza di emissione.

Sul piano trasformato λ la condizione di Kutta impone

$$\left(\frac{dW}{d\lambda} \right)_{\lambda_c} = 0 \quad (6.32)$$

che, considerando un campo in cui siano già presenti N vortici, potremo scrivere come

$$\frac{iq_\infty}{\lambda_c} - i\gamma_{N+1} \left(\frac{1}{\lambda_c - \lambda_{N+1}} - \frac{1}{\lambda_c - 1/\lambda_{N+1}^*} \right) - \sum_{k=1}^N i\gamma_k \left(\frac{1}{\lambda_c - \lambda_k} - \frac{1}{\lambda_c - 1/\lambda_k^*} \right) \quad (6.33)$$

ed essendo $\lambda_c = 1$ e $\lambda_{N+1} = \lambda_e$, otteniamo infine

$$\frac{\gamma_{N+1}}{q_\infty} = \frac{1 + \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{q_\infty} \frac{1 - |\lambda_k|^2}{|1 - \lambda_k|^2}}{\frac{1 - |\lambda_e|^2}{|1 - \lambda_e|^2}} \quad (6.34)$$

mediante la quale rimane definita l'intensità del vortice nascente.

6.7.3 Determinazione del campo di velocità

La simulazione viene condotta interamente sul piano trasformato λ , determinando in esso le velocità dei vortici e, per integrazione numerica, le loro traiettorie. Queste ultime forniscono le successive rappresentazioni del sistema in evoluzione.

La velocità del j -esimo vortice libero sul piano trasformato λ è

$$\dot{\lambda}_j^* = \frac{iq_\infty}{\lambda_j} + i\gamma_j \left(\frac{1}{\lambda_j - 1/\lambda_j^*} \right) - \sum_{k=1}^N i\gamma_k \left(\frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} - \frac{1}{\lambda_j - 1/\lambda_k^*} \right) \quad (6.35)$$

alla quale occorre apportare la correzione di Routh

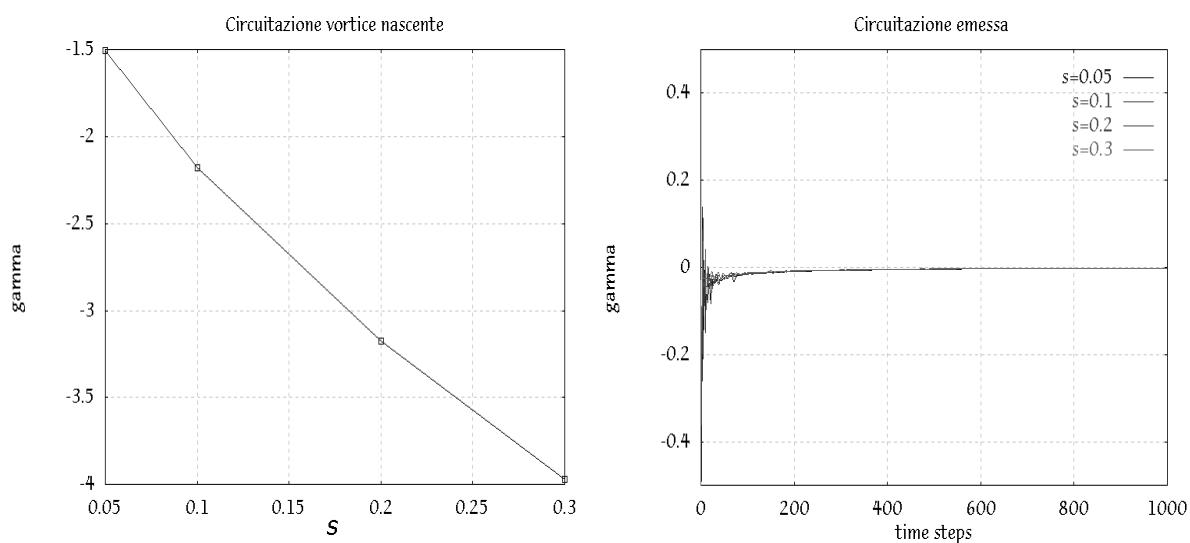
$$\frac{d\lambda_j^*}{dt} = \left[\dot{\lambda}_j^* + i\frac{\gamma_j}{2} R(\lambda_j) \right] J(\lambda_j) \quad (6.36)$$

Per la trattazione dell'interazione tra vortici vicini viene utilizzata la funzione di smoothing (2.50), caratterizzante il blob di Nordmark, blob dell'ottavo ordine a supporto limitato. La (2.50) modifica la legge di interazione solo per $r \leq \delta$, distanza tra due vortici da valutarsi sul piano fisico z .

Lo schema numerico di integrazione adottato è il seguente

$$\lambda(t + \delta t) = \lambda(t) + \frac{1}{2} \left[3\frac{d\lambda}{dt}(t) - \frac{d\lambda}{dt}(t - \delta t) \right] dt \quad (6.37)$$

ed è del secondo ordine. Lo schema soddisfa ai requisiti di reversibilità espressi in [121] e richiede solo le informazioni relative a due tempi differenti. Il passo di integrazione utilizzato nelle simulazioni è compreso tra $0.001 \leq \Delta t \leq 0.01$. Il punto di emissione viene collocato sulla bisettrice della cuspidale, che sul piano trasformato λ corrisponde a un punto dell'asse reale. Le prove numeriche effettuate per stabilire l'importanza del punto di emissione dei vortici hanno mostrato che esso assume rilevanza nei primissimi passi in cui si modella l'iniziale vortice di avviamento mentre il suo successivo sviluppo ne è indipendente. La figura 6.14 evidenzia inoltre che anche in questo caso la circolazione del vortice emesso varia pressoché linearmente con la distanza di emissione. Ciò significa che la circolazione per unità di lunghezza di scia può essere ritenuta pressoché costante per un buon tratto. Questa non può che essere una

Figura 6.14. Influenza della distanza s di emissione.

caratteristica favorevole in quanto riduce la distanza di emissione al rango di una scala locale di cui ben presto il sistema perde memoria.

Nella scelta del parametro di cutoff si è posto $\delta_{blob} \leq s$ per evitare che l'intensità del vortice nascente potesse dipendere dalla funzione di smoothing utilizzata. In particolare nelle simulazioni si emette vorticità ad ogni passo, adottando valori di δ_{blob} che garantiscano il rispetto dei requisiti di convergenza del metodo a vortici (i blob devono in parte sovrapporsi) e fissando di conseguenza il valore della distanza di emissione dalla cuspidale.

6.7.4 Analisi dei risultati

Viene analizzato il caso della cresta M4, che è caratterizzata da fianchi simmetrici di andamento esponenziale. Il relativo modello di flusso potenziale determina una configurazione di equilibrio stabile per il vortice, con il quale si vuole identificare l'intera regione di ricircolazione che si forma subito a valle di ogni cuspidale. Rispetto a quanto osservato nei casi riportati nel capitolo 5, la simulazione (figure 6.16 e seguenti) mette in evidenza che la dinamica delle strutture vorticosi, che si separano dal punto di cuspidale e che procedono nella direzione della corrente, viene presto influenzata dalle condizioni di periodicità del campo di moto. Negli istanti successivi all'avviamento impulsivo del campo si assiste alla nascita della superficie vorticosa che si avvolge a spirale e dà vita alla struttura primaria. Successivamente questa invade il campo continuando ad attorcigliarsi su se stessa (fig. 6.17).

Gli strati più interni danno origine ad un nucleo centrale, mentre in quelli più esterni si manifestano i fenomeni di instabilità di Kelvin-Helmholtz. L'evoluzione iniziale, universale, della struttura vorticosa, viene progressivamente modificata dall'interazione con la forma della parete che confina inferiormente il campo di moto. L'avvicinarsi inoltre della struttura alla cresta successiva provoca un forte perturbazione che rompe la struttura vorticosa primaria del vano successivo e dà origine al distacco di una nuova struttura, di segno concorde alla prima. La struttura primaria, dal canto suo, viene deflessa e inverte il proprio moto, tornando verso la cuspidale che l'aveva generata. In prossimità di quest'ultima, essa rimane compressa tra la

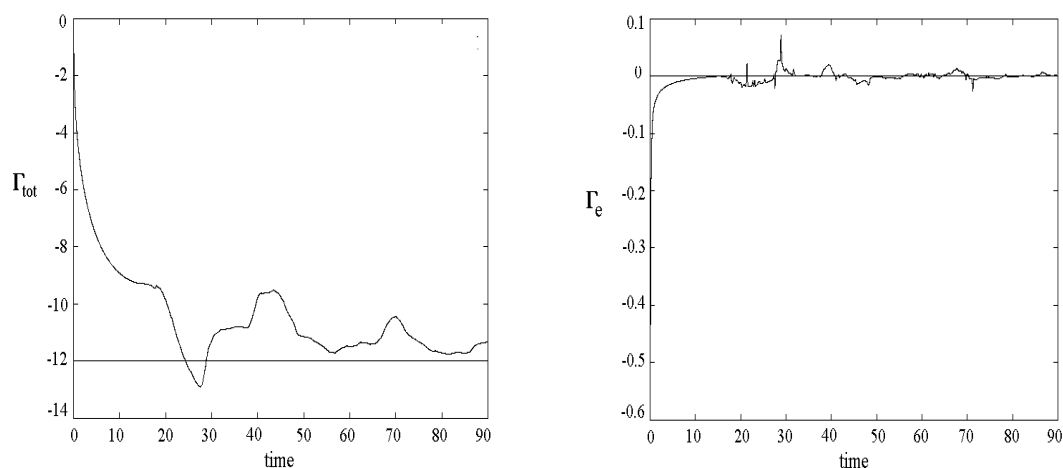


Figura 6.15. Andamento nel tempo della circolazione totale e della circolazione dell'ultimo vortice emesso.

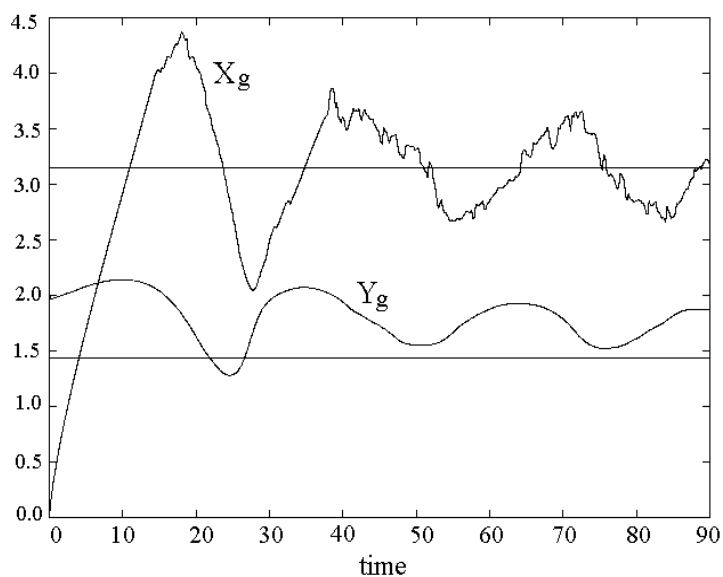


Figura 6.16. Andamento nel tempo di X_g e Y_g e loro confronto con la posizione di un unico vortice in equilibrio.

parete ed il vortice secondario, con il quale entra in forte interazione. A tale interazione segue infine la generazione di una nuova struttura, di segno opposto alle prime due.

