



Politecnico di Torino

Porto Institutional Repository

[Other] Modellazione matematica del comportamento visco-elastico del calcestruzzo

*Original Citation:*

G. Lacidogna (1994). *Modellazione matematica del comportamento visco-elastico del calcestruzzo*.

.

*Availability:*

This version is available at : <http://porto.polito.it/1517969/> since: March 2007

*Terms of use:*

This article is made available under terms and conditions applicable to Open Access Policy Article ("Public - All rights reserved") , as described at [http://porto.polito.it/terms\\_and\\_conditions.html](http://porto.polito.it/terms_and_conditions.html)

Porto, the institutional repository of the Politecnico di Torino, is provided by the University Library and the IT-Services. The aim is to enable open access to all the world. Please [share with us](#) how this access benefits you. Your story matters.

(Article begins on next page)



Giuseppe Lacidogna

**Modellazione matematica del comportamento  
viscoelastico del calcestruzzo**

Tesi per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca  
VI ciclo (A.A. 1990/91; 1991/92; 1992/93)

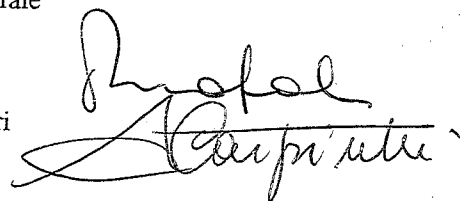


Dottorato di Ricerca in Ingegneria Strutturale  
Politecnico di Torino

## Indice

<b>Sommario</b>	<b>1</b>
<b>Capitolo 1. Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1 Generalità	3
1.2 Modelli di previsione della viscosità	3
1.3 Formulazione diretta della funzione rilassamento	4
1.4 Analisi viscoelastica lineare delle strutture	5
1.5 Metodi algebrizzati	6
<b>Capitolo 2. Il comportamento del calcestruzzo nel tempo</b>	<b>9</b>
2.1 Caratteristiche meccaniche dei calcestruzzi	9
2.1.1 Il comportamento sperimentale istantaneo e differito	10
2.1.2 Modulo di elasticità	13
2.1.3 Relazione tensione-deformazione per compressione monoassiale	14
2.1.4 Energia di frattura	16
2.1.5 Criteri di rottura per tensioni pluriassiali del calcestruzzo	18
2.1.6 Viscosità del calcestruzzo	21
2.2 Meccanismi fisici della viscosità e del ritiro	24
2.2.1 Basic creep e drying creep	24
2.2.2 Deformazioni dovute al ritiro	25
2.2.3 Meccanismi reali ed apparenti	26
2.3 Il calcestruzzo come materiale invecchiante	30
2.3.1 La funzione viscosità	30
2.3.2 Il principio di sovrapposizione	34
2.3.3 La funzione rilassamento	37
2.3.4 Relazione integrale tra la funzione viscosità e la funzione rilassamento	39
2.3.5 Soluzione numerica dell'equazione integrale di Volterra	41
2.3.6 Determinazione numerica della funzione rilassamento $R(t, t_0)$ dalla funzione viscosità $J(t, t_0)$	44
2.3.7 Generalizzazione pluriassiale del principio di sovrapposizione	45
2.3.8 Modelli reologici semplici	47

Dottorato di Ricerca in Ingegneria Strutturale  
 Politecnico di Torino  
 10129 Torino, Italy  
 Tutore: Prof. Ing. Paolo Napoli  
 Coordinatore: Prof. Ing. Alberto Carpinteri



2.3.9	Teoria dell'ereditarietà	49			
2.3.10	Modelli semplici di Kelvin-Voigt e di Maxwell	51			
2.3.10.1	Modello di Kelvin-Voigt	51			
2.3.10.2	Modello di Maxwell	55			
2.3.11	Modelli generalizzati	58			
2.3.12	Teoria dell'invecchiamento	62			
2.3.13	Il modello invecchiante di Dischinger	63			
<b>Capitolo 3. Espansione in serie di Dirichlet delle funzioni viscosità e rilassamento</b>		<b>67</b>			
3.1	La funzione viscosità in serie esponenziale	67			
3.2	La funzione rilassamento in serie di esponenziali	71			
3.3	Relazione costitutiva differenziale del modello di Maxwell	73			
3.3.1	Generalizzazione pluriassiale della relazione costitutiva differenziale	76			
<b>Capitolo 4. Modelli di previsione della viscosità del calcestruzzo</b>		<b>79</b>			
4.1	Il Modello CEB 90	79			
4.2	Il Modello di Rilassamento corrispondente alla formulazione CEB 90	86			
	Esempio 1. Ritiro impedito dall'istante $t_0$	105			
<b>Capitolo 5. I principi della viscosità lineare</b>		<b>109</b>			
5.1	Generalità	109			
5.2	Primo e secondo principio	110			
5.3	Terzo principio o del riacquisto del regime principale	112			
5.4	Quarto principio sulla variazione dello schema statico	116			
<b>Capitolo 6. Analisi viscoelastica lineare delle strutture</b>		<b>119</b>			
6.1	Applicazione delle equazioni integrali di Volterra	119			
6.1.1	Metodo delle forze	120			
6.1.2	Metodo delle deformazioni	122			
	Esempio 1. Struttura omogenea con un solo vincolo elastico	124			
6.1.3	Strutture eterogenee caratterizzate da un diverso comportamento viscoso	130			
	Esempio 1. Struttura eterogenea soggetta a carichi permanenti	131			
6.2	Applicazione del metodo differenziale	139			
	Esempio 1. Deformazione di una trave con carico variabile nel tempo	142			
	Esempio 2. Struttura omogenea soggetta a cambiamento di schema statico	146			
	Esempio 3. Struttura omogenea con un solo vincolo elastico	148			
	Esempio 4. Struttura eterogenea soggetta a carichi permanenti	150			
6.3	Strutture omogenee soggette a modificazione dello schema statico	153			
	Determinazione della funzione $\xi(t, t_1, t_0)$ con legge integrale	154			
6.3.1					
6.3.2	Determinazione della funzione $\xi(t, t_1, t_0)$ con legge differenziale	155			
6.4	Strutture omogenee con vincoli elastici	158			
6.4.1	Soluzione dei problemi di vincolo elastico mediante le funzioni di rilassamento ridotte	160			
6.4.2	Formulazione diretta delle funzioni rilassamento ridotte	162			
6.4.3	Applicazione alle sezioni miste acciaio-clc	166			
	Esempio 1. Sezione mista acciaio-calcestruzzo	171			
<b>Capitolo 7. Il Metodo AAEM</b>		<b>175</b>			
7.1	Generalità	175			
7.2	Il coefficiente di invecchiamento $\chi(t, t_0)$	177			
7.3	Espressione approssimata, $\tilde{\chi}$ , del coefficiente di invecchiamento	179			
7.4	Espressione approssimata della funzione rilassamento ottenuta dalla $\tilde{\chi}$	186			
<b>Conclusioni</b>		<b>189</b>			
<b>Ringraziamenti</b>		<b>190</b>			
<b>Bibliografia</b>		<b>191</b>			

## Sommario

Lo scopo della presente tesi è quello di presentare degli algoritmi matematici utili per lo studio di strutture in calcestruzzo, sulla base della teoria viscoelastica lineare dei materiali invecchianti.

Essa si compone di una parte introduttiva che descrive il comportamento istantaneo e differito nel tempo del calcestruzzo e di una seconda parte dedicata ai modelli costitutivi ed all'analisi strutturale alla luce dei principi della viscosità.

Il comportamento istantaneo, in accordo al codice Modello CEB-FIP MC 90 [2], è rappresentato dal modulo di elasticità e dalla relazione sforzi-deformazioni monoassiale di Sargin. Per gli stati di tensione pluriassiali si fa riferimento al criterio delle tensioni principali di Mohr. Viene posta attenzione, inoltre, alla più recente sperimentazione che dimostra come la rottura del calcestruzzo sia un fenomeno discreto dipendente dall'energia di frattura.

Il comportamento differito nel tempo viene individuato sotto l'aspetto duale della viscosità e del rilassamento, evidenziando, in particolare, i fenomeni della *elasticità ritardata* e della *deformazione irreversibile* che rappresenta la parte puramente plastica della deformazione viscosa.

Successivamente le caratteristiche reologiche del calcestruzzo vengono descritte attraverso i fenomeni fisici della viscosità (*basic creep*, *drying creep*) e del ritiro (*shrinkage*) ponendo attenzione ai meccanismi reali ed apparenti che si verificano nella sua struttura.

L'analisi dei fenomeni reologici consente, inoltre, di caratterizzare il legame costitutivo esistente tra gli sforzi e le deformazioni in regime di viscosità lineare e di definire la funzione viscosità, la funzione rilassamento ed il loro legame integrale ottenuto per mezzo della soluzione numerica dell'equazione integrale di Volterra.

La rielaborazione dei modelli reologici semplici propri della teoria dell'ereditarietà conduce alla definizione di modelli reologici a parametri variabili nel tempo adattabili alla cosiddetta teoria dell'ereditarietà e dell'invecchiamento. In particolare, per mezzo dell'espansione in serie di Dirichlet della funzione rilassamento, attraverso un modello di Maxwell invecchiante a più catene, si giunge a definire un nuovo *Modello di Previsione del Rilassamento del Calcestruzzo* in accordo con il modello CEB 90 e del tutto sostituibile ad esso [59].

Disponendo così di un modello di comportamento nel tempo del calcestruzzo, definito dalla funzione di rilassamento, è possibile trarne dei vantaggi nel calcolo strutturale

affrontando la soluzione dei problemi con il metodo delle deformazioni (duale del metodo delle forze), che richiede un minor numero di incognite iperstatiche.

Questo modello, inoltre, fondato su una relazione costitutiva differenziale, consente la elaborazione dei problemi secondo modalità molto più semplici delle procedure basate su relazioni costitutive integrali: allo scopo di mostrarne le possibilità di applicazione sono stati sviluppati esempi numerici su strutture omogenee con vincoli rigidi ed elastici e su strutture non omogenee lungo il proprio asse.

Per l'analisi delle strutture omogenee soggette a variazione dello schema statico è stato messo a punto un algoritmo di calcolo sulla base del modello delle catene di Maxwell, che consente di determinare la funzione integrale  $\xi(t, t_1, t_0)$  con esattezza e con il minimo impiego di memoria.

Il modello di rilassamento è stato poi applicato al metodo delle *Funzioni di Rilassamento Ridotte*,  $R^*(t, t_0)$ , presentando un metodo analitico per la determinazione approssimata delle funzioni  $R^*$ , che risulta di buona precisione [60].

Viene inoltre illustrata una *Espressione Algebrizzata del Coefficiente di Invecchiamento*,  $\tilde{\chi}$ , proposta nel 1992 [56], per l'utilizzo nell'ambito dei metodi algebrici e poi adottata dal CEB, Bulletin d'Information n° 215 [32].

## Capitolo 1

### Introduzione

#### 1.1 Generalità

L'analisi delle strutture in calcestruzzo si conduce, normalmente, sulle basi della teoria viscoelastica lineare dei materiali invecchianti.

Le limitazioni ed i vantaggi di questa metodologia sono state ampiamente trattate nella letteratura scientifica degli ultimi decenni ed un'ampia sintesi di questo dibattito è contenuta nel lavoro pubblicato dal RILEM Technical Committee TC 69 "Mathematical Modeling for Creep and Shrinkage of Concrete" [1], od in un recente lavoro del professor M.A. Chiorino che riguarda gli aspetti concettuali e linee guida per la formulazione del Codice Modello CEB-FIP 1990 [7].

Dalle conclusioni si può dedurre come l'analisi viscoelastica lineare per materiali invecchianti è una metodologia appropriata per la valutazione degli effetti strutturali della viscosità e del ritiro nell'ambito degli stati limite di servizio, in particolare quando il calcolo strutturale è indirizzato alla valutazione delle forze e degli spostamenti nelle sezioni trasversali degli elementi elastoviscosi.

Questa assunzione rimane, dunque, valida anche se, nell'ambito delle tensioni ammissibili il comportamento del calcestruzzo è caratterizzato da scostamenti non trascurabili dalla linearità, poiché la viscosità ed il ritiro sono fenomeni intrinsecamente non lineari dipendenti dalla variazione di temperatura, dall'umidità ambientale e dalle microfessurazioni. Per alti livelli tensionali, tuttavia, la non linearità diventa l'aspetto prevalente del calcolo strutturale.

#### 1.2 Modelli di previsione della viscosità

L'analisi strutturale è basata, generalmente, su modelli di viscosità e di ritiro sviluppati da specialisti [51] o da società internazionali [2,8].

Queste formulazioni, dette *Codici Modello*, descrivono le proprietà medie nella sezione trasversale di elementi in calcestruzzo, derivate da saggi su provini di prefissate

dimensioni, sottoposti a svariate condizioni ambientali e ad azioni costanti nel tempo, limitate al dominio delle tensioni ammissibili ( $\sigma_c < 0,4 f_{cm}$ ). In tal modo, i modelli di previsione definiscono generalmente la funzione viscosità  $J(t, t_0)$  che rappresenta la deformazione al tempo  $t$  dovuta ad una tensione unitaria applicata a partire dal tempo  $t_0$ ; il ritiro, invece, è descritto separatamente come una deformazione addizionale non dipendente dalla tensione. La funzione  $J(t, t_0)$  contiene, dunque, tutte le informazioni sulle deformazioni viscosi del calcestruzzo in relazione al tempo iniziale di carico  $t_0$ , al tempo attuale  $t$ , all'ambiente ed alle proprietà geometriche del materiale.

La funzione rilassamento raramente viene determinata da prove sperimentali per le difficoltà di definire una procedura duale utile a misurare la tensione causata da una deformazione unitaria costante applicata ai provini. La  $R(t, t_0)$  si ottiene, dunque, invertendo il legame integrale esistente tra la funzione viscosità e rilassamento [16].

In questa tesi, allo scopo di ottenere dei vantaggi computazionali nella determinazione della funzione rilassamento, viene descritta una procedura numerica, basata sulla relazione differenziale del modello delle catene di Maxwell, che consente la determinazione diretta della  $R(t, t_0)$  senza utilizzare l'algoritmo del Metodo Generale [59].

Fra i modelli che definiscono le proprietà medie della viscosità e del ritiro nelle sezioni trasversali degli elementi strutturali vi è il CEB-MC 90 [2]. Vi sono, tuttavia, altri modelli che analizzano nei particolari i meccanismi microstrutturali del calcestruzzo e consentono una discretizzazione più realistica del comportamento strutturale considerando stati di tensione e di deformazione locali dovuti ai diversi fenomeni che si verificano nella pasta di cemento [25].

I modelli tipo *Code type*, comunque, possono anche essere utilizzati per l'analisi ad elementi finiti di sezioni in calcestruzzo impiegando, nella definizione delle relazioni costitutive, alcune formulazioni aggiuntive che tengono conto di fenomeni locali quali la transizione di umidità, il gradiente di temperatura e le proprietà di frattura. Questi modelli, dunque, rappresentano un buon compromesso tra la semplicità operativa e l'accuratezza nella definizione del comportamento del calcestruzzo nel tempo.

### 1.3 Formulazione diretta della funzione rilassamento

La funzione rilassamento associata ad una particolare funzione viscosità può essere determinata numericamente, nei singoli casi, per mezzo di algoritmi risolutivi della equazione integrale; particolarmente conveniente, dal punto di vista numerico è la procedura basata sull'utilizzo della formula dei trapezi [16,32].

Altre possibilità sono offerte da formulazioni algebriche [56], oppure da semplificazioni introdotte nella funzione viscosità per rendere possibile la soluzione

analitica della equazione integrale (teoria dell'ereditarietà, teoria dell'invecchiamento): queste ultime peraltro si allontanano sensibilmente dall'evidenza sperimentale.

E' tuttavia certo che il disporre di un modello analitico di previsione della funzione rilassamento, analogo a quelli disponibili per la funzione viscosità e corrispondente ad uno di essi, è di grande utilità pratica. Esso consente infatti di risolvere in modo elementare i problemi relativi a deformazioni impresse e vincoli posticipati ai carichi, in strutture omogenee e con opportuni adattamenti [22,60], quelli relativi a strutture omogenee con vincoli elastici.

Tenendo conto di ciò, da tempo sono stati profusi sforzi verso le formulazioni di un modello di rilassamento corrispondente ad un assegnato modello di viscosità [71,72] le soluzioni ottenute, tuttavia, erano valide solo per particolari forme della funzione viscosità e la corrispondenza numerica tra i modelli di viscosità e rilassamento non era perfetta.

Nel presente lavoro viene, dunque proposto un modello che, utilizzando come dati di ingresso i medesimi parametri del CEB-MC 90, come l'umidità relativa dell'ambiente, ( $R.H.$ ), resistenza del calcestruzzo a 28 giorni, ( $f_{ck}$ ), spessore teorico dell'elemento, ( $2A_c/u = h_0$ ), fornisce, per tutti i valori di  $t$  e  $t_0$ , la funzione rilassamento con ottima precisione rispetto a quella ottenibile numericamente.

Inoltre, il modello proposto si basa sull'utilizzo delle catene di Maxwell, per cui la formulazione che ne consegue, sintetizzabile nella relazione *elastica quasi-elastica* fra le tensioni e le deformazioni, risulta particolarmente adatta alla soluzione di problemi complessi, consentendo l'utilizzo di procedimenti di analisi strutturale al passo, senza memorizzare l'intera storia di tensione.

### 1.4 Analisi viscoelastica lineare delle strutture

Per procedere all'analisi strutturale, sulla base della teoria lineare della viscosità per materiali invecchianti, è necessario estendere le relazioni costitutive che legano le tensioni e le deformazioni per mezzo della funzione  $J(t, t_0)$ , alle equazioni di congruenza che intercorrono tra le forze e gli spostamenti, tale estensione deve essere effettuata in relazione al tipo di struttura considerata tenendo conto, in particolare, del grado di eterogeneità.

E' dunque conveniente distinguere le strutture nelle seguenti categorie:

1. strutture omogenee con vincoli rigidi;
2. strutture internamente omogenee con vincoli elastici;
3. strutture eterogenee, nelle quali l'eterogeneità è dovuta ai diversi materiali che compongono la sezione oppure alla diversità di materiale o dei tempi di getto nelle diverse zone della struttura.

L'analisi delle strutture omogenee sollecitate da carichi o deformazioni costanti nel tempo può essere vantaggiosamente effettuata alla luce dei *Teoremi della Viscosità*; in tal modo, il primo principio evidenzia la conservazione nel tempo dei risultati elastici per le

tensioni, mentre le deformazioni si incrementano secondo la legge di viscosità; il secondo principio, invece, ammette la conservazione dei risultati elastici per le deformazioni, mentre le tensioni si riducono nel tempo secondo la legge di rilassamento [16].

Per le strutture omogenee soggette alla variazione dello schema statico, il terzo ed il quarto principio dimostrano come la loro soluzione sia completamente regolata dalla funzione  $\xi(t, t_1, t_0)$ , i cui valori numerici possono essere ottenuti mediante integrazione numerica tra le funzioni  $J$  ed  $R$  [16,20].

Il calcolo delle strutture omogenee con vincoli elastici, o delle strutture eterogenee, si conduce generalmente applicando il metodo delle forze che conduce alla scrittura di complessi sistemi di equazioni integrali di Volterra, la cui soluzione può essere ottenuta con metodi numerici o con procedure approssimate [16,62]. Soluzioni compatte si ottengono solo nel caso di strutture con un unico vincolo elastico o composte da due parti aventi caratteristiche reologiche differenti.

La teoria generale delle funzioni rilassamento ridotte,  $R^*(t, t_0)$ , consente, tuttavia, di rendere più agevole il calcolo delle strutture complesse disaccoppiando il sistema di  $n$  equazioni integrali di Volterra in sistemi di  $n$  equazioni integrali indipendenti, ognuna delle quali contiene una delle incognite che caratterizzano il problema [21,22].

In questa tesi, nell'ambito dell'analisi viscoelastica lineare delle strutture, si pone particolare attenzione alle agevolazioni ottenibili nei procedimenti di calcolo utilizzando la formulazione diretta delle funzioni rilassamento.

Questa metodologia consente da un lato di risolvere i problemi relativi alle strutture omogenee e non omogenee dotate di vincoli elastici mediante il metodo delle deformazioni, poiché è nota ad ogni passo la funzione rilassamento; dall'altro di impiegare, con il metodo delle forze, algoritmi risolutivi definiti dall'equazione *elastica quasi-elastica* che non richiedono di memorizzare l'intera storia di tensione.

Per le strutture omogenee, con vincoli rigidi, soggette a variazione di schema statico è descritto un algoritmo che consente di determinare con semplicità la funzione integrale  $\xi(t, t_1, t_0)$ .

Nell'ambito dell'analisi di strutture dotate di  $n$  vincoli elastici viene illustrata la formulazione diretta delle funzioni rilassamento ridotte [60],  $R^*(t, t_0)$ , a partire dagli autovalori  $\omega$  e dai parametri reologici che caratterizzano il problema.

## 1.5 Metodi algebrizzati

Nell'analisi di strutture in calcestruzzo a comportamento viscoelastico sono ben noti i vantaggi computazionali che derivano dal disporre di equazioni algebriche per la determinazione della funzione rilassamento che non comportino l'onerosa inversione della equazione integrale di Volterra.

A questo scopo, fra i procedimenti semplificati che si sono rivelati più idonei a superare le difficoltà di calcolo connesse con la soluzione delle equazioni integrali, il metodo AAEM (Age-Adjusted Effective Modulus) è quello di maggiore utilità pratica.

Questo metodo, infatti, basato sulla conversione approssimata delle equazioni integrali in equazioni algebriche, consente una semplice formulazione matematica che si rivela soddisfacente anche per l'attendibilità dei risultati numerici.

Nell'ambito del metodo AAEM, sono state recentemente presentate espressioni empiriche approssimate del coefficiente di invecchiamento  $\chi(t, t_0)$ , che dipendono dalla sola età di messa in carico  $t_0$  [53,67], o che tengono conto, in aggiunta, dei parametri reologici che condizionano la deformabilità del calcestruzzo [54].

Con riferimento al modello viscosità CEB 1990, in questo lavoro viene presentata una forma approssimata,  $\tilde{\chi}$ , del coefficiente di invecchiamento  $\chi(t, t_0)$  che, partendo dalla formulazione data in [53], dipendente solo da  $t_0$ , introduce l'influenza dei parametri reologici mediante un coefficiente di ottimizzazione che consente di minimizzare l'errore, in particolare per bassi valori del tempo iniziale di carico.

La nuova espressione approssimata  $\tilde{\chi}$  del coefficiente di invecchiamento viene impiegata per ottenere una espressione approssimata  $\tilde{R}(t, t_0)$  della funzione rilassamento  $R(t, t_0)$ , i cui risultati numerici sono molto prossimi a quelli ottenuti mediante l'inversione della equazione integrale di Volterra.

La presente tesi è strutturata in sette capitoli:

- il secondo è dedicato alla descrizione del comportamento del calcestruzzo istantaneo e differito nel tempo, ponendo particolare attenzione ai meccanismi fisici della viscosità e del ritiro ed alla rappresentazione dei modelli reologici semplici;
- il terzo descrive l'espansione in serie di Dirichlet della funzione viscosità e rilassamento per l'ottenimento di modelli reologici a parametri dipendenti dal tempo;
- nel quarto si descrive il modello di viscosità CEB 90 ed il modello di rilassamento basato sulla formulazione differenziale delle catene di Maxwell;
- nel quinto capitolo, dedicato ai principi della viscosità lineare, viene presentato il Quarto Principio, recentemente formalizzato, per l'analisi di strutture omogenee con vincoli rigidi soggette a ripetute variazioni di schema statico;
- nel sesto capitolo, dedicato all'analisi viscoelastica lineare delle strutture, si pongono in rilievo i vantaggi che si ottengono nel calcolo strutturale utilizzando la formulazione diretta delle funzioni rilassamento e la relazione elastica quasi-elastica tra le tensioni e le deformazioni; viene inoltre presentato un algoritmo che consente di determinare con semplicità la funzione integrale che regola la variazione di schema



statico nelle strutture omogenee ed una metodologia utile a determinare direttamente le funzioni rilassamento ridotte;

- nel settimo capitolo, nell'ambito dei metodi algebrizzati, viene descritta una espressione algebrizzata del coefficiente di invecchiamento che, nei problemi caratterizzati da una combinazione lineare di viscosità e rilassamento, conduce a risultati molto prossimi a quelli ottenuti dal Metodo Generale.

## Capitolo 2

### Il comportamento del calcestruzzo nel tempo

#### 2.1 Caratteristiche meccaniche dei calcestruzzi

Il calcestruzzo è un materiale ottenuto dalla miscelazione di *composti attivi*, cemento ed acqua, e di *materiali inerti*, ghiaia e pietrisco di varie dimensioni.

La miscela di cemento ed acqua prende il nome di *pasta*. Da questa unione si innescano le reazioni fondamentali per la formazione del calcestruzzo. Infatti l'acqua, a contatto dei singoli granuli di cemento, dà luogo ad un processo di *idratazione* al quale è legato il progressivo indurimento della pasta. Per rendere possibile questa reazione occorre una certa quantità di acqua, in rapporto con la quantità di cemento. Se alla pasta di cemento si aggiunge l'inerte fino, costituito dalla sabbia, si ottiene la *malta*, nella quale i granuli dell'inerte devono essere avvolti in un involucro di pasta.

Per ottenere una massa compatta, priva di vuoti, la pasta deve avvolgere i granuli di sabbia e riempire gli spazi tra un granulo e l'altro; affinché ciò sia possibile è necessario che il rapporto quantitativo tra sabbia e pasta sia contenuto entro valori ben definiti, occorre cioè che i granuli della sabbia abbiano dimensioni assortite in modo opportuno secondo una adatta *composizione granulometrica*.

Il calcestruzzo può, dunque, essere considerato una miscela di malta e di inerte grosso (ghiaia o pietrisco): in relazione al rapporto quantitativo tra inerte grosso e malta, nonché alla composizione granulometrica della ghiaia e del pietrisco, vale quanto detto per la sabbia.

Le *proprietà meccaniche* di tale conglomerato lapideo artificiale dipendono da quelle dei suoi componenti (aggregato e pasta cementizia) e dal legame che si verifica all'interfaccia tra i due.

Per un comune calcestruzzo di inerte pesante, per la cui produzione sono state eseguite le corrette modalità tecnologiche e chimiche, le proprietà meccaniche dipendono prevalentemente dalla pasta cementizia che risulta essere il componente più debole. La resistenza teorica di questo materiale, determinabile in base alla relativa coesione molecolare, è molto più elevata di quanto si ricava dalla sperimentazione [1].

Il fenomeno è spiegato dalla meccanica della frattura, che fa dipendere la rottura dalla presenza di difetti all'interno del materiale.

I difetti sono costituiti in primo luogo da microfessure che si verificano, durante la presa e l'indurimento del conglomerato, nella pasta cementizia e all'interfaccia con l'aggregato, a causa del ritiro della pasta stessa e dell'imperfetta adesione tra i componenti. Vi sono, inoltre, dei pori capillari diffusi nella pasta cementizia, anche se la miscela è stata ben costipata, e dei vuoti di maggiori dimensioni dovuti alla non omogenea costipazione dei getti.

La resistenza locale della pasta cementizia, limitata dalla presenza dei difetti, di cui si è accennato, definisce quella del materiale composto. La resistenza locale del calcestruzzo viene cioè intesa come una sua proprietà uniformemente diffusa, perché riferita ad elementi di dimensioni sufficientemente grandi rispetto a quelle massime dell'inerte impiegato, estendendo il concetto di omogeneità ad un punto di vista macroscopico.

### 2.1.1 Il comportamento sperimentale istantaneo e differito nel tempo del calcestruzzo

Il comportamento del calcestruzzo sotto carico è rappresentato nei diagrammi tensione-deformazioni di figura (2.1.1). Da essi si nota:

1. forte *dissimetria* nei diagrammi con resistenze a compressione molto più elevate di quelle a trazione per le diverse resistenze del materiale;
2. comportamento deformativo non lineare già da modesti valori delle tensioni;
3. deformazioni, a rottura, notevolmente piccole con carattere prevalentemente fragile delle rotture stesse;
4. modulo elastico nel tratto iniziale diverso per le differenti resistenze dei materiali;
5. caduta della rigidità molto più rapida a trazione che a compressione.

In particolare, il tratto discendente delle curve di figura (2.1.1) può essere rilevato solo con prove a deformazione imposta.

Se invece è la forza ad essere incrementata, raggiunto il massimo della tensione, il provino si rompe bruscamente restituendo l'energia potenziale elastica accumulata.

Le prove di trazione, invece, sono più complesse, poiché la resistenza del materiale è molto ridotta e si ha la possibilità di imprimere delle deformazioni molto piccole. In via indicativa si evidenzia una dilatazione a rottura indipendente dalla resistenza del materiale. Riferendosi alle prove di compressione si rilevano tre fasi del comportamento del calcestruzzo, come indicato nella figura (2.1.2). Una fase *a* di basse tensioni limitate a circa 0,4 della resistenza a rottura ( $f_c$ ), nella quale le microfessure non si propagano sensibilmente ed il materiale ha un comportamento prossimo a quello elastico-lineare. Una fase *b*, compresa tra 0,4 e 0,85 di  $f_c$  in cui il comportamento non è più lineare a causa della propagazione delle microfessure nella pasta cementizia che trovano, tuttavia, un proprio equilibrio. Una fase *c* di tensioni elevate, superiori a 0,85 la resistenza ultima, in

cui le curve si discostano molto dalla linearità a causa della propagazione instabile delle microfessure, che porta progressivamente alla rottura.

Se si considera anche la durata del carico, la curva a tratto continuo di figura (2.1.2) si riferisce al comportamento *istantaneo* del materiale, misurato con prove di breve durata; essa si interrompe con la rottura immediata del provino definendo il valore della resistenza  $f_c$  del materiale.

Lasciando il provino sotto carico costante si leggono nel tempo gli incrementi della deformazione  $\varepsilon$ . Solo dopo un tempo relativamente lungo la deformazione si stabilizza su un valore finale.

