Regla de l'Hôpital para sucesiones

Antonio J. Di Scala

Post print (i.e. final draft post-refereeing) version of an article published on *Revista de Educacion de la Union Matematica Argentina 13, Nro. 1, p. 15-20, (1998).*
Beyond the journal formatting, please note that there could be minor changes from this document to the final published version. The journal is accessible from here:
http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu

El propósito de este artículo es mostrar una versión para sucesiones, de la Regla de l'Hôpital, en la cual el papel de las derivadas lo juegan las diferencias.

La versión de la regla de l'Hôpital, en el caso de funciones es :

Si dos funciones f y g de **R** en **R** ,tienen las siguientes propiedades:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$$

Entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

El primer enunciado se adjudica a Otto Stolz, alumno de Karl Weierstrass.

"Criterio de Stolz".
Sea $\{a_n\}$ una sucesión arbitraria y $\{b_n\}$ una sucesión creciente y divergente.
Si existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

Entonces también existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

y además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Una demostración es como sigue :

Primero escribimos

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \alpha + \epsilon_n$$

donde ϵ_n tiende a cero cuando n tiende a infinito y α es el limite del cociente.

Luego

$$a_{n+1} - a_n = \alpha.(b_{n+1} - b_n) + \epsilon_n.(b_{n+1} - b_n)$$

Si sumamos en ambos miembros desde $n = 1$ hasta $n = N - 1$ resulta :

$$a_N - a_1 = \alpha.(b_N - b_1) + \sum_{n=1}^{N-1} \epsilon_n.(b_{n+1} - b_n)$$

podemos suponer $a_1 = b_1 = 0$, ahora si dividimos por b_N se obtiene :

$$\frac{a_N}{b_N} = \alpha + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\epsilon_n.(b_{n+1} - b_n)}{b_N} = \alpha + R_N$$

donde

$$R_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\epsilon_n.(b_{n+1} - b_n)}{b_N}$$

afirmamos que :

$$\lim_{n\to\infty} R_N = 0$$

en efecto, podemos escribir :

$$R_N = \sum_{n=1}^{K} \frac{\epsilon_n.(b_{n+1} - b_n)}{b_N} + \sum_{n=K+1}^{N-1} \frac{\epsilon_n.(b_{n+1} - b_n)}{b_N}$$

tomando valor absoluto y usando la desigualdad del triángulo se tiene :

$$\mid R_N \mid \leq \sum_{n=1}^{K} \frac{\mid \epsilon_n \mid . \mid (b_{n+1} - b_n) \mid}{\mid b_N \mid} + \sum_{n=K+1}^{N-1} \frac{\mid \epsilon_n \mid . \mid (b_{n+1} - b_n) \mid}{\mid b_N \mid}$$

como los ϵ_n tienden a cero, podemos encontrar una constante M que los acota y dado un $\epsilon > 0$ un N_0 a partir del cual $\mid \epsilon_n \mid \leq \epsilon$.

Haciendo $K = N_0$, obtenemos :

$$\mid R_N \mid \leq \sum_{n=1}^{N_0} \frac{M. \mid (b_{n+1} - b_n) \mid}{\mid b_N \mid} + \sum_{N_0+1}^{N-1} \frac{\epsilon. \mid (b_{n+1} - b_n) \mid}{\mid b_N \mid}$$

como la sucesión b_n es creciente podemos sacar los valores absolutos, obteniendo sumas telescópicas, luego de cancelar obtenemos :

$$\mid R_N \mid \leq M. \frac{\mid b_{N_0+1} \mid}{\mid b_N \mid} + \epsilon. \frac{(b_N - b_{N_0+1})}{\mid b_N \mid} \leq M. \frac{\mid b_{N_0+1} \mid}{\mid b_N \mid} + \epsilon$$

finalmente como b_N es divergente, agrandando N de manera que

$$M. \frac{\mid b_{N_0+1} \mid}{b_N} \leq \epsilon$$

resulta :

$$\mid R_N \mid \leq 2.\epsilon$$

lo cual termina la demostración.