Il processo continua ciclicamente mentre le strutture che si generano e si spezzano tendono ad occupare l'intera regione a valle della cuspid. La forma della parete esercita il proprio effetto regolarizzante mantenendo confinata in una limitata regione del campo le strutture

vorticose, convertendole ed inglobandole nella zona di ricircolazione che si forma nel vano individuato tra due cuspidi successive.

Benché il moto non possa che risultare stazionario solo in media, le previsioni del modello potenziale vengono confermate. La circolazione complessiva della bolla vorticoso che staziona sul lato a valle della cuspidi è prossima a quella dell'unico vortice puntiforme.

Il baricentro della struttura vorticoso, definito come

$$X_g + iY_g = \left(\sum_{j=1}^N \gamma_j z_j \right) \left(\sum_{j=1}^N \gamma_j \right)^{-1} \quad (6.38)$$

assume una posizione oscillante vicina a quella prevista per il vortice, mentre il valore di circolazione è minore. L'effetto della viscosità, su di una scala di tempi sicuramente più lunga di quella su cui avvengono i fenomeni inerziali, provvederà a ridistribuire la vorticità in seno alla bolla sino a trasformarla, intuitivamente, in una regione a vorticità costante.

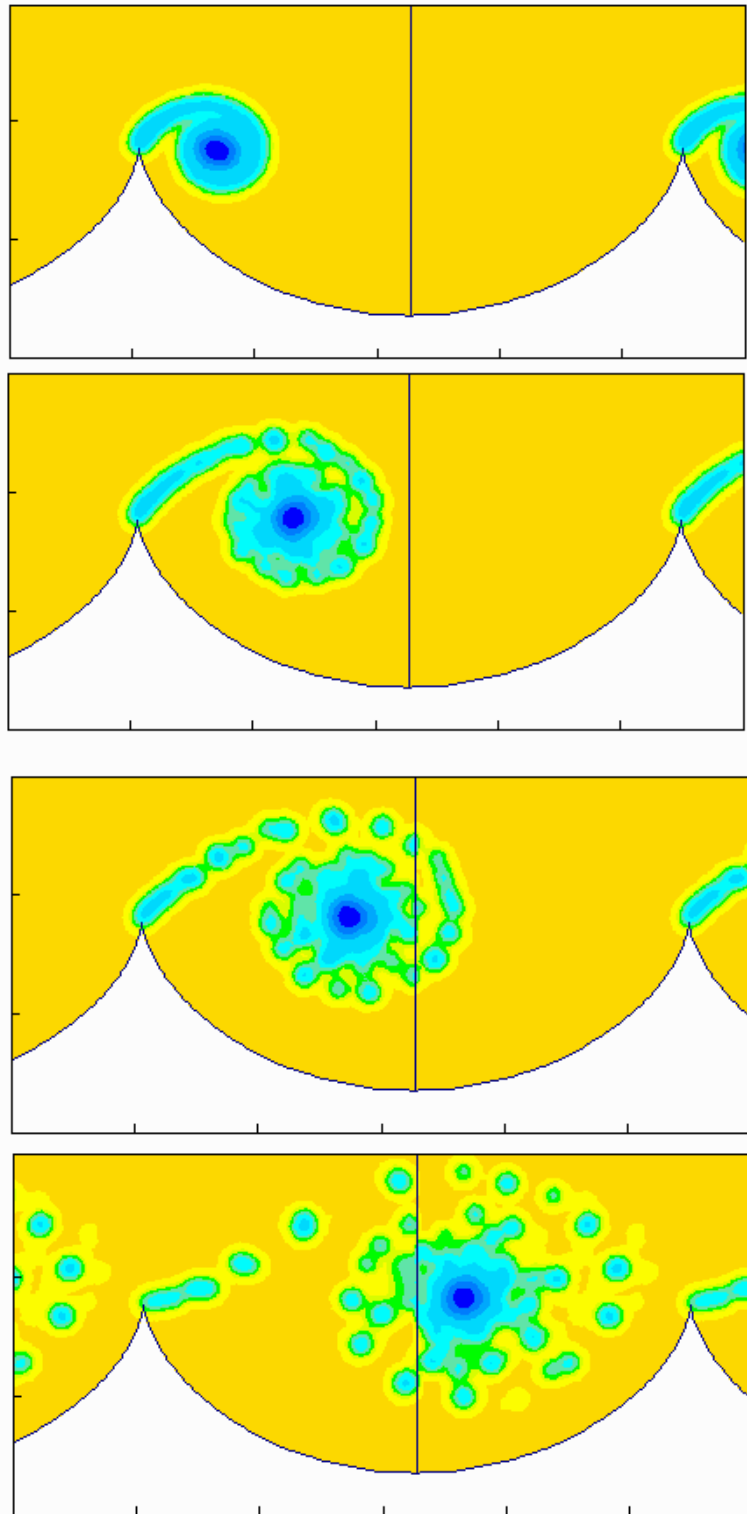


Figura 6.17. Sequenze del campo di vorticità.

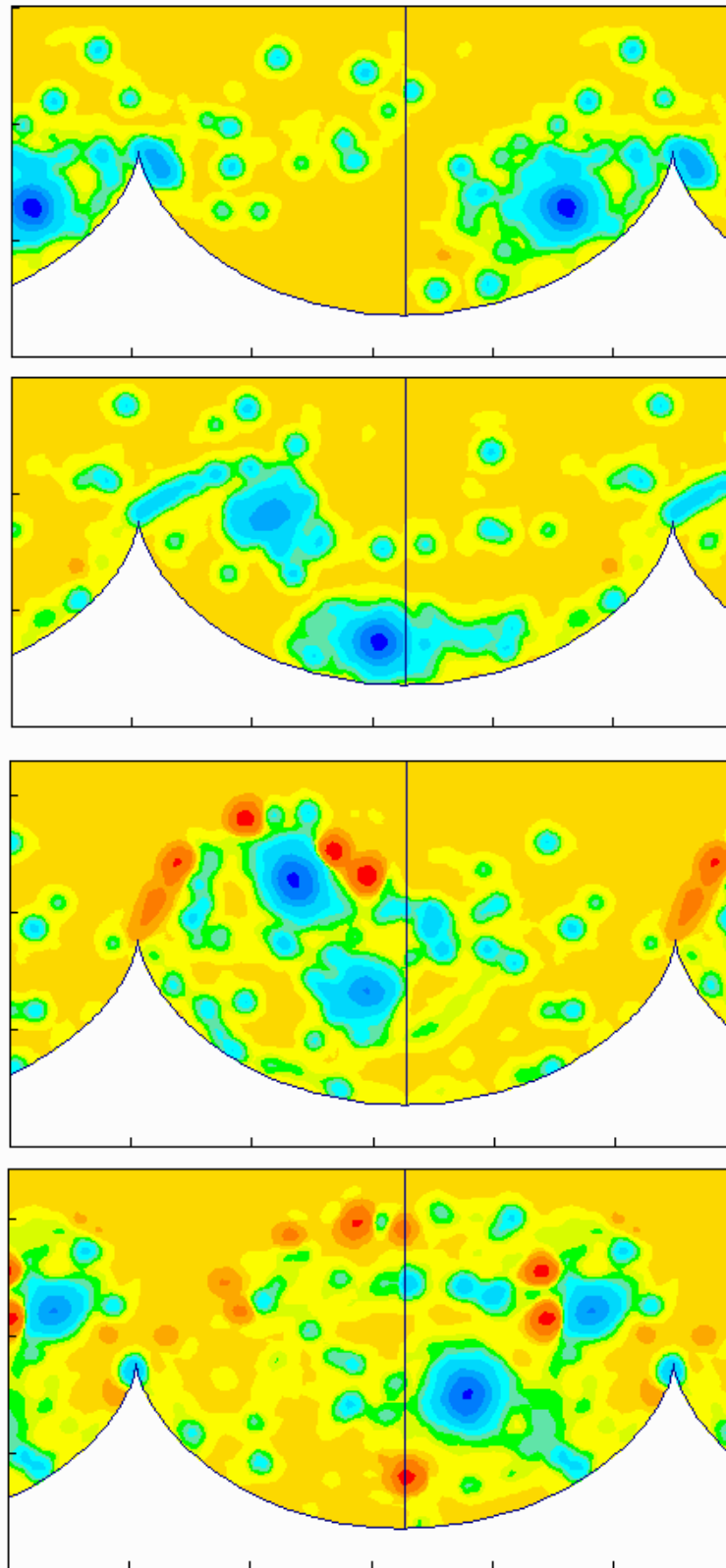


Figura 6.18. Sequenze del campo di vorticità.

Capitolo 7

Il Rotore

7.1 Introduzione

In questo capitolo si vuole studiare la dinamica delle strutture vorticosse prodotte da un corpo in rotazione. Analizzeremo il campo di moto che si instaura attorno ad un corpo cilindrico (che per semplicità definiremo *rotore*), provvisto di un numero discreto n di sporgenze acuminato, spaziate periodicamente e terminanti a cuspide, posto impulsivamente in rotazione con velocità angolare costante nel fluido inizialmente in quiete.

Anche in questo caso il problema viene dapprima affrontato con una modellizzazione di tipo potenziale. Le motivazioni che hanno condotto allo studio del flusso su di un corpo così atipico sono molteplici. Dal punto di vista fisico esso possiede una ulteriore dimensione caratteristica, definibile ad esempio con un raggio medio (per i problemi sinora trattati non è infatti definibile una dimensione caratteristica diversa dall'altezza delle corrugazioni superficiali o dalla loro spaziatura).

Dal modello si vorrebbero trarre informazioni sulla dinamica di larga scala delle strutture vorticosse su di un corpo in rotazione. Ci si chiede poi se anche in questo caso sia possibile stabilizzare zone di ricircolazione attorno al corpo.

Dal punto di vista metodologico inoltre questo problema viene sviluppato come applicazione particolare di una tecnica più generale di studio di flussi su corpi animati da un moto di rototraslazione in seno ad un fluido in quiete all'infinito (cfr. Milne-Thomson[136]). Questa tecnica rende pressoché immediata l'estensione del metodo a vortici sviluppato (e della relativa tecnica di accelerazione) ai sopra citati problemi.

Di seguito analizzeremo quindi il transitorio di impulsiva messa in rotazione del rotore.

7.2 La trasformazione conforme

La geometria del corpo in esame è ottenuta trasformando conformemente un cerchio di raggio unitario sul piano ζ in uno degli n settori angolari di cui è costituito il rotore, mediante la seguente funzione di variabile complessa

$$z(\zeta) = \zeta^{1/n} \exp\left(\frac{a}{\zeta}\right) \quad (7.1)$$

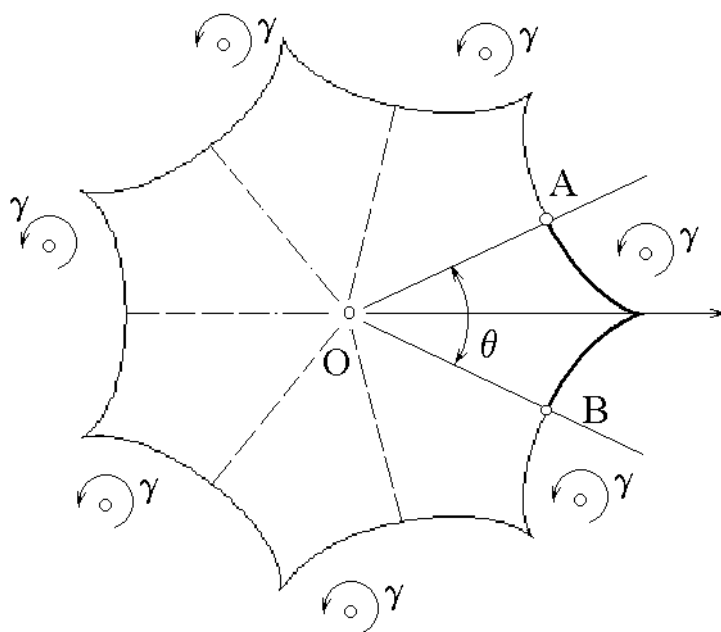


Figura 7.1. Schema del rotore

nella quale determiniamo il valore del parametro a in modo da realizzare un punto di cuspidè in $z(\zeta = 1)$. Dovrà essere necessariamente

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{z}{\zeta} \left(\frac{1}{n} - \frac{a}{\zeta} \right) = 0 \quad (7.2)$$

dalla quale deduciamo

$$a = \frac{1}{n} \quad (7.3)$$

7.3 Determinazione del potenziale complesso

Il campo di moto attorno ad un corpo di forma generica, animato da un moto di traslazione e/o rotazione con velocità angolare costanti, può essere ricondotto al campo di moto attorno ad un cilindro circolare, fisso, di raggio unitario.