Se la tensione, istantaneamente applicata, supera il valore di  $0,85 f_c$ , la deformazione non si stabilizza al tempo  $t_\infty$  poiché il provino si rompe preventivamente. Le curve tratteggiate di figura (2.1.2) indicano dunque le resistenze a termine, fornite dal provino, dopo una certa permanenza del carico, a causa della propagazione instabile delle microfessurazioni.

Le caratteristiche meccaniche del calcestruzzo vengono raggiunte lentamente nel tempo in relazione al grado di maturazione. Molte normative si riferiscono al limite di 28 giorni per la definizione della resistenza, ma anche dopo tale data si sviluppa un sensibile indurimento del materiale. Per accelerare il processo di indurimento e raggiungere rapidamente alte resistenze si ricorre alla maturazione forzata che consiste nel trattare termicamente i getti. In figura (2.1.3), a tratto continuo, è indicata la curva di indurimento di un calcestruzzo; a tratto discontinuo è indicata la curva di indurimento dello stesso calcestruzzo trattato termicamente.

Il trattamento termico, tuttavia, anche se correttamente applicato, riduce la resistenza finale del materiale a causa delle microfessurazioni.

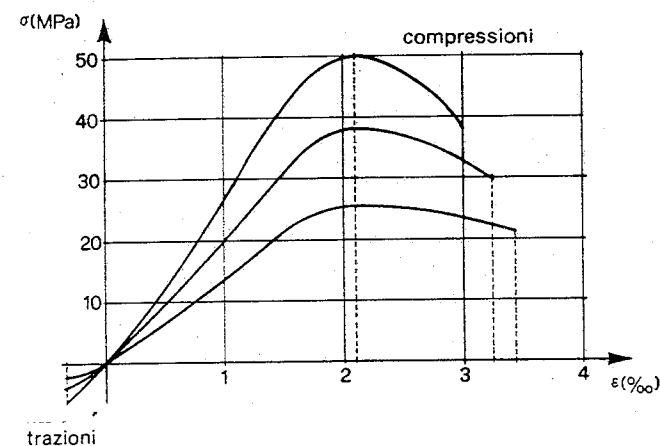


Figura 2.1.1: Diagrammi istantanei tensione-deformazioni

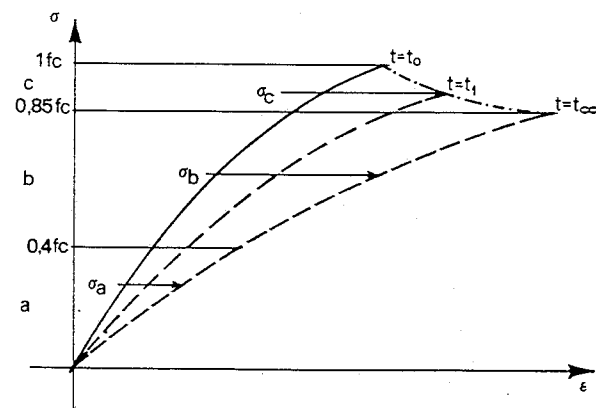


Figura 2.1.2: Diagramma tensioni-deformazioni nel tempo

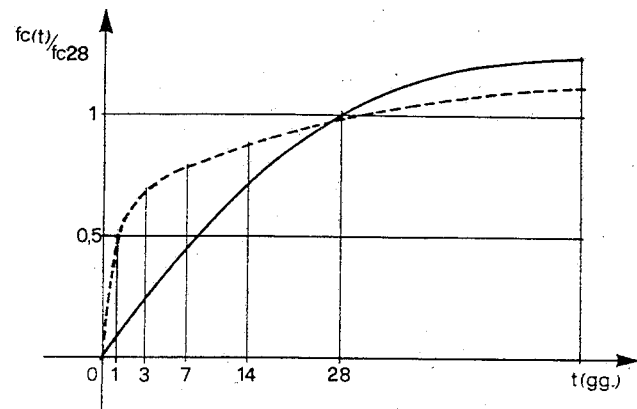


Figura 2.1.3: Curva di indurimento del calcestruzzo

## 2.1.2 Modulo di elasticità

In accordo al CEB-FIP MC 90 [2], il modulo di elasticità del calcestruzzo all'età di 28 giorni,  $E_{ci}$ , definito come il modulo tangente di elasticità all'origine del diagramma sforzi-deformazioni, può essere stimato secondo la formula:

$$E_{ci} = E_{c0} (f_{cm}/f_{cm0})^{1/3} \quad (2.1.1)$$

dove  $f_{cm}$  è la resistenza media cilindrica all'età di 28 giorni,  $E_{c0} = 21500$  MPa e  $f_{cm0} = 10$  MPa.

L'equazione (2.1.1) rappresenta una semplice relazione empirica tra resistenza e rigidezza di un calcestruzzo che ha raggiunto un sensibile grado di maturazione.

Per quanto, data una certa resistenza, il modulo di elasticità del calcestruzzo dipende da svariati parametri, ed in particolar modo dal tipo degli inerti, l'eq. (2.1.1) stima con sufficiente precisione il suo modulo elastico.

La seguente relazione, invece, descrive lo sviluppo nel tempo del modulo elastico:

$$E_{ci}(t) = E_{ci} \beta_E(t) \quad (2.1.2)$$

con  $\beta_E(t) = \exp \left[ \frac{s}{2} \left( 1 - \left( \frac{28}{t/t_1} \right)^{0,5} \right) \right]$ , dove:

$E_{ci}(t)$  = modulo di elasticità al tempo  $t$ ;

$E_{ci}$  = modulo di elasticità tangente in accordo all'eq. (2.1.1);

$s$  = coefficiente che dipende dal tipo di cemento; 0,2 per cementi ad alta resistenza e rapido indurimento; 0,25 per cementi normali od a rapido indurimento; 0,38 per cementi a lento indurimento;

$t$  = età del calcestruzzo in giorni;

$t_1 = 1$  giorno.

La figura (2.1.4) paragona lo sviluppo nel tempo del modulo elastico di vari calcestruzzi, misurato sperimentalmente, con i valori ottenuti dalla equazione (2.1.2). Si nota come la formula precedente tenga conto con buona approssimazione degli effetti dell'invecchiamento sul modulo elastico del materiale.

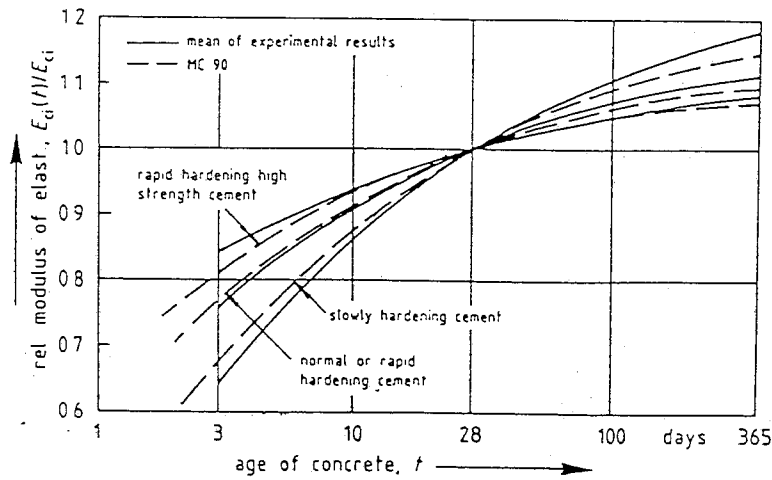


Figura 2.1.4: Sviluppo nel tempo del modulo elastico

### 2.1.3 Relazione tensione-deformazione per compressione monoassiale

In letteratura sono state proposte diverse relazioni per descrivere il comportamento sforzi-deformazioni del calcestruzzo in compressione. Una di queste, in particolare la formula originalmente proposta da Sargin nel 1971 [3], è stata largamente accettata ed introdotta nel CEB Model Code 90 con alcuni perfezionamenti.

La formula di Sargin, infatti, ha il vantaggio di descrivere con precisione il tratto ascendente della curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  e può essere anche utilizzata per calcolare i diagrammi sforzi-deformazioni per stati di tensione pluriassiali.

Questa relazione, tuttavia, presenta delle imprecisioni nel descrivere il tratto discendente delle curve sforzi-deformazioni quando  $|\sigma_c| \leq 0,5 f_{cm}$  e  $|\varepsilon_c| > \varepsilon_{c,lim}$ .

La relazione  $\sigma$ - $\varepsilon$ , valida per il tratto ascendente delle curve e per il tratto discendente finché la tensione non raggiunge il valore  $|\sigma_c| \leq 0,5 f_{cm}$ , è la seguente:

$$\sigma_c = - \frac{\frac{E_{ci}}{E_{c1}} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}\right)^2}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{c1}} - 2\right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}}} f_{cm} \quad (2.1.3)$$

dove:

$E_{ci}$  = modulo di elasticità tangente in accordo all'equazione (2.1.2);

$\sigma_c$  = tensione di compressione in MPa;

$\varepsilon_c$  = deformazione in compressione;

$\varepsilon_{c1} = -0,0022$ , deformazione nel punto di massima resistenza del calcestruzzo,  $f_{cm}$ ;

$E_{c1} = f_{cm}/0,0022$ , modulo secante di elasticità dall'origine al punto di massima resistenza,  $f_{cm}$ .

La deformazione  $\varepsilon_{c,lim}$ , relativa alla tensione  $\sigma_c = -0,5 f_{cm}$  nel tratto discendente della curva, può essere determinata con l'eq. (2.1.4)

$$\frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{ci}}{E_{c1}} + 1 \right) + \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \frac{E_{ci}}{E_{c1}} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.4)$$

Nella figura (2.1.5) sono diagrammati i valori della eq. (2.1.3), per calcestruzzi aventi resistenze caratteristiche  $f_{ck}$  rispettivamente uguali a 80,40 e 20 MPa. Il tratto discendente delle curve oltre il valore  $\varepsilon_{c,lim}$  è determinato per mezzo di una equazione aggiuntiva contenuta nel cap. 3.1 del CEB Model Code 90 [2].

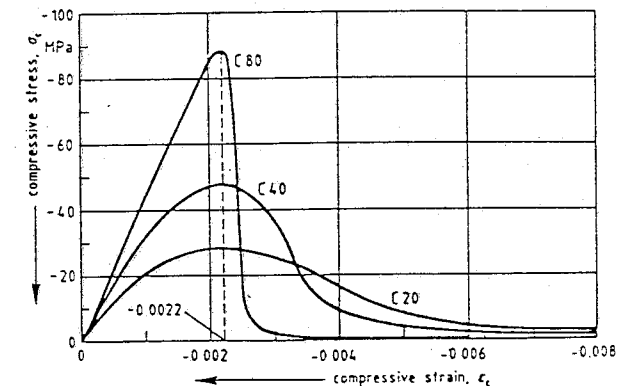


Figura 2.1.5: Diagrammi di Sargin

### 2.1.4 Energia di frattura

La relazione  $\sigma$ - $\varepsilon$  descritta dall'eq. (2.1.3), pur essendo in buon accordo con i risultati sperimentali, non tiene conto dell'incremento del valore di  $\varepsilon_{c1}$  (deformazione nel punto di massima resistenza), che si ottiene in funzione dell'incremento di resistenza del calcestruzzo; infatti la contrazione  $\varepsilon_{c1}$  è la stessa per tutte le classi di resistenza. Inoltre la formula di Sargin è indipendente dalla lunghezza del provino in compressione; la più recente sperimentazione [4] dimostra, infatti, che la rottura per compressione del calcestruzzo è un fenomeno discreto secondo il quale, in un elemento compresso, la frattura non è distribuita uniformemente nell'intero volume del materiale, ma è concentrata in una regione di ampiezza limitata.

Per questa ragione, il ramo discendente della curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  del calcestruzzo sollecitato in compressione è influenzato dalla lunghezza,  $l_0$ , della zona dei provini sulla quale si misura la dilatazione. Ciò che invece risulta essere una vera caratteristica del materiale è il diagramma  $\sigma$ - $w$ , che rappresenta la tensione trasmessa attraverso la fessura, in funzione della apertura della fessura stessa, figura (2.1.6).

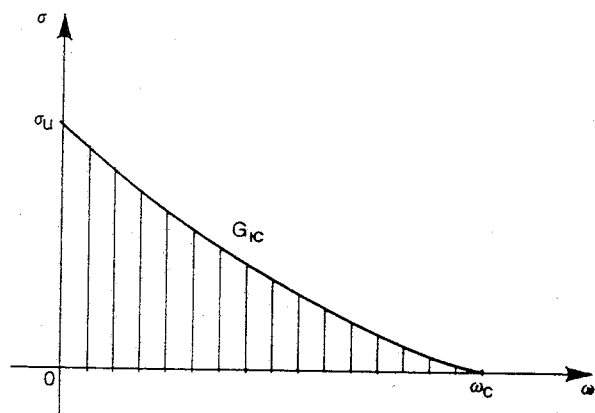


Figura 2.1.6: Diagramma tensione-apertura della fessura

Questa legge di decadimento indica un indebolimento della tensione all'aumentare della distanza  $w$  delle facce della fessura. Quando l'ampiezza  $w$  raggiunge il valore limite  $w_c$  l'interazione si annulla totalmente e la tensione diventa zero. L'area sottesa dalla curva  $\sigma$ - $w$  rappresenta l'energia di frattura:

$$G_{IC} = \int_0^{w_c} \sigma(w) dw \quad (2.1.5)$$

che risulta essere un'altra proprietà intrinseca del materiale.

L'energia dissipata sulla superficie della fessura vale  $G_{IC} A_0$ , essendo  $A_0$  la sezione trasversale del provino.

Poiché, d'altro canto, si suppone che la dissipazione dell'energia avvenga esclusivamente sulla superficie fessurata e non nel volume del materiale integro, l'energia dissipata totalmente nel volume  $A_0 l_0$  rimane invariata essendo pari a  $G_{IC} A_0$ .

Se si rappresentano quindi le curve forza-deformazione relativa ( $F$ - $\Delta l$ ) all'aumentare della lunghezza del provino  $l_0$ , si ottengono tratti elastici a rigidità calante e tratti *softening* a pendenza negativa crescente ed oltre un certo limite a pendenza positiva.

L'area sottesa da ciascuna curva deve infatti essere costante e pari a  $G_{IC} A_0$ , figura (2.1.7).

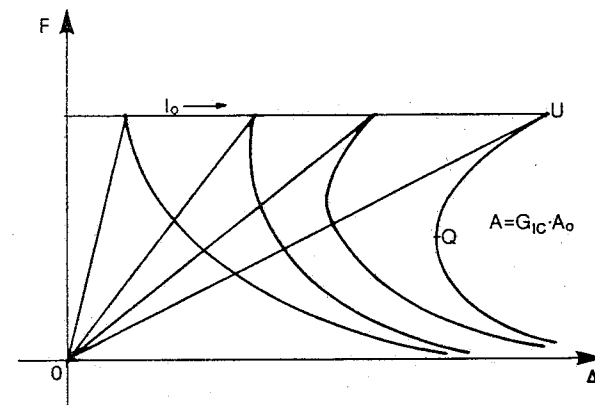


Figura 2.1.7: Diagrammi forza-allungamento

In termini  $\sigma$ - $\varepsilon$  la relazione descritta è rappresentabile da un unico tratto elastico lineare e da un ventaglio di rami *softening* al variare della lunghezza  $l_0$ . L'area sottesa, in questo caso, varia con  $l_0$  ed è pari a  $G_{IC} l_0$ .

Per  $l_0 \rightarrow 0$  il ramo *softening* diventa orizzontale rappresentando una risposta strutturale "perfettamente plastica"; per  $l_0 \rightarrow \infty$  l'area compresa tra la curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  e l'asse  $\varepsilon$  deve tendere a zero e, quindi, il ramo *softening* tende a coincidere con il tratto elastico, figura (2.1.8).

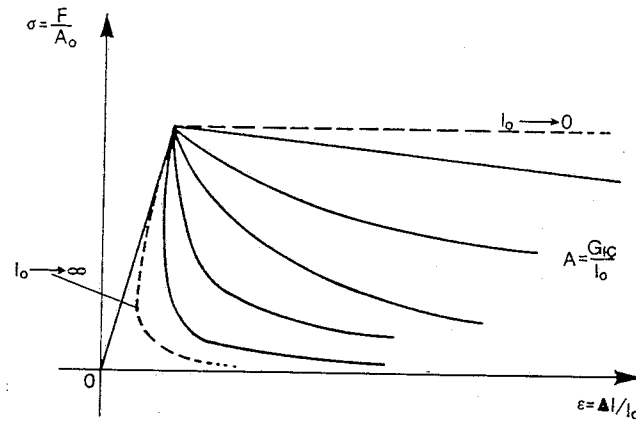


Figura 2.1.8: Diagrammi tensione-deformazione

## 2.1.5 Criteri di rottura per tensioni pluriassiali del calcestruzzo

Il criterio di rottura che maggiormente si adatta al calcestruzzo è quello di Mohr [5,6], o dell'attrito interno, che prevede la rottura per scorrimento che si verifica quando la tensione tangenziale massima raggiunge un limite che è funzione della tensione normale media. Con il criterio di Mohr si ipotizza che  $\tau_{max}$  e  $\sigma_{med}$  si possano valutare in base alle due tensioni principali esterne  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , mentre quella intermedia  $\sigma_2$  non influisca sulla rottura.

Dette  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  le tre tensioni principali rappresentative dello stato di sollecitazione in un punto del materiale, ponendo  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ , la rottura dipenderebbe dalla componente

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

e si verificherebbe quando si raggiunge il valore

$$\tau_{max} = \tau_2 = f(\sigma_{med})$$

con  $\sigma_{med} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$  ed  $f$  funzione assegnata crescente verso le maggiori compressioni.

Una rappresentazione del criterio è fornita dalla curva involuppo di Mohr (figura 2.1.9) che costituisce appunto l'involuppo di tutti i cerchi corrispondenti a situazioni limite di rottura.

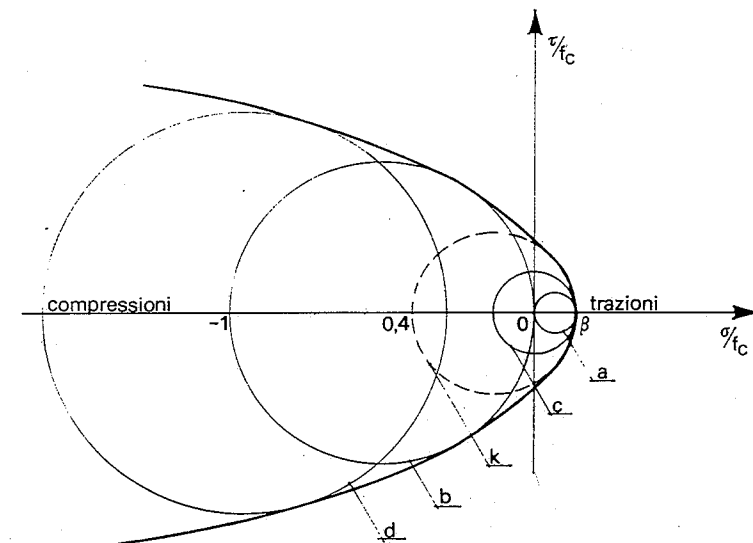


Figura 2.1.9: Curva di involuppo di Mohr

Le prove classiche sul calcestruzzo forniscono due cerchi limite: quello (a) con  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  e  $\sigma_3 = f_{ct}$ , dedotto dalla prova a trazione; quello (b) con  $\sigma_1 = -f_c$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , definito dalla prova a compressione.

Il cerchio (c) corrisponde ad uno stato di tensione tangenziale pura  $\tau = \sigma_3 = -\sigma_1$ : la rottura avviene ancora per  $\sigma_3 = f_{ct} = \tau$ , il che porta alla equivalenza tra la resistenza a trazione e la resistenza al taglio.

Il cerchio (k) è l'ultimo tangente in  $\beta = f_{ct}/f_c$ . Esso separa gli stati corrispondenti ai due modi di rottura: a destra per trazione,  $\sigma_3 = f_{ct}$ , a sinistra con  $\sigma_1/f_c < \alpha$ , con  $\alpha = 0,4 f_c$ .

Questo criterio risulta qualitativamente corretto, ma contiene sensibili approssimazioni: la prima è quella di comportare una resistenza infinita per compressioni idrostatiche  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ; la seconda è quella di trascurare la tensione principale media  $\sigma_2$  che, invece, ha una sensibile influenza.

Inoltre, per la difficoltà della sperimentazione in stati di sollecitazione triassiali, la funzione  $f$  del criterio di Mohr non risulta ben definita.

Per gli stati biassiali di tensione,  $\sigma_3 = 0$ , sono state definite sperimentalmente delle curve del tipo di figura (2.1.10).

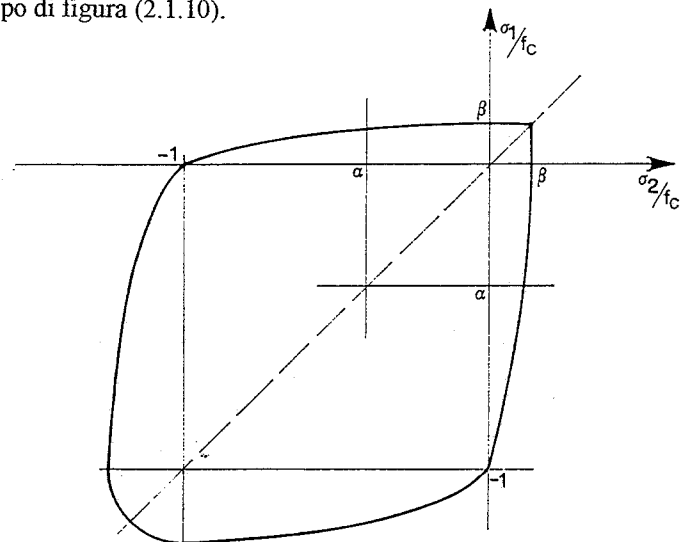


Figura 2.1.10: Curva limite per stati biassiali limite di resistenza

Dalla lettura del diagramma appare come la resistenza a trazione sia indipendente dalla tensione di compressione finché questa non raggiunge il limite  $\alpha = 0,4 f_c$ . Si nota, inoltre, come nel campo delle compressioni la componente  $\sigma_2$  ha una notevole influenza sulla resistenza, facendo incrementare la resistenza alla tensione monoassiale di oltre 1/4, mentre nel criterio di Mohr viene trascurata.

Una buona rappresentazione della curva limite di resistenza è fornita, nel campo delle compressioni, dalla formula ellittica:

$$\bar{\sigma}_1^2 - 1,26 \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_2^2 = 1; (\bar{\sigma}_3 = 0)$$

dove le tensioni adimensionalizzate,  $\bar{\sigma}_1$ ,  $\bar{\sigma}_2$  e  $\bar{\sigma}_3$ , sono assunte positive.

Diverse ricerche sperimentali sono state condotte, da vari autori, su stati triassiali di tensione; ma la difficoltà nell'effettuare le prove conducono ad una notevole dispersione dei risultati. Resta tuttavia confermato che la resistenza per sollecitazioni triassiali è di gran lunga superiore a quella biassiale. In figura (2.1.11) è rappresentato il diagramma delle curve di livello della superficie limite di resistenza, che si ottengono ponendo  $\bar{\sigma}_3 = \text{costante}$  nel campo delle compressioni. Se ne deduce, per esempio, per stati di tensione caratterizzati da  $\bar{\sigma}_1 \gg \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3$  una curva del tipo  $\bar{\sigma}_1 \cong 1 + 4\bar{\sigma}_2$ , per  $0 < \bar{\sigma}_2 < 1$ .

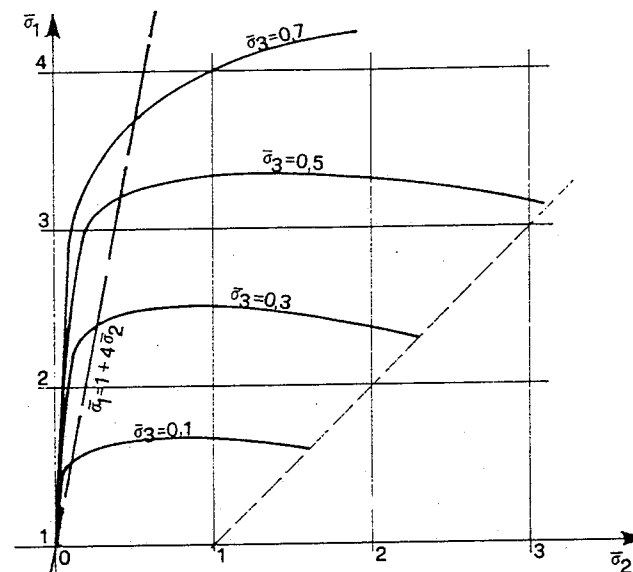


Figura 2.1.11: Curve di livello della superficie limite di resistenza

## 2.1.6 Viscosità del calcestruzzo

Il calcestruzzo, soggetto a carichi permanenti, manifesta delle deformazioni differite che crescono in misura sempre minore fino a stabilizzarsi per  $t \rightarrow \infty$ . Il fenomeno è tanto più evidente quanto minore è l'istante iniziale di carico  $t_0$ ; inoltre, la deformazione viscosa  $\varepsilon_{v\infty}$  supera, di norma, la deformazione istantanea elastica  $\varepsilon_e$ . In figura (2.1.12) è rappresentato il fenomeno come rilevabile sperimentalmente su un provino in calcestruzzo sollecitato al tempo  $t_0$  da una tensione monoassiale costante.

L'aspetto duale del medesimo fenomeno fisico è rappresentato dal rilassamento, figura (2.1.13), per il quale il provino in calcestruzzo soggetto ad una deformazione permanente  $\varepsilon$ , reagisce con tensioni che, a partire dal valore iniziale elastico  $\sigma_e$ , decrescono progressivamente fino a stabilizzarsi ad un valore finale  $\sigma_e - \sigma_{v\infty}$ .

Per lo studio di questi fenomeni bisogna definire le funzioni viscosità e rilassamento la cui determinazione dipende dal tempo  $t_0$  di messa in carico e cioè dal grado di maturazione del calcestruzzo, da parametri ambientali e da quelli dimensionali e di forma dell'elemento primitivo [7].

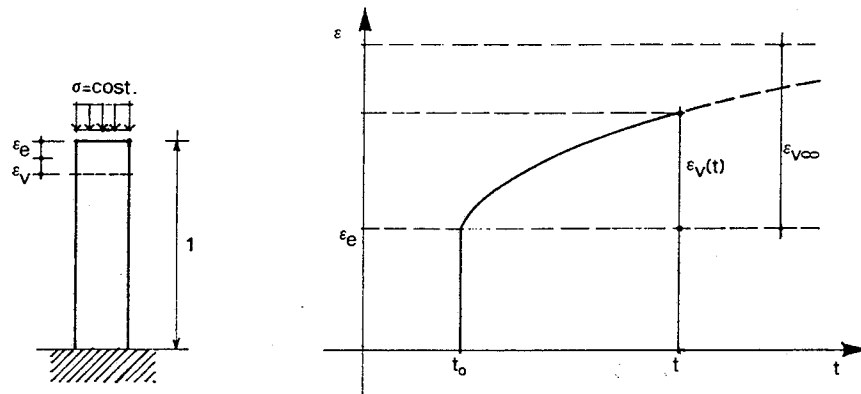


Figura 2.1.12: Deformazione viscosa del calcestruzzo

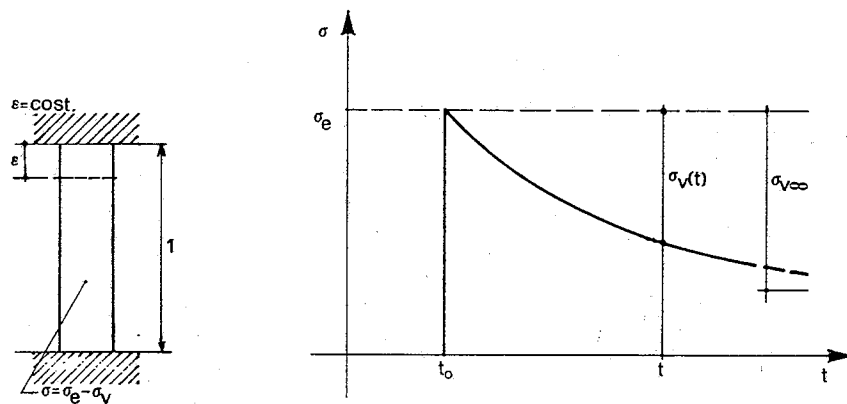


Figura 2.1.13: Rilassamento del calcestruzzo

In figura (2.1.14a) sono rappresentate due curve di viscosità dello stesso calcestruzzo caricato a partire dal tempo  $t_{01}$ , oppure da  $t_{02}$ ; le quantità  $\epsilon_e$  e  $\epsilon_{v\infty}$  si riducono a parità di carico imposto e si riduce anche il rapporto  $\varphi_{\infty} = \epsilon_{v\infty} / \epsilon_e$ .

Le esperienze, inoltre, indicano che sulla base delle funzioni di viscosità e rilassamento si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti anche per cicli di carico applicati in tempi diversi. Se si traccia, per esempio, una curva di carico e scarico, figura (2.1.14b), ottenuta per semplice sottrazione delle curve di figura (2.1.14a), è possibile evidenziare due importanti aspetti del fenomeno:

1. l'*elasticità ritardata* come deformazione che il calcestruzzo restituisce lentamente una volta azzerate le tensioni;
2. la *deformazione irreversibile* che rappresenta la parte puramente plastica dell'elemento.

Le prove sperimentali si accordano bene con tali risultati, mostrando, in particolare, che per calcestruzzi caricati molto giovani la deformazione irreversibile è prevalente sull'elasticità ritardata, per calcestruzzi molto vecchi avviene il contrario.