Veamos una bonita aplicación, definamos la sucesión $\{x_n\}$ de la siguiente manera :

$$x_n = \begin{cases} 1 & , \text{si } n = 1 \\ \text{seno}(x_{n-1}) & , \text{si } n > 1 \end{cases}$$

es decir las iteradas de la función seno a partir del 1.

La cuestión es calcular :

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2.n$$

Para ello escribimos $a_n = n$ y $b_n = \frac{1}{x_n^2}$ resultando :

$$x_n^2.n = \frac{a_n}{b_n}$$

Sin detenernos en el hecho de que la suceción $\{b_n\}$ sea creciente y divergente, calculamos :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

escribimos:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \frac{x_{n+1}^2.x_n^2}{x_n^2 - x_{n+1}^2}$$

usando el desarrollo de Mac-Laurin de la función seno se obtiene :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3}{6} + ...$$

reemplazando llegamos a:

$$\frac{x_{n+1}^2.x_n^2}{x_n^2 - x_{n+1}^2} = \frac{x_n^2.(x_n - \frac{x_n^3}{6} + ...)^2}{x_n^2 - (x_n - \frac{x_n^3}{6} + ...)^2} = \frac{(x_n - \frac{x_n^3}{6} + ...)^2}{1 - (1 - \frac{x_n^2}{6} + ...)^2} =$$

$$\frac{x_n^2.(1 - \frac{x_n}{6} + ...)^2}{(\frac{x_n^2}{6} + ...).(2 - \frac{x_n^2}{6} + ...)} = \frac{(1 - \frac{x_n}{6} + ...)^2}{(\frac{1}{6} + ...).(2 - \frac{x_n^2}{6} + ...)}$$

finalmente tomando límite cuando n tiende a infinito y usando que $\{x_n\}$ tiende a cero, llegamos a que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2.x_n^2}{x_n^2 - x_{n+1}^2} = \frac{1}{\frac{1}{6}.2} = 3$$

es decir :

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2.n = 3$$

el crecimiento y divergencia de la sucesión $\{b_n\}$ resultan de la desigualdad $0 \leq \text{seno}(x) \leq x$ válida en el intervalo $[0, 1]$ que garantizan que $\{x_n\}$ sea decreciente y tenga límite. Este límite es cero por ser cero el único punto fijo de la función seno en este intervalo.

Volviendo nuevamente la vista al "Criterio de Stolz", el siguiente ejemplo muestra que la hipótesis sobre el crecimiento de las $\{b_n\}$, no puede, en principio, obviarse :

$$a_n = n$$

$$b_n = n + (-1)^n.\sqrt{n}$$

en este caso los límites dan :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

pero analizando la demostración resulta que solo necesitamos que estén acotadas las sumas :

$$\sum_{n=K+1}^{N-1} \frac{|\ (b_{n+1} - b_n)\ |}{|\ b_N\ |}$$

por una constante que no dependa ni de K ni de N.

Dicho esto enunciamos esta generalización como sigue :

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos suceciones. Supongamos que $\{b_n\}$ es divergente y que existe una constante H tal que :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{|\ (b_{n+1} - b_n)\ |}{|\ b_N\ |} \leq H \text{ para todo } N$$

Si existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

Entonces también existe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

y además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Para finalizar, me parece adecuado comentar que la necesidad de aclarar estas ideas nació en una discusión de la solución de un problema de la competencia Paenza, mantenida entre Luis Silvestre, Martín Sombra y el autor.

Bibliografía.

Una demostración diferente del "Criterio de Stolz" no generalizado puede hallarse en el libro de E. Linés Escardó titulado "Principios de Análisis Matemático " editorial Reverté. Aqui el "Criterio" se deduce como un caso particular del método de sumación de Töplitz.

Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

5000 Córdoba.