Il potenziale complesso nel piano del cerchio sarà caratterizzato dalla presenza di un termine comprensivo e del moto di rotazione e del fatto che il corpo in rotazione non è un cilindro circolare. L'espressione di tale potenziale è ricavabile mediante il procedimento analitico descritto in Milne-Thomson[136].

Determiniamo inizialmente quale sia, nel nostro caso, l'espressione del termine potenziale $W_{\Omega}(\zeta)$, sul piano del cerchio, corrispondente al moto di pura rotazione con velocità angolare costante Ω del rotore sul piano fisico.

Il punto di partenza è la trasformazione conforme cerchio-rotore (7.1). Occorre determinare,

per il moto di pura rotazione con velocità angolare Ω l'espressione della *funzione di contorno* $B(\sigma)$ (cfr. [136]) che, nel nostro caso si dimostra valere

$$B(\sigma) = -i\Omega z(\sigma)z^* \left(\frac{1}{\sigma} \right) \quad (7.4)$$

dove con σ intendiamo un generico punto appartenente al contorno del cerchio unitario. Sostituendo la (7.1) si ha

$$B(\sigma) = -i\Omega \exp \left(\frac{1}{n} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) \right) \quad (7.5)$$

Sviluppando $B(\sigma)$ in serie di Laurent avremo in generale

$$B(\sigma) = -i\Omega \left[\sum \alpha_n \sigma^{-n} + \sum \beta_n \sigma^n \right] \quad (7.6)$$

distinguendo ora i termini con potenze negative dal resto della serie, si definiscono le due funzioni $B_1(\sigma)$ e $B_2(\sigma)$, delle quali $B(\sigma)$ sia quella che contiene tutte le potenze negative di $B(\sigma)$.

$$B(\sigma) = B_1(\sigma) + B_2(\sigma) \quad (7.7)$$

Dunque

$$B_1(\sigma) = -i\Omega \left[\sum_{m=1}^N \sigma^{-m} \sum_{j=0}^{N-m} \frac{a^{2j+m}}{j!(j+m)!} \right] \quad (7.8)$$

Si dimostra che nel caso di flusso esterno al cerchio il potenziale cercato coincide con la funzione $B_1(\sigma)$ estesa a tutto il campo.

$$W_\Omega(\zeta) = B_1(\zeta) = -i\Omega \sum_{m=1}^N A_m \zeta^{-m} \quad (7.9)$$

con

$$A_m = \sum_{j=0}^{N-m} \frac{a^{2j+m}}{j!(j+m)!} \quad (7.10)$$

L'introduzione di un vortice nel campo avviene secondo la tecnica delle riflessioni, sempre valida in quanto garantisce che, nel moto relativo, la componente normale della velocità sia ancora nulla.

Il potenziale complesso per una particella fluida immersa nel campo di moto risultante è dunque della forma

$$W(\zeta) = -i\Omega \sum_{m=1}^N A_m \zeta^{-m} - i\gamma_v \log \frac{\zeta - \zeta_v}{\zeta - \frac{1}{\zeta_v^*}} \quad (7.11)$$

Seppur valutate attraverso un sistema di riferimento fisso al corpo rotante, queste grandezze si riferiscono tutte ad un sistema di riferimento assoluto (cfr.[136]). Qualora, ad esempio, si volesse ricavare l'espressione della funzione di corrente nel sistema di riferimento relativo, solidale al rotore, si dovrebbe imporre una rotazione $-\Omega$ a tutto il sistema.

$$\Psi(\zeta) = \Im(W(\zeta)) - \frac{1}{2} \Omega z z^* \quad (7.12)$$

Derivando la (7.11) rispetto a ζ otteniamo a velocità di una particella di fluido nel sistema di riferimento assoluto

$$\frac{dW(\zeta)}{d\zeta} = -i\Omega \sum_{m=1}^N -mA_m\zeta^{-(m+1)} - i\gamma_v \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_v} - \frac{1}{\zeta - \frac{1}{\zeta_v^*}} \right) \quad (7.13)$$

7.4 Condizione di equilibrio del vortice

Un vortice, immerso nel campo di moto generato dal corpo rotante, è da intendersi *in equilibrio* se rimane invariata la sua posizione relativa a questi, ruotando rigidamente assieme al corpo. In termini di velocità deve essere soddisfatta la seguente eguaglianza

$$\dot{z}_v^* = -i\Omega z_v^* \quad (7.14)$$

ovvero

$$\dot{z}_v^* = \left[\left(\frac{dW(\zeta)}{d\zeta} + i\frac{\gamma_v}{2} \left(\frac{d}{d\zeta} \log \frac{d}{d\zeta} \right) \right) \frac{dz}{d\zeta} \right]_{\zeta=\zeta_v} = -i\Omega z_v^* \quad (7.15)$$

Sviluppando i vari termini si perviene alla equazione

$$-\frac{\gamma_v}{\Omega} \left[\frac{\zeta_v^*}{1 - |\zeta|^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\zeta} \log \frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta_v} \right] - D_1(\zeta_v) + z_v^* \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta_v} = 0 \quad (7.16)$$

avendo definito $D_1(\zeta)$ come

$$D_1(\zeta) = - \sum_{m=1}^{\infty} mA_m\zeta^{-(m+1)} \quad (7.17)$$

Nel nostro modello si richiede inoltre che l'intensità del vortice presente nel campo sia tale da rendere finita la velocità del fluido sulla cuspidè, punto di non regolarità della trasformazione conforme. Tale condizione è anche nota come *condizione di Kutta*.

$$\left(\frac{dW(\zeta)}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_p} = 0 \quad (7.18)$$

Otteniamo dunque la relazione aggiuntiva

$$-\frac{\gamma_v}{\Omega} = - \frac{D_1(\zeta_p)|1 - \zeta_v|^2}{1 - |\zeta_v|^2} \quad (7.19)$$

che sostituita nella (7.16) conduce alla relazione finale

$$\frac{D_1(\zeta_p)|1 - \zeta_v|^2}{1 - |\zeta_v|^2} \left[\frac{\zeta_v^*}{1 - |\zeta|^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{d\zeta} \log \frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta_v} \right] - D_1(\zeta_v) + z_v^* \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta_v} = 0 \quad (7.20)$$

La soluzione, per via numerica, della (7.20) mette in evidenza l'esistenza di una posizione di equilibrio del vortice (fig. 7.3).

Al variare del numero di cuspidi n tale soluzione è della forma

$$z_{eq(n)} = r_{eq(n)} \cdot e^{i\pi/n} \quad (7.21)$$

come considerazioni sulla periodicità del sistema lasciavano intuire.

7.5 Analisi della stabilità

Per quanto riguarda l'analisi della stabilità della configurazione di equilibrio, essa potrà essere condotta in modo non dissimile da come già operato nei capitoli precedenti.

Il problema della determinazione del moto del vortice può essere formalmente ricondotto alla risoluzione del sistema hamiltoniano

$$\dot{\zeta}_v = \frac{\partial H_v}{\partial \eta_v} \quad , \quad \dot{\eta}_v = -\frac{\partial H_v}{\partial \xi_v} \quad (7.22)$$

dove $\zeta_v = \xi_v + i\eta_v$ e con $H_v(\zeta)$ si intende la *funzione hamiltoniana* del vortice anche nota come *funzione di Routh*. In generale l'espressione dell'hamiltoniana è deducibile attraverso la funzione di Green per l'operatore di Laplace per il dominio in esame (cfr. Lin[122], Masotti[131]).

La traiettoria descritta dal vortice risulta essere per definizione una linea ad $H_v = \text{costante}$, e il valore di tale costante è funzione delle condizioni iniziali, ossia della posizione inizialmente occupata dal vortice. Attraverso la determinazione della funzione hamiltoniana del vortice associata al campo di moto in cui esso è immerso, è possibile allora determinare tutte le possibili traiettorie descritte dal vortice, al variare delle condizioni iniziali, in quanto queste coincidono con le curve isolivello dell'hamiltoniana.

L'analisi della stabilità può essere condotta graficamente, tracciando tali curve e osservandone l'andamento (cfr. 5.4.2). Nei punti di equilibrio potremo individuare orbite di tipo chiuso, caratterizzanti regioni di tipo ellittico e relative a configurazioni stabili, oppure regioni di tipo iperbolico, significative di equilibri instabili.

Nel nostro caso una via più agevole per la determinazione dell'hamiltoniana del vortice consiste nel ricavare $H_v(\zeta)$ a partire dall'espressione della funzione hamiltoniana $H_p(\zeta)$ per una particella fluida, operando poi un processo al limite per $\zeta \rightarrow \zeta_v$. Poichè l'hamiltoniana di una particella fluida coincide con la funzione di corrente $\Psi(\zeta)$ e questa con la parte immaginaria del potenziale complesso $W(\zeta)$, dalla (7.11) otteniamo che l'hamiltoniana del vortice sul piano ζ vale

$$H_v(\zeta) = \Im \left(-i\Omega \sum_{m=1}^{\infty} A_m \zeta^{-m} \right) + \frac{\gamma_v}{2} \log(|\zeta|^2 - 1) + \frac{\gamma_v}{2} \log \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| \quad (7.23)$$

Tabella 7.1. Posizione di equilibrio e circolazione del vortice al variare del numero di cuspidi

N cuspidi	R_{eq}	Γ_{eq}
3	1.322475	-5.901216
4	1.227924	-4.025084
5	1.175957	-3.050484
6	1.143195	-2.455060
7	1.120683	-2.053904
8	1.104274	-1.765372
9	1.091784	-1.547900
10	1.081964	-1.378124
11	1.074039	-1.241908
12	1.067511	-1.130200

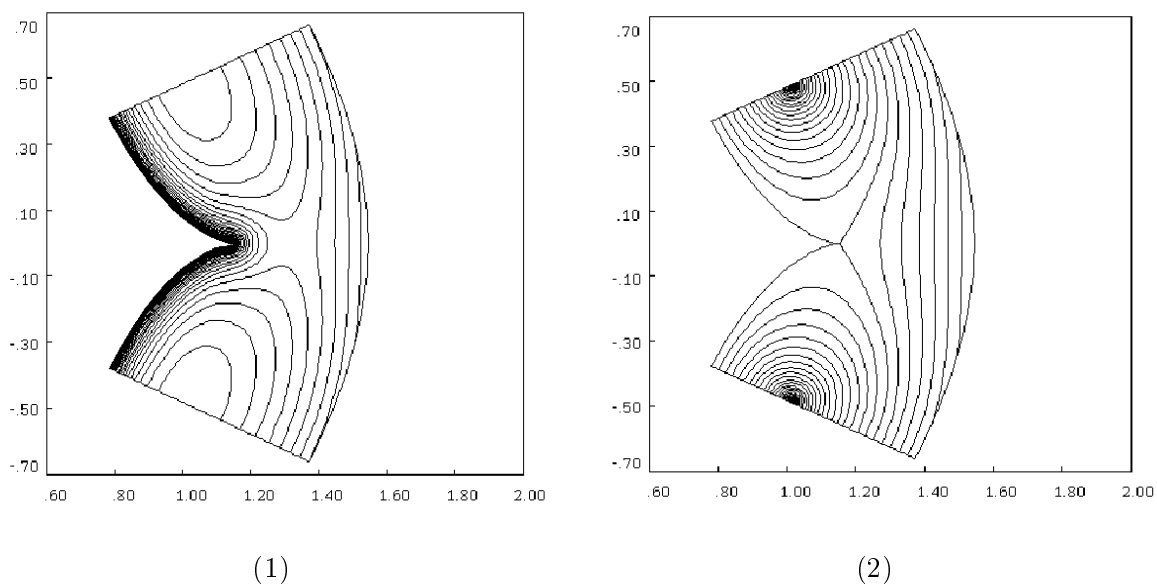


Figura 7.2. Configurazione di equilibrio del vortice ($n=7$). (1) - Curve di livello dell'hamiltoniana del vortice. (2) - Linee di corrente.