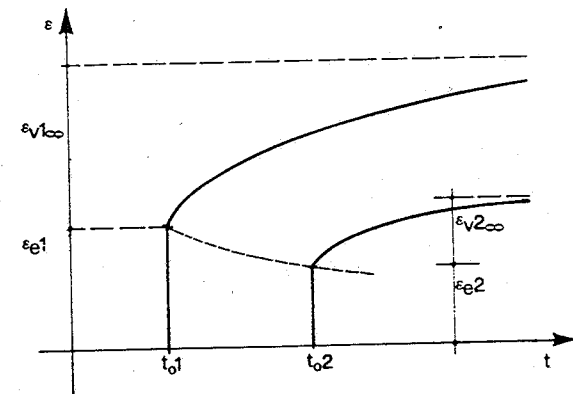


Figura 2.1.14a: Curve di viscosità con carichi applicati in istanti diversi



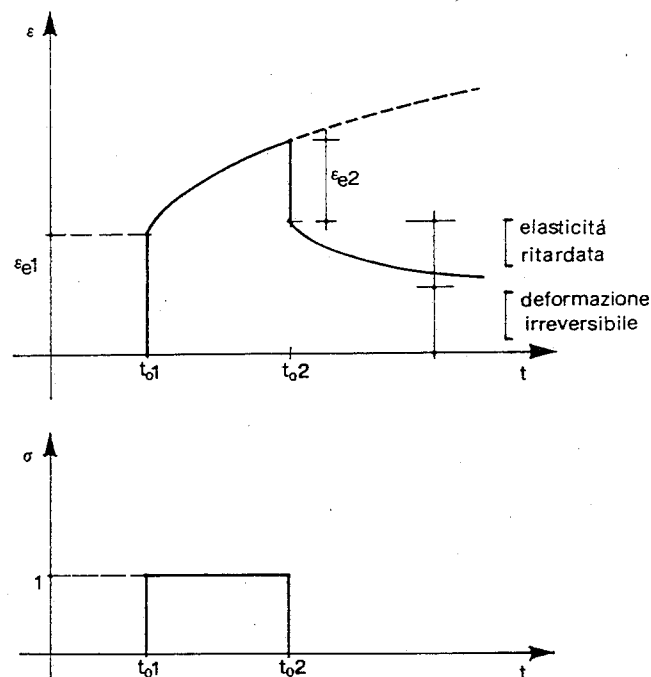


Figura: 2.1.14b: Diagramma carico-scarico del calcestruzzo

## 2.2 Meccanismi fisici della viscosità e del ritiro

### 2.2.1 Basic creep e drying creep

La viscosità ed il ritiro per essiccamento del calcestruzzo di cemento Portland sono fenomeni complessi che vengono determinati da diversi processi fisico-chimici [8].

I processi fondamentali si originano all'interno della pasta di cemento come risultato delle proprietà dei prodotti dell'idratazione della microstruttura della pasta e vengono modificati dalla natura composita del calcestruzzo.

Per distinguere i vari processi che si sviluppano nel materiale una nomenclatura, largamente usata, fu suggerita da Neville nel 1981 [9], che designò come *basic creep* la deformazione dipendente dal tempo che si determina quando il calcestruzzo viene sollecitato in atmosfera sigillata in modo tale che l'umidità non si disperda e come *drying creep* la deformazione aggiuntiva rispetto al basic creep che si osserva quando lo stesso calcestruzzo viene caricato in ambiente che consente l'essiccamento. Il drying creep è anche denominato *Pickett effect* dal nome del primo ricercatore che ne studiò gli effetti.

In tal modo il comportamento viscoso del calcestruzzo è determinato dalla somma del basic creep e del drying creep. In pratica, tuttavia, tale distinzione non viene quasi mai utilizzata, poiché la deformazione totale viscosa viene inclusa nella funzione di viscosità, nella quale le deformazioni dovute al drying creep sono prese in conto mediante un fattore correttivo relazionato alla umidità relativa percentuale (R.H.). Vi è, inoltre, una arbitrarietà nel separare la deformazione viscosa da quella elastica (deformazione istantanea) poiché il creep interviene dai primi istanti della messa in carico, mentre è necessario un certo tempo per misurare la deformazione elastica.

Il creep è caratterizzato da componenti della deformazione reversibili ed irreversibili: quando il calcestruzzo viene scaricato la deformazione elastica è quasi del tutto reversibile.

Un altro termine di uso comune è il coefficiente di viscosità che esprime la deformazione viscosa in rapporto alla deformazione elastica; mediamente il coefficiente di viscosità è pari a 2-6 volte la deformazione elastica istantanea.

### 2.2.2 Deformazioni dovute al ritiro

Nello stesso modo è possibile definire diverse componenti del ritiro. Quando non venga diversamente designato, il ritiro assume il significato di *drying shrinkage* che rappresenta la deformazione associata alla perdita di umidità del calcestruzzo per effetto dell'essiccamento. Il drying shrinkage è solo parzialmente reversibile. Quando il calcestruzzo è risaturato si verifica un rigonfiamento, ma questo è insufficiente a ricompensare completamente il ritiro per essiccamento a meno che non venga utilizzato un cemento espansivo a ritiro compensato.

È dunque possibile distinguere tra componenti reversibili ed irreversibili, ma non è possibile introdurre un'unica definizione per il ritiro; infatti sono stati identificati altri tipi di deformazioni che riguardano questo fenomeno: il *ritiro per carbonatazione* che si verifica quando il calcestruzzo è sottoposto a condizioni ambientali aventi bassa umidità relativa (questo fenomeno ha suggerito che il drying creep possa essere considerato come ritiro dovuto alla tensione); il *ritiro per idratazione* che avviene quando il contenuto di acqua viene rimosso, all'interno del calcestruzzo, da combinazioni chimiche durante l'idratazione in condizioni di umidità sigillata.

Durante l'idratazione, tuttavia, si può anche verificare un rigonfiamento, se il calcestruzzo contiene molta acqua, dovuto al formarsi di grandi quantità di idrossido di magnesio.

Un rigonfiamento transitorio del calcestruzzo si può anche verificare per l'innalzamento termico dovuto al calore dell'idratazione.

Il *ritiro per capillarità* avviene, infine, quando si hanno dispersioni del contenuto in acqua nel cemento allo stato plastico.

### 2.2.3 Meccanismi reali ed apparenti

Vi sono diverse teorie che spiegano il comportamento viscoso ed il ritiro del calcestruzzo; in questo lavoro saranno descritte le più importanti.

Inizialmente è utile distinguere tra meccanismi reali ed apparenti secondo la definizione data da Wittman nel 1982 [10].

I meccanismi reali sono associati alla pasta di cemento idratata e possono essere considerati delle proprietà del materiale determinate dai processi chimico-fisici che si sviluppano nella matrice cementizia; essi sono indipendenti dalla forma e dalle dimensioni del provino.

I meccanismi apparenti sono causati da altri fattori che modificano le deformazioni previste. Ad esempio, la natura composita del calcestruzzo è tale che le deformazioni differenziali tra la pasta di cemento e gli aggregati possono causare degli alti stati di tensione localizzati e quindi delle micro fratture all'interfaccia. Un altro fenomeno è dovuto al gradiente di umidità che può incrementarsi durante l'essiccamento del provino; questo comporta un ritiro differenziato tra gli stati interni ed esterni della pasta di cemento causando delle microfrazioni o delle screpolature. Inoltre, il calore di idratazione può causare delle deformazioni termiche che comportano dei risultati erronei nello studio della viscosità e del ritiro.

Se si studiano i meccanismi reali è importante verificare che le deformazioni dovute ad essi non vengano in alcun modo limitate, per cui è necessario operare una scelta accurata dei provini e delle dimensioni degli aggregati contenuti nella pasta di cemento per essere certi di misurare solo le deformazioni spontanee. Questa prassi limita l'analisi dei meccanismi reali all'uso di una pasta di cemento molto fine.

#### Modelli microstrutturali

Da studi di questo genere sono stati individuati diversi meccanismi reali per i quali il trasferimento dell'acqua attraverso i pori capillari è considerato il processo più importante. L'assorbimento dell'acqua attraverso i pori conduce, infatti, allo sviluppo di tensioni capillari, legate alla formazione dei menischi curvi, che determinano la separazione delle particelle componenti la pasta di cemento.

Lo stato di autotensione, precedentemente descritto, e l'azione delle forze esterne applicate al provino determinano delle deformazioni microstrutturali che comportano la variazione della interazione tra le particelle solide ed i micropori della pasta di cemento.

Questi meccanismi, per quanto non sia possibile valutarli con esattezza, sono i principali responsabili del comportamento viscoso e del ritiro del calcestruzzo.

La struttura della pasta di cemento indurita è molto complessa; essa, infatti, è una miscela di diversi componenti con proprietà estremamente variabili.

Il principale componente della pasta cementizia è il silicato di calcio idrato (C-S-H), che occupa circa i 2/3 del volume formando una matrice continua, ha una grande

superficie interna ( $\approx 500 \text{ m}^2/\text{cm}^3$ ) ed è fortemente idrofilo e poroso; la microporosità associata a questa fase è, infatti, circa il 25% dell'intera struttura del calcestruzzo.

Il C-S-H si presenta, inoltre, come un materiale amorfo e colloidale con una struttura fisica in evoluzione, dovuta principalmente alla variazione del contenuto d'umidità.

Lo studio della formazione chimico-fisica del C-S-H è utile per definire il suo ruolo nella viscosità e nel ritiro del calcestruzzo. La descrizione fisica di questa fase come uno Xerogel - definito come un gel con porosità ridotta al minimo da cui il liquido medio è stato rimosso per effetto di tensioni superficiali - è risultata utile nella definizione del cosiddetto *Modello di Monaco* [11,12]; questo modello (figura 2.2.1a) considera l'accoppiamento tra le particelle di C-S-H dominato da energie interfacciali che vanno riducendosi per effetto dell'assorbimento dell'acqua fino a distaccarsi.

I modelli tradizionali del C-S-H, presentati da Powers e Brunauer e da Feldman e Sereda negli anni '60 [13,14], (figure 2.2.1b e 2.2.1c), rappresentano invece questo componente come una struttura a strati in cui le interazioni fisiche sono dovute all'adsorbimento dell'acqua tra il gel e le particelle.

Il modello di Tokyo (figura 2.2.1d) ha infine fornito una spiegazione più accurata delle modalità di formazione dei pori nella pasta di cemento.

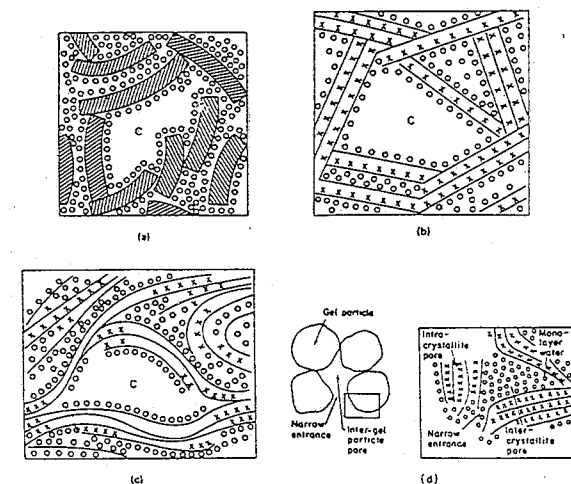


Figura 2.2.1: Modelli del C-S-H

Tra queste schematizzazioni, solo il *Modello di Monaco* e quello di Powers hanno il vantaggio di esprimere, mediante relazioni matematiche, il legame esistente tra il comportamento microstrutturale e le deformazioni di viscosità e ritiro del calcestruzzo.

Powers, inoltre, per spiegare i meccanismi associati al ritiro della pasta di cemento introdusse il concetto del *disjoining effect*, secondo il quale l'acqua adsorbita tra gli strati di C-S-H si localizza in spazi distinti dai quali si disperde inducendo variazioni di volume nel calcestruzzo (figura 2.2.2).

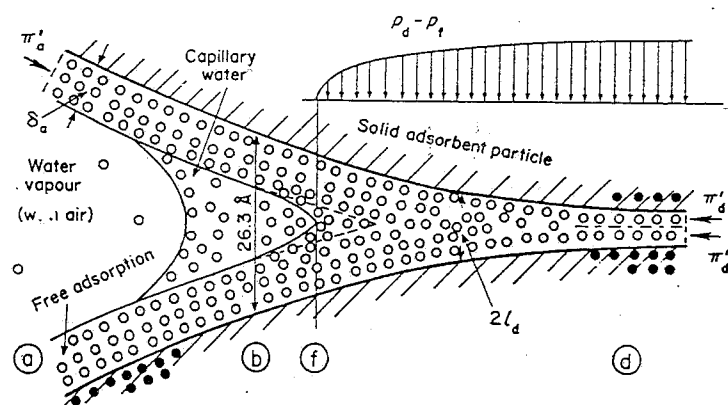


Figura 2.2.2: Rappresentazione dell'assorbimento dell'acqua nella pasta di cemento

La velocità di dispersione dipende, poi, dall'umidità relativa dell'atmosfera esterna e dall'intensità della pressione nei micropori.

Bazant, in seguito, ha sviluppato questo concetto più rigorosamente, utilizzando una teoria termodinamica secondo la quale l'acqua contenuta nei micropori si mantiene in equilibrio con l'umidità relativa circostante; la sua pressione interna  $\pi^*$  è, inoltre, proporzionale alla pressione di distacco  $\pi^0$  degli strati di C-S-H. Al variare dell'umidità dell'ambiente, per raggiungere l'equilibrio, l'acqua si diffonde dal microporo verso lo spazio esterno, creando via via degli strati di materiale solido.

Un'altra causa della formazione degli strati solidi è l'azione delle tensioni dovute ai carichi esterni che trasmettono, attraverso gli strati di C-S-H, valori di pressione superiori a  $\pi^*$ ; gli strati di materiale, dunque, cedendo l'acqua, divengono sempre più ravvicinati ripristinando contemporaneamente l'equilibrio tra la pressione esterna e l'interna.

La pasta di cemento può, quindi, essere discretizzata attraverso diversi strati di materiale solidificato. La sovrapposizione degli effetti della variazione di umidità relativa

e delle pressioni esterne nella formazione degli strati solidi, secondo Bazant, spiegherebbe sia i meccanismi di ritiro che il drying creep del calcestruzzo. Questa teoria, detta della *diffusione* [8] può essere convenientemente modellata utilizzando un modello di Kelvin viscoelastico, composto da molle e ammortizzatori in serie.

### Modelli macrostrutturali

Come è già stato osservato i meccanismi apparenti dipendono dalle dimensioni dei provini analizzati.

È stato da lungo tempo riconosciuto, come ad esempio, la lenta perdita di umidità dovuta alla diffusione influenzi l'andamento del ritiro, che risulta essere un fenomeno fortemente caratterizzato dalla forma dei provini e dalla loro sezione trasversale [11,15]. In relazione a questo comportamento, poiché il drying creep si determina come differenza tra la deformazione totale osservata sotto carico e la somma del basic creep e del ritiro spontaneo, Pickett, nel 1946, e successivamente Wittman e Roelfstra, nel 1980, osservarono che il drying creep può essere dovuto all'impedimento della fessurazione che avviene durante il ritiro spontaneo.

Nella fase di essiccamento, inoltre, si sviluppano dei gradienti di umidità che danno luogo a tensioni di trazione negli strati più esterni della struttura del calcestruzzo. Questa ipotesi suggerisce di non misurare il ritiro spontaneo su provini nei quali sia avvenuta la fessurazione, ma di utilizzare dei provini di pasta di cemento di spessore molto ridotto 2-3 cm al fine di determinare con certezza il ritiro spontaneo; infatti le microfessure che si osservano nella superficie dei provini in essiccamento si estendono per meno del 5% dello spessore del provino.

La natura composita del calcestruzzo induce, inoltre, delle ulteriori microfessure all'interfaccia tra il cemento e gli inerti, dipendenti dalla concentrazione di tensioni dovute ai carichi esterni applicati.

Tuttavia le deformazioni addizionali elastiche e quelle viscosive si producono sempre, nella struttura di calcestruzzo, in modo tale che la deformazione totale sia compatibile; nella figura (2.2.3) è rappresentata una parete in essiccamento per la quale si evidenzia il ritiro spontaneo nel caso in cui gli strati che la compongono siano svincolati, nonché le deformazioni dovute al ritiro che si sviluppano insieme alla fessurazione degli strati più esterni in conseguenza del ripristino della compatibilità.

Lo studio dei meccanismi reali del calcestruzzo conduce, quindi, alla formulazione dei modelli di previsione del suo comportamento destinati in particolare all'analisi strutturale con il metodo degli elementi finiti; l'analisi dei meccanismi apparenti produce, invece, i classici modelli di previsione *Code-type* per il calcolo di strutture composte da elementi monodimensionali. A rigore, dunque, i modelli *Code-type* non sarebbero idonei per l'analisi viscoelastica di sforzi e deformazioni all'interno della sezione, poiché le loro relazioni analitiche descrivono principalmente le proprietà medie del calcestruzzo, in regime viscoso, senza prendere in considerazione gli ulteriori stati di tensione o di deformazione locale dovuti ai diversi fenomeni che si verificano nella pasta di cemento.

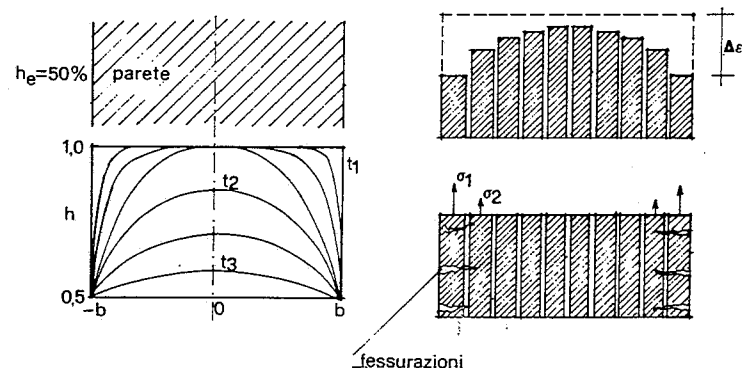


Figura 2.2.3: Parete di calcestruzzo in essiccamento

I modelli tipo *Code-type*, tuttavia, possono anche essere utilizzati per l'analisi ad elementi finiti di sezioni in calcestruzzo utilizzando delle relazioni aggiuntive che tengano conto del suo comportamento in dipendenza dei fenomeni locali, legati a meccanismi reali, quali la transizione di umidità, il gradiente di temperatura e le proprietà di frattura.

Questi modelli, dunque, rappresentano un buon compromesso tra la semplicità operativa e l'accuratezza nella definizione del comportamento del calcestruzzo nel tempo.

## 2.3 Il calcestruzzo come materiale invecchiante

### 2.3.1 La funzione viscosità

La deformazione totale al tempo  $t$ ,  $\varepsilon(t)$ , di un provino di calcestruzzo caricato in modo monoassiale, si esprime come segue:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) + \varepsilon_C(t) + \varepsilon_S(t) + \varepsilon_T(t) = \varepsilon_\sigma(t) + \varepsilon_n(t) \quad (2.3.1)$$

dove

$\varepsilon_E(t)$  è la deformazione istantanea, di tipo elastico se la tensione non è molto elevata;

$\varepsilon_C(t)$  è la deformazione viscosa;

$\varepsilon_S(t)$  è la deformazione di ritiro (o di rigonfiamento);

$\varepsilon_T(t)$  è l'espansione o dilatazione termica;

$\varepsilon_\sigma(t)$  rappresenta la deformazione prodotta dalla tensione, denominata anche deformazione meccanica:  $\varepsilon_\sigma(t) = \varepsilon_E(t) + \varepsilon_C(t)$ ;

$\varepsilon_n(t)$  rappresenta la deformazione indipendente dalla tensione:  $\varepsilon_n(t) = \varepsilon_S(t) + \varepsilon_T(t)$ .

La deformazione  $\varepsilon_E(t)$  è immediatamente recuperabile subito dopo il momento della messa in carico; mantenendo il carico costante, tuttavia, essa diventa parzialmente irreversibile a causa dell'invecchiamento prodotto dall'idratazione e da altri cambiamenti dipendenti dal tempo che intervengono nella microstruttura del calcestruzzo.

In accordo con la precedente definizione della deformazione, la determinazione del creep richiede, generalmente, l'utilizzazione di due provini identici di calcestruzzo collocati esattamente nelle stesse condizioni ambientali, uno dei quali viene lasciato scarico, mentre l'altro è sottoposto ad un processo di carico: la differenza tra le deformazioni di questi due provini rappresenta la deformazione meccanica, definita come la deformazione viscosa aggiunta alla deformazione elastica.

Misurando le deformazioni di provini sollecitati con diversi valori di tensione e tracciando le curve isocrone di viscosità, che rappresentano i diagrammi tensione-deformazione per prefissate durate di carico, si ritrova che per tensioni inferiori a  $0,4 f_{cm}$  le curve sono approssimativamente lineari (figura 2.3.1).

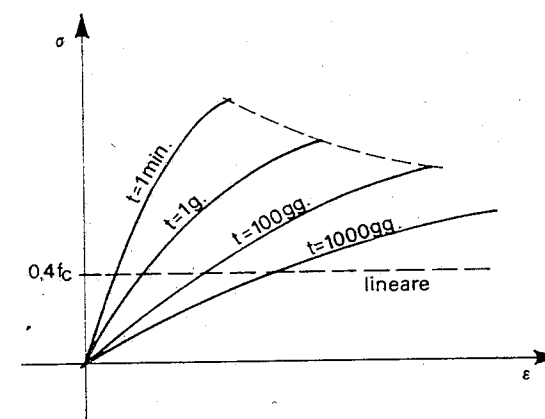


Figura 2.3.1: Curve isocrone di viscosità

In questo modo, il legame che unisce la deformazione allo stato di sollecitazione monoassiale costante può scriversi:

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \sigma J(t, t') + \varepsilon_n(t) \quad (2.3.2)$$

nella quale  $\sigma$  rappresenta la tensione monoassiale, le  $\varepsilon$  sono le deformazioni assiali,  $t$  è il tempo prescelto per definire l'età del calcestruzzo,  $J(t, t')$  è la funzione viscosità (compliance function) che rappresenta la deformazione viscosa, aggiuntiva a quella elastica, misurata al tempo  $t$ , causata da una tensione monoassiale unitaria costante agente a partire dal tempo  $t'$ .

Nell'ambito della linearità, il creep determinato da una tensione monoassiale è totalmente caratterizzato dalla funzione  $J(t, t')$ .

L'andamento tipico di questa funzione è rappresentato in figura (2.3.2). La funzione viscosità è inoltre espressa come somma della deformazione istantanea  $1/E(t')$  e quella viscosa  $C(t, t')$  detta anche *specific creep*:

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} + C(t, t') \quad (2.3.3)$$

essendo  $E(t')$  il modulo elastico che caratterizza la deformazione istantanea.

Per il modello CEB si pone al tempo  $t'$

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} + \frac{\varphi_{28}(t, t')}{E_{c28}} \quad (2.3.4)$$

dove  $E_{c28}$  è il modulo elastico del calcestruzzo a 28 giorni e la funzione

$\varphi_{28}(t, t') = \frac{C(t, t')}{1/E_{c28}}$ , detta coefficiente di viscosità, rappresenta il rapporto tra la

deformazione viscosa al tempo  $t$  e la deformazione istantanea per una tensione unitaria applicata a 28 giorni.

Per il modello BP-KX [25], si ha invece:

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} [1 + \varphi(t, t')] \quad (2.3.5)$$

ed il coefficiente di viscosità,  $\varphi(t, t') = \frac{C(t, t')}{1/E(t')}$ , rappresenta il rapporto tra la deformazione

viscosa al tempo  $t$  e la deformazione istantanea per una tensione unitaria applicata al tempo  $t'$ .

Di conseguenza si ha:

$$\frac{\varphi_{28}(t, t')}{E_{c28}} = \frac{\varphi(t, t')}{E(t')} \quad (2.3.6)$$

e quindi:

$$\varphi_{28}(t, t') = \frac{E_{c28}}{E(t')} \varphi(t, t') \quad (2.3.7)$$

I valori di  $\varphi$ , sia nell'uno che nell'altro modello, per tempi molto lunghi,  $10^5$  gg., pari a circa 274 anni, variano solitamente tra 1 e 6, mentre i valori intermedi sono contenuti tra 2,5 e 3. I valori a lungo termine della deformazione dovuta al ritiro, espressa dalla  $\varepsilon_n(t)$ , equazione (2.3.2), sono generalmente compresi tra 0,0002 e 0,0008.

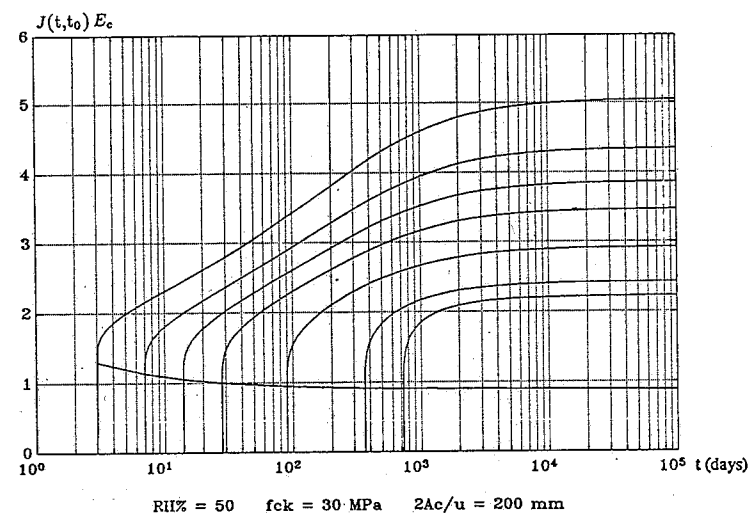


Figura 2.3.2: Funzione viscosità per vari tempi  $t'$  iniziali di carico

Gli andamenti della funzione viscosità e del ritiro sono influenzati da molti fattori che possono essere suddivisi in intrinseci ed estrinseci. I fattori intrinseci vengono fissati nel momento in cui si determina la miscela del calcestruzzo e sono caratterizzati dai parametri che compongono la miscela stessa come la percentuale ed il modulo elastico degli aggregati, il contenuto in cemento, il rapporto acqua-cemento, la resistenza di progetto.

I fattori estrinseci sono quelli che variano esternamente dopo che il calcestruzzo è stato gettato in opera, come la temperatura atmosferica, l'umidità relativa e la sua variazione nel tempo, il momento iniziale di carico, il grado di idratazione, ecc. Le espressioni matematiche che caratterizzano la funzione viscosità ed i parametri che la influenzano verranno presentati dettagliatamente nel Capitolo 4, dedicato ai Modelli di previsione per

la Viscosità del Calcestruzzo; in questa fase, invece, si assume che la funzione viscosità sia nota ad esempio attraverso una espressione matematica, un grafico od una tabella di valori (figura 2.3.3).

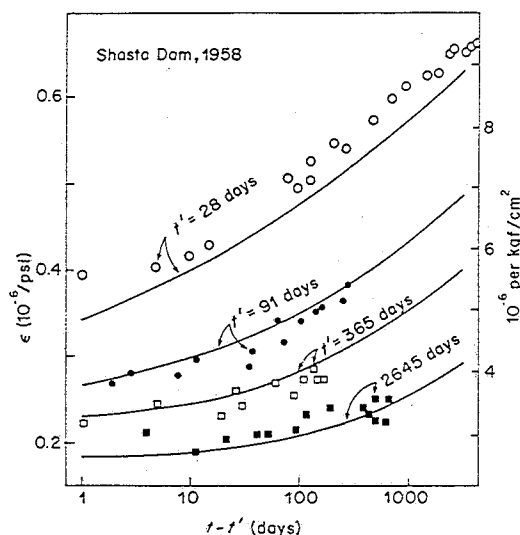


Figura 2.3.3: Confronto tra dati sperimentali e curve di viscosità, da Bazant e Wu [26]

Una caratteristica molto importante della legge di viscosità del calcestruzzo è quella, tipica di un modello invecchiante, di essere funzione di due variabili: il tempo attuale ed il momento iniziale di carico  $t'$  (figura 2.3.2); questa proprietà contraddistingue il comportamento del calcestruzzo dalle leggi di viscosità classiche degli altri materiali, caratterizzati da modelli ereditari, come ad esempio i polimeri, la cui descrizione viene effettuata in funzione di una sola variabile: l'intervallo di tempo  $(t - t')$ . L'invecchiamento del calcestruzzo, inoltre, determina una notevole complessità per la soluzione dei problemi strutturali che, in molti casi, devono essere affrontati per via numerica.

## 2.3.2 Il principio di sovrapposizione

A causa della viscosità e del ritiro lo stato di tensione, nelle strutture iperstatiche, può variare nel tempo anche in presenza di carichi costanti. La determinazione delle deformazioni viscoelastiche, causate da uno stato di tensione variabile, viene tuttavia notevolmente semplificata dalla possibilità di applicare il *principio di sovrapposizione*.

Questo principio si assume valido per un livello di tensione  $\sigma_c < 0,4 f_{cm}(t_0)$ , essendo  $f_{cm}(t_0)$  la resistenza media a compressione del calcestruzzo all'età di carico  $t_0$ , ed è accettato dalla totalità dei codici modello internazionalmente diffusi.

Il principio di sovrapposizione afferma che l'effetto sulle deformazioni (o tensioni) dovuto a tensioni (o deformazioni) agenti in tempi diversi può essere sommato; questo principio è equivalente alla ipotesi della linearità per le equazioni costitutive che legano le tensioni alle deformazioni.

In accordo ad esso, la deformazione al tempo  $t$ , causata da una storia di tensione  $\sigma(t)$ , si può ottenere scomponendo il processo di carico in piccoli incrementi  $d\sigma(t')$ , applicati in tempi  $t'$ ; sommando, dunque, le corrispondenti deformazioni che risultano essere uguali a  $d\sigma(t') \cdot J(t, t')$ , in virtù dell'equazione (2.3.2) si ottiene infine:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t, t') d\sigma(t') + \varepsilon_n(t) \quad (2.3.8)$$

L'equazione precedente rappresenta la relazione generale, monoassiale, che definisce il calcestruzzo come materiale viscoelastico invecchiante.

L'integrale in questa equazione viene definito come integrale di Stieltjes; la sua adozione è preferibile a quella dell'integrale di Riemann, poiché quest'ultimo è applicabile solo a storie di tensione continue.

Quando  $\sigma(t)$  è continua, si sostituisce  $d\sigma(t') = [d\sigma(t')/dt'] dt'$  che definisce l'integrale di Riemann ordinario.