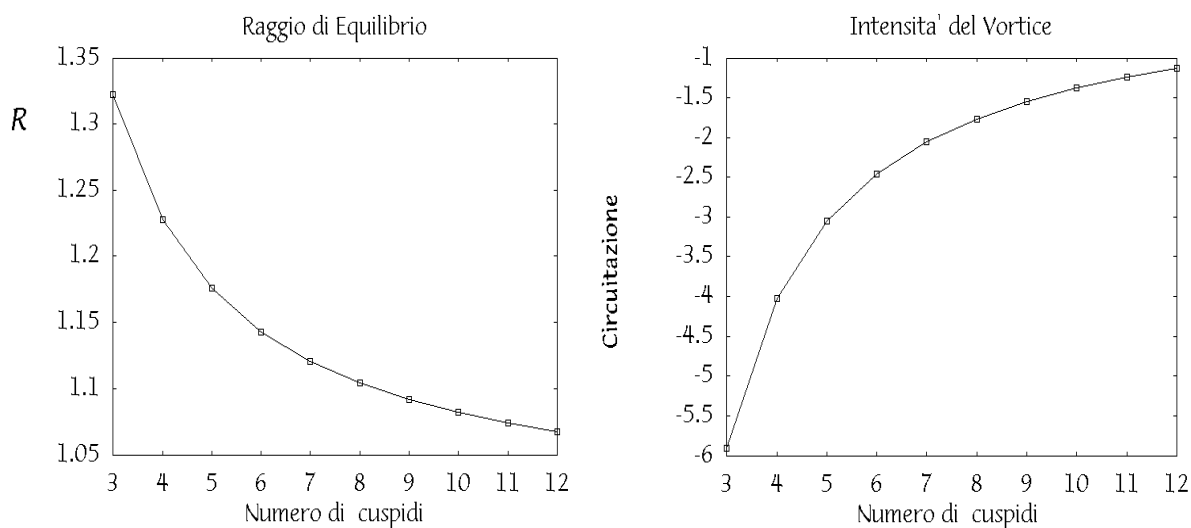


Figura 7.3. Raggio di equilibrio e circolazione del vortice intrappolato al variare del numero di cuspidi

Continuando ora con lo studio della stabilit  della configurazione di equilibrio trovata, tracciamo le curve di livello di $H_v(\zeta)$, in cui il valore di $\gamma(v)$ viene determinato attraverso le (7.19) e (7.20). Tali linee evidenziano, nell'intorno considerato, l'esistenza di un punto ellittico e quindi stabile (fig. 7.2).

Secondo il modello dunque una configurazione di equilibrio per il vortice esiste ed è stabile. Al variare del numero di cuspidi del rotore (fig. 7.3) il vortice intrappolato tende ad avvicinarsi alla parete e la sua circolazione diminuisce, diventando al limite nulla al tendere ad infinito del numero di cuspidi.

7.6 Il transitorio di avviamento

Si vuole ora studiare, mediante una simulazione a vortici discreti, il transitorio a cui è soggetto il fluido a causa della impulsiva messa in rotazione del rotore. Brevemente, il rotore, inizialmente fermo, viene messo impulsivamente in rotazione con velocità angolare costante. La singolarità fluidodinamica sulla cresta viene rimossa introducendo, in prossimità del punto di cuspidi, un primo vortice di intensità tale da soddisfare alla condizione di Kutta. Non essendo in generale il vortice in una posizione di equilibrio, si innesca un transitorio: ad intervalli di tempo prefissati vengono introdotti in successione, e seguiti numericamente lungo le loro traiettorie, ulteriori vortici che soddisfino, nell'istante di emissione, alla condizione di Kutta. Si ottiene in questo modo una descrizione, in termini discreti, della dinamica delle strutture vorticosi che si generano in prossimità delle cuspidi e della bolla di vorticità che si va formando e che rimane intrappolata stabilmente nei vani del rotore.

Allo scopo occorre determinare alcune grandezze del campo, quali la velocità del sistema di vortici, la loro intensità, l'intensità del vortice nascente.

7.6.1 Determinazione del campo di velocità

Il potenziale complesso, al generico istante di tempo t , è della forma

$$W(\zeta) = -i\Omega \sum_{m=1}^N A_m \zeta^{-m} - i \sum_j^N \gamma_j \log \frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta - \frac{1}{\zeta_j^*}} \quad (7.24)$$

dove N sia il numero di vortici presenti nel campo di moto, rappresentativi dell'istantanea distribuzione della vorticità.

Derivando rispetto a ζ si ottiene la velocità di una particella fluida immersa nel campo di moto

$$\frac{dW(\zeta)}{d\zeta} = -i\Omega D_1(\zeta) - i \sum_j^N \gamma_j \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_j} - \frac{1}{\zeta - \frac{1}{\zeta_j^*}} \right) \quad (7.25)$$

Sul piano z

$$\dot{z}^* = \frac{dW(\zeta)}{dz} = \frac{dW(\zeta)}{d\zeta} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} \quad (7.26)$$

La velocità così ottenuta è la velocità assoluta della particella fluida, espressa però nei termini di un riferimento solidale al corpo rotante (cfr. [136]).

La velocità relativa vale invece

$$\dot{z}_{rel}^* = \dot{z}_{ass}^* - \Omega r \hat{\tau} = \dot{z}_{ass}^* + i\Omega z^* \quad (7.27)$$

L'espressione per la velocità, sul piano ζ , di un vortice del sistema è desumibile dalle (7.26) e (7.27)

$$\frac{d\zeta^*}{dt} = \left[\dot{\zeta}_j^* + i\frac{\gamma}{2}R(\zeta_j) \right] \dot{z}_{j_{ass}}^* + i\Omega \frac{z_j^*}{\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta_j}^*} \quad (7.28)$$

dove il termine di Routh $R(\zeta)$ è

$$R(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \left(\frac{1}{n} - \frac{a}{\zeta} \right) \left(\frac{2a}{\zeta} - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{a}{\zeta} \right) \quad (7.29)$$

7.6.2 Intensità del vortice nascente

Nel nostro modello di generazione di vorticità l'intensità del vortice nascente, introdotto al generico istante t in un punto prefissato del campo di moto, deve essere tale da soddisfare alla condizione di Kutta sulla cuspidale $\zeta_c = 1$, punto di non regolarità della trasformazione conforme

$$\left(\frac{dW}{d\zeta} \right)_{\zeta_c} = 0 \quad (7.30)$$

Sostituendo la (7.25) in (7.30) si perviene alla relazione

$$\frac{\gamma_{N+1}}{\Omega} = - \frac{D_1(\zeta_c) + \sum_{j=1}^N \gamma_j E(\zeta_j)}{E(\zeta_{N+1})} \quad (7.31)$$

dove $\zeta_{N+1} = \zeta_{emis}$, posizione dalla quale si introduce il vortice nel campo, in prossimità della cuspidale, mentre la funzione $E(\zeta)$ è definita come

$$E(\zeta) = \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \zeta|^2} \quad (7.32)$$

7.6.3 Analisi dei risultati

La simulazione numerica evidenzia che la genesi e la dinamica delle strutture vorticose presenta forti similarità con quanto osservato nel caso della cresta periodica. La dinamica delle strutture vorticose, che si separano dal punto di cuspidale e che procedono nella direzione della corrente, viene presto influenzata dalle condizioni di periodicità del campo di moto.

Negli istanti che seguono all'impulsiva messa in rotazione del corpo si assiste alla nascita di una superficie vorticosa che si avvolge a spirale per dar vita alla struttura primaria e che successivamente invade il campo continuando ad attorcigliarsi su se stessa (figure 7.6 e 7.7). L'evoluzione iniziale, universale, della struttura vorticosa, viene progressivamente modificata dall'interazione con la forma della parete che confina inferiormente il campo di moto. L'avvicinarsi inoltre della struttura alla cresta successiva provoca una forte perturbazione che rompe la struttura vorticosa primaria del vano successivo e dà origine al distacco di una nuova struttura, di segno concorde alla prima. La struttura iniziale, dal canto suo, viene deflessa e inverte il proprio moto, tornando verso la cuspidale che l'aveva generata. In prossimità della punta, la struttura primaria viene compressa tra la parete ed il vortice secondario. L'interazione fra le due porta alla generazione di una nuova struttura, di segno opposto. Il

processo continua ciclicamente mentre le strutture, che via via si generano e si spezzano, tendono ad occupare l'intera regione a valle della cuspidi. L'effetto regolarizzante della parete si manifesta nel mantenere confinata in una limitata regione del campo le strutture vorticosi, di intensità via via minore, convertendole ed inglobandole nella zona di ricircolazione stazionaria nel vano individuato tra due cuspidi successive.

Benché il moto non possa che risultare stazionario solo in media, le previsioni del modello potenziale vengono confermate (figure 7.4 e 7.5). La circolazione complessiva della bolla vorticosi che staziona sul lato a valle della cuspidi è prossima a quella dell'unico vortice puntiforme.

Il baricentro della struttura vorticosi, definito come

$$X_g + iY_g = \left(\sum_{j=1}^N \gamma_j z_j \right) \left(\sum_{j=1}^N \gamma_j \right)^{-1} \quad (7.33)$$

assume una posizione vicina a quella prevista per il vortice, mentre il valore di circolazione è minore.

L'effetto della viscosità, su di una scala di tempi sicuramente più lunga di quella su cui avvengono i fenomeni inerziali, provvederà a ridistribuire la vorticosità in seno alla bolla sino a trasformarla, intuitivamente, in una regione a vorticosità costante.