Per incrementi finiti della tensione  $\Delta\sigma(t_j)$ , al tempo  $t_j$ , il termine  $J(t, t_j) \Delta\sigma(t_j)$  si riferisce all'integrale di Stieltjes e può essere sommato all'integrale di Riemann.

Il principio di sovrapposizione definito dall'equazione (2.3.8) fu introdotto da Boltzmann nel 1876 [27] per i materiali non invecchianti e da Volterra nel 1913 [28] per quelli invecchianti. L'equazione (3.3.8) fu introdotta, per il calcestruzzo, da McHenry nel 1943 [29].

Il principio di sovrapposizione comporta una previsione accurata della deformazione solo quando si verificano le seguenti condizioni:

1. le tensioni devono essere contenute all'interno del *service stress range*, ossia inferiori a 0.4 volte la resistenza media a compressione del calcestruzzo;
2. non devono verificarsi deformazioni di intensità decrescente, per quanto le tensioni possano diminuire come nel rilassamento;
3. durante l'evolversi della deformazione viscosa non devono avvenire significative variazioni del contenuto di umidità del calcestruzzo;
4. non devono avvenire grandi incrementi di tensione molto tempo dopo la fase iniziale di carico.

In pratica, il principio di sovrapposizione viene anche utilizzato quando non si verificano le condizioni 2 e 4, anche se il suo impiego comporta, in questi casi, un certo grado di approssimazione. Bisogna sottolineare, infatti, come l'andamento proporzionale della deformazione viscosa sotto tensione costante, espressa dall'equazione (2.3.2) sia un

modello di previsione molto più accurato di quello espresso attraverso il principio di sovrapposizione, equazione (2.3.8).

Sostituendo  $d\sigma(t') = [d\sigma(t')/dt']dt'$  nella equazione (2.3.8) ed integrando per parti, si ottiene la sua forma equivalente introdotta, per il calcestruzzo, da Maslov nel 1940[30]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \int_0^t L(t, t') \sigma(t') dt' + \varepsilon_n(t) \quad (2.3.9)$$

nella quale  $L(t, t') = -\frac{\partial J(t, t')}{\partial t'}$ , funzione positiva in quanto  $\frac{\partial J(t, t')}{\partial t'} < 0$ .

Geometricamente questa equazione può essere rappresentata, figura (2.3.4), mediante la scomposizione della storia di tensione in strisce verticali, ognuna delle quali è considerata come una *funzione impulsiva della tensione* (funzione  $\delta$  di Dirac). In questo modo,  $L(t, t')$ , rappresenta la deformazione al tempo  $t$  causata da una tensione unitaria impulsiva al tempo  $t'$  ed è chiamata *funzione memoria della tensione impulsiva*.

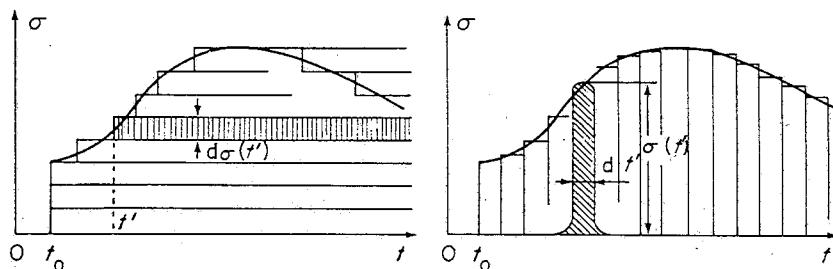


Figura 2.3.4: Scomposizione della storia di tensione per incrementi finiti o per impulsi

Applicando la regola di derivazione di una funzione integrale, nella quale uno dei limiti di integrazione è la stessa variabile indipendente di derivazione:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(u, t) du = f(t, t) + \int_0^t \frac{\partial f(u, t)}{\partial t} du$$

e differenziando l'equazione (2.3.8) si determina la forma incrementale della deformazione espressa per mezzo del seguente integrale:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} + \int_0^t \frac{\partial J(t, t')}{\partial t} d\sigma(t') \quad (2.3.10)$$

### 2.3.3 La funzione rilassamento

Il principio di sovrapposizione viene espresso, in modo equivalente, in termini di funzione di rilassamento  $R(t, t')$  (*relaxation modulus*), che rappresenta la tensione monoassiale  $\sigma$ , misurata al tempo  $t$ , causata da una deformazione monoassiale unitaria costante agente a partire dal tempo  $t'$ .

Immaginando la storia di deformazione  $\varepsilon(t)$  suddivisa in piccoli incrementi  $d\varepsilon(t')$  imposti al tempo  $t'$ , il principio di sovrapposizione implica che l'effetto di questi incrementi,  $R(t, t') d\varepsilon(t')$ , può essere sovrapposto.

In questo modo, la relazione costitutiva della viscoelasticità invecchiante si può porre nella forma:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t, t') [d\varepsilon(t') - d\varepsilon_n(t')] \quad (2.3.11)$$

nella quale gli incrementi  $d\varepsilon_n(t')$  del ritiro e della deformazione termica devono essere sottratti in quanto, per definizione, non producono tensioni.

La funzione di rilassamento tipica del calcestruzzo è rappresentata in figura (2.3.5). Si nota altresì che questa è una funzione di due variabili  $t$  e  $t'$  e che non può essere espressa come funzione di una sola variabile, l'intervallo di tempo  $(t - t')$ , proprietà che contraddistingue il comportamento classico dei materiali non invecchianti.

Quando è nota la storia della deformazione, l'equazione (2.3.8) rappresenta una equazione integrale di Volterra nella quale l'incognita è la tensione  $\sigma(t)$ . Risolvendo questa equazione per una storia di deformazione individuata da una funzione a gradino, che rappresenti una deformazione unitaria costante a partire dal tempo  $t'$ , si può determinare la funzione rilassamento  $R(t, t')$ , ossia la storia di tensione per diversi tempi iniziali di carico  $t'$ .

Come si vedrà in seguito, tale soluzione viene determinata numericamente per funzioni di viscosità  $J(t, t')$  fornite dai codici del modello.

Inversamente, l'equazione (2.3.11) rappresenta una equazione integrale di Volterra per l'incognita  $\varepsilon(t)$ ; risolvendo questa equazione per una storia di tensione rappresentata da una funzione a gradino, si può calcolare la funzione di viscosità.

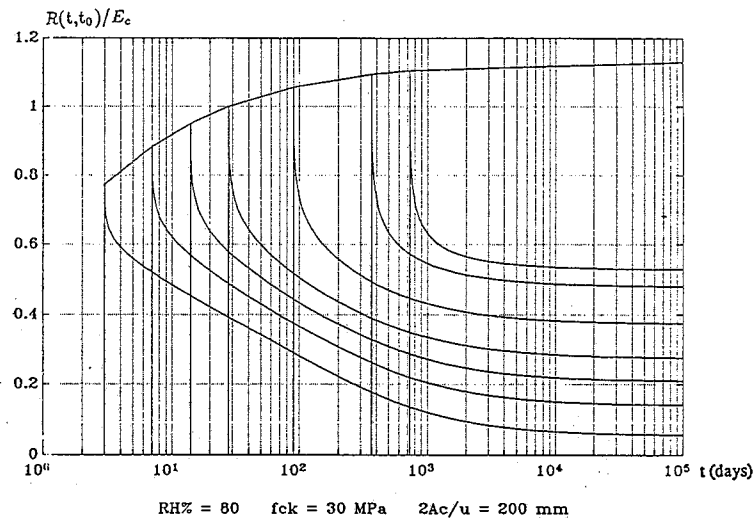


Figura 2.3.5: Funzione di rilassamento per vari tempi di imposizione della deformazione

Note le funzioni  $J(t, t')$  e  $R(t, t')$  l'equazione (2.3.8) si risolve per mezzo della (2.3.11) e viceversa; le funzioni  $J(t, t')$  e  $R(t, t')$  sono, dunque, l'una complementare dell'altra.

Sostituendo  $[d\varepsilon(t') - d\varepsilon_n(t')] = d[\varepsilon(t') - \varepsilon_n(t')] = \frac{d[\varepsilon(t') - \varepsilon_n(t')]}{dt'} dt'$  nella equazione (2.3.11) ed integrando per parti, si ottiene la sua forma equivalente:

$$\sigma(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon_n(t)] E(t) + \int_0^t P(t, t') [\varepsilon(t') - \varepsilon_n(t')] dt' \quad (2.3.12)$$

nella quale  $P(t, t') = -\frac{\partial R(t, t')}{\partial t'}$ , funzione negativa in quanto  $\frac{\partial R(t, t')}{\partial t'} > 0$ .

La  $P(t, t')$  rappresenta la tensione al tempo  $t$  causata da una deformazione unitaria impulsiva al tempo  $t'$  ed è chiamata *funzione memoria della deformazione impulsiva*.

Sebbene le equazioni (2.3.8) e (2.3.11) sono equivalenti, la descrizione del comportamento viscoso del calcestruzzo in termini di funzione rilassamento viene adoperata raramente; infatti i valori della  $R(t, t')$  sono di più complessa determinazione sperimentale rispetto a quelli di viscosità. Tuttavia per certi tipi di problemi è più comodo determinare la funzione  $R(t, t')$  dalla  $J(t, t')$  e quindi sviluppare l'analisi strutturale sulla base della funzione rilassamento.

Vi è inoltre una confermata evidenza sperimentale che dimostra come la conversione della funzione viscosità nella funzione rilassamento, in accordo al principio di sovrapposizione, sia di notevole precisione [26], purché l'azione simultanea

dell'essiccamento e dell'umidità non causi evidenti deviazioni dalla linearità e lo stato di tensione sia compreso nel campo delle tensioni ammissibili (figura 2.3.6).

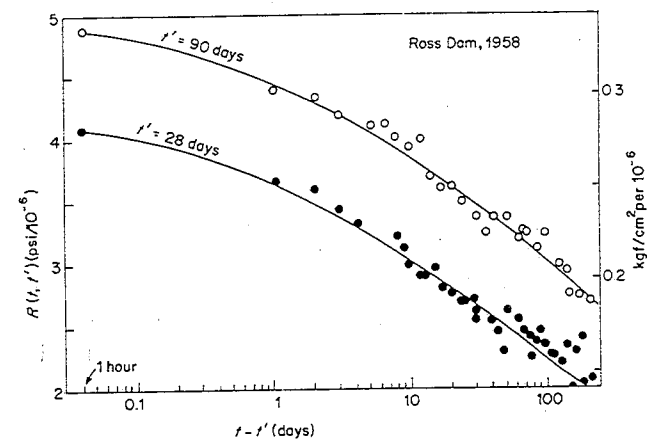


Figura 2.3.6: Confronto tra dati sperimentali e curve di rilassamento, da Bažant e Wu [26]

### 2.3.4 Relazione integrale tra la funzione viscosità e la funzione rilassamento

Sia la  $\sigma(t)$  caratterizzata da un valore iniziale  $\sigma(t_0)$  per  $t' = t_0$ , in modo che valga:

$$\sigma(t) = 0 \text{ per } t < t_0$$

$$\Delta\sigma(t_0) = \sigma(t_0)$$

l'equazioni (2.3.8), intesa come integrale di Stieltjes, diventa:

$$\varepsilon(t, t_0) - \varepsilon_n(t) = \sigma(t_0) J(t, t_0) + \int_{t_0+}^t J(t, t') d\sigma(t') \quad (2.3.13)$$

per cui considerando la  $\sigma(t)$  variabile per passi  $\Delta\sigma(t_i)$  si ottiene:

$$\varepsilon(t_n, t_0) = \sigma(t_0) J(t_n, t_0) + \sum_{i=1}^n J(t_n, t_i) \Delta\sigma(t_i) + \varepsilon_n(t_n) \quad (2.3.14)$$

Analogamente, se la storia della deformazione dipendente dalla tensione è caratterizzata da un valore iniziale  $\varepsilon(t_0) - \varepsilon_n(t_0)$  per  $t' = t_0$ , in modo che si abbia:



$$\varepsilon(t) - \varepsilon_n(t) = 0 \text{ per } t < t_0$$

$$\Delta[\varepsilon(t_0) - \varepsilon_n(t_0)] = \varepsilon(t_0) - \varepsilon_n(t_0)$$

l'equazione (2.3.11) diventa:

$$\sigma(t, t_0) = [\varepsilon(t_0) - \varepsilon_n(t_0)] R(t, t_0) + \int_{t_0+}^t R(t, t') d[\varepsilon(t') - \varepsilon_n(t')] \quad (2.3.15)$$

e considerando la deformazione variabile per passi si ha:

$$\sigma(t_n, t_0) = [\varepsilon(t_0) - \varepsilon_n(t_0)] R(t_n, t_0) + \sum_{i=1}^n R(t_n, t_i) \Delta[\varepsilon(t_i) - \varepsilon_n(t_i)] \quad (2.3.16)$$

Si consideri, ora, la storia di deformazione associata all'equazione (2.3.13) come una funzione unitaria a gradino (funzione di Heaviside  $H(t - t_0)$ ):

$$\varepsilon(t) - \varepsilon_n(t) = 0 \text{ per } t < t_0$$

$$\varepsilon(t) - \varepsilon_n(t) = 1 \text{ per } t \geq t_0$$

in questo caso la risposta in termini di tensione è per definizione  $\sigma(t, t_0) = R(t, t_0)$ .

Sostituendo questi valori nella (2.3.13) e tenendo conto che  $R(t_0, t_0) = E_c(t_0)$ , si ha:

$$1 = J(t, t_0) E_c(t_0) + \int_{t_0+}^t J(t, t') dR(t, t_0) \quad (2.3.17)$$

che rappresenta l'equazione integrale di Volterra non omogenea per la determinazione della funzione di rilassamento da quella di viscosità.

In modo simile si consideri la storia di tensione dell'equazione (2.3.15) come una funzione unitaria a gradino:

$$\sigma(t) = 0 \text{ per } t < 0$$

$$\sigma(t) = 1 \text{ per } t \geq 0$$

nel qual caso la risposta in termini di deformazione è per definizione  $\varepsilon(t, t_0) - \varepsilon_n(t) = J(t, t_0)$ .

Sostituendo questi valori nella (1.3.15) e tenendo conto che  $J(t_0, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)}$ , si ha:

$$1 = \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \int_{t_0+}^t R(t, t') dJ(t', t_0) \quad (2.3.18)$$

anche l'equazione (2.3.18) rappresenta una equazione integrale di Volterra non omogenea per la determinazione della funzione di viscosità da quella di rilassamento.

### 2.3.5 Soluzione numerica dell'equazione integrale di Volterra

La procedura numerica che viene illustrata in questo paragrafo consiste nella soluzione passo-passo dell'integrale di Volterra dell'equazione (2.3.8), per la determinazione del valore della tensione per una data storia di deformazione [7,31,32].

Questa procedura è basata sull'approssimazione dell'integrale ereditario di Stieltjes in una sommatoria finita di termini. Il calcolo numerico di questo tipo di integrale può essere effettuato utilizzando la regola dei rettangoli, oppure la regola dei trapezi; entrambe le procedure convergono rapidamente, tuttavia è conveniente utilizzare quella dei trapezi per ottenere una maggiore precisione nei risultati. La precisione numerica dipende, inoltre, dalla ampiezza degli intervalli di tempo prescelti per la discretizzazione.

Detti  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_k$  e  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) rispettivamente i tempi della discretizzazione e gli intervalli tra un tempo ed il successivo, l'integrale dell'equazione (2.3.8) si può scrivere nel seguente modo:

$$\varepsilon(t_k) - \varepsilon_n(t_k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1})] \Delta \sigma(t_i) \quad (2.3.19)$$

La relazione (2.3.19) è anche valida per un incremento istantaneo della  $\varepsilon$  o della  $\sigma$ , infatti per una variazione istantanea della tensione ad un certo tempo  $t_m$ , si può porre  $\Delta t_{m+1} = 0$ , che implica  $t_{m+1} = t_m$ .

Nella figura (2.3.7) è rappresentato il caso della variazione istantanea della tensione nel momento iniziale di carico; ponendo  $t_0 = t_1$ ,  $\Delta t_1 = 0$ ,  $\Delta \sigma(t_1) = \sigma_1$ , si ottiene infatti:  $\varepsilon(t_1) - \varepsilon_n(t_1) = J(t_1, t_1) \sigma_1$ ; e quindi

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E(t_0)}, \text{ essendo } \varepsilon_n(t_1) = 0.$$

L'eq. (2.3.19) può anche essere usata direttamente per la determinazione passo-passo della tensione per una data storia di deformazione; si ottiene, infatti, ponendo  $t = t_1$ :

$$\varepsilon(t_1) - \varepsilon_n(t_1) = \frac{1}{2} [J(t_1, t_1) + J(t_1, t_0)] \Delta \sigma(t_1)$$

da cui si ricava

$$\Delta \sigma(t_1) = 2 \frac{[\varepsilon(t_1) - \varepsilon_n(t_1)]}{[J(t_1, t_1) + J(t_1, t_0)]};$$

ponendo ancora  $t = t_2$

$$\varepsilon(t_2) - \varepsilon_n(t_2) = \frac{1}{2} [J(t_2, t_1) + J(t_2, t_0)] \Delta\sigma(t_1) + \frac{1}{2} [J(t_2, t_2) + J(t_2, t_1)] \Delta\sigma(t_2),$$

si determina  $\Delta\sigma(t_2)$  e così di seguito; per ottenere la tensione al tempo  $k$  si pone infine:

$$\sigma(t_k) = \sum_{i=1}^k \Delta\sigma(t_i).$$

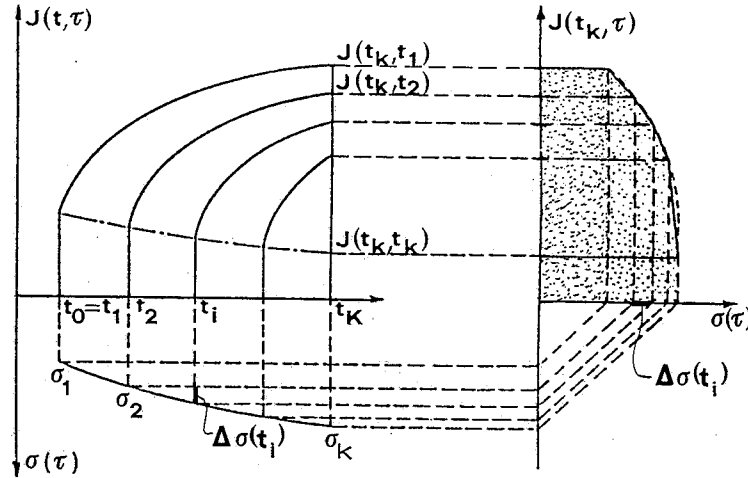


Figura 2.3.7: Rappresentazione grafica dell'integrale di sovrapposizione

Nel caso di una variazione istantanea della tensione nel momento iniziale di carico  $t_0$ ,

la procedura si particularizza come segue: ponendo  $t = t_1 = t_0$ , che comporta  $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_c(t_0)}$ , per  $t = t_2$  si ha quindi:

$$\varepsilon(t_2) - \varepsilon_n(t_2) = J(t_2, t_1) \sigma_1 + \frac{1}{2} [J(t_2, t_2) + J(t_2, t_1)] \Delta\sigma(t_2)$$

Dalla procedura precedentemente descritta si può ricavare l'algoritmo ricorrente per la determinazione della storia di tensione; riscrivendo l'equazione (2.3.19) per  $t = t_{k-1}$

$$\varepsilon(t_{k-1}) - \varepsilon_n(t_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2} [J(t_{k-1}, t_i) + J(t_{k-1}, t_{i-1})] \Delta\sigma(t_i) \quad (2.3.20)$$

valida per ogni  $k > 1$ ; sottraendo l'equazione (2.3.20) dalla (2.3.19) si ottiene:

$$\Delta\sigma(t_k) = 2 \frac{\Delta\varepsilon(t_k) - \Delta\varepsilon_n(t_k) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{2} [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1}) - J(t_{k-1}, t_i) - J(t_{k-1}, t_{i-1})]}{J(t_k, t_k) + J(t_k, t_{k-1})} \quad (2.3.21)$$

e per  $k=1$  si ha:

$$\Delta\sigma(t_1) = 2 \frac{\Delta\varepsilon(t_1) - \Delta\varepsilon_n(t_1)}{J(t_1, t_1) + J(t_1, t_0)} = \varepsilon_1 E_c(t_0)$$

essendo

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon(t_1) &= \varepsilon_1; \\ \Delta\varepsilon_n(t_1) &= 0; \end{aligned}$$

$$J(t_1, t_1) = J(t_1, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)}$$

La relazione (2.3.21) può essere scritta, in forma sintetica, nel seguente modo:

$$\Delta\sigma_k = E_k'' (\Delta\varepsilon_k - \Delta\varepsilon_k'') \quad (2.3.22)$$

dove:

$$E_k'' = \frac{2}{J(t_k, t_k) + J(t_k, t_{k-1})}$$

$$\Delta\varepsilon_k'' = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Delta\sigma(t_i)}{2} [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1}) - J(t_{k-1}, t_i) - J(t_{k-1}, t_{i-1})] + \Delta\varepsilon_n(t_k)$$

Inversamente se è nota la funzione rilassamento è possibile determinare l'andamento della deformazione nota la storia di tensione; sostituendo l'integrale dell'equazione (2.3.11) con una somma finita di termini ed utilizzando la regola dei trapezi si ottiene infatti:

$$\Delta\varepsilon_k = \frac{\Delta\sigma_k}{E_k''} + \Delta\varepsilon_k'' \quad (2.3.23)$$

dove:

$$E_k'' = \frac{R(t_k, t_k) + R(t_k, t_{k-1})}{2}$$

$$\Delta \varepsilon_k^n = \frac{1}{E_k^n} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Delta \varepsilon(t_i)}{2} [R(t_k, t_i) + R(t_k, t_{i-1}) - R(t_{k-1}, t_i) - R(t_{k-1}, t_{i-1})] + \Delta \varepsilon_n(t_k)$$

Per il caso particolare di una tensione unitaria costante questo algoritmo è adoperato per la determinazione della funzione viscosità corrispondente ad una data funzione di rilassamento [31].

### 2.3.6 Determinazione numerica della funzione rilassamento $R(t, t_0)$ dalla funzione viscosità $J(t, t_0)$

Si consideri la storia di deformazione associata all'equazione (2.3.13) come una funzione unitaria a gradino:

$$\varepsilon(t) - \varepsilon_n(t) = 0 \text{ per } t < t_0$$

$$\varepsilon(t) - \varepsilon_n(t) = 1 \text{ per } t \geq t_0$$

con  $t_0 = t_1$ , in tal modo si ha:

$$\varepsilon(t_0) - \varepsilon_n(t_0) = \Delta \varepsilon(t_0) = 1$$

$$\Delta \varepsilon(t_k) - \Delta \varepsilon_n(t_k) = 0 \text{ per } k > 1,$$

in tal caso la risposta in termini di tensione è per definizione la funzione rilassamento,

$$\sigma(t_k) = R(t_k, t_0).$$

Adoperando l'algoritmo ricorrente della eq. (2.3.22) si ha:

$$\Delta R(t_k) = - \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \Delta R(t_i) [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1}) - J(t_{k-1}, t_i) - J(t_{k-1}, t_{i-1})]}{J(t_k, t_k) + J(t_k, t_{k-1})}$$

dove

$$\Delta R(t_1) = \frac{1}{J(t_1, t_1)} = \frac{1}{J(t_0, t_0)} = E_c(t_0).$$

Per le calcolazioni pratiche [32] è conveniente scegliere i tempi discreti,  $(t_k - t_0)$ , in cui vengono valutate la funzione di viscosità e i decrementi della funzione rilassamento, in progressione geometrica in modo che  $(t_k - t_0)/(t_{k-1} - t_0) = \text{costante} = q$ .

Adottando una scala dei tempi di tipo logaritmico, questi ultimi appaiono ugualmente

spaziati e ponendo  $q = 10^m$  si ha:

$$(t_k - t_0) = 10^{\frac{1}{m}} (t_{k-1} - t_0), \text{ ovvero } \log_{10}(t_k - t_0) = \frac{1}{m} + \log_{10}(t_{k-1} - t_0)$$

dove  $m$  rappresenta il numero di suddivisioni per decade.

### 2.3.7 Generalizzazione pluriassiale del principio di sovrapposizione

Essendo il calcestruzzo un materiale essenzialmente isotropo, la generalizzazione pluriassiale del principio di sovrapposizione può essere ottenuta facilmente modificando le equazioni (2.3.8) e (2.3.9) nella seguente forma:

$$\underline{\varepsilon}(t) = \int_0^t \underline{B} J(t, t') d\sigma(t') + \underline{\varepsilon}_n(t) \quad (2.3.24)$$

oppure

$$\underline{\varepsilon}(t) = \underline{B} \frac{\underline{\sigma}(t)}{E(t)} + \int_0^t \underline{B} L(t, t') \underline{\sigma}(t') dt' + \underline{\varepsilon}_n(t) \quad (2.3.25)$$

nelle quali:

$$\underline{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31})^T$$

$$\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31})^T$$

$$\underline{\varepsilon}_n = (\varepsilon_n, \varepsilon_n, \varepsilon_n, 0, 0, 0)^T$$

e inoltre:

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.3.26)$$

I pedici dei vettori  $\underline{\sigma}$  e  $\underline{\varepsilon}$  rappresentano le componenti delle tensioni e delle deformazioni nelle coordinate cartesiane  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ), l'apice  $T$  denota la matrice trasposta e  $\nu$  rappresenta il modulo di Poisson generalizzato per il comportamento viscoelastico al tempo  $t$ , come è noto, inoltre, la relazione tra  $G$  (modulo di elasticità tangenziale) e  $\nu$  è data da:

$$G(t) = \frac{E(t')}{2(1+\nu)}$$

Per stati tensionali non elevati e nei limiti della isotropia, le prove sperimentali sulla viscosità per effetto del taglio, della torsione ed in stati di tensione biassiale sono in buon accordo con i risultati analitici espressi dalla equazione (2.3.24) per sollecitazioni tensionali pluriassiali [33,34,35,36]. Più in generale, il modulo di Poisson dell'equazione (2.3.26) dovrebbe essere considerato una funzione di  $t'$  e  $t$ ,  $\nu(t, t')$ ; tuttavia, in ambienti con umidità costante si verifica generalmente che il modulo di Poisson è costante con valore approssimativamente pari a 0,18; in questo caso la matrice  $\underline{B}$  può essere portata fuori dal segno di integrale dell'eq. (2.3.24). Questo tipo di approssimazione viene anche adottata per il drying creep.

In molti casi è utile definire un operatore viscoso  $E^{-1}$  ed un operatore di rilassamento  $E$ , ponendo le equazioni (2.3.8) e (2.3.11) nelle forme ridotte  $\underline{\varepsilon} = \underline{B}E^{-1}\underline{\sigma} + \underline{\varepsilon}_n$  e  $\underline{\sigma} = \underline{B}^{-1}E(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_n)$  nelle quali [37,38,39,40,41]:

$$\underline{B}^{-1} = 2G \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.3.27)$$

L'operatore di rilassamento,  $E$ , è l'inverso dell'operatore viscoso  $E^{-1}$ . Questi operatori possono essere trattati in accordo con le regole dell'algebra, tenendo conto di alcune limitazioni, come ad esempio l'assenza della proprietà commutativa dovuta all'invecchiamento. Queste caratteristiche matematiche possono essere utilizzate per estendere le equazioni della elasticità lineare in analoghe equazioni adatte all'analisi viscoelastica dei materiali invecchianti.

## 2.3.8 Modelli reologici semplici

In questa categoria sono classificati tutti i metodi viscoelastici che permettono di ottenere una soluzione analitica semplice per l'integrale di sovrapposizione dell'equazione (2.3.8) utilizzando forme semplificate della funzione viscosità.

In particolare i due approcci fondamentali della reologia teorica si distinguono come segue [7,23,42,48]:

1. *teoria dell'ereditarietà*, nella quale la funzione di viscosità è del tipo

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E} + B(t - \tau) \quad (a)$$

corrispondente ad una funzione memoria, nucleo dell'equazione integrale di Volterra, che dipende solo dalla durata del carico  $(t - \tau)$ .

2. *teoria dell'invecchiamento*, nella quale la funzione viscosità è rappresentata dalla seguente forma

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E} + A(t) - A(\tau) \quad (b)$$

corrispondente ad una funzione memoria, che dipende solo dall'età di carico  $\tau$ .

Il comportamento invecchiante del materiale è esaltato nella teoria dell'invecchiamento; le corrispondenti funzioni viscosità sono rappresentate da curve parallele, ottenute, per le diverse età iniziali di carico  $\tau$ , dalla traslazione verticale della curva originale calcolata per  $\tau = t_0$  (figura 2.3.8). Tale sistematico parallelismo, tuttavia, non si verifica normalmente nel comportamento reale del materiale ed in particolare nell'intervallo di tempo che intercorre immediatamente dopo ogni istante iniziale di carico.

Inversamente, nella teoria dell'ereditarietà, non viene considerato alcun effetto dell'invecchiamento; le curve di viscosità ad ogni istante iniziale di carico,  $\tau = t_i$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ ), si ottengono per mezzo della traslazione orizzontale della curva originale calcolata per  $\tau = t_0$  (figura 2.3.9).

Tale rappresentazione, particolarmente adatta a descrivere il comportamento viscoso dei polimeri, è meno corretto nel rappresentare le proprietà reologiche del calcestruzzo, che è un materiale fortemente dipendente dal tempo.

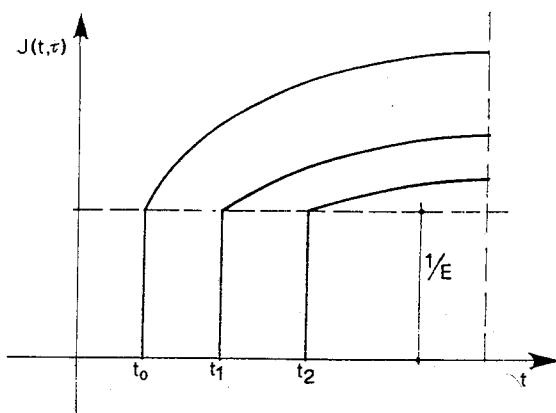


Figura 2.3.8: Teoria dell'invecchiamento

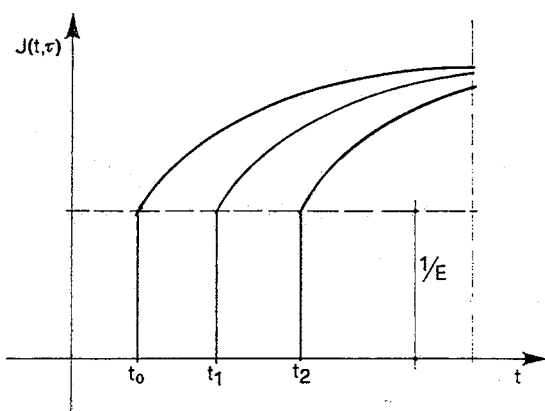


Figura 2.3.9: Teoria dell'ereditarietà

L'utilizzazione della teoria dell'invecchiamento nell'analisi viscoelastica delle strutture in calcestruzzo ha originato, invece, il cosiddetto metodo del *rate-of-creep*, molto diffuso in passato, pubblicato in un lavoro pubblicato di Dischinger nel 1937, i cui risultati approssimano sufficientemente la realtà sperimentale [43].

Un'altra versione più recente del metodo del *rate-of-creep*, chiamata *improved Dischinger method*, basata sulla teoria dell'invecchiamento, è stata presentata da Rush, Jungwirth e Hilsdorf, 1973 [44], ed adottata dal CEB/FIP Model Code (1978) [45], quale approccio basilare nella categoria dei metodi semplificati di calcolo. Il suo sviluppo teorico è contenuto in trattazioni come il CEB Manual "Structural Effects of Time-dependent Behaviour of Concrete" [7].

La correzione al metodo classico di Dischinger del CEB/FIP Model Code (1978) consiste nel considerare una funzione viscosità *tipo sommatoria* ottenuta come combinazione lineare delle funzioni (a) e (b), che contengono sia la componente invecchiante  $F(t) - F(\tau)$ , *flow*, che la componente ereditaria  $D(t - \tau)$ , *delayed elasticity*; inoltre, per conservare i vantaggi computazionali propri della teoria dell'invecchiamento, la componente di elasticità ritardata  $D(t - \tau)$  è considerata come una costante elastica istantanea. Una ulteriore semplificazione del problema si ottiene tenendo costante il modulo elastico.

L'*improved Dischinger method* non compare, tuttavia, nel CEB Model Code 1990 nel quale viene proposta una funzione viscosità *tipo produttoria* di funzioni dipendenti dai parametri viscosi.

Sebbene tali semplificazioni generalmente conducono a soluzioni approssimate dei problemi viscoelastici, l'adozione di questi metodi può, in molti casi, risultare vantaggiosa per una prima valutazione dei fenomeni reologici nelle strutture in calcestruzzo.

### 2.3.9 Teoria dell'ereditarietà

Si considerino le equazioni (2.3.13) e (2.3.15):

$$\varepsilon(t, t_0) - \varepsilon_n(t) = \sigma(t_0) J(t, t_0) + \int_{t_0^+}^t J(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad (2.3.28)$$

$$\sigma(t, t_0) = [\varepsilon(t_0) - \varepsilon_n(t_0)] R(t, t_0) + \int_{t_0^+}^t R(t, \tau) d[\varepsilon(\tau) - \varepsilon_n(\tau)] \quad (2.3.29)$$

dove si è posto  $\tau = t'$  per indicare il tempo generico di carico; integrandole per parti si ottengono le forme equivalenti:

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E_c(t)} + \int_{t_0^+}^t L(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau + \varepsilon_n(t) \quad (2.3.30)$$

$$\sigma(t, t_0) = [\varepsilon(t) - \varepsilon_n(t)] E_c(t) + \int_{t_0}^t P(t, \tau) [\varepsilon(\tau) - \varepsilon_n(\tau)] d\tau \quad (2.3.31)$$

dove le funzioni  $L(t, \tau)$  e  $P(t, \tau)$ , definite nelle (2.3.9) e (2.3.12) come i nuclei delle equazioni integrali, rappresentano rispettivamente la funzione memoria della tensione e la funzione memoria della deformazione; si consideri, inoltre, un materiale non invecchiante per il quale il comportamento viscoso è caratterizzato da funzioni viscosità e rilassamento che dipendono dalla durata del carico  $(t - \tau)$  e non dall'istante iniziale di carico  $\tau$ .

Introducendo nelle (2.3.28) e (2.3.29) le funzioni:

$$J(t - \tau) \rightarrow J(t, \tau),$$

$$R(t - \tau) \rightarrow R(t, \tau)$$

e ponendo  $t_0 = 0$ , si ha:

$$\varepsilon(t) = \sigma(0) J(t) + \int_0^t J(t - \tau) d\sigma(\tau) + \varepsilon_n(t) \quad (2.3.32)$$

$$\sigma(t) = [\varepsilon(0) - \varepsilon_n(0)] R(t) + \int_0^t R(t - \tau) d[\varepsilon(\tau) - \varepsilon_n(\tau)] \quad (2.3.33)$$

Allo stesso modo le (2.3.32) e (2.3.33) possono essere integrate per parti:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) J(0) - \int_0^t \sigma(\tau) \frac{dJ(t - \tau)}{d(t - \tau)} \frac{d(t - \tau)}{d\tau} d\tau + \varepsilon_n(t) \quad (2.3.34)$$

$$\sigma(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon_n(t)] R(0) - \int_0^t [\varepsilon(\tau) - \varepsilon_n(\tau)] \frac{dR(t - \tau)}{d(t - \tau)} \frac{d(t - \tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.3.35)$$

per la teoria dell'ereditarietà si pone:

$$J(\tau) = J(0) = \frac{1}{E} = \text{costante}$$

$$R(\tau) = R(0) = E = \text{costante}$$

e le equazioni precedenti diventano:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t \sigma(\tau) \frac{dJ(t - \tau)}{d(t - \tau)} d\tau + \varepsilon_n(t) \quad (2.3.36)$$

$$\sigma(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon_n(t)] E + \int_0^t [\varepsilon(\tau) - \varepsilon_n(\tau)] \frac{dR(t - \tau)}{d(t - \tau)} d\tau \quad (2.3.37)$$

Comparando con le equazioni (2.3.30) e (2.3.31) si può scrivere:

$$L(t, \tau) = L(t - \tau) = \frac{dJ(t - \tau)}{d(t - \tau)}$$

$$P(t, \tau) = P(t - \tau) = -\frac{dR(t - \tau)}{d(t - \tau)}$$

il che dimostra che le equazioni (2.3.30) e (2.3.31) corrispondono ad equazioni differenziali a coefficienti costanti, rappresentabili mediante i modelli viscosi della reologia classica [42].

Pertanto, è essenziale ricavare le funzioni  $J$  e  $R$  dal modello reologico assunto per descrivere il comportamento elasto-viscoso lineare del materiale. Inoltre, dal confronto delle funzioni  $J$  e  $R$  con quelle ricavabili da dati sperimentali, si può valutare entro quali limiti di aderenza al vero il modello reologico assunto è in grado di descrivere il comportamento sperimentale del materiale.

## 2.3.10 Modelli semplici di Kelvin-Voigt e di Maxwell

### 2.3.10.1 Modello di Kelvin-Voigt

Si consideri un provino di materiale viscoelastico sottoposto ad uno stato di tensione monoassiale. La sua equazione di stato, ovvero la relazione esistente fra la tensione e la deformazione, si presenta nella forma di una funzione del tempo. Inoltre, le proprietà viscoelastiche del materiale vengono descritte rappresentando la parte elastica con una molla e la parte viscosa con un ammortizzatore (figura 2.3.10).

Poiché i due elementi sono disposti in parallelo la deformazione  $\varepsilon$  della molla e dell'ammortizzatore sono identiche; in tal modo, la tensione  $\sigma$  si decompone in due parti: la prima,  $\sigma_1$ , relativa alla molla, la seconda,  $\sigma_2$ , corrispondente all'ammortizzatore.

Il legame sforzi-deformazioni della molla è descritto dalla legge di Hooke  $\sigma_1 = E \varepsilon$ ; il

legame costitutivo dell'ammortizzatore, invece, segue la legge di Newton  $\sigma_2 = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$ , dove  $\eta$  è la viscosità.

Sinteticamente, le equazioni:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \varepsilon \\ \sigma_1 &= E \varepsilon\end{aligned}\quad (2.3.28)$$

$$\sigma_2 = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$$

descrivono l'equazione differenziale del modello:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (2.3.28)$$

nella quale la tensione si scompone in due parti, una proporzionale alla deformazione, l'altra alla sua derivata rispetto al tempo.

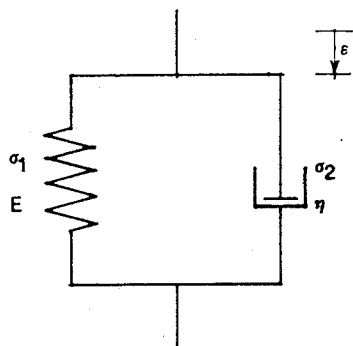


Figura 2.3.10: Modello di Kelvin-Voigt

La funzione viscosità del modello si determina integrando l'equazione differenziale (2.3.39) nella quale si pone:

$$\sigma(t) = 0 \text{ per } t < 0$$

$$\sigma(t) = 1 \text{ per } t \geq 0$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E}{\eta} \varepsilon - \frac{1}{\eta} = 0; \quad J(t) \equiv \varepsilon(t)$$

$$J(t) = e^{-\frac{E}{\eta} t} \left( \int \frac{1}{\eta} e^{\frac{E}{\eta} t} dt + C \right) = e^{-\frac{E}{\eta} t} \left( \frac{1}{E} \int \frac{E}{\eta} e^{\frac{E}{\eta} t} dt + C \right)$$

$$J(t) = e^{-\frac{E}{\eta} t} \left( \frac{1}{E} e^{\frac{E}{\eta} t} + C \right)$$

$J(t) = 0$  per  $t = 0$ , da cui si ricava:

$$C = -\frac{1}{E}$$

e quindi:

$$J(t) = \frac{1}{E} (1 - e^{-(E/\eta)t}) \quad (2.3.40)$$

La figura (2.3.11) rappresenta la funzione viscosità del modello di Kelvin-Voigt, in funzione del tempo  $t$ , conformemente alla relazione (2.3.40). Se si pone  $\varepsilon(t) = \sigma J(t)$  con  $\sigma = 1$ , si osserva come la deformazione aumenti a partire da zero, fino a

raggiungere il valore  $\frac{1}{E}$  per  $t \rightarrow \infty$ .

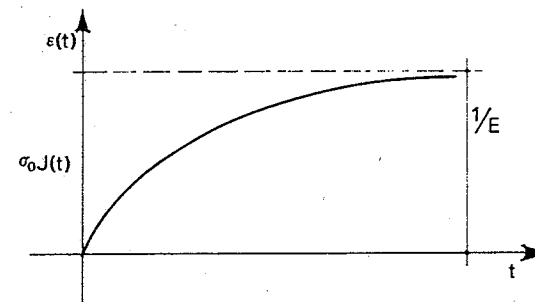


Figura 2.3.11: Funzione viscosità del modello di Kelvin-Voigt

La rapidità della crescita della deformazione dipende dal parametro  $\tau = \frac{\eta}{E}$ , rapporto tra il coefficiente di viscosità ed il modulo di elasticità, denominato tempo di rilassamento.

Una volta che la tensione,  $\sigma=1$ , viene soppressa al tempo  $t_1$ , la deformazione diminuisce fino a raggiungere un valore nullo per  $t \rightarrow \infty$  (figura 2.3.12). Se la grandezza  $\eta$ , che rappresenta lo scorrimento interno del corpo, è piccola a fronte di  $E$ , anche il tempo di rilassamento è piccolo, per cui la deformazione diminuisce rapidamente. Se, inversamente,  $\eta$  è maggiore di  $E$  la deformazione diminuisce lentamente.

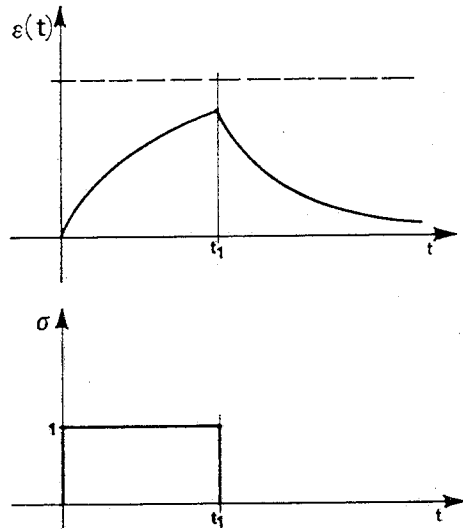


Figura 2.3.12: Curva di recupero del modello di Kelvin-Voigt

Dall'equazione (2.3.40) si deduce, inoltre, che per  $t_1 = \tau = \eta/E$  la deformazione raggiunta in  $t_1$  diminuisce di  $1/e$  volte rispetto al salto iniziale. La curva  $\varepsilon(t)$  di figura (2.3.12) per  $t > t_1$  è detta curva di recupero.

La funzione rilassamento si determina adottando il calcolo simbolico (trasformate di Laplace), oppure direttamente ponendo nella (2.3.39):

$$\varepsilon(t) = 0 \text{ per } t < 0$$

$$\varepsilon(t) = 1 \text{ per } t \geq 0,$$

sapendo che in tal caso  $R(t) \equiv \sigma(t)$ , si ha:

$$R(t) = E + \eta \delta(t) \tag{2.3.41}$$

dove  $\delta(t)$  è la funzione di Dirac.

L'introduzione della funzione di Dirac nella relazione (2.3.41) comporta che la tensione tende all'infinito nel momento di imposizione della deformazione: tale comportamento è dovuto alle caratteristiche del modello, nel quale l'ammortizzatore non descrive una deformazione finita quando la variazione istantanea della tensione assume valori finiti (figura 2.3.11). Inversamente, se si applica al sistema una deformazione finita deve corrispondere una tensione infinitamente grande per l'ammortizzatore. È dunque teoricamente impossibile, per questo modello, realizzare una prova di rilassamento, in quanto il provino, sottoposto ad una deformazione unitaria istantanea, collaserebbe sotto la tensione infinita sopportata unicamente dall'ammortizzatore.

### 2.3.10.2 Modello di Maxwell

Il modello di Maxwell si differenzia da quello di Kelvin per la posizione della molla e dell'ammortizzatore che risultano connessi in serie (figura 2.3.13).

Tale semplice modello rappresenta solo parzialmente le proprietà di un corpo reale, tuttavia può diventare parte di un modello molto più complesso che approssima bene le proprietà reologiche dei materiali viscosi.

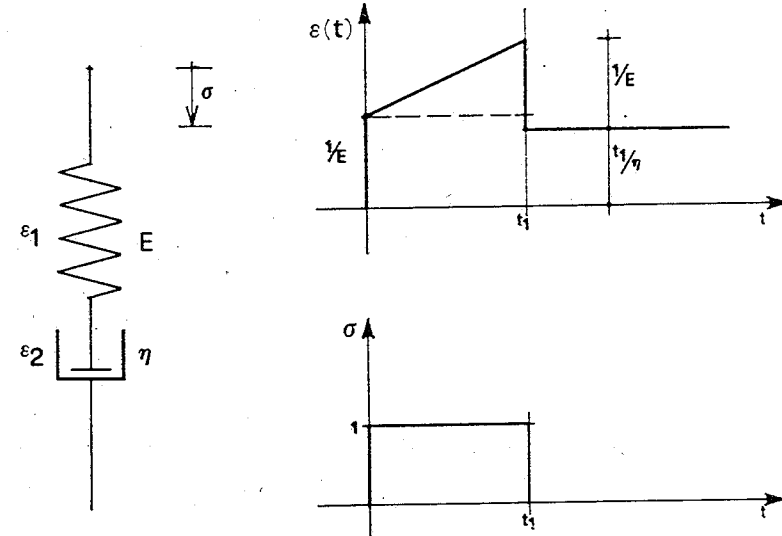


Figura 2.3.13: Modello di Maxwell



Poiché i due elementi sono disposti in serie la deformazione totale si compone di due parti  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ , dove  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  sono le deformazioni relative rispettivamente alla molla ed all'ammortizzatore. La tensione della molla, invece, è identica a quella dell'ammortizzatore,  $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ .

Sinteticamente, le equazioni:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_2 = \sigma, \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= \varepsilon, \\ \sigma &= E \varepsilon_1; \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt}$$

descrivono l'equazione differenziale del modello:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.3.43)$$

La funzione viscosità del modello si determina integrando l'equazione (2.3.43) nella quale si pone:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= 0 \text{ per } t < 0; \\ \sigma(t) &= 1 \text{ per } t \geq 0; \end{aligned}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\eta}; \quad J(t) \equiv \varepsilon(t)$$

$$J(t) = \frac{1}{\eta} t + C,$$

per  $t = 0$ ,  $J(t) = \frac{1}{E}$ , da cui si ha  $C = \frac{1}{E}$  e quindi:

$$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \quad (2.3.44)$$

La figura (2.3.13) rappresenta la funzione viscosità del modello di Maxwell, in conformità alla relazione (2.3.44). Infatti se si pone  $\varepsilon(t) = \sigma J(t)$ , con  $\sigma = 1$ , si osserva come la deformazione, al tempo  $t = 0$ , raggiunge subito il valore  $1/E$ , per incrementarsi secondo una retta avente coefficiente angolare  $1/\eta$ .

Quando la tensione viene soppressa al tempo  $t_1$ , la deformazione decresce subito della quantità  $\frac{1}{E}$  per stabilizzarsi al valore costante  $\frac{t_1}{\eta}$ .

La funzione rilassamento si determina ponendo nella (2.3.43):

$$\varepsilon(t) = 0 \text{ per } t < 0$$

$$\varepsilon(t) = 1 \text{ per } t \geq 0$$

in tal caso per definizione si ha, infatti,  $R(t) \equiv \sigma(t)$ ;

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} = 0; \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta} dt;$$

$$\ln \sigma = -\frac{E}{\eta} t + C; \quad \sigma(t) = e^{\left[-\frac{E}{\eta} t + C\right]}$$

$$\sigma(t) = C^* e^{-\frac{E}{\eta} t}, \text{ dove } C^* = e^C;$$

per  $t = 0$ ,  $R(t) = E$ , da cui si ha  $C^* = E$  e quindi

$$R(t) = E e^{-(E/\eta)t} \quad (2.3.45)$$

La figura (2.3.14) rappresenta la funzione rilassamento del modello di Maxwell, che assume il valore  $E$  per  $t = 0$  ed ha andamento decrescente per  $t > 0$ .

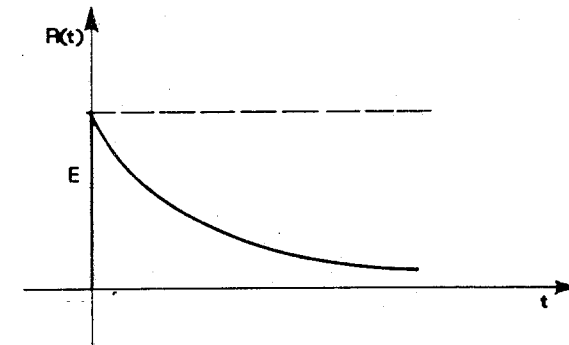


Figura 2.3.14: Funzione di rilassamento del modello di Maxwell

Per  $t \rightarrow \infty$  la funzione tende a zero. La (2.3.45) può essere posta nella forma

$R(t) = E e^{-t/\tau}$ , dove  $\tau = \frac{\eta}{E}$  rappresenta il tempo di rilassamento ed è definito come il

tempo che impiega la funzione per raggiungere il valore  $\frac{1}{e}$  del salto iniziale.

### 2.3.11 Modelli generalizzati

Nell'ambito dei modelli reologici ereditati, le considerazioni effettuate precedentemente hanno dimostrato come il modello di Kelvin-Voigt, pur rappresentando bene la parte viscosa della funzione viscosità, non tiene conto della deformazione istantanea, mentre il modello di Maxwell descrive correttamente il fenomeno del rilassamento, ma dà luogo ad una funzione viscosità indefinitamente crescente nel tempo.

Per rimuovere l'assenza di elasticità istantanea dal modello di Kelvin-Voigt è dunque sufficiente aggiungere una molla in serie al sistema: si ottiene, in tal modo, il modello a tre parametri di figura (2.3.15). Questo modello è stato storicamente assunto da diversi autori [42,43,47] per descrivere il fenomeno dello scorrimento, pur se si deve notare che alcuni di questi studiosi sono pervenuti alla sua equazione lineare attraverso considerazioni differenti.

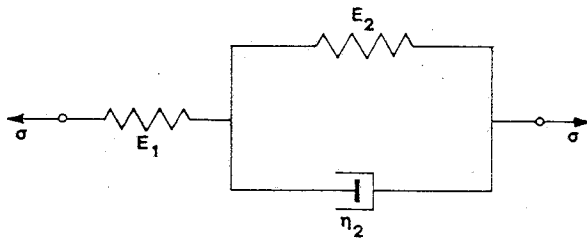


Figura 2.3.15: Modello di Kelvin-Voigt con una molla in serie

Per tale modello si può scrivere:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \quad \sigma = E_1 \varepsilon_1 = E_2 \varepsilon_2 + \eta_2 \dot{\varepsilon}_2,$$

la funzione viscosità risulta:

$$J(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_2}{\eta_2} t}\right)$$

e la funzione di rilassamento:

$$R(t) = E_1 - \frac{E_1^2}{E_1 + E_2} \left(1 - e^{-\frac{E_1 + E_2}{\eta_2} t}\right).$$

Anche per il modello di Maxwell si può rappresentare un sistema a tre parametri, come il precedente, allo scopo di rimuovere l'anomalo comportamento dovuto alla disposizione della molla e dell'ammortizzatore viscoso, che determina una funzione viscosità linearmente crescente.

Per ottenere la correzione basta disporre una molla in parallelo nel modello di base, affinché l'ammortizzatore diventi efficace. Si ottiene così, il modello di Zerner (figura 2.3.16) assunto in passato da diversi autori (per esempio Trost) per determinare il fenomeno del rilassamento.

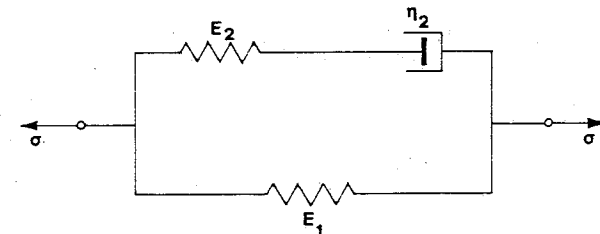


Figura 2.3.16: Modello di Zerner

Per il modello di Zerner si può scrivere:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \varepsilon = \frac{\sigma_1}{E_1}, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_2}{E_2} + \frac{\dot{\sigma}_2}{\eta_2};$$

la funzione viscosità risulta:

$$J(t) = \frac{1}{E_1} - \frac{E_2}{E_1(E_1 + E_2)} e^{-\frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) \eta_2} t}$$

e la funzione di rilassamento:

$$R(t) = E_1 + E_2 e^{-\frac{E_2}{\eta_2} t}$$

Tuttavia, con questi modelli a soli tre parametri si può ottenere una scarsa corrispondenza al vero per il comportamento elastoviscoso di un calcestruzzo allorché si cambi l'istante iniziale di applicazione della sollecitazione, a meno di non considerare variabili i coefficienti delle equazioni di stato, ossia di ritenere, questi, funzione dell'istante di applicazione della sollecitazione. Questo procedimento, sviluppato recentemente in alcuni lavori di Bazant, non rispetta più i principi ereditari della reologia classica e viene applicato a modelli con un numero elevato di parametri per la cui definizione è necessario utilizzare il calcolo automatico.

Nell'ambito della reologia classica, un procedimento per definire modelli più rispondenti ai risultati sperimentali, ma che conservino parametri costanti nel tempo, consiste nel generalizzare i modelli *elementari* delle figure (2.3.15) e (2.3.16), riconosciuti come i più semplici modelli capaci di descrivere, rispettivamente, i fenomeni dello scorrimento e del rilassamento del calcestruzzo.

In particolare la generalizzazione di un modello di viscosità è fatta disponendo una molla in serie ad  $n$  modelli di Kelvin-Voigt, oppure una molla in parallelo ad  $n$  modelli di Maxwell (figura 1.3.17).

Nei due casi, si ottengono le seguenti espressioni delle funzioni viscosità e rilassamento:

per il modello *generalizzato* di viscosità

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} \left(1 - e^{-\frac{E_i}{\eta_i} t}\right),$$

per il modello "generalizzato" di rilassamento

$$R(t) = E_0 + \sum_{i=1}^n E_i e^{-\frac{E_i}{\eta_i} t}$$

In entrambi i casi, per far corrispondere al meglio i risultati teorici con quelli sperimentali, è necessario stabilire i valori dei  $2n+1$  parametri  $E_0$ ,  $E_i$  e  $\eta_i$ .

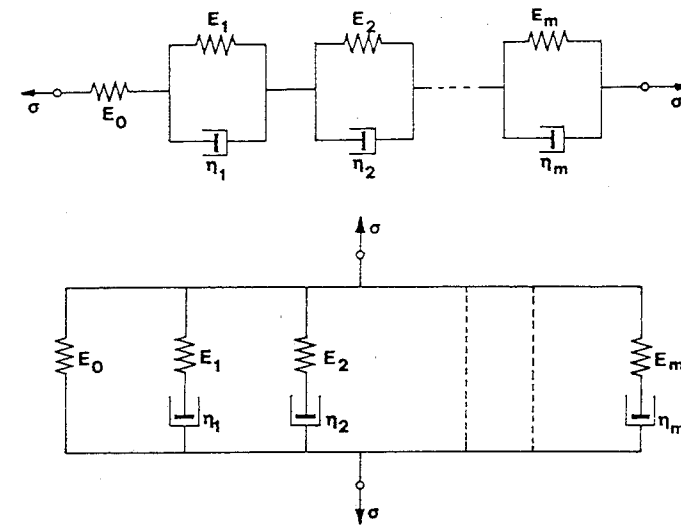


Figura 2.3.17: Modelli generalizzati di Kelvin-Voigt e di Maxwell

La corrispondenza è valida, ovviamente, per ogni singolo calcestruzzo e per ogni istante  $\tau$  di applicazione della sollecitazione; in tal modo, per ogni calcestruzzo e per ogni istante  $\tau$  si può costruire un modello reologico affinché le curve di viscosità e di rilassamento, da esso ricavabili, corrispondano bene con quelle ottenute da saggi sperimentali.

Naturalmente, a causa dell'invecchiamento del materiale, tale modello non sarà più in grado di descrivere prove di scorrimento o di rilassamento eseguite sotto sollecitazioni applicate a partire da tempi diversi dall'istante  $\tau$  prima considerato; così come non potrà descrivere, ad esempio, la legge di dilatazione  $\varepsilon(t)$  sotto una tensione variabile nel tempo,  $\sigma = \sigma(\tau)$ , a meno di non far dipendere qualcuno dei parametri liberi del modello dal tempo  $\tau$ ; questo, però, porterebbe la trattazione fuori dai limiti imposti dal principio di ereditarietà della reologia classica.

Quindi, le migliori corrispondenze teorico-sperimentali di tali modelli si ottengono solo per  $\tau$  elevati, quando praticamente il modulo di elasticità  $E_0$  è costante e l'invecchiamento è esaurito, cosicché il comportamento elasto-viscoso assume un carattere ereditario.

### 2.3.12 Teoria dell'invecchiamento

Si assume che:

$$\begin{aligned} E(t) &= \text{costante} = E \\ L(t, \tau) &= L(\tau) \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

Sostituendo le (2.3.46) nella equazione (2.3.30) si ottiene:

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{t_0}^t \sigma(\tau) L(\tau) d\tau + \varepsilon_n(t) \quad (2.3.47)$$

Introducendo  $\sigma(t) = \text{costante} = 1$  nella (2.3.47) si determina la funzione viscosità:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E} + \int_{t_0}^t L(\tau) d\tau \quad (2.3.48)$$

che può essere scritta nella forma:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E} + A(t) - A(t_0) \quad (2.3.49)$$

poiché, qualunque sia il tempo  $t_0$ , la derivata prima della funzione precedente rispetto al tempo  $t$  è sempre la stessa, l'equazione (2.3.49) comporta il parallelismo delle curve di viscosità (figura 2.3.10). Questa importante osservazione sperimentale fu fatta da Whitney [49] ed è un'ipotesi applicabile per tempi lunghi dopo l'applicazione del carico.

L'invecchiamento del materiale resta chiaramente indicato dal fatto che le curve di scorrimento sono via via più schiacciate per tempi di applicazione della sollecitazione crescenti.

Dalla funzione viscosità, ricordando l'equazione (2.3.9), si ottiene:

$$L(\tau) = -\frac{\partial J(t, \tau)}{\partial \tau} = \frac{dA(\tau)}{d\tau}, \quad (2.3.50)$$

derivando l'equazione (2.3.47) e considerando la precedente si ha:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma(t)}{dt} + \sigma(t) \frac{dA(t)}{dt}, \quad (2.3.51)$$

che rappresenta l'equazione differenziale fondamentale della teoria dell'invecchiamento.