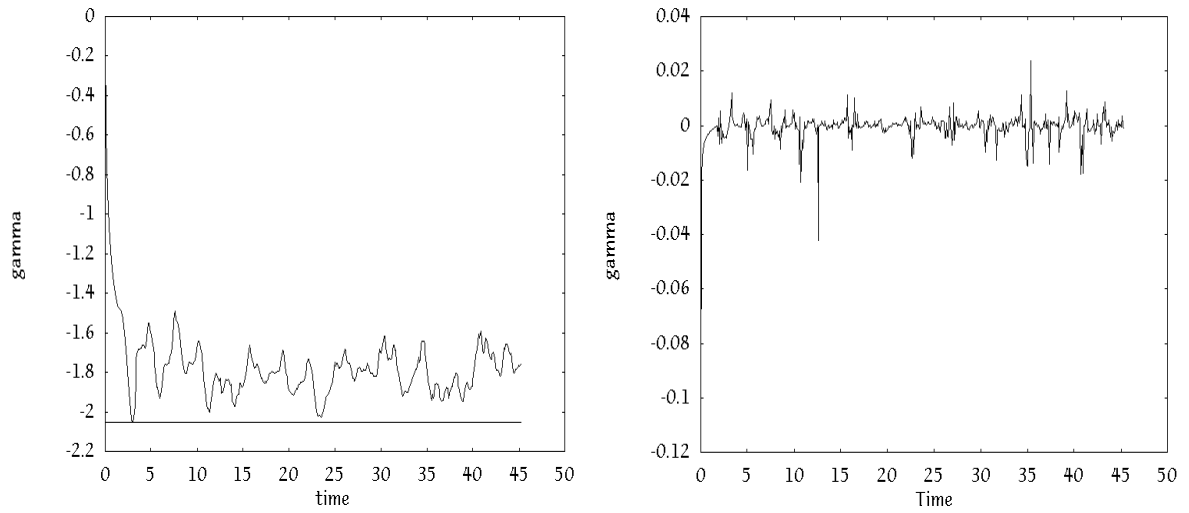


Figura 7.4. Circolazione globalmente emessa nel tempo e circolazione del vortice emesso ($n=7$).

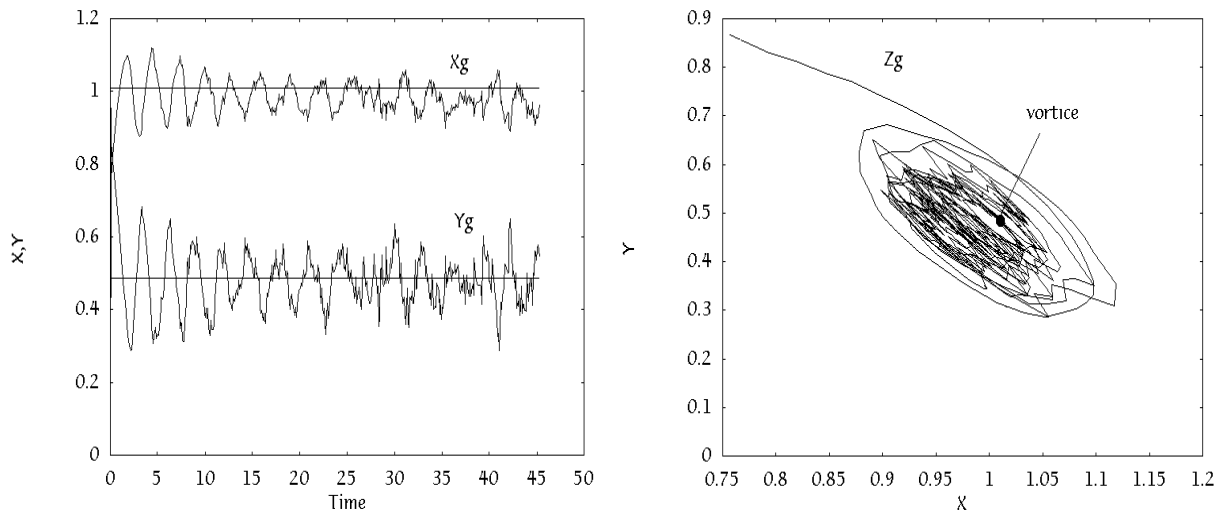


Figura 7.5. Andamenti di Xg e Yg nel tempo e traiettoria del baricentro $Xg + iYg$.

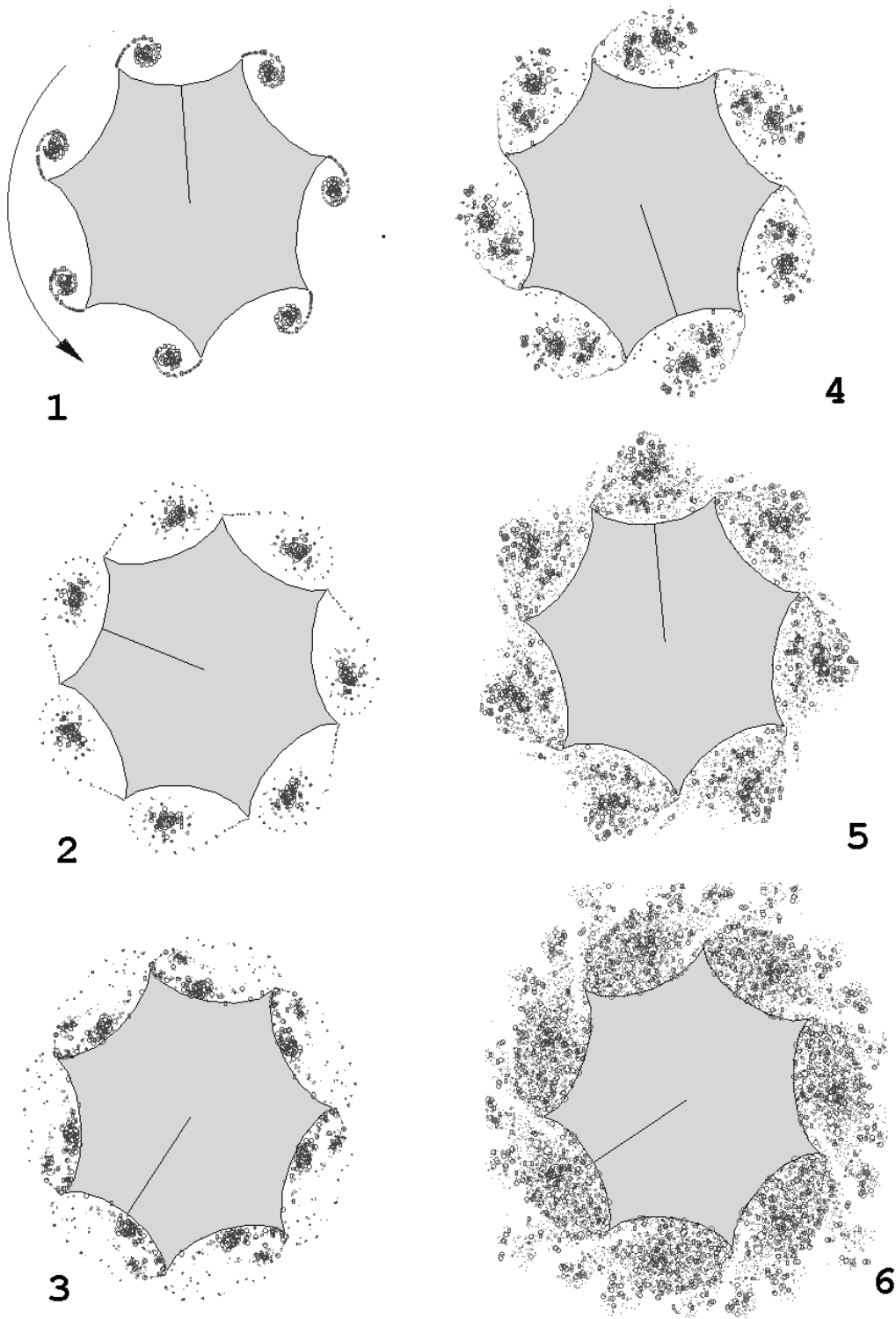


Figura 7.6. Sequenze delle posizioni dei vortici($n=7$).

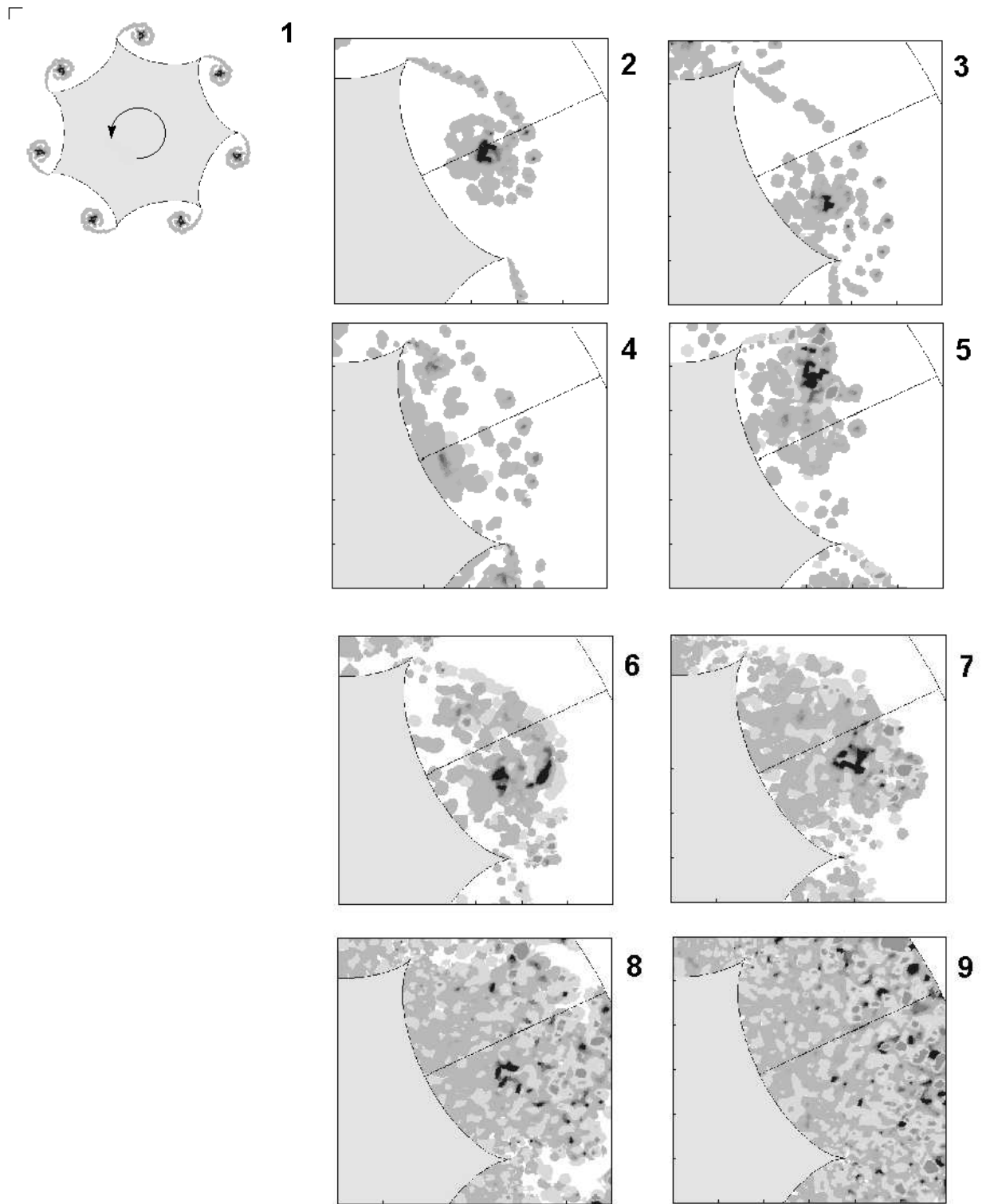


Figura 7.7. Sequenze del campo di vorticità ($n=7$).

Capitolo 8

Conclusioni

Nel presente lavoro è stato affrontato lo studio di flussi rotazionali incomprimibili, confinati da pareti dalla forma complessa. La trattazione è stata circoscritta a casi in cui il flusso possa essere ritenuto bidimensionale e il moto del fluido sia retto dalle equazioni di Eulero. Equivalentemente si è supposto che la dinamica della vorticità fosse dominata dalle forze d'inerzia e che gli effetti viscosi potessero essere trascurati.

La ricerca ha seguito due linee di approfondimento differenziate, anche se non disgiunte. Dal punto di vista fenomenologico si è indagato sull'effetto che la geometria di parete ha sulla genesi ed evoluzione di strutture vorticose. In particolare si sono ricercate conformazioni della parete in grado di sostituire ad una separazione instazionaria del flusso una zona di ricircolazione, stazionaria in media, stabilmente intrappolata in prossimità di parete.

Da un punto di vista metodologico invece si è messo in atto uno strumento numerico per la simulazione di flussi rotazionali, ascrivibile alla classe dei *'Fast Vortex Methods'*, per le equazioni di Eulero. Questi metodi si differenziano dai metodi a vortici più tradizionali per il fatto che non valutano direttamente tutte le interazioni vortice-vortice ma a gruppi, mediante algoritmi (gli Algoritmi di Accelerazione agli Sviluppi Multipolari) che tuttavia producono errori confrontabili con lo zero macchina. Ciò permette di discretizzare una regione vorticosa con un numero molto maggiore di vortici (o blob). Per dare un'idea dell'incremento delle prestazioni ottenibili basti osservare che per un metodo a vortici non utilizzando algoritmi acceleratori diviene molto onerosa la simulazione di un transitorio in cui il numero di vortici superi le tre-quattromila unità¹. L'adozione della tecnica di accelerazione [85] permette invece di seguire nel tempo un numero di vortici dieci volte superiore con tempi macchina paragonabili.

Le simulazioni presentate in questo lavoro sono state un banco di prova per l'algoritmo sviluppato non tanto per il numero di vortici seguiti, quanto per la presenza di una trasformazione conforme del campo di moto. Di vortice infatti ne viene emesso uno ad ogni passo di integrazione nel tempo, e il numero rimane sufficientemente limitato, dell'ordine di 5-15 mila

¹Gilbertini[80], ad esempio, studia il flusso viscoso su di una lamina piana ad alta incidenza utilizzando all'incirca duemila vortici. Più recentemente, nel 1993, Gagnon e al.[78], come pure in precedenza Sethian [163], analizzano il flusso in un canale con gradino, per diversi numeri di Reynolds, limitando il numero dei vortici presenti nel campo a circa tremila. Uno degli espedienti più utilizzati per limitare il numero dei vortici è la fusione di più vortici vicini, tecnica che si è mostrata in grado di alterare le frequenze di distacco dei vortici dalla parete [152].

unità. A questo contribuisce anche il fatto che la parete cattura e confina la vorticità in una regione limitata del campo moto, esaurendo quasi, da un certo istante in avanti, il processo instazionario di rilascio di vorticità.

Si è voluto sviluppare l'algoritmo nella sua forma completa in previsione di una estensione del codice alla simulazione delle equazioni di Navier-Stokes. In tal caso la vorticità viene emessa con continuità lungo tutta la parete ed il numero complessivo di vortici presenti nel campo cresce di conseguenza.

La concomitante adozione della tecnica delle trasformazioni conformi operata per lo studio di campi confinati da parete di forma complessa, non sembra avere al momento altri precedenti applicativi in letteratura, forse perchè l'introduzione di queste tecniche di accelerazione è relativamente recente.

La presenza di trasformazioni conformi del campo moto certamente rende meno efficaci gli algoritmi acceleratori, ma mantiene il metodo numerico coerentemente lagrangiano in ogni sua componente e permette, a differenza dei più usati *'Boundary Element Methods'*, la ricostruzione esatta dei contorni del corpo. Inoltre viene estesa in questo modo la validità dei suddetti algoritmi anche al caso di contorni periodici, dettaglio di non trascurabile importanza. L'ipotesi di periodicità del campo di moto è sempre stata infatti di estremo interesse applicativo; si pensi ad esempio a simulazioni di flussi su schiere di profili o alla simulazione del flusso attorno ad eliche.

Si è constatato inoltre che l'efficacia del sistema di catalogazione dei vortici, approntato al fine di determinare i coefficienti degli sviluppi multipolari, comporta un incremento delle prestazioni non marginale. Basti osservare che il sistema di catalogazione a griglie logiche monotone sviluppato ha permesso, in questa sede, di raddoppiare all'incirca le prestazioni dell'algoritmo (cfr. figura 4.5) rispetto ai test effettuati dagli ideatori della tecnica [34].

Per quanto riguarda gli aspetti relativi all'indagine fenomenologica, le previsioni fornite da semplici modelli di flusso potenziale si sono dimostrate utili termini di confronto per le soluzioni numeriche, data anche l'impossibilità di reperire dati sperimentali vista la particolarità delle geometrie analizzate.

Il meccanismo di controllo della separazione attuato dalla cornice di neve viene ben spiegato dalla modellizzazione adottata. La simulazione numerica del transitorio di avviamento mette in evidenza la genesi delle strutture coerenti di vorticità la loro conversione in una bolla vorticoso stazionaria a ridosso della cuspidale. Il modello analitico sovrastima, rispetto alla simulazione numerica, di circa il 10% il valore della circolazione globale associata alla bolla vorticoso. Almeno nel caso di forme della parete simili alla cornice di neve ($\phi = 40 - 50^\circ$) la forte caratterizzazione impressa al flusso dalla presenza della cuspidale non sembra necessitare di un'analisi che tenga conto anche dei fenomeni viscosi. Maggiori dubbi si esprimono nel caso di conformazione a cavità della parete, relativo a $\delta < 25^\circ$, anche se i vortici secondari, che visualizzazioni sperimentali di flussi in cavità [74] hanno messo in evidenza, paiono nascere dagli angoli².

Il meccanismo che permette la cattura di vortici nel caso della cornice di neve può essere attuato non solo attraverso una opportuna geometria della parete a valle della sempre necessaria singolarità geometrica, ma anche, più genericamente, tramite l'imposizione di una condizione di periodicità del campo di moto. È questo ciò che si è appurato nello studio condotto su

²Le visualizzazioni sperimentali [74] sono relative a cavità rettangolari.

pareti caratterizzate dal periodico ripetersi di creste acuminate. L'osservazione rimane valida anche per corpi in rotazione con velocità angolare costante in seno ad un fluido a riposo all'infinito. Per queste configurazioni periodiche ci si sarebbe in verità aspettato che i vortici più intensi, presenti nelle bolle di vorticità catturate, potessero saltare in modo caotico da una bolla all'altra, senza alterare tuttavia di queste le caratteristiche globali, e dando vita a fenomeni di *turbolenza lagrangiana*. Di ciò in realtà non vi è riscontro nelle simulazioni effettuate, a riprova del forte effetto regolarizzante delle configurazioni di parete prospettate.

Bibliografia

- [1] F.H. ABERNATHY, R.E. KRONAUER. The formation of a vortex-sheets. *J. Fluid. Mech.*, 13:1–20, 1962.
- [2] A.B. AIRAPETOV. Motion of an initially point vortex in a flow of viscous fluid. *PMM U.S.S.R.*, 54(3):355–359, 1990.
- [3] A. ALMGREN, T. BUTTKE, P. COLETTA. A fast vortex method in three dimensions. *J. Comp. Phys.*, 1993.
- [4] A. ANDERSON. A method of local corrections for computing the velocity field due to a distribution of vortex blobs. *J. Comput. Phys.*, 61:111–123, 1985.
- [5] C.R. ANDERSON. Vorticity boundary conditions and boundary vorticity generation for two-dimensional viscous incompressible flows. *J. Comp. Phys.*, 80:72–97, 1989.
- [6] C. ANDERSON. An implementation of the fast multipole method without multipoles. *SIAM J. Sc. Stat. Comp.*, 13:923–947, 1992.
- [7] C. ANDERSON, C. GREENGARD. On vortex method. *Siam J. Numer. Anal.*, 22(3):413–440, 1985.
- [8] C. ANDERSON, C. GREENGARD. *Vortex methods, Lecture notes in mathematics* volume 1360. Springer, 1988.
- [9] C.R. ANDERSON, M.B. REIDER. Investigation of the use of Prandtl/Navier-Stokes equation procedures for two-dimensional incompressible flows. *Phys. Fluids*, 6(7), 1994.
- [10] A. W. APPEL. An efficient program for many-body simulations. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 6:85–103, 1985.
- [11] H. AREF. Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 15:345–389, 1983.
- [12] H. AREF, M.A. STREMLER. On the motion of three point vortices in a periodic strip. *J. Fluid. Mech.*, 314:1–25, 1996.
- [13] V.I. ARNOLD, B.A. KHESIN. Topological methods in hydrodynamics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 24:145–166, 1992.
- [14] S. B. BADEN. Very large vortex calculations in two dimensions. In C. Anderson & C. Greengard, editor, *Vortex Methods*, pages 96–120. Springer-Verlag, 1988.
- [15] G. R. BAKER. the 'Cloud-In-Cell' technique applied to the roll up of vortex sheets. *J. Comp. Phys.*, 31:76–95, 1979.
- [16] J.E. BARNES, P. HUT. A hierarchical $O(n \log n)$ force-calculation algorithm. *Nature*, 324:446–449, 1986.
- [17] G.K. BATCHELOR. *An introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge Univ. press, 1967.
- [18] J.T. BEALE. A convergent 3D vortex method with grid-free stretching. *Math. Comp.*, 46:401–424, 1986.
- [19] J.T. BEALE, A. MAJDA. Rates of convergence for viscous splitting of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 37(156):243–259, 1981.
- [20] J.T. BEALE, A. MAJDA. Vortex methods. I: Convergence in three dimensions. *Math. Comp.*, 39(159):1–27, 1982.
- [21] J.T. BEALE, A. MAJDA. Vortex methods. II: Higher order accuracy in two and three dimensions. *Math. Comp.*, 39(159):29–52, 1982.
- [22] J.T. BEALE, A. MAJDA. High order accurate vortex methods with explicit velocity kernels. *J. Comp. Phys.*, 58:188–208, 1985.