Sostituendo la (2.3.50) nella (2.3.47) si ottiene, inoltre:

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \frac{dA(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.3.52)$$

Utilizzando l'equazione differenziale (2.3.51) si può determinare la funzione di rilassamento e sostituendo  $\varepsilon = \text{costante} = 1$ , si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(t)}{\sigma(t)} &= -E \frac{dA(t)}{dt}; \\ \ln \sigma &= -EA(t) + K; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= e^{-EA(t)} e^K; \\ \text{per } t = t_0, \sigma &= E \varepsilon_0; \\ E \varepsilon_0 &= e^{-EA(t_0)} e^K; \\ e^K &= \varepsilon_0 E e^{EA(t_0)} \end{aligned}$$

ed infine si ottiene:

$$\sigma(t, t_0) = \varepsilon_0 E e^{-E[A(t) - A(t_0)]};$$

$$R(t, t_0) = \frac{\sigma(t, t_0)}{\varepsilon_0} = E e^{-E[A(t) - A(t_0)]}.$$

Per ottenere la funzione nucleo di rilassamento, invece, si considera l'equazione

(2.3.31) e sapendo che  $P(t, \tau) = -\frac{\partial R(t, \tau)}{\partial \tau}$ , si ha:

$$P(t, \tau) = -E e^{-[A(t) - A(\tau)]} \frac{dA(\tau)}{d\tau}, \quad (2.3.53)$$

avendo posto  $\tau = t_0$ ; introducendo, infine, la precedente equazione nella (2.3.31) si ottiene:

$$\sigma(t, t_0) = [\varepsilon(t) - \varepsilon_n(t)] E - E \int_{t_0}^t [\varepsilon(\tau) - \varepsilon_n(\tau)] e^{-E[A(t) - A(\tau)]} \frac{dA(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.3.54)$$

### 2.3.13 Il modello invecchiante di Dischinger

In maniera equivalente alla equazione (2.3.51) F. Dischinger [43] ha stabilito la seguente relazione differenziale per l'incremento della deformazione totale elasto-viscosa al tempo  $t$ . Nel caso in cui la tensione è applicata a partire dall'istante  $\tau$ ,

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma(t)}{dt} + \frac{\sigma(t)}{E} \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial t} \quad (2.3.55)$$

Nell'ipotesi di parallelismo delle curve di scorrimento, la derivata  $\frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial t}$  è indipendente dall'istante iniziale di applicazione della tensione (figura 2.3.18); infatti, per il generico istante  $\tau$  si può scrivere:

$$\varphi(t, \tau) = \varphi(t, t_0) - \varphi(\tau, t_0),$$

dalla quale risulta  $\frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(t, t_0)}{\partial t}$  per un generico istante  $\tau \neq t_0$ .

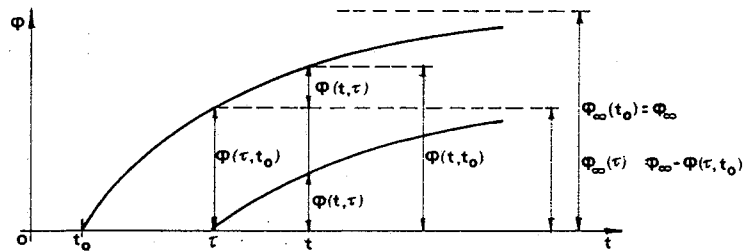


Figura 2.3.18: Curve di scorrimento per il modello di Dischinger

Uguagliando poi le equazioni (2.3.51) e (2.3.55) si ottiene:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{E} \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial t} dt$$

ed integrando fra l'istante iniziale  $\tau$  e quello  $t$  di lettura si ha:

$$A(t) - A(\tau) = \frac{1}{E} [\varphi(t, \tau) - \varphi(\tau, \tau)] = \frac{\varphi(t, \tau)}{E},$$

essendo  $\varphi(\tau, \tau) = 0$ .

In questo modo, la misura dello scorrimento che avviene nell'intervallo di tempo  $t - \tau$ , nella teoria dell'invecchiamento, è data dalla differenza  $C(t) - C(\tau)$ , mentre nel modello

di Dischinger è data dalla funzione  $\frac{\varphi(t, \tau)}{E}$ .

Se si pone:

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_{\infty} [f(t) - f(\tau)] \quad (2.3.56)$$

si mette in evidenza sia il valore asintotico  $\varphi_{\infty}$  del coefficiente di viscosità, quale massimo valore possibile corrispondente a  $\tau = t_0$ , che la funzione temporale  $f(t)$ , la quale definisce lo sviluppo nel tempo dello scorrimento.

La definizione numerica dei parametri  $\varphi_{\infty}$  e  $f(t)$  è contenuta nel CEB Model Code 1978 [16,45].

## Capitolo 3

### Espansione in serie di Dirichlet delle funzioni viscosità e rilassamento

#### 3.1 La funzione viscosità in serie di esponenziali

L'analisi numerica delle strutture in regime di viscosità può essere semplificata se le relazioni costitutive integrali vengono trasformate in equazioni differenziali dipendenti dal tempo.

Tale conversione si rende possibile se le funzioni  $J(t, t')$  e  $R(t, t')$  delle equazioni (2.3.8) e (2.3.11) assumono la forma di una somma di prodotti di funzioni nelle singole variabili  $t$  e  $t'$ .

La scrittura della funzione  $J(t, t')$  in una serie di esponenziali reali assume la seguente espressione

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} + \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{\hat{E}_{\mu}(t')} \left( 1 - e^{-(t-t')/\tau_{\mu}} \right) \quad (3.1.1)$$

la cui forma algebrica corrisponde alla funzione viscosità ottenuta da un modello di catene di Kelvin disposte in serie.

Nella (3.1.1) le  $\tau_{\mu}$  sono delle costanti denominate tempi di rilassamento;  $\hat{E}_{\mu}$  sono dei coefficienti che dipendono unicamente da  $t'$  ed hanno le dimensioni di moduli di

elasticità;  $E(t') = \frac{1}{J(t', t')}$  = modulo elastico istantaneo.

La sommatoria di esponenziali reali espressa dall'equazione (3.1.1) rappresenta anche

una serie di Dirichlet, la cui forma standard è la seguente:  $\sum_{\mu} C_{\mu} e^{-\chi|\tau_{\mu}}$ , dove  $\chi$  è una

variabile e  $C_{\mu}$  sono delle costanti; quando  $\tau_{\mu} - \tau_{\mu-1} = \text{costante}$ , la sommatoria di termini viene denominata serie di Prony.

La procedura per la determinazione dei parametri  $E(t')$  e  $\hat{E}_{\mu}(t')$ , utilizzati per approssimare la funzione viscosità per mezzo dell'espansione in serie di Dirichlet, è stata messa a punto da Bazant [26,50]; il metodo, simile a quello dei minimi quadrati, consiste nel fissare i valori di  $\tau_{\mu}$ , scegliendoli in modo che siano regolarmente spaziatosi nella scala dei tempi.

Si definisce poi la funzione:

$$\Phi = \sum_{\beta} [J(t_{\beta}, t') - \tilde{J}(t_{\beta}, t')]^2,$$

valida per ogni tempo  $\beta$  in cui è nota la funzione viscosità  $J(t_{\beta}, t')$ ; il termine  $\tilde{J}(t_{\beta}, t')$  simbolizza, invece, la funzione viscosità risultato della espansione in serie di Dirichlet; le

condizioni di minimo  $\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{E}_{\mu}(t')} = 0$ , ( $\mu = 1, 2, \dots, n$ ), e  $\frac{\partial \Phi}{\partial E(t')} = 0$  conducono ad un sistema

di  $(n+1)$  equazioni algebriche lineari che consentono di definire i termini  $\hat{E}_{\mu}(t')$  e  $E(t')$ .

Per chiarire, ora, quale relazione esiste tra l'espansione in serie di Dirichlet della funzione viscosità ed il modello di Kelvin, si considera il sistema di figura (3.1.1), i cui parametri  $E_{\mu}$  e  $\eta_{\mu}$  sono dipendenti dal tempo. In questo modello la relazione fra le tensioni e le deformazioni assume la forma:

$$\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^o = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \sum_{\mu} \dot{\varepsilon}_{\mu} \quad (3.1.2)$$

con

$$\dot{\varepsilon}_{\mu} = \frac{\sigma_{\mu}}{\eta_{\mu}} \quad (3.1.3)$$

$$\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_{\mu} = E_{\mu} \dot{\varepsilon}_{\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1.4)$$

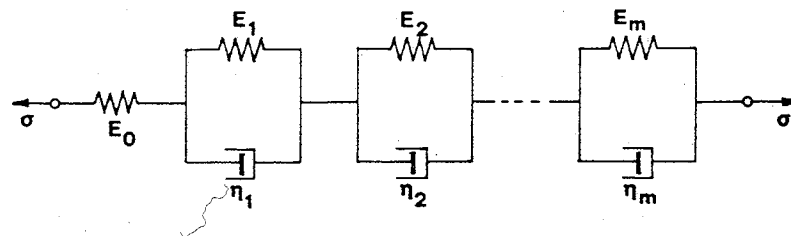


Figura 3.1.1: Modello di Kelvin con parametri dipendenti dal tempo

Nelle precedenti equazioni  $E$  = modulo elastico istantaneo;  $E_{\mu}$  e  $\eta_{\mu}$  sono il modulo elastico e la viscosità della  $\mu$ -esima unità di Kelvin funzioni del tempo;  $\varepsilon^o = \varepsilon^o(t)$  = deformazione della  $\mu$ -esima unità denominata deformazione parziale;  $\sigma_{\mu}$  = tensione del  $\mu$ -esimo ammortizzatore.

Esprimendo  $\sigma_{\mu}$  mediante l'equazione (3.1.3) e sostituendola nella (3.1.4) si ottiene una sola equazione per la  $\varepsilon_{\mu}$ :

$$\ddot{\varepsilon}_{\mu} \eta_{\mu} + \dot{\varepsilon}_{\mu} \dot{\eta}_{\mu} + E_{\mu} \dot{\varepsilon}_{\mu} = \dot{\sigma} \quad (3.1.5)$$

$$\ddot{\varepsilon}_{\mu} + \frac{\dot{\varepsilon}_{\mu}}{\tau_{\mu}} + \frac{\dot{\sigma}}{\eta_{\mu}} = \frac{\dot{\sigma}}{\eta_{\mu}} \quad (\mu = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1.6)$$

nella quale

$$\frac{1}{\tau_{\mu}} = \frac{E_{\mu} + \dot{\eta}_{\mu}}{\eta_{\mu}} \quad (3.1.7)$$

Assumendo ora che tutti i  $\tau_{\mu}$  siano costanti, è possibile integrare l'equazione (3.1.6) definendo la  $\sigma(t)$  come una funzione gradino

$$\begin{aligned} \sigma &= 0 \text{ per } t < t' \\ \sigma &= 1 \text{ per } t \geq t', \end{aligned}$$

dove le condizioni iniziali per  $t = t'$  sono  $\varepsilon_\mu = 0$  e  $\dot{\varepsilon}_\mu = \frac{1}{\eta_\mu(t')}$ .

Si può verificare, mediante derivazione, che gli integrali dell'equazione (3.1.6) sono

$$\dot{\varepsilon}_\mu(t) = \frac{e^{-(t-t')/\tau_\mu}}{\eta_\mu(t')} \quad (3.1.8)$$

$$\varepsilon_\mu(t) = \frac{\tau_\mu}{\eta_\mu(t')} \left[ 1 - e^{-(t-t')/\tau_\mu} \right].$$

La funzione viscosità  $J(t, t')$  si ottiene, quindi, ponendo

$$J(t, t') = \frac{1}{E(t')} + \sum_{\mu} \varepsilon_\mu \quad (3.1.9)$$

che risulta del tutto identica all'equazione (3.1.1).

Dal confronto della (3.1.1) e (3.1.9) si ottiene anche

$$\frac{\tau_\mu}{\eta_\mu(t')} = \frac{1}{\hat{E}(t')}$$

ed in accordo all'equazione (3.1.7) si ha, infine:

$$\eta_\mu(t) = \tau_\mu \hat{E}(t); \quad E_\mu(t) = \hat{E}_\mu(t) - \tau_\mu \frac{d\hat{E}_\mu(t)}{dt} \quad (3.1.10)$$

Mediante questa dimostrazione si giunge alla conclusione che qualunque funzione di viscosità espressa in serie di Dirichlet si può rappresentare mediante un modello di Kelvin avente i parametri dipendenti dal tempo.

È importante notare, inoltre, che l'equazione differenziale del modello di Kelvin a parametri dipendenti dal tempo risulta essere del secondo ordine, ciò è dovuto alla variabilità nel tempo dei moduli elastici  $E_\mu$  che non consente di scrivere la (3.1.4) nella

forma  $\sigma - \sigma_\mu = E_\mu \varepsilon_\mu$ , come avviene nella *teoria della ereditarietà*. Per questo motivo l'utilizzazione della espansione in serie di Dirichlet della funzione viscosità risulta essere svantaggiosa rispetto alla formulazione della stessa utilizzando le catene di Maxwell che, come si vedrà in seguito, è caratterizzata da una equazione differenziale del primo ordine.

Una caratteristica ulteriore della formulazione delle catene di Kelvin è quella della possibilità che i moduli elastici  $E_\mu$  possano avere segno negativo per la presenza del segno

meno nella seconda delle (3.1.10); questa evenienza, tuttavia, pur essendo fisicamente inaccettabile, non produce alcuna conseguenza sull'andamento della funzione viscosità descritta dal modello.

### 3.2 La funzione rilassamento in serie di esponenziali

La formulazione differenziale della funzione rilassamento è basata, invece, sul modello delle catene di Maxwell [26,50], figura (3.2.1), che conduce alla seguente relazione tra tensioni e deformazioni:

$$\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^o = \frac{\dot{\sigma}_\mu}{E_\mu} + \frac{\sigma_\mu}{\eta_\mu}; \quad \sigma = \sum_{\mu} \sigma_\mu \quad (\mu=1,2,\dots,n) \quad (3.2.1)$$

dove  $\sigma_\mu$  sono le tensioni incognite in ciascuna unità della catena di Maxwell.

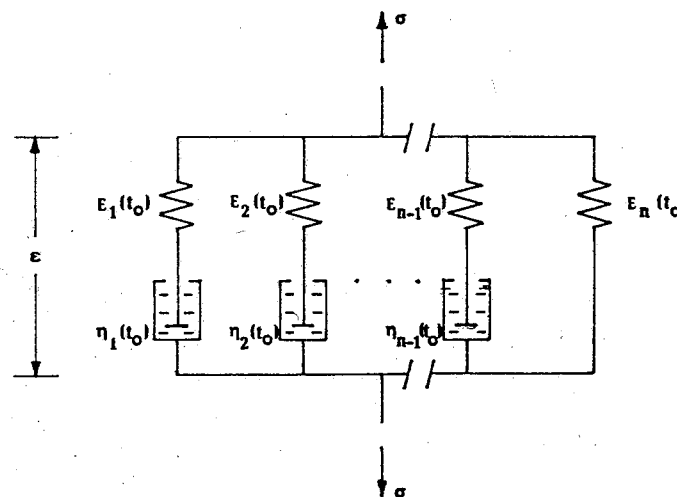


Figura 3.2.1: Modello di Maxwell con parametri dipendenti dal tempo

In modo simile al caso delle catene di Kelvin, nella rappresentazione del modello si richiede che vengano posti in relazione  $\eta_\mu(t)$  con  $E_\mu(t)$ ; il modo più semplice consiste nel porre



$$\tau_{\mu} = \frac{\eta_{\mu}}{E_{\mu}} = \text{costante}, \quad \mu = (1, 2, \dots, n) \quad (3.2.2)$$

dove  $\tau_{\mu}$  è il tempo di rilassamento di ciascun ramo della catena.

Considerando, ora, la storia di deformazione come una funzione gradino

$$\varepsilon = 0 \text{ per } t < t'$$

$$\varepsilon = 1 \text{ per } t \geq t'$$

e ponendo  $\varepsilon^0 = 0$ , con le condizioni iniziali  $\sigma_{\mu}(t') = E_{\mu}(t')$ , l'integrale della prima delle (3.2.1) assume la seguente forma

$$\sigma_{\mu}(t) = E_{\mu}(t') e^{-(t-t')/\tau_{\mu}} \quad (3.2.3)$$

Dalla seconda delle (3.2.1) si ottiene, quindi, l'espressione della funzione di rilassamento

$$R(t, t') = \sum_{\mu=1}^m E_{\mu}(t') e^{-(t-t')/\tau_{\mu}} + E_{\infty}(t') \quad (3.2.4)$$

dove  $m = n - 1$ ;  $E_{\infty}(t')$  è scritto in tale forma poiché, per  $m = n$ , si ha  $\eta_{\mu} \rightarrow \infty$ , ovvero  $\tau_{\mu} \rightarrow \infty$ , nell'ultima catena della figura in cui non è rappresentato l'ammortizzatore.

L'equazione (3.2.4) rappresenta anche l'espansione in serie di esponenziali reali di Dirichlet della funzione di rilassamento. Per la determinazione dei parametri incogniti  $E_{\mu}$ , anche in questo caso, si utilizza il metodo dei minimi quadrati basato sulla minimizzazione della espressione

$$\Phi = \sum_{\beta} \left[ R(t_{\beta}, t') - \tilde{R}(t_{\beta}, t') \right]^2 \quad (3.2.5)$$

valida per ogni tempo  $t_{\beta}$  in cui è nota la funzione rilassamento; il termine  $\tilde{R}(t_{\beta}, t')$  simbolizza invece la funzione di rilassamento dell'equazione (3.2.4) ottenuta mediante espansione in serie di Dirichlet. Il metodo richiede, inoltre, che i valori dei tempi  $\tau_{\mu}$  vengano fissati precedentemente e che siano regolarmente spaziatati nella scala dei tempi.

Le condizioni di minimo  $\partial \Phi / \partial E_{\mu} = 0$  ( $\mu = 1, 2, \dots, m$ ) e  $\partial \Phi / \partial E_{\infty} = 0$  conducono ad un sistema di  $m + 1 = n$  equazioni lineari algebriche per gli  $E_{\mu}$  e  $E_{\infty}$ .

Ripetendo il procedimento per  $k$  età di applicazione del carico ( $t'$ ), si ottengono  $k$  enupple di valori per i moduli elastici del modello  $E_{\mu}(t')$ . Per poter tuttavia esprimere in

modo continuo i parametri del sistema è necessario, ancora, determinare  $n$  funzioni  $E_{\mu}(t')$  tali da restituire con buona approssimazione i valori precedentemente calcolati e consentire la determinazione degli  $E_{\mu}(t')$  per qualunque valore di  $t'$ . Ciò si ottiene esprimendo i valori degli  $E_{\mu}(t')$  nel seguente modo:

$$E_{\mu}(t') = C_1 + C_2(\log_{10} t') + C_3(\log_{10} t')^2 \quad (3.2.6)$$

e determinando i termini  $C_i$  in modo da minimizzare le differenze tra i valori forniti dalla (3.2.6) e quelli precedentemente calcolati. Ne risultano, in definitiva, tante terne di coefficienti  $C_i$  quanti sono i rami del modello utilizzato.

Diversamente a quanto detto per i parametri della catena di Kelvin, i valori degli  $E_{\mu}$  della catena di Maxwell risultano essere sempre positivi, in quanto la derivata della funzione di rilassamento risulta essere sempre non negativa e, quindi, in buon accordo con l'aspetto fisico del problema.

Nella equazione (3.2.5) i valori della funzione  $R(t_{\beta}, t')$  possono essere ricavati da prove sperimentali, oppure determinati attraverso l'inversione della equazione integrale di Volterra per una data funzione viscosità.

### 3.3 Relazione costitutiva differenziale del modello di Maxwell

Per semplificare l'analisi numerica delle strutture in regime di viscosità è utile trasformare le equazioni risolutive integrali, trattate nella soluzione numerica dell'equazione integrale di Volterra, in equazioni incrementali *elastiche-quasi elastiche* al fine di risolvere il problema viscoso come una sequenza di problemi elastici.

A questo scopo si suddivide il tempo  $t$  in intervalli di tempo  $\Delta t_r = t_r - t_{r-1}$  ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) sufficientemente piccoli e si risolve l'equazione differenziale (3.2.1) posta nella seguente forma:

$$\dot{\sigma}_{\mu} + \frac{\sigma_{\mu}}{\tau_{\mu}} = (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^0) E_{\mu}; \quad \sigma = \sum_{\mu} \sigma_{\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, n) \quad (3.3.1)$$

dove  $\tau_{\mu} = \eta_{\mu} / E_{\mu}$ , considerando in ogni intervallo  $\Delta t_r$  tutti i parametri come delle costanti.

L'equazione (3.3.1) è una equazione differenziale del primo ordine completa del tipo:

$$y' + y a(x) = b(x)$$

in cui l'integrale generale è:

$$y = e^{-\int a(x) dx} \left[ \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx + C \right]$$

La soluzione della (3.3.1) tra il tempo  $t_r$  e  $t_{r-1}$  si scrive dunque:

$$\sigma_{\mu r} = e^{-\int_{t_{r-1}}^{t_r} 1/\tau_\mu d\tau} \left[ \int_{t_{r-1}}^{t_r} (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}^0) E_{\mu r} e^{\int 1/\tau_\mu d\tau} d\tau + C \right]$$

imponendo la condizione iniziale  $\sigma_{\mu r} = \sigma_{\mu r-1}$  per  $\Delta t_r = 0$  si ha:  $\sigma_{\mu r-1} = C$ ; sostituendo

$\dot{\varepsilon}_r = \Delta \varepsilon_r / \Delta t_r$ ;  $\dot{\varepsilon}^0 = \Delta \varepsilon_r^0 / \Delta t_r$  e semplificando si ottiene:

$$\sigma_{\mu r} = \sigma_{\mu r-1} e^{-\Delta t_r / \tau_\mu} + \lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon_r - \Delta \varepsilon_r^0) \quad (3.3.2)$$

dove

$$\lambda_{\mu r} = (1 - e^{-\Delta t_r / \tau_\mu}) \frac{\tau_\mu}{\Delta t_r} \quad (3.3.3)$$

Nella (3.3.2) il pedice  $r$  indica il tempo  $t_r$  (per es.  $\sigma_{\mu r} = \sigma_\mu(t_r)$ ); il pedice  $r - \frac{1}{2}$  si riferisce, invece, al valore intermedio nell'intervallo di tempo  $\Delta t_r = (t_r - t_{r-1})$ ; per

esempio  $E_{\mu r - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (E_{\mu r} + E_{\mu r-1})$ .

L'equazione (3.3.2) rappresenta la formula ricorrente per la determinazione delle  $\sigma_{\mu r}$ ; considerando poi  $\Delta \sigma_{\mu r} = \sigma_{\mu r} - \sigma_{\mu r-1}$ , in accordo alla seconda delle (3.3.1) si deve avere

$$\Delta \sigma_r = \sum_{\mu=1}^n \Delta \sigma_{\mu r} \quad (3.3.4)$$

Sottraendo, quindi, dalla (3.3.2) il valore  $\sigma_{\mu r-1}$  si può scrivere

$$\sigma_{\mu r} - \sigma_{\mu r-1} = \sigma_{\mu r-1} (e^{-\Delta t_r / \tau_\mu} - 1) + \lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon_r - \Delta \varepsilon_r^0)$$

ed in termini di sommatorie

$$\Delta \sigma_r = \sum_{\mu=1}^n (\sigma_{\mu r} - \sigma_{\mu r-1}) = \sum_{\mu=1}^n \sigma_{\mu r-1} (e^{-\Delta t_r / \tau_\mu} - 1) + \sum_{\mu=1}^n \lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}} (\Delta \varepsilon_r - \Delta \varepsilon_r^0)$$

$$\Delta \sigma_r = \sum_{\mu=1}^n (e^{-\Delta t_r / \tau_\mu} - 1) \sigma_{\mu r-1} + \Delta \varepsilon_r \sum_{\mu=1}^n \lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}} - \Delta \varepsilon_r^0 \sum_{\mu=1}^n \lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}}$$

che conduce alla equazione:

$$\Delta \varepsilon_r = \frac{\Delta \sigma_r}{E_r''} + \Delta \varepsilon_r'' \quad (3.3.5)$$

nella quale

$$E_r'' = \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}} + E_{\infty r - \frac{1}{2}} \quad (3.3.6)$$

$$E_r'' \Delta \varepsilon_r'' = \sum_{\mu=1}^m (1 - e^{-\Delta t_r / \tau_\mu}) \sigma_{\mu r-1} + E_r'' \Delta \varepsilon_r^0 \quad (3.3.7)$$

L'equazione (3.3.5) rappresenta una relazione pseudo elastica fra le tensioni e le deformazioni nella quale  $\Delta \varepsilon_r''$  è l'incremento di deformazione inelastica;  $E_r''$  è il modulo pseudo elastico istantaneo.

In un dato problema di viscosità, nel quale le tensioni  $\sigma_\mu$  sono date al tempo  $t_{r-1}$ , i valori di  $E_r''$  e  $\Delta \varepsilon_r''$  vengono determinati dalle equazioni (3.3.6) e (3.3.7); per cui nell'analisi strutturale in ogni intervallo di tempo  $\Delta t_r$  si procede nel seguente modo:

1. si calcolano dapprima i valori di  $\lambda_{\mu r}$ ,  $E_r''$ ,  $\Delta \varepsilon_r''$  utilizzando le tensioni del tempo  $t_{r-1}$ ;
2. si risolve la struttura elastica con il modulo  $E_r''$ , calcolando i valori di  $\sigma_r$  e di  $\Delta \sigma_r$  causati da  $\Delta \varepsilon_r''$  e dalla variazione delle tensioni esterne;
3. si calcolano i nuovi  $\sigma_{\mu r}$  ( $\mu = 1, 2, \dots, n$ ) per mezzo dell'equazione (3.3.2), si scaricano i valori precedenti e si procede al passo successivo  $\Delta t_{r+1}$ .

È importante notare, inoltre, che

$$\lambda_{\mu r} \rightarrow 1 \text{ per } \Delta t_r / \tau_\mu \rightarrow 0$$

$$\lambda_{\mu r} \rightarrow 0 \text{ per } \Delta t_r / \tau_\mu \rightarrow \infty$$

per cui  $0 < \lambda_{\mu r} < 1$ , tale condizione risulta intuitiva, poiché per tempi  $\Delta t_r$  molto lunghi e per tempi di rilassamento  $\tau_\mu$  molto piccoli le unità della catena di Maxwell di figura (3.2.1) non oppongono resistenza alla deformazione e risultano avere tensione nulla.

Dalla equazione (3.3.5), infine, si possono anche ottenere le funzioni rilassamento e viscosità per via incrementale: la prima si determina ponendo  $\Delta \varepsilon_r = 0$  e, valutando la variazione dello stato di tensione nel tempo, la seconda con  $\Delta \sigma_r = 0$  e l'equazione (3.3.2), valutando la variazione della deformazione nel tempo.

### 3.3.1 Generalizzazione pluriassiale della relazione costitutiva differenziale

Per quanto detto precedentemente, l'espansione in serie di Dirichlet delle funzioni viscosità e rilassamento consente di trasformare le equazioni costitutive integrali della viscosità in equazioni di tipo differenziale; inoltre per un materiale invecchiante come il calcestruzzo, si ha più aderenza al problema fisico e la conversione si rende più semplice se viene utilizzata l'espansione in serie della funzione rilassamento ottenuta dalla equazione differenziale delle catene di Maxwell.

Per generalizzare al caso pluriassiale il legame sforzi-deformazioni che si ottiene dalla relazione pseudo-elastica (3.3.5) del modello di Maxwell è sufficiente scrivere l'equazione nel seguente modo [8]:

$$\Delta \underline{\varepsilon}_r = \frac{1}{E_r''} \underline{B} \Delta \underline{\sigma}_r + \Delta \underline{\varepsilon}_r'' \quad (3.3.8)$$

nella quale :

$$E_r'' = \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu r} E_{\mu r} - \frac{1}{2} + E_{\infty r} - \frac{1}{2}$$

$$\Delta \underline{\varepsilon}_r'' = \frac{1}{E_r''} \sum_{\mu=1}^m (1 - e^{-\Delta t_r / \tau_\mu}) \underline{\sigma}_{\mu r-1} + \Delta \underline{\varepsilon}_r^0$$

mentre i valori delle  $\underline{\sigma}_{\mu r}$  vengono aggiornati ad ogni passo con la seguente relazione:

$$\underline{\sigma}_{\mu r} = \underline{\sigma}_{\mu r-1} e^{-\Delta t_r / \tau_\mu} + \lambda_{\mu r} E_{\mu r} - \frac{1}{2} \underline{B}^{-1} (\Delta \underline{\varepsilon}_r - \Delta \underline{\varepsilon}_r^0) \quad (3.3.9)$$

$$\lambda_{\mu r} = (1 - e^{-\Delta t_r / \tau_\mu}) \tau_\mu / \Delta t_r.$$

Nelle precedenti relazioni i vettori  $\underline{\sigma}_{\mu r}, \underline{\varepsilon}_r^0$  e le matrici  $\underline{B}, \underline{B}^{-1}$  sono definiti nelle (2.3.24, 2.3.25, 2.3.26 e 2.3.27) con la differenza che ogni componente del vettore

$$\underline{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31})^T$$

si ottiene per mezzo della seguente sommatoria:

$$\sigma_{ij} = \sum_{\mu=1}^n \sigma_{\mu ij} \quad (i=1,2,3; j=1,2,3).$$

Si noti che anche in questo caso i parametri  $E_r''$  e  $\Delta \underline{\varepsilon}_r''$  vengono valutati prima che inizi la soluzione al passo  $(t_r - t_{r-1})$ , utilizzando i valori delle tensioni elastiche iniziali; mentre le tensioni  $\underline{\sigma}_{\mu r}$  sono ricavate mediante la (3.3.9).

## Capitolo 4

# Modelli di previsione della viscosità del calcestruzzo

### 4.1 Il Modello CEB 90

Le relazioni analitiche della viscosità e del ritiro contenute nel capitolo 2.1 del CEB-FIP MC 90 [2] si basano su di un lavoro del General Task Group 9 del CEB intitolato "Evaluation of Time Dependent Behaviour of Concrete" [51].

Le formule di predizione sono state ottenute dall'elaborazione di dati provenienti da saggi di laboratorio su provini di calcestruzzo strutturale soggetti a normali temperature ambientali.

Le relazioni analitiche della viscosità descrivono principalmente le *proprietà medie* nella sezione trasversale del calcestruzzo senza considerare lo stato di tensione o di deformazione locale dovuto ai diversi fenomeni che si verificano nella pasta di cemento. Il modello CEB 90 può anche essere utilizzato per l'analisi ad elementi finiti di sezioni, calibrando le proprietà locali del calcestruzzo con formule aggiuntive che tengono conto di dati come le proprietà di frattura, il gradiente di temperatura e la transizione di umidità.

Il modello analitico di viscosità, CEB 90, è definito, inoltre, come una funzione *prodotto di termini* che rappresenta un buon compromesso tra la semplicità operativa e l'accuratezza nella definizione del comportamento del calcestruzzo nel tempo.

Nel modellare il comportamento viscoso del calcestruzzo, infatti, nel passato sono state utilizzate due diverse formulazioni: i modelli tipo sommatoria e quelli tipo produttoria di termini. Essi differiscono principalmente nell'approccio matematico.

I modelli invecchianti, definiti da un prodotto di termini, sono caratterizzati da una funzione viscosità che descrive gli effetti dell'istante iniziale di carico e della sua durata. In questo gruppo ricade anche il Modello RILEM BP-KX [25].

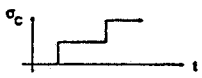
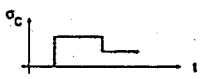
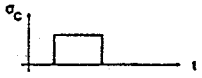
La caratteristica specifica dei modelli tipo sommatoria, o Dischinger migliorato, è la separazione del comportamento viscoso in elasticità ritardata e scorrimento, utilizzata nel CEB-FIP Model Code 1978 [45].

Le differenze tra i due tipi di modelli sono sintetizzate nella figura (4.1.1), tratta dal lavoro del General Task Group [51], dalla quale si deduce come le funzioni sommatoria descrivano meglio, attraverso il principio di sovrapposizione, il comportamento nel tempo

del calcestruzzo sotto carichi crescenti, mentre le funzioni produttoria descrivono con ottima approssimazione il comportamento viscoso del calcestruzzo sotto tensioni costanti. Tuttavia nessuno dei due approcci conduce, in tutti i casi, a risultati perfettamente corrispondenti ai dati sperimentali.

La scelta della funzione prodotta nel CEB-FIP Model Code 1990 é, dunque, principalmente legata alla maggior semplicità nella formulazione che la contraddistingue dalla funzione sommatoria; bisogna, comunque, sottolineare come le differenze fra i due modelli perdano di rilevanza quando, nel calcolo strutturale, le equazioni integrali vengono convertite nelle equazioni algebriche del metodo AAEM [16,61].

Sulla base delle equazioni costitutive del modello CEB-FIP 90 sono stati approntati recentemente dei lavori che risultano di valido aiuto nell'analisi strutturale [32,52,56,57]. Questo modello, inoltre, può anche essere agevolmente convertito in espansione in serie di Dirichlet ed utilizzato in una formulazione differenziale sulla base delle catene di Maxwell [58,59].

load history	criterion	accuracy of prediction	
		product model	summation model
constant stress	effect of age at loading	+	0
	time development	+	0
increasing stress		0	0
decreasing stress		0	0
		-	0
relaxation	very young age at loading and thick member or high relative humidity	-	0
	other cases	0	0

legend: (+) good; (0) acceptable; (-) poor

Figura 4.1.1: Paragone tra i modelli produttoria e sommatoria di funzioni

### Coefficiente di viscosità

Il coefficiente di viscosità  $\varphi(t, t_0)$ , definito come il rapporto tra la deformazione viscosa e la deformazione elastica del calcestruzzo all'età di 28 giorni, viene calcolato per mezzo della seguente relazione:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_{RH} \beta(f_{cm}) \beta(t_0) \beta_c(t - t_0) \quad (4.1.1)$$

dove:

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - \frac{RH}{RH_0}}{0,46(h/h_0)^{1/3}} \quad (4.1.2)$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{5,3}{(f_{cm}/f_{cm0})^{0,5}} \quad (4.1.3)$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + (t_0/t_1)^{0,2}} \quad (4.1.4)$$

$$\beta_c(t - t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)/t_1}{\beta_H + (t - t_0)/t_1} \right]^{-0,3} \quad (4.1.5)$$

in cui:

$$\beta_H = 150 \left[ 1 + \left( 1,2 \frac{RH}{RH_0} \right)^{1,8} \right] \frac{h}{h_0} + 250 \leq 1500 \quad (4.1.6)$$

nelle quali:

$RH$  = umidità relativa dell'ambiente in [%];

$h = 2A_c/u$  sezione effettiva;

$A_c$  = sezione trasversale dell'elemento strutturale in [mm<sup>2</sup>];

$u$  = perimetro dell'elemento strutturale a contatto con l'atmosfera in [mm];

$f_{cm}$  = resistenza media alla compressione del calcestruzzo in [MPa] all'età di 28 giorni;

$t$  = età del calcestruzzo, in giorni, nel momento considerato;

$t_0$  = età del calcestruzzo, in giorni, al momento del carico;

inoltre:  $RH_0 = 100\%$ ,  $h_0 = 100$  mm,  $f_{cm0} = 10$  MPa,  $t_1 = 1$  giorno.

L'equazione (4.1.2) descrive gli effetti dell'umidità e della dimensione della sezione correlando i due parametri in relazione alla viscosità ed esprime la condizione che

l'umidità relativa dell'ambiente ha effetti ridotti sulla viscosità per  $2A_c/u \rightarrow \infty$ , mentre la sua influenza, in relazione alla dimensione della sezione, si annulla per  $RH \rightarrow 100\%$ .

Questa equazione, inoltre, separa gli effetti del *basic creep* e del *drying creep* nella funzione viscosità, considerando l'azione dell'essiccamento durante il processo di carico come un termine aggiuntivo rispetto all'unità.

La funzione dipendente dalla resistenza  $\beta(f_{cm})$ , dell'equazione (4.1.3), ha lo scopo di valutare gli effetti della resistenza del calcestruzzo sulla sua viscosità: all'incrementarsi della resistenza si riduce il comportamento viscoso. Come è noto, la resistenza del calcestruzzo dipende, in larga parte, dal rapporto cemento-acqua e dal contenuto di cemento nella massa totale; tuttavia la valutazione di queste percentuali non è sempre agevole nelle applicazioni, per cui è preferibile assumere direttamente il dato statistico che definisce la sua resistenza per evitare errori nella previsione della viscosità.

Il coefficiente  $\beta_H$ , contenuto nelle equazioni (4.1.5) e (4.1.6), prende in considerazione ancora una volta l'influenza dell'umidità relativa dell'atmosfera e le dimensioni della sezione; all'aumentare delle dimensioni della sezione il termine  $\beta_H$  aumenta; si ha quindi una riduzione della viscosità nel periodo di carico ( $t - t_0$ ).

Questo comportamento è in accordo con i dati sperimentali [51]. Dalle prove sperimentali si nota, inoltre, come le dimensioni della sezione non hanno più influenza sulla viscosità del calcestruzzo per alti valori dell'umidità relativa; questo comportamento è caratterizzato dall'equazione (4.1.6) che pone un limite per  $\beta_H$  pari a 1500.

Gli effetti del tipo di cemento e della temperatura ambientale, sulla viscosità del calcestruzzo, vengono presi in considerazione modificando l'istante iniziale di carico  $t_0$ , in accordo a formule aggiuntive contenute nel CEB MC 90.

In figura (4.1.2), tratta da [51], vengono comparati dati sperimentali con la funzione viscosità CEB 90.

### Ritiro

Il modello di previsione del ritiro, presentato nel CEB-FIP Model Code 1990, definisce le deformazioni medie, dipendenti dal tempo, di elementi strutturali piani esposti a normali temperature ambientali, comprese tra  $5^\circ\text{C}$  e  $30^\circ\text{C}$ , e ad umidità relative RH comprese tra 40% e 100%.

Le deformazioni dovute al ritiro o al rigonfiamento, a normali temperature, vengono calcolate per mezzo della seguente equazione:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cs0} \beta_s(t - t_s) \quad (4.1.7)$$

dove:

$\varepsilon_{cs0}$  = coefficiente di ritiro in accordo all'equazione (4.1.8);

$\beta_s$  = coefficiente che descrive lo sviluppo del ritiro nel tempo in accordo all'equazione (4.1.12);

$t$  = età del calcestruzzo in giorni;

$t_s$  = età del calcestruzzo in giorni, nell'istante di inizio del ritiro o del rigonfiamento.

Il coefficiente  $\varepsilon_{cs0}$  si ottiene dalla seguente equazione:

$$\varepsilon_{cs0} = \varepsilon_s(f_{cm}) \beta_{RH} \quad (4.1.8)$$

con

$$\varepsilon_s(f_{cm}) = [160 + 10 \beta_{sc}(9 - f_{cm}/f_{cm0})] 10^6 \quad (4.1.9)$$

dove

$\beta_{sc}$  = coefficiente che dipende dal tipo di cemento:

$$\beta_{sc} = \begin{cases} 4 & \text{cemento a lento indurimento} \\ 5 & \text{cemento normale a rapido indurimento} \\ 8 & \text{cemento ad alta resistenza e rapido indurimento} \end{cases}$$

$$\beta_{R.H.} = \begin{cases} -1,55 \beta_{sRH} & 40\% \leq R.H. \leq 99\% \\ +0,25 & R.H. \geq 99\% \end{cases} \quad (4.1.10)$$

$$\beta_{sR.H.} = 1 - \left( \frac{R.H.}{R.H.0} \right)^3 \quad (4.1.11)$$

Nelle equazioni (4.1.8) e (4.1.9),  $f_{cm}$  rappresenta la resistenza media del calcestruzzo in MPa;  $R.H.$  è l'umidità media dell'atmosfera in percentuale;  $f_{cm0} = 10$  MPa e  $R.H.0 = 100\%$ .

Lo sviluppo del ritiro nel tempo segue l'equazione (4.1.12):

$$\beta_s(t - t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)/t_1}{\beta_{sh} + (t - t_0)/t_1} \right]^{0,5} \quad (4.1.12)$$

con

$$\beta_{sh} = 350 (h/h_0)^2 \quad (4.1.13)$$

dove  $h = 2A_c/u$  ( $A_c$  = sezione trasversale dell'elemento strutturale in  $\text{mm}^2$ ;  $u$  = perimetro dell'elemento strutturale a contatto con l'atmosfera in mm);  $h_0 = 100$  mm e  $t_1 = 1$  giorno.

Nella figura (4.1.3) viene comparato il ritiro misurato sperimentalmente con quello previsto dal Codice Modello [2]. Dalla figura si nota come i dati sperimentalmente e quelli di previsione siano in ottimo accordo.

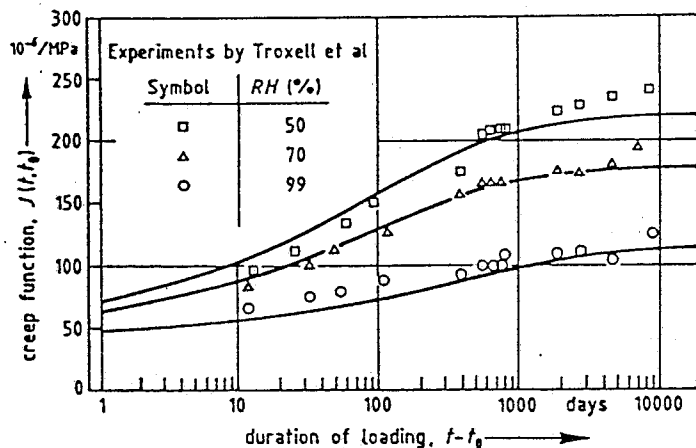


Figura 4.1.2: Paragone tra dati sperimentalmente e la funzione viscosità CEB 90

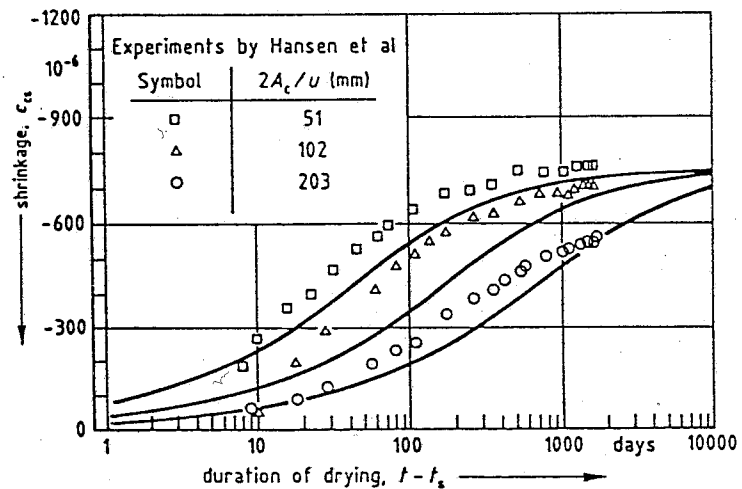


Figura 4.1.3: Paragone tra dati sperimentalmente e la funzione ritiro CEB 90

Coefficiente di viscosità non lineare

Il principio di linearità del fenomeno viscoso, sinonimo del principio di sovrapposizione, è applicabile per valori delle tensioni inferiori a  $0,4 f_{cm}$ , essendo  $f_{cm}$  la resistenza media a compressione del calcestruzzo.

All'interno di questo campo, tuttavia, si riscontrano deviazioni dalla linearità; tali deviazioni possono essere spiegate mediante un fenomeno di adattamento: il calcestruzzo soggetto ad uno stato di compressione prolungato nel tempo sembra adattarsi alla tensione divenendo più resistente; tale fenomeno è simile all'incremento di rigidità che si ottiene sotto carichi ciclici [7].

In tal modo si verifica che dopo un lungo periodo di deformazione viscosa a carico costante, annullando la tensione, il recupero di deformazione sia significativamente minore di quello valutabile mediante il principio di sovrapposizione; un fenomeno simile avviene anche nel caso di incremento della tensione che comporta sperimentalmente un incremento di deformazione minore di quello valutabile matematicamente, figura (4.1.4). Secondo gli sperimentatori il fenomeno dell'adattamento può essere simulato introducendo un fattore correttivo, nelle equazioni costitutive, che consenta di ottenere analiticamente una accelerazione dell'invecchiamento.

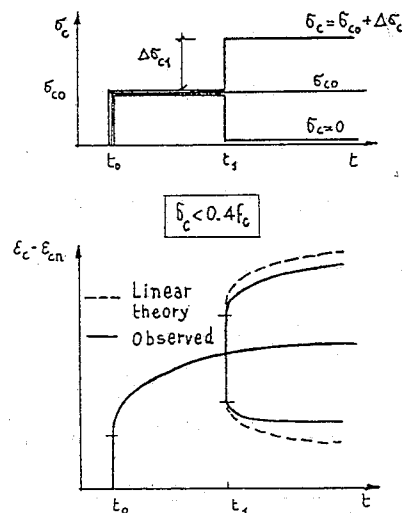


Figura 4.1.4: Comportamento non lineare del calcestruzzo per incrementi della tensione

Un altro fenomeno che determina l'allontanamento dal principio di sovrapposizione del calcestruzzo nel campo delle tensioni ammissibili è dovuto alla formazione di microfessure nella pasta di cemento, prodotte dal ritiro differenziato.

Tuttavia, lo scostamento più evidente dalla linearità si ottiene per valori tensionali superiori a  $0,4 f_{cm}$ .

Per descrivere il comportamento del calcestruzzo per un livello tensionale di  $0,4 f_{cm}(t_0) < \sigma_c \leq 0,6 f_{cm}(t_0)$ , il CEB Model Code 1990 consiglia di sostituire al coefficiente di viscosità  $\varphi(t, t_0)$  dell'equazione (4.1.1) il coefficiente di viscosità caratteristico non lineare

$$\varphi_{0,k} = \varphi(t, t_0) e^{[\alpha_\sigma(k_\sigma - 0,4)]} \quad (4.1.14)$$

valido per  $0,4 < k_\sigma \leq 0,6$ , dove  $k_\sigma = \sigma_c / f_{cm}(t_0)$  e  $\alpha_\sigma = 1,5$ ; per  $k_\sigma \leq 0,4$ , invece,

$$\varphi_{0,k} = \varphi(t, t_0).$$

Dall'equazione (4.1.14) si nota come il fenomeno della non linearità dovuto a tensioni elevate, inversamente al fenomeno dell'adattamento, produca un aumento della deformabilità della struttura.

## 4.2 Il Modello di Rilassamento corrispondente alla formulazione CEB 90

Il comportamento nel tempo del calcestruzzo viene usualmente descritto separando gli effetti non dipendenti dalla tensione (ritiro o rigonfiamento, dilatazioni termiche) da quelli indotti dallo stato tensionale presente.

Per questi ultimi, l'approccio più semplice e più largamente utilizzato è basato sulla accettazione del principio di sovrapposizione di McHenry [29] e sulla definizione di una funzione di viscosità  $J(t, t_0)$ , che esprime la deformazione indotta all'istante  $t$  da una tensione unitaria applicata all'istante  $t_0 < t$  e mantenuta costante;  $t$  e  $t_0$  sono misurate a partire dal getto del calcestruzzo. Tale funzione viscosità comprende, pertanto, sia la deformazione *istantanea* all'applicazione della tensione che quella che si sviluppa successivamente.

Con tale assunzione è agevole dimostrare che sussiste la linearità tra tensioni e deformazioni differite (viscoelasticità lineare).

La deformazione totale variabile è allora espressa dalla (2.3.8), in cui l'integrale deve essere inteso nella definizione di Stieltjes (ammettente cioè incrementi finiti della tensione) ed  $\varepsilon_n(t)$  rappresenta la deformazione non dipendente dalla tensione.

Da un punto di vista teorico, operando nel medesimo ambito della viscoelasticità lineare, è possibile sviluppare una trattazione duale, e definire una funzione rilassamento  $R(t, t_0)$ , che esprime la tensione indotta all'istante  $t$  da una deformazione unitaria,

aggiuntiva rispetto a quella indipendente dalla tensione, applicata all'istante  $t_0 < t$  e mantenuta costante [ $\varepsilon(\tau) - \varepsilon_n(\tau) = 1$  per ogni  $\tau \geq t_0$ ].

Con tale definizione la tensione sotto deformazione variabile risulta dalla (2.3.11). Il legame tra  $J$  e  $R$  può essere facilmente ottenuto ponendo nella (2.3.8)  $\varepsilon(t) - \varepsilon_n(t) = \text{costante} = 1$  e, quindi, essendo per definizione  $\sigma(t) = R(t, t_0)$  si ottiene la (2.3.17).

Sia l'equazione (2.3.8) che la (2.3.11) possono poi facilmente essere estese a stati di tensione pluriassiale.

In pratica, tuttavia, la grande maggioranza delle misure sperimentali disponibili e la totalità dei modelli analitici di previsione internazionalmente diffusi si riferiscono alla funzione di viscosità  $J$  e non alla funzione di rilassamento  $R$ ; risulta quindi precluso l'utilizzo delle (2.3.11) e l'analisi strutturale deve essere condotta per mezzo della (2.3.8) o relativi metodi approssimati.

La funzione di rilassamento associata ad una particolare funzione viscosità può essere determinata numericamente, nei singoli casi, per mezzo di algoritmi risolutivi della equazione integrale (2.3.17) particolarmente conveniente, dal punto di vista numerico, è la procedura basata sull'utilizzo della formula dei trapezi.

È tuttavia certo che disporre di un modello analitico di previsione della funzione rilassamento, analogo a quelli già disponibili per la funzione viscosità e corrispondente ad uno di essi, sarebbe di grande utilità pratica. Esso consentirebbe, infatti, di risolvere direttamente i problemi relativi a deformazioni impresse, vincoli posticipati ai carichi in solidi omogenei e, con opportuni adattamenti, quelli relativi a strutture omogenee con vincoli elastici.

Tenendo conto di ciò, da tempo sono stati profusi sforzi verso le formulazioni di un modello di rilassamento corrispondente ad un assegnato modello di viscosità: le soluzioni ottenute, tuttavia, erano valide solo per particolari forme della funzione fluage e la corrispondenza numerica tra i modelli di viscosità e rilassamento non perfetta.

Uno degli argomenti centrali di questa tesi è, dunque, la proposta di un modello [58, 59, 60] che, utilizzando come dati di ingresso i medesimi parametri del Codice Modello MC 90 del CEB:

- umidità relativa dell'ambiente;
- resistenza del calcestruzzo a 28 giorni;
- spessore teorico dell'elemento,

fornisce, per tutti i valori di  $t$  e  $t_0$ , la funzione rilassamento con ottima precisione rispetto a quella si ottiene numericamente dall'inversione dell'integrale di Volterra.

Il modello proposto si basa, inoltre, sull'utilizzo delle catene di Maxwell, per cui la formulazione che ne consegue risulta particolarmente adatta alla soluzione di problemi complessi, consentendo l'utilizzo di procedimenti di analisi strutturale al passo, senza necessità di memorizzare l'intera storia di tensione.

Il modello utilizzato è costituito da  $n$  rami in parallelo, ciascuno dei quali è un modello di Maxwell (figura 4.2.1). L'equazione costitutiva per ogni ramo è:



$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (4.2.1)$$

Posto  $\varepsilon = \text{costante} = 1$  si ottiene la funzione rilassamento del modello di Maxwell

$$R(t) = E e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad (4.2.2)$$

nella quale la quantità  $\tau = \eta/E$  è detta tempo di rilassamento e rappresenta il tempo occorrente perché la funzione rilassamento assuma un valore pari a  $1/e$  del valore iniziale. L'andamento della (4.2.2) è rappresentato in figura (4.2.2); si osserva, in particolare, che essa tende asintoticamente allo zero per durate di carico tendenti all'infinito, e comunque assume valori trascurabili per durate del carico superiori a  $3 \div 4$  volte  $\tau$ .

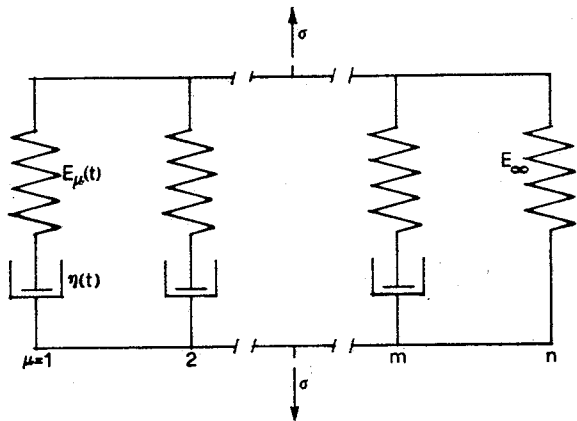


Figura 4.2.1: Modello di Maxwell costituito da  $n$  rami in parallelo

Nel modello costituito da  $n$  rami in parallelo, la deformazione è identica per tutti i rami, mentre la tensione è la somma delle singole tensioni; risulta pertanto:

$$R(t, t_0) = \sum_{i=1}^n E_i(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{\tau_i}} \quad (4.2.3)$$

Nella (4.2.3) è stata esplicitamente evidenziata la dipendenza degli  $E_i$  dall'istante di messa in carico  $t_0$ ; essendo infatti il calcestruzzo un materiale invecchiante, i parametri del modello devono riferirsi ad una particolare età  $t_0$ .

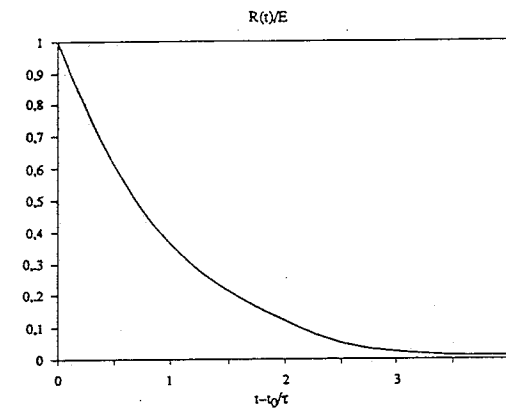


Figura 4.2.2: Andamento della funzione adimensionale  $R(t)/E$

Mediante una opportuna scelta degli  $E_i(t_0)$  e del numero di rami del modello è possibile approssimare soddisfacentemente le funzioni rilassamento, ricavabili dai dati sperimentali di viscosità o dalla  $J(t, t_0)$ , assunta tramite le soluzioni numeriche dell'integrale di Volterra.

Il procedimento impiegato è sostanzialmente quello esposto da Bažant-Wu [26], con alcuni perfezionamenti.

Affinché la determinazione dei parametri del modello sia univoca, occorre fissare preventivamente i tempi di rilassamento  $\tau$  e mantenerli invariati in tutti i casi. A tal fine si osserva che l'ultimo tempo di rilassamento,  $\tau_n$ , deve essere assunto molto più grande delle durate di carico massime di interesse; in tal modo, infatti, risulta sempre  $(t-t_0)/\tau_n \approx 0$  ed il modulo  $E_n$  determina il valore finale della funzione  $R$ . Gli altri tempi di rilassamento devono essere fissati in modo che siano ben spazati lungo la scala dei tempi e non troppo vicini tra loro.

In questo lavoro sono stati considerati modelli a 6 e 7 rami, assumendo i tempi di rilassamento di Tabella 4.2.1 (in giorni).

Come si è detto tali valori sono mantenuti costanti per tutte le età di messa in carico e per tutte le combinazioni di parametri fisico-geometrici.

L'ottimizzazione dei valori da attribuire ai moduli elastici  $E_i$  dei diversi rami del modello si ottiene per confronto con la funzione di rilassamento  $R_n(t, t_0)$  calcolata numericamente a partire dai dati di viscosità.

Tempo (giorni)	Modello a 6 rami	Modello a 7 rami
$\tau_1$	0,75	0,075
$\tau_2$	7,5	0,75
$\tau_3$	75	7,5
$\tau_4$	750	75
$\tau_5$	7500	750
$\tau_6$	$10^{30}$	7500
$\tau_7$		$10^{30}$

TAB. 2.2.1 - Tempi di rilassamento in giorni

Il procedimento viene effettuato separatamente per ogni caso analizzato (valori prefissati di  $R.H.$ ,  $f_{ck}$  e  $h_0$ ) e, nell'ambito di questo, per  $k$  diverse età di applicazione del carico.

Posto allora  $t_0 = t_1$ , la soluzione numerica della (2.3.17) fornisce i valori  $R_n(t_p, t_1)$ , dove  $t_p$  rappresenta i diversi istanti in cui è stato discretizzato l'intervallo  $t - t_1$ . Il numero totale  $q$  dei tempi e la spaziatura dei  $t_p$  dipende dalla suddivisione adottata:

$$\log_{10}(t_p - t_0) = \frac{1}{m} + \log_{10}(t_{p-1} - t_0) \quad (4.2.4)$$

con  $t_2 - t_1 = 0.1$  giorni e  $m = 8$ .

In tal modo si ottengono, nella scala logaritmica 8 valori per decade regolarmente spazati.

È allora possibile determinare i valori dei moduli  $E_i$  minimizzando l'espressione

$$\Phi = \sum_{p=1}^q [(R(t_p, t_1) - R_n(t_p, t_1))^2] \quad (4.2.5)$$

Nella (4.2.5) non è stato necessario inserire termini di smorzamento, utili in molti casi per evitare instabilità numeriche: il modello di viscosità utilizzato, infatti, è sufficientemente regolare.

La condizione di minimo della (4.2.5)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E_i} = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \dots, n \\ n = \text{numero di rami del modello} \end{array} \quad (4.2.6)$$

conduce ad un sistema di  $n$  equazioni lineari nelle  $n$  incognite  $E_i$ . Queste ultime risultano sempre non negative, grazie al fatto che la derivata della funzione rilassamento è ovunque non positiva.

Procedendo come sopra descritto, tuttavia, è possibile che la risposta istantanea alla applicazione del carico

$$R(t_1, t_1) = \sum_{i=1}^n E_i \quad (4.2.7)$$

non coincida con il modulo elastico all'istante  $t_1$ ,  $E(t_1)$ .

Questo fatto rappresenta un sensibile inconveniente, in quanto la risposta *istantanea*, anche se priva di un vero significato per un materiale viscoelastico come il calcestruzzo, resta tuttavia l'usuale riferimento dell'analisi strutturale. In considerazione di ciò, è preferibile utilizzare i valori forniti dalla (4.2.6) solo per moduli elastici dei rami da 2 a  $n$ , ricavando invece  $E_1$  con l'imposizione del rispetto della (4.2.7). Ciò è senza conseguenze di rilievo sul complesso della funzione  $R(t, t_1)$  poiché l'effetto del primo ramo si esaurisce sostanzialmente nel primo giorno dell'applicazione del carico.

Ripetendo il procedimento per le  $k$  età di applicazione del carico, si ottengono  $k$  enuple di valori per i moduli elastici del modello

$$E_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \dots, n \\ j = 1, 2, 3, \dots, k \end{array}$$

Per poter esprimere in modo continuo i parametri del modello è necessario determinare  $n$  funzioni  $E_i(t_0)$  tali da restituire con buona approssimazione i valori precedenti, in caso di  $t_0 = t_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, k$ ), e consentire la determinazione degli  $E_i$  per qualsiasi valore intermedio di  $t_0$ .

Ciò può essere ottenuto esprimendo gli  $E_i$  nel modo seguente:

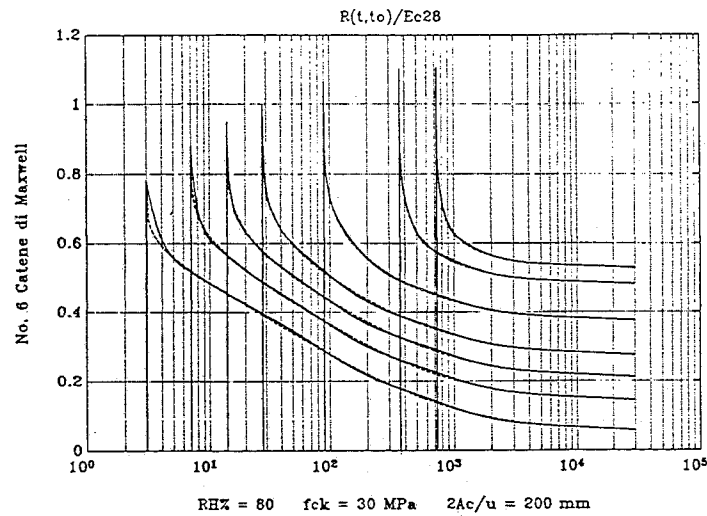
$$E_i(t_0) = C_{1i} + C_{2i}(\log_{10} t_0) + C_{3i}(\log_{10} t_0)^2 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.2.8)$$

e determinando i termini  $C$  in modo da minimizzare, separatamente per ogni  $i$ , le differenze tra i valori forniti dalla (4.2.8) e quelli precedentemente calcolati. Ne risultano, in definitiva, tante terne di coefficienti  $C$  quanti sono i rami del modello utilizzato.