- [23] D. BEIGIE, A. LEONARD, S. WIGGINS. A global study of enhanced stretching and diffusion in chaotic tangles. *Physics of Fluids A*, 3(5):1039–1050, 1990.
- [24] G. BENFATTO, M. PULVIRENTI. A diffusion process associated with the prandtl equation. *J. Funct. Anal.*, 52:330–343, 1983.
- [25] G. BENFATTO, M. PULVIRENTI. The convergence of the Chorin-Marsden product formula in the half-plane. *Comm. Math. Phys.*, 106:427–258, 1986.
- [26] G.D. BIRKHOFF, J.FISHER. Do vortex sheets roll up?. *Rc.Circ. Mat. Palermo Ser.*, 2(8):77–90, 1959.
- [27] J. BORIS. A vectorized 'near neighbors' algorithm of order n using a monotonic logical grid. *J. Comp. Phys.*, 66:1–20, 1986.
- [28] T. BUEHLER. *Vortex Approximation of Boundary Layers* PhD thesis, Math. Dept. Berkeley, 1993.
- [29] T. BUTTKE. Numerical study of superfluid turbulence in the self-induction approximation. *J. Comp. Phys.*, 76:310–326, 1988.
- [30] T.F. BUTTKE. A fast adaptive vortex method for patches of constant vorticity in two dimensions. *J. Comp. Phys.*, 89:161–186, 1990.
- [31] T. BUTTKE. Hamiltonian structure for 3D incompressible flow. 1991.
- [32] T. BUTTKE. Lagrangian numerical methods which preserve the hamiltonian structure of incompressible fluid flow. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1993.
- [33] R. CAFLISCH. *Mathematical Analysis of Vortex Dynamics* SIAM, 1988.
- [34] J. CARRIER, L. GREENGARD, V. ROKHLIN. A fast adaptive multipole algorithm for particle simulations. *SIAM J.Sci.Stat.Comput.*, 9:669–686, 1988.
- [35] E. CESCHINI. Interferenza vortice-parete. Tesi di laurea, Politecnico di Torino, 1993.
- [36] C.C. CHANG. Random vortex methods for the Navier-Stokes equations. *J. Comp. Phys.*, 76:281–300, 1988.
- [37] A. CHEER. Unsteady separated wake behind an impulsively started cylinder. *J. Fluid. Mech.*, 201:485–505, 1989.
- [38] Y.T. CHEW, M. CHENG, S.C. LUO. A numerical study of flow past a rotating circular cylinder using a hybrid vortex scheme. *J. Fluid Mech.*, 299:35–71, 1995.
- [39] A.J. CHORIN. Numerical study of slightly viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 57:785–796, 1973.
- [40] A.J. CHORIN. Vortex sheets approximation of boundary layers. *J. Comp. Phys.*, 27:428–442, 1978.
- [41] A.J. CHORIN. Vortex models and boundary layer instability. *SIAM J. Sc. Stat. Comp.*, 1:1–21, 1980.
- [42] A.J. CHORIN. The evolution of a turbulent vortex. *Comm. Math. Phys.*, 83:517–535, 1982.
- [43] A.J. CHORIN. Turbulence and vortex stretching on a lattice. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39:S47–S65, 1986.
- [44] A.J. CHORIN. *Computational Fluid Mechanics* Academic, 1989.
- [45] A.J. CHORIN. Statistical mechanics and vortex motion. *AMS lectures in applied mathematics*, 28:85–101, 1991b.
- [46] A.J. CHORIN. Equilibrium statistics of a vortex filament with applications. *Comm. Math. Phys.*, 141:619–631, 1991d.
- [47] A.J. CHORIN. A vortex model with turbulent and superfluid percolation. *J. Stat. Phys.*, 69:67–78, 1992.
- [48] A.J. CHORIN. *Vorticity and Turbulence*. Springer, 1993.
- [49] A.J. CHORIN. Vortex methods and vortex statistics. In *Les Houches*, 1993.
- [50] A.J. CHORIN, P. BERNARD. Discretization of a vortex sheet with an example of roll-up. *J. Comp. Phys.*, 13:423–429, 1973.
- [51] A.J. CHORIN, M. MCCracken, J. MARSDEN, T. HUGHES. Product formulas and numerical algorithms. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31:205–256, 1978.
- [52] A.J. CHORIN, J. MARSDEN. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics* Springer, 1990.
- [53] A.J. CHORIN, J. AKAO. Vortex equilibria in turbulence theory and quantum analogues. *Physica D*, 52:403–414, 1991.

- [54] J.P. CHRISTIANSEN. Numerical simulation of hydrodynamics by the method of point vortices. *J. Comput. Phys.*, 137:363–379, 1973.
- [55] J.P. CHRISTIANSEN, N.J. ZABUSKY. Instability, coalescence and fission of finite-area vortex structures. *J. Fluid Mech.*, 61:219–243, 1973.
- [56] R.R. CLEMENTS. An inviscid model of two-dimensional vortex-shedding. *J. Fluid Mech.*, 57(2):321–336, 1972.
- [57] L. CORTELEZZI, A. LEONARD, J.C. DOYLE. An example of active circulation control of the unsteady separated flow past a semi-infinite plate. *J. Fluid Mech.*, 260:127–154, 1994.
- [58] R. CORTEZ. An impulse-based approximation of fluid motion due to boundary forces. *J. Comp. Phys.*, 123:341–353, 1996.
- [59] G.H. COTTET. *Methodes Particulaires pour l'Equation d'Euler dans le Plan* PhD thesis, Univ. P. and M. Curie, Paris, 1982.
- [60] G.H. COTTET. A new approach to the analysis of vortex methods in two and three space dimensions. *Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lin.*, 56:45–60, 1988.
- [61] G.H. COTTET. Large time behavior for deterministic particle approximations to the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 56:45–60, 1991.
- [62] G.H. COTTET, S. MAS-GALLIC. A particle method to solve the Navier-Stokes system. *Numer. Math.*, 57:805–827, 1990.
- [63] J. COX. The revolutionary Kasper wing. *Soaring*, 37:20–23, 1973.
- [64] P. DEGOND, S. MAS-GALLIC. The weighted particle method for convection-diffusion equations. Part I: The case of an isotropic viscosity. Part II: The anisotropic case. *Math. Comp.*, 53:485–526, 1989.
- [65] V.M. DEL PRETE, O.H. HALD. Convergence of vortex methods for Euler's equations. *Math. Comp.*, 32:791–809, 1978.
- [66] V.M. DEL PRETE, O.H. HALD. Quadratic convergence of vortex methods. *Math. Comp.*, 52:457–470, 1989.
- [67] T.L. DOLIGALSKI, C.R. SMITH, J.D.A. WALKER. Vortex interactions with walls. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 26:573–616, 1994.
- [68] T.E. DUSHANE. Convergence for a vortex method for solving Euler's equations. *Math. Comp.*, 27:719–728, 1973.
- [69] J.W. EASTWOOD, R.W. HOCKNEY. Shaping the force law in two dimensional particle-in-mesh models. *J. Comp. Phys.*, 16:342–359, 1974.
- [70] A. EINSTEIN. *Investigation on the Theory of Brownian Motion* Dover, 1956.
- [71] A. ELCRAT, K. MILLER. Steady vortex flows with circulation past asymmetric obstacles. *Comm. PDE*, 12:1095–1115, 1987.
- [72] A. ELCRAT, K. MILLER. Computation of vortex flow past obstacles with circulation. *Physica D*, 37:441–452, 1989.
- [73] G.L. EYINK, H. SPOHN. Negative temperature states and equivalence of ensembles for the vortex model of a two-dimensional ideal fluid. *J. Stat. Phys.*, 70:833–886, 1993.
- [74] F. FINAISH, P. FREYMUTH, W. BANK. Starting flow over spoilers, double steps and cavities. *J. Fluid Mech.*, 168:383–392, 1986.
- [75] B. FINZI. *Lezioni di Aerodinamica*. Tamburini, 1960.
- [76] D. FISHELOV. A new vortex scheme for viscous flows. *J. Comp. Phys.*, 86:211–224, 1990.
- [77] P. FREYMUTH, F. FINAISH, W. BANK. Three-dimensional vortex pattern in a starting flow. *J. Fluid Mech.*, 161:239–248, 1985.
- [78] Y. GAGNON, A. GIOVANNINI, P. HÉBRARD. Numerical simulation and physical analysis of high Reynolds number recirculating flows behind sudden expansions. *Phys. Fluids A*, 5:2377–89, 1993.
- [79] A.F. GHONIEM, G. HEIDARINEJAD. Numerical study of scalar mixing and product formation in a shear layer. *Combust. Sci. Tech.*, 72:79–99, 1990.
- [80] G. GILBERTINI, Studio di correnti separate, Tesi di Dottorato, Politecnico di Milano, 1992.
- [81] J. GOODMAN. The convergence of random vortex methods. *Comm. Pure Appl. Math.*, 40:189–220, 1987.

- [82] G. GRAZIANI, M. RANUCCI, G. RICCARDI, R. PIVA. Viscous vs. inviscid interaction of a vorticity structure with a circular cylinder. *Meccanica, Special Issue Vortex Dynamics*, 29:465–478, 1994.
- [83] C. GREENGARD. Convergence of the vortex filament method. *Math. Comp.*, 47:387–398, 1986.
- [84] C. GREENGARD. The core spreading vortex method approximates the wrong equation. *J. Comput. Phys.*, 61:345–348, 1985.
- [85] L. GREENGARD, V. ROKHLIN. A fast algorithm for particle simulations. *J. Comput. Phys.*, 73:325–348, 1987.
- [86] K. GUSTAFSON, J. SETHIAN. *Vortex Methods and Vortex Flows* SIAM, 1991.
- [87] O.H. HALD. Convergence of vortex methods for Euler’s equations, II. *SIAM J. Sc. Stat. Comp.*, 16:726–755, 1979.
- [88] O.H. HALD. Convergence of random methods for a reaction-diffusion equation. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, pages 85–94, 1981.
- [89] O.H. HALD. Convergence of a random method with creation of vorticity. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, pages 1373–1386, 1986.
- [90] O.H. HALD. Convergence of vortex methods for Euler’s equations III. *SIAM J. Num. Anal.*, 24:538–582, 1987.
- [91] F.R. HAMA, E.R. BURKE. On the rolling up of vortex street. *Univ. Maryland TN* no. BN-220, 1960.
- [92] R.W. HOCKNEY, J.W. EASTWOOD. *Computer Simulations Using Particles* McGraw-Hill, 1981.
- [93] T.Y. HOU. *Convergence of Vortex Methods for highly oscillatory vorticity* PhD thesis, Univ. of California, Los Angeles, 1988.
- [94] T.Y. HOU, J. LOWENGRUB. Convergence of a point vortex method for the 3D Euler equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 43:965–981, 1990.
- [95] M.K. HUANG, C.Y. CHOW. Trapping of a free vortex by joukowski airfoils. *AIAA Journal*, 20:292–298, 1982.
- [96] C. JACOB. *Introduction Mathématique à la Mécanique des Fluides* Gauthier-Villars, 1959.
- [97] G. JOYCE, D. MONTGOMERY. Negative temperature states for the two-dimensional guiding center plasma. *J. Plasma Physics*, 10:107–121, 1973.
- [98] J. KATZ. A discrete vortex method for the non-steady separated flow over an airfoil. *J. Fluid. Mech.*, 88:485–497, 1981.
- [99] J. KATZENELSON. Computational structure of the n-body problem. *SIAM J.Sci.Stat.Comput.*, 10:787–815, 1989.
- [100] R. KERR, F. HUSSAIN. Simulation of vortex reconnection. *Physica D*, 37:474–484, 1989.
- [101] M. KIESSLING. Statistical mechanics of classical particles with logarithmic interactions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1993.
- [102] M. KIYA, M. ARIE. A contribution to an inviscid vortex-shedding model for an inclined flat plate in uniform flow. *J. Fluid. Mech.*, 82(2):223–240, 1977.
- [103] M. KIYA, H. ISHII. Vortex interaction and kolmogorov spectrum. *Fluid Dynamics Res.*, 8:73–83, 1991.
- [104] J. KLAFTER, M.F. SHLESINGER, G. ZUMOFEN. Beyond brownian motion. *Physics Today*, pages 33–39, 1996.
- [105] O. KNIO, A. GHONIEM. Three dimensional vortex methods. *J. Comp. Phys.*, 86:75–106, 1990.
- [106] O.M. KNIO, A.F. GHONIEM. Three-dimensional vortex simulation of the rollup and entrainment in a periodic shear layer. *J. Comput. Phys.*, 97:172–223, 1991.
- [107] O.M. KNIO, A.F. GHONIEM. The three-dimensional structure of periodic vorticity layers under non-symmetric conditions. *J. Fluid Mechanics*, 243:353–392, 1992.
- [108] P. KOUMOUTSAKOS. *Direct Numerical Simulation of Unsteady Separated Flow Using Vortex Methods*. PhD thesis, Caltech, 1993.
- [109] P. KOUMOUTSAKOS, A. LEONARD. Improved boundary integral method for inviscid boundary condition applications. *AIAA J.*, 31:401–404, 1993.

-
- [110] P. KOUMOUNTSAKOS, A. LEONARD, F. PEPIN. Boundary conditions for viscous vortex methods. *J. Comp. Phys.*, 113:52–61, 1994.
- [111] P. KOUMOUNTSAKOS, A. LEONARD. High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods. *J. Fluid Mech.*, 296:1–38, 1995.
- [112] R. KRASNY. Desingularization of periodic vortex sheet roll-up. *J. Comput. Phys.*, 65:289–292, 1986.
- [113] R. KRASNY. A study of singularity formation in a vortex sheet by the point vortex approximation. *J. Fluid. Mech.*, 167:65–93, 1986.
- [114] A. KRISHNAN, A.F. GHONIEM. Simulation of rollup and mixing in Rayleigh-Taylor flow using the transport-element method. *J. Comp. Phys.*, 99:1–27, 1992.
- [115] E.W. KURPPA. A wind tunnel investigation of the Kasper vortex concept. *AIAA Paper 77-310*, 1977.
- [116] K. KUWAHARA. Numerical study of flow past an inclined flat plate by an inviscid model. *J. Phys. Soc. Japan*, 35:1545–51, 1973.
- [117] H. LAMB. *Hydrodynamics*. Dover, NY, 1932.
- [118] T. LAPPAS, A. LEONARD, P.E. DIMOTAKIS. An adaptive lagrangian method for computing 1-d reacting and non-reacting flows. *J. of Comp. Phys.*, 104:361+, 1993.
- [119] A. LEONARD. Vortex methods for flow simulation. *J. Comp. Phys.*, 37:289–335, 1980.
- [120] A. LEONARD. Computing three dimensional vortex flows with vortex filaments. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 17:523–559, 1985.
- [121] R.I. LEWIS. *Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems* Cambridge, NY, 1991.
- [122] C. C. Lin. ON THE MOTION OF VORTICES IN TWO DIMENSIONS - I. Existence of the Kirchhoff-Routh Function Proc. N.A.S. Vol. 27, pp. 570-575, 1941.
- [123] D.G. LONG. Convergence of the random vortex method in two dimensions. *J. Am. Math. Soc.*, 1:779–804, 1988.
- [124] D.G. LONG. Convergence of random vortex methods in three dimensions. *Math. Comp.*, 1993.
- [125] H.J. LUGT, S. OHRING. The oblique rise of a viscous vortex ring toward a deformable free surface. *Meccanica, Special Issue Vortex Dynamics* 29:313–329, 1994.
- [126] S.R. LUSTIG, S. RASTOGI, N. WAGNER. Telescoping fast multipole methods using chebyshev economization. *J. Comp. Phys.*, 122:317–322, 1995.
- [127] A. MAJDA. Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39:S187–S179, 1986.
- [128] A. MAJDA. Vorticity turbulence and acoustics in fluid flow. *SIAM Review*, 33:349–388, 1991.
- [129] C. MARCHIORO, M. PULVIRENTI. *Vortex Methods in Two-Dimensional Fluid Mechanics*. Springer, NY, 1984.
- [130] L.F. MARTINS, A.F. GHONIEM. Vortex simulation of the flow field in a planar Piston-Chamber arrangement with an intake. *Int. J. for Num. Meth. in Fluids.*, 12:237–260, 1991.
- [131] A. MASOTTI Atti Pont. Accad. Sci. Nuovi Lincei, Vol. 84, pp. 209-216, 235-245, 464-467, 468-473, 623-631, 1931.
- [132] F.J. MCGRATH. Nonstationary plane flow of viscous and ideal fluids. *Arch. Rational Mech. Anal.*, pages 329–348, 1968.
- [133] J.C. MCWILLIAMS. The vortices of two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 219:361–385, 1990.
- [134] F. MILINAZZO, P.G. SAFFMAN. The calculation of large reynolds number twodimensional flow using discrete vortices with random walk. *J. of Comp. Phys.*, 23:380–392, 1977.
- [135] J. MILLER. Statistical mechanics of Euler equations in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 65:2137–2140, 1990.
- [136] L.M. MILNE-THOMSON. *Theoretical Hydrodynamics* McMillan, 1968.
- [137] H. NAJM, A.F. GHONIEM. Vortex simulation of the convective instability in a dump combustor. *AIAA Journal*, 29:911–919, 1991.

- [138] Y. NAKAMURA, P. SPALART, A. LEONARD. Vortex simulation of an inviscid shear layer. In *AIAA/ASME 3rd Joint Thermophysics, Fluids, Plasma and Heat Transfer Conference*, 1982.
- [139] A.L. NI. Boundary conditions for the vorticity-velocity formulation of Navier-Stokes equations. *AIAA J.*, 34(2):416–418, 1995.
- [140] H.O. NORDMARK. *Higher Order Vortex Methods with Rezoning* PhD thesis, University of California, Berkeley, 1988.
- [141] H. NORDMARK. Rezoning for higher order vortex methods. *J. Comput. Phys.*, 97:366–397, 1991.
- [142] L. ONSAGER. Statistical hydrodynamics. *Nuovo Cimento Suppl.*, 6(2):279–287, 1949.
- [143] P. ORLANDI. Vortex dipole rebound from a wall. *Phys. Fluids A*, 2(8):1429–1436, 1990.
- [144] V.I. OSELEDETS. On a new way of writing the Navier-Stokes equations: The hamiltonian formalism. *Russ. Math. Surveys*, 44:210–211, 1989.
- [145] A. PAPOLULIS. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes* McGraw-Hill, 1965.
- [146] M.B. PERLMAN. On the accuracy of vortex methods. *J. Comp. Phys.*, pages 200–223, 1985.
- [147] Y.B. POINTIN, T.S. LUNDGREN. Statistical mechanics of two-dimensional vortices in a bounded container. *Phys. of Fluid.*, 19(10):1459–1470, 1976.
- [148] E.G. PUCKETT. *A Review of Vortex Methods in Incompressible Computational Fluid Mechanics*. R. Nicolaides, M. Ginzburger (eds.), Cambridge, 1992.
- [149] A. QI. *Three Dimensional Vortex Methods for the Analysis of Propagation on Vortex Filaments*. PhD thesis, Math. Dept. UC Berkeley, 1991.
- [150] P. RAVIART. *An Analysis of Particle Methods* Num. Meth. Fluid Mech., F. Brezzi (ed.), Springer, 1985.
- [151] M. REIDER. *Development of Higher order Numerical Methods for Two-Dimensional Incompressible Flow with Applications to Flow around Circular Cylinders and Airfoils* PhD thesis, Math. Dept. UCLA, 1992.
- [152] G. RICCARDI, A. IAFRATI, R. PIVA. Vorticity shedding from a lentil-shaped body at large incidence in uniform flow. *Meccanica*, 29:159–173, 1994.
- [153] F.O. RINGLEB. *Flow Control by Generation of Standing Vortices and the Cusp Effect* Research Bulletin, The James Forrestal Research Center, Princeton University, Report n. 317, 1955.
- [154] F.O. RINGLEB. Separation control by trapped vortices. *Boundary Layer and Flow Control*, pages 265–294, 1961.
- [155] S. ROBERTS. Accuracy of the random vortex method for a problem with non-smooth initial data. *J. Comput. Phys.*, 58:29–43, 1985.
- [156] R. ROBERT. A maximum entropy principle for two-dimensional perfect fluid dynamics. *J. Stat. Phys.*, 65:531–554, 1991.
- [157] L. ROSENHEAD. The formation of vortices from a surface of discontinuity. *Proc. Roy. Soc. London, A* 134:170–192, 1931.
- [158] V.J. ROSSOW. Lift enhancement by an externally trapped vortex. *AIAA Paper*, pages 77–672, 1977.
- [159] E.J. ROUTH. Some application of conjugate functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 12:27–31, 1881.
- [160] G. RUSSO, J. STRAIN. Fast triangulated vortex methods for the 2D Euler equations. *J. Comput. Phys.*, 1993.
- [161] P.G. SAFFMAN, J.S. SHEFFIELD. Flow over a wing with an attached free vortex. *Studies in Applied Mathematics*, 57:107–117, 1977. vortex cores.
- [162] T. SARPKEYA. An inviscid model of two-dimensional vortex-shedding for transient and asymptotically steady separated flow over an inclined flat plate. *J. Fluid. Mech.*, 68(1):109–128, 1975.
- [163] J.A. SETHIAN, A.F. GHONIEM. Validation study of vortex methods. *J. Comp. Phys.*, 74:283–317, 1988.

-
- [164] J. SETHIAN, A. GREENBERG, J.P. BRUNET, J. MESIROV. Two dimensional viscous incompressible flow in complex geometry on a massively parallel processor. *J. Comput. Phys.*, 101:185–206, 1992.
- [165] J.S. SHEFFIELD. *Topology in Vortex Motion*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1978.
- [166] P.A. SMITH, P.K. STANSBY. Generalized discrete vortex method for cylinders without sharp edges. *AIAA J.*, 25:199–200, 1987.
- [167] P.A. SMITH, P.K. STANSBY. Impulsively started flow around a circular cylinder by the vortex method. *J. Fluid Mech.*, 194:45–77, 1988.
- [168] P.K. STANSBY. A generalized discrete vortex method for Sharp-Edged cylinders. *AIAA J.*, 23:856–861, 1985.
- [169] P.K. STANSBY, A.G. DIXON. Simulation of flow around cylinders by a lagrangian vortex scheme. *Appl. Ocean. Res.*, 5:167–178, 1983.
- [170] H. SPOHN, G.L. EYINK. Negative-temperature states and large-scale, long-lived vortices in two-dimensional turbulence. *J. Stat. Phys.*, 70(3/4):1833–1886, 1993.
- [171] D. SUMMERS. A random vortex simulation of Falkner-Skan boundary layer flow. *J. Comput. Phys.*, 85:86–103, 1989.
- [172] D. SUMMERS. *An Algorithm for Vortex Loop Generation*. LBL report LBL-31367, Berkeley, CA, 1991.
- [173] M. TABOR. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics* Wiley, 1989.
- [174] G. TRYGGVASON. Numerical simulations of the Rayleigh-Taylor instability. *J. Comput. Phys.*, 75:252–288, 1988.
- [175] L. VAN DOMMELEN, E. RUDENSTEINER. Fast adaptive summation of point forces in two dimensional poisson equation. *J. Comp. Phys.*, 83:126–147, 1989.
- [176] D. WALTON. A brief wind tunnel test of the Kasper airfoil. *Soaring*, 38:26–27, 1974.
- [177] H.Y. WANG. *A High order Vortex Method for Patches of Constant Vorticity* PAM-534, Math. Dept., Berkeley, 1991.
- [178] W. WELZENBACH, Untersuchungen über die Stratigrafieder Schneeablagerungen, Wiss. Veröffentlichungen des Deutschen und Oesterreichisches Alpenvereins, n. 9, Innsbruck, 1930.
- [179] F.L. WESTWATER. Rolling up of the surface of discontinuity behind an airfoil of finite span. *Aero. Res. Con., R and M, vol.1962*, 1935.
- [180] G. WILLIAMS. Vortex ring model of the superfluid lambda transition. *Phys. Rev. Lett.*, 59:1926–1929, 1987.
- [181] G.S. WINCKELMANS, A. LEONARD. Contributions to vortex particle methods for the computation of three-dimensional incompressible unsteady flows. *J. Comp. Phys.*, 109(2):247–273, 1993.