In questo lavoro sono stati utilizzati sia modelli con 6 rami che modelli con 7. A titolo di esempio, nelle figure (4.2.3) e (4.2.4) sono riportate, per il caso

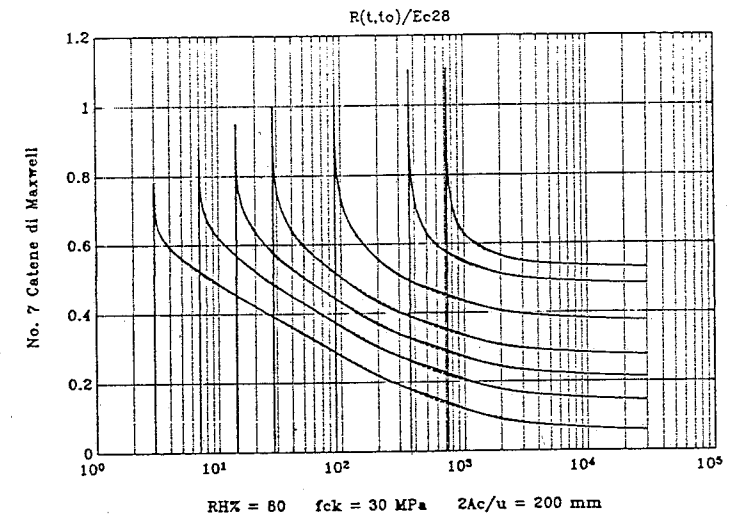
$$R.H. = 80\%, f_{ck} = 30 \text{ MPa}, h_0 = 200 \text{ mm}$$

le curve di rilassamento  $R_n(t, t_0)$ , ottenute per la soluzione numerica della (2.3.17); le stesse curve sono confrontate con quelle risultanti dalle (4.2.3) e (4.2.8), con i valori  $\tau_i$  di Tabella 4.2.1 ed i coefficienti  $C_1, C_2$  e  $C_3$  indicati nelle figure stesse.



RAMO	$C_1$	$C_2$	$C_3$
1	0.175	0.0798	-0.0304
2	0.101	0.027	-0.00934
3	0.231	-0.00646	-0.00287
4	0.154	-0.0139	-0.000813
5	0.0299	0.00043	-0.00148
6	-0.0635	0.262	-0.0194

Figura 4.2.3: Confronto tra la funzione rilassamento calcolata numericamente (linea tratteggiata) e la risposta del modello di Maxwell a 6 catene (linea continua)



RAMO	$C_1$	$C_2$	$C_3$
1	0.0976	0.0405	-0.0163
2	0.06	0.0324	-0.0114
3	0.125	0.037	-0.0133
4	0.221	-0.0105	-0.00124
5	0.159	-0.0122	-0.00152
6	0.0276	-0.000462	-0.00109
7	-0.0625	0.263	-0.0196

Figura 4.2.4: Confronto tra la funzione rilassamento calcolata numericamente (linea tratteggiata) e la risposta del modello di Maxwell a 7 catene (linea continua)

Come si osserva, la concordanza è estremamente buona e le differenze tra il modello a 6 catene e quello a 7 sono insignificanti.

Il procedimento descritto precedentemente consente di ottenere, per ogni combinazione di parametri reologici  $R.H.$ ,  $f_{ck}$  e  $h_0$ , i coefficienti  $C_1, C_2$  e  $C_3$  necessari per costruire un modello corrispondente, con ottima approssimazione, al caso studiato.

Se il procedimento viene ripetuto per un certo numero prefissato di valori dei parametri reologici, si ottengono tante relazioni del tipo (4.2.8) quante sono le combinazioni di parametri utilizzate. I coefficienti  $C_{\alpha i} = C_{1i}, C_{2i}, C_{3i}$  possono allora essere considerati funzioni dei parametri reologici oltre che dell' $i$ -esimo ramo del modello.

Se, dunque, si dispone di espressioni algebriche che consentono di determinare i valori  $C_{\alpha i}$  (corrispondenti ai modelli di Maxwell a 6 o 7 catene) in funzione di ogni combinazione dei parametri  $R.H.$ ,  $f_{ck}$  e  $h_0$ , è possibile ottenere una espressione analitica di previsione della funzione di rilassamento senza l'onerosa risoluzione della equazione integrale di Volterra.

È stata quindi effettuata una sperimentazione numerica, considerando le seguenti combinazioni di parametri reologici, rispondenti al modello CEB 1990:

- umidità relativa

$$R.H. = 50\%; \quad R.H. = 80\%;$$

- tipo di cemento normale od a rapido indurimento;

- resistenza caratteristica

$$f_{ck} = 20, 30, 40, 50 \text{ [MPa]};$$

- sezione fittizia

$$2.A_c/u = h_0 = 50, 100, 200, 400, 800, 1600 \text{ [mm]}.$$

La scelta precedente dà luogo a 48 casi, rappresentativi generalmente di tutte le situazioni di interesse pratico, per ciascuno dei quali sono state considerate 7 età di applicazione del carico:

$$t_0 = t_1 = 3, 7, 14, 28, 90, 365, 730 \text{ [giorni]}.$$

Si sono in tal modo ottenuti rispettivamente 864 valori dei coefficienti  $C_{\alpha i}$  ( $\alpha = 1, 2, 3; i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) nel caso di  $n = 6$  e 1008 valori nel caso del modello a 7 catene.

Tali valori sono stati assunti come base per la ricerca di funzioni algebriche in grado di fornire direttamente i coefficienti  $C_{\alpha i}$  a partire dai parametri  $R.H.$ ,  $f_{ck}$  e  $h_0$ .

Un risultato soddisfacente è stato ottenuto adottando una procedura statistica di regressione lineare multipla che consideri i  $C_{\alpha i}$  come variabili casuali dipendenti ed i parametri reologici  $R.H.$ ,  $f_{ck}$  e  $h_0$  come variabili indipendenti.

Per l'utilizzo di tale metodologia si è analizzata separatamente l'influenza di ogni parametro, allo scopo di accertare se la corrispondenza con le variabili dipendenti  $C_{\alpha i}$  potesse essere assimilata ad una retta: solo in questo caso, infatti, il procedimento fornisce buoni risultati.

Si è dapprima esaminata la dipendenza da  $R.H.$  e  $f_{ck}$ , ponendo  $h_0 =$  costante; i risultati ottenuti, per il modello di Maxwell a 7 catene, sono del tipo delle figure (4.2.5) e (4.2.6) nelle quali sono riportati i coefficienti  $C_{11}, C_{21}$  e  $C_{31}$ , per  $h_0 = 200$  mm, in funzione di  $R.H.$  e  $f_{ck}$ . L'andamento dei grafici dimostra che i loro valori si dispongono in modo approssimativamente lineare in funzione di  $f_{ck}$ , mentre risultano semplicemente traslati al variare di  $R.H.$ , figura (4.2.7).

Si è poi esaminata la dipendenza dei  $C_{\alpha i}$  dallo spessore fittizio  $h_0$ , mantenendo invariati  $R.H.$  e  $f_{ck}$ ; gli andamenti sono del tipo delle figure (4.2.8) e (4.2.9), dove si nota che i coefficienti  $C_{11}, C_{21}$  e  $C_{31}$  del modello a 7 catene, si dispongono secondo delle curve aventi una rapida pendenza per  $h_0$  compreso fra 50 e 800 mm, ed assumono valori costanti per  $h_0$  maggiore di 800 mm. È quindi necessario introdurre la dipendenza da  $h_0$  per mezzo di una opportuna funzione  $f(h_0)$  tale da soddisfare nel migliore dei modi la linearità tra i coefficienti  $C_{\alpha i}$  e  $f(h_0)$ .

Ponendo:

$$f(h_0) = u \quad (4.2.9)$$

con

$$u = \frac{\log_{10} \left[ \frac{h_0}{50} \right]}{\log_{10} 2} \quad (4.2.10)$$

i  $C_{\alpha i}$  si dispongono linearmente in funzione di  $f(h_0)$ , almeno per  $h_0 \leq 800$  mm (figure 4.2.10 e 4.2.11).

L'algoritmo di regressione multipla stima l'intercetta  $a_i$  ed i coefficienti di regressione  $b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}$  nella equazione polinomiale

$$C_{\alpha i} = a_i + b_{1i} R.H. + b_{2i} f_{ck} + b_{3i} f(h_0) \quad (4.2.11)$$

usando il metodo dei minimi quadrati; nella (4.2.11) i pedici dei coefficienti  $a, b_1, b_2, b_3$  indicano la catena  $i$ -esima del modello di Maxwell a cui si riferiscono.

La medesima analisi è stata condotta per il modello di Maxwell a 6 catene: il procedimento statistico della regressione multipla ha fornito i seguenti coefficienti della (4.2.11), la cui espressione polinomiale si può definire come il prodotto di una matrice per un vettore:

$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \\ C_{12} \\ C_{22} \\ C_{32} \\ C_{13} \\ C_{23} \\ C_{33} \\ C_{14} \\ C_{24} \\ C_{34} \\ C_{15} \\ C_{25} \\ C_{35} \\ C_{16} \\ C_{26} \\ C_{36} \end{bmatrix}$	=	0.417918	-0.00165	-0.0017	-0.02512	$\begin{bmatrix} 1 \\ R.H. \\ f_{ck} \\ f(h_0) \end{bmatrix}$	(4.2.12)
		0.217046	-0.00093	-0.00093	-0.01395		
		-0.0756	0.000308	0.00031	0.004651		
		0.137188	-0.00023	-0.00027	-0.00507		
		0.040955	-0.0001	-0.00012	-0.00157		
		-0.00284	-0.00005	-0.00003	-0.00006		
		0.218712	0.000013	-0.00014	0.002007		
		-0.00612	0.0	0.0	0.000002		
		0.007673	-0.00007	-0.00006	-0.00106		
		0.01311	0.000772	0.000424	0.032146		
		-0.00484	-0.00004	-0.00001	-0.00234		
		0.004628	-0.00003	-0.00004	-0.00067		
		-0.00555	0.000184	0.000048	0.013228		
		0.004753	-0.00002	-0.00003	-0.00084		
		-0.00062	0.000004	-0.00001	-0.00029		
		-0.15921	0.000964	0.001675	-0.01686		
0.097312	0.001113	0.00111	0.018807				
0.003933	-0.00016	-0.00017	-0.00213				

Per il modello a 7 catene si hanno invece i seguenti coefficienti:

$\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \\ C_{12} \\ C_{22} \\ C_{32} \\ C_{13} \\ C_{23} \\ C_{33} \\ C_{14} \\ C_{24} \\ C_{34} \\ C_{15} \\ C_{25} \\ C_{35} \\ C_{16} \\ C_{26} \\ C_{36} \\ C_{17} \\ C_{27} \\ C_{37} \end{bmatrix}$	=	0.280238	-0.00128	-0.0012	-0.01952	$\begin{bmatrix} 1 \\ R.H. \\ f_{ck} \\ f(h_0) \end{bmatrix}$	(4.2.13)
		0.126287	-0.0006	-0.00056	-0.00909		
		-0.04791	0.000222	0.000209	0.003376		
		0.114868	-0.00039	-0.00038	-0.00595		
		0.080727	-0.00033	-0.00031	-0.00531		
		-0.02318	0.000083	0.000078	0.001344		
		0.202136	-0.00054	-0.00051	-0.00975		
		0.070874	-0.00024	-0.00024	-0.00371		
		-0.01467	0.000011	0.000017	0.000116		
		0.180053	0.000218	0.000073	0.005762		
		-0.01879	0.000058	0.000053	0.000894		
		0.013454	-0.0001	-0.00009	-0.00157		
		0.008385	0.000858	0.00041	0.035977		
		0.001243	-0.00007	-0.00004	-0.00302		
		0.002806	-0.00003	-0.00003	-0.00057		
		-0.01304	0.000235	0.000075	0.013451		
0.002417	-0.00001	-0.00001	-0.00075				
0.000449	0.0	0.0	-0.0004				
-0.1442	0.000897	0.001526	-0.01993				
0.086785	0.001225	0.001129	0.020975				
0.004678	-0.00017	-0.00017	-0.00237				

Sostituendo la (4.2.9) nella (4.2.11), ed utilizzando i coefficienti delle (4.2.12) o (4.2.13), si ottengono dei buoni risultati, per quasi tutte le combinazioni di parametri reologici (figure 4.2.12 e 4.2.13). Fanno eccezione solo i casi in cui  $R.H.=80\%$  e  $h_0=1600$  mm, nei quali si riscontrano errori non trascurabili (figura 4.2.14). Anche questi possono però essere eliminati modificando in modo opportuno la funzione  $f(h_0)$ . In effetti l'origine di queste imperfezioni va ricondotta allo scostamento dalla linearità che si rileva nell'ultimo punto delle figure (4.2.10) e (4.2.11).

Una eccellente concordanza in tutto il campo di variabilità dei parametri si ottiene utilizzando, in luogo della (4.2.9) la

$$f(h_0) = u \left[ 1 + \left( 1 - \frac{R.H.}{50} \right) u_0 \right] \tag{4.1.14}$$

essendo  $u_0$  il polinomio di Lagrange:

$$u_0 = \frac{u(u-1)(u-2)(u-3)(u-4)}{360} \tag{4.1.15}$$

Con l'uso di tali funzioni anche il caso  $R.H.=80\%$ ,  $h_0=1600$  mm gli errori risultano trascurabili (figura 4.2.17), senza la comparsa di imprecisioni negli altri casi.

La differenza tra il modello a 7 catene e quello a 6 catene si riscontra esclusivamente nel comportamento durante i primi due giorni dall'applicazione del carico. Nelle figure (4.2.18) e (4.2.19), viene presentata la risposta rispettivamente del modello a 6 catene e di quello a 7 nei primi due giorni di carico, confrontandola con la soluzione numericamente esatta. Si osserva che mentre il modello a 7 catene mantiene sempre una buona precisione, quello con 6 presenta errori non trascurabili durante il primo giorno. Dal secondo giorno in poi, tuttavia, entrambi i modelli forniscono un'ottima approssimazione. Non essendo di norma interessante il comportamento nel primo giorno, per tutti i fini applicativi i due modelli si equivalgono.

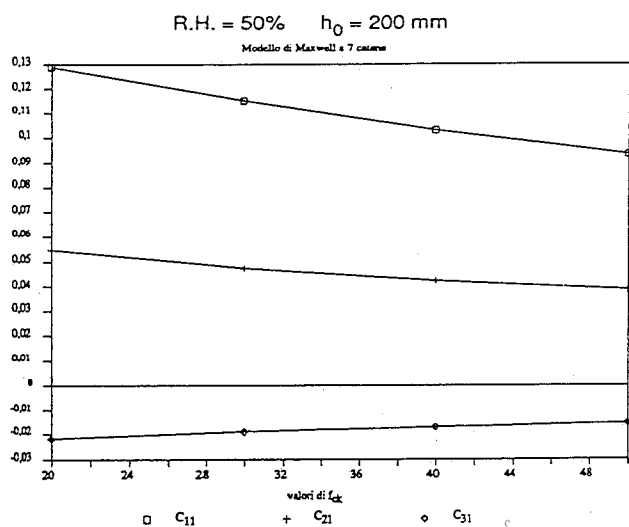


Figura 4.2.5: Andamento dei coefficienti  $C_{11}, C_{21}, C_{31}$  in funzione di  $f_{ck}$ , ponendo  $R.H. = 50\%$  ed  $h_0 = 200$  mm

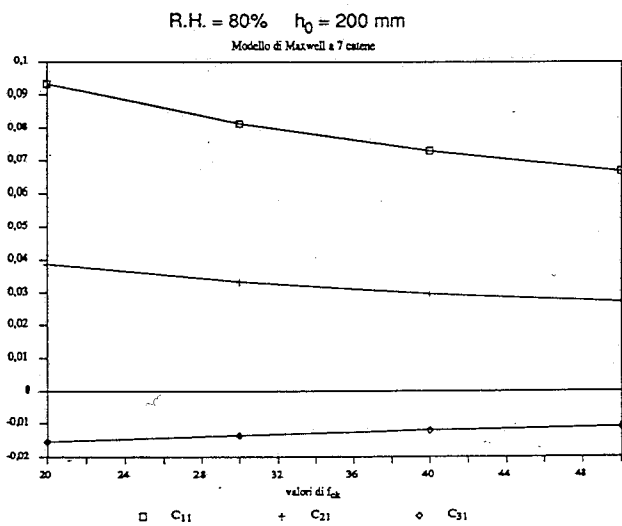


Figura 4.2.6: Andamento dei coefficienti  $C_{11}, C_{21}, C_{31}$  in funzione di  $f_{ck}$ , ponendo  $R.H. = 80\%$  ed  $h_0 = 200$  mm

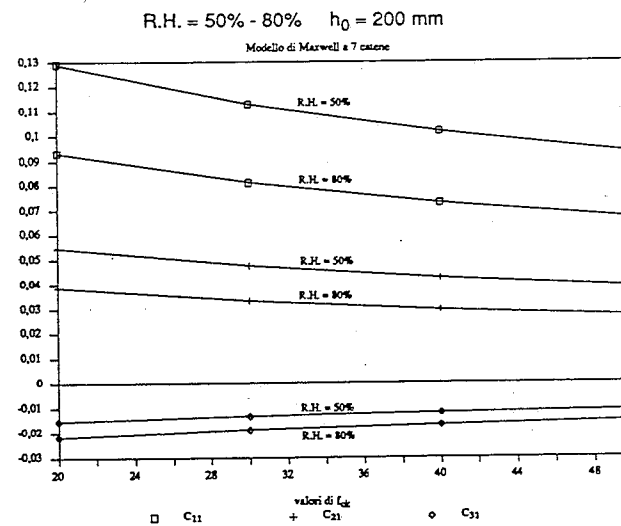


Figura 4.2.7: Andamento dei coefficienti  $C_{11}, C_{21}, C_{31}$  in funzione di  $f_{ck}$  e  $R.H.$ , ponendo  $h_0 = 200$  mm

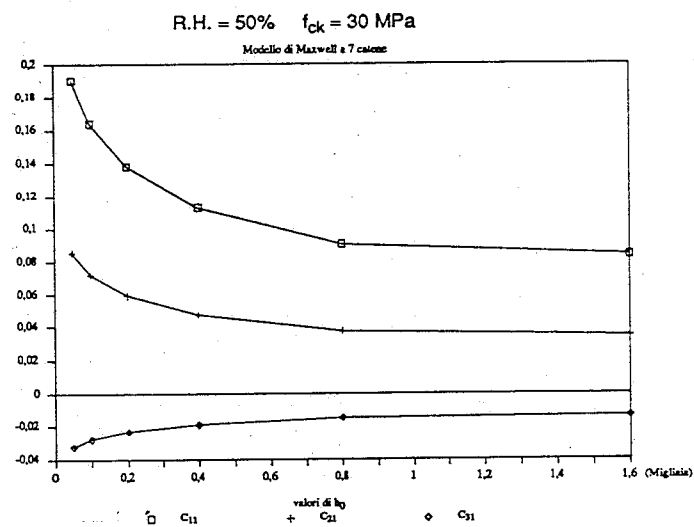


Figura 4.2.8: Andamento dei coefficienti  $C_{11}, C_{21}, C_{31}$  in funzione di  $h_0$  ponendo  $R.H. = 50\%$  e  $f_{ck} = 30$  MPa

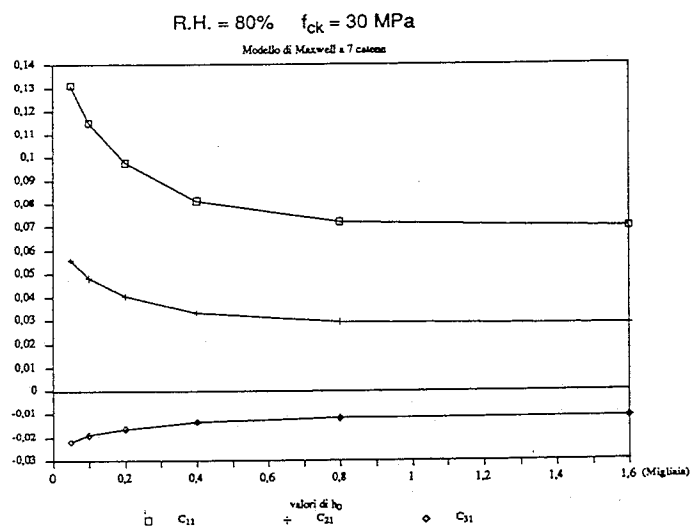


Figura 4.2.9: Andamento dei coefficienti  $C_{11}, C_{21}, C_{31}$  in funzione di  $f_{ck}$  ponendo  $R.H. = 80\%$  e  $h_0 = 200$  mm

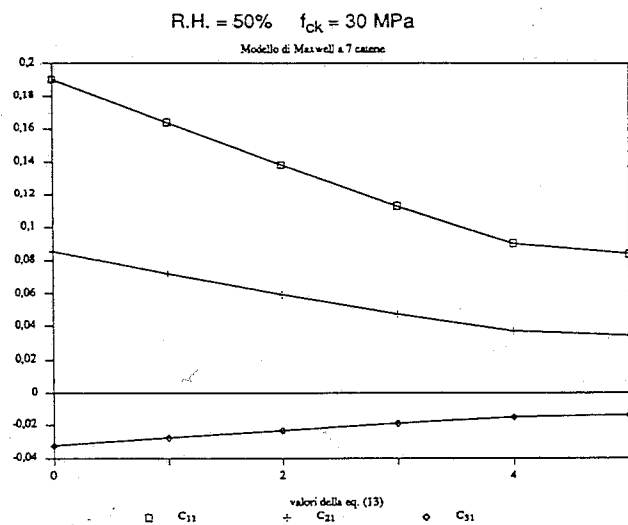


Figura 4.2.10: Andamento dei coefficienti  $C_{11}, C_{21}, C_{31}$  in funzione dell'equazione (4.2.10) ponendo  $R.H. = 50\%$  e  $f_{ck} = 30$  MPa

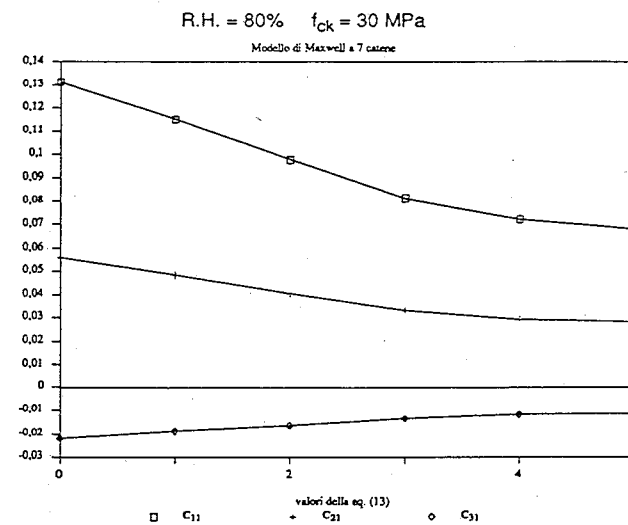


Figura 4.2.11: Andamento dei coefficienti  $C_{11}, C_{21}, C_{31}$  in funzione dell'equazione (4.2.10) ponendo  $R.H. = 80\%$  e  $f_{ck} = 30$  MPa

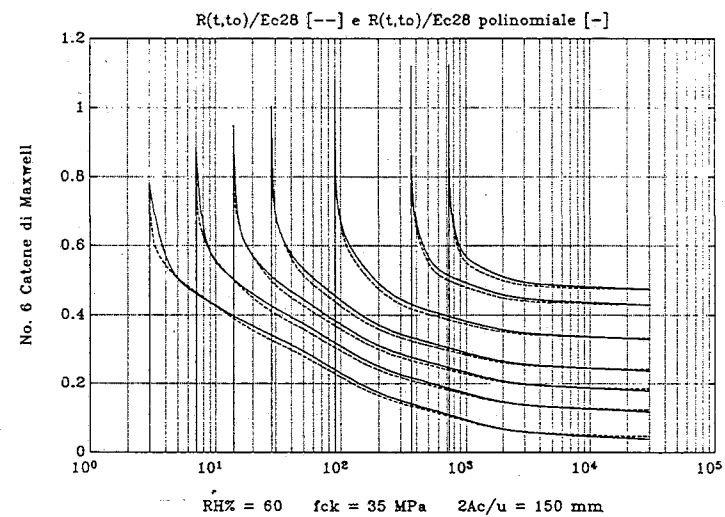


Figura 4.2.12: Confronto tra la funzione rilassamento calcolata numericamente (linea tratteggiata) e la funzione ottenuta dalla polinomiale (4.2.12) del modello di Maxwell a 6 catene (linea continua)

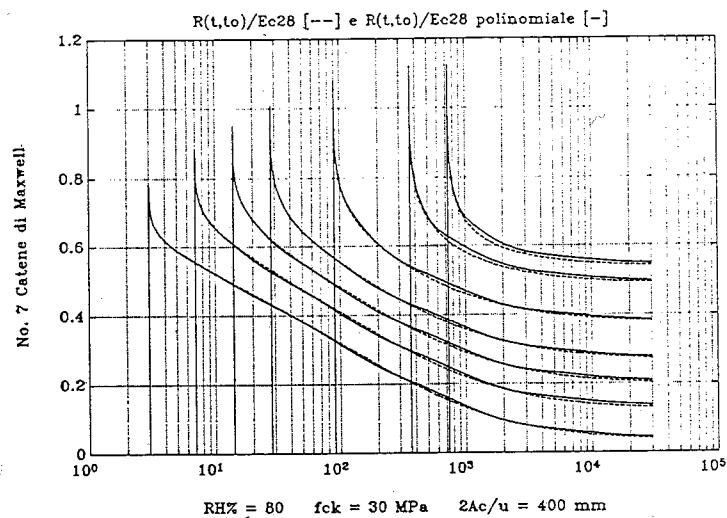


Figura 4.2.13: Confronto tra la funzione rilassamento calcolata numericamente (linea tratteggiata) e la funzione ottenuta dalla polinomiale (4.2.13) del modello di Maxwell a 7 catene (linea continua)

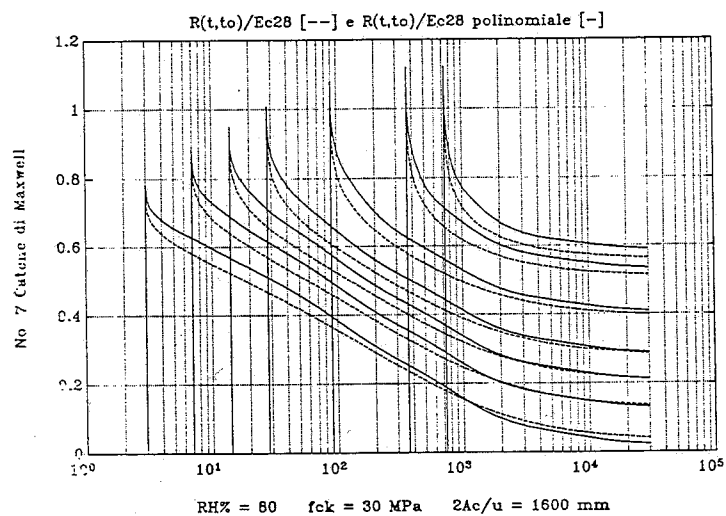


Figura 4.2.14: Confronto tra la funzione rilassamento calcolata numericamente (linea tratteggiata) e la funzione ottenuta dalla polinomiale del modello di Maxwell a 7 catene (linea continua) con  $f(h_0)$  data dalla (4.2.9)

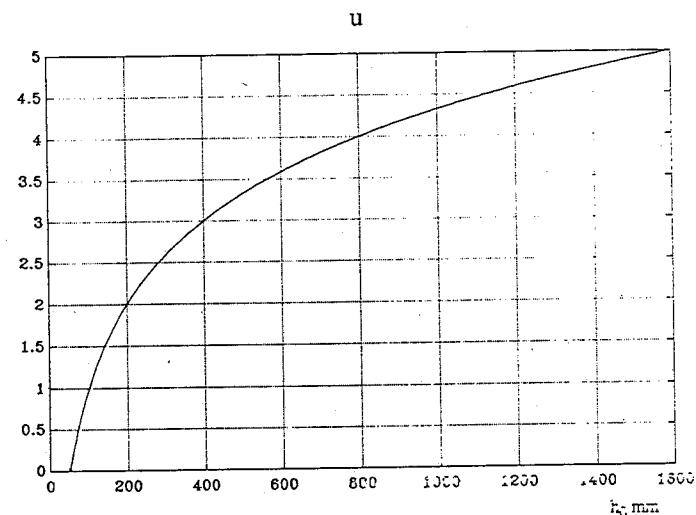


Figura 4.2.15: Diagramma dell'equazione (4.2.10)

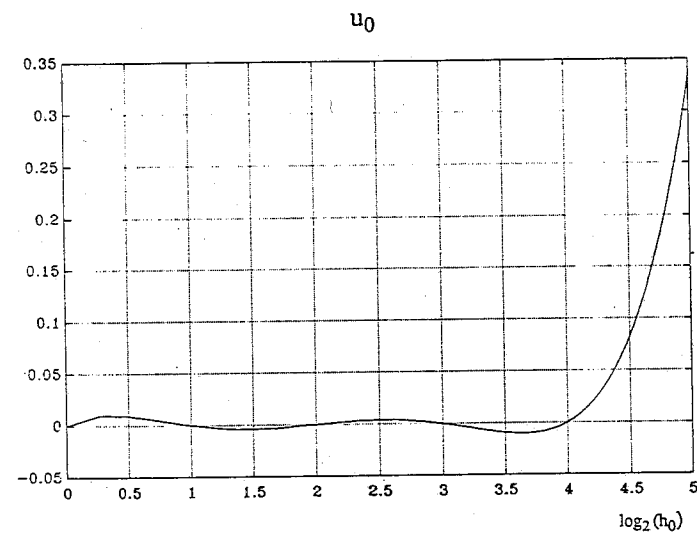


Figura 4.2.16: Diagramma dell'equazione (4.2.15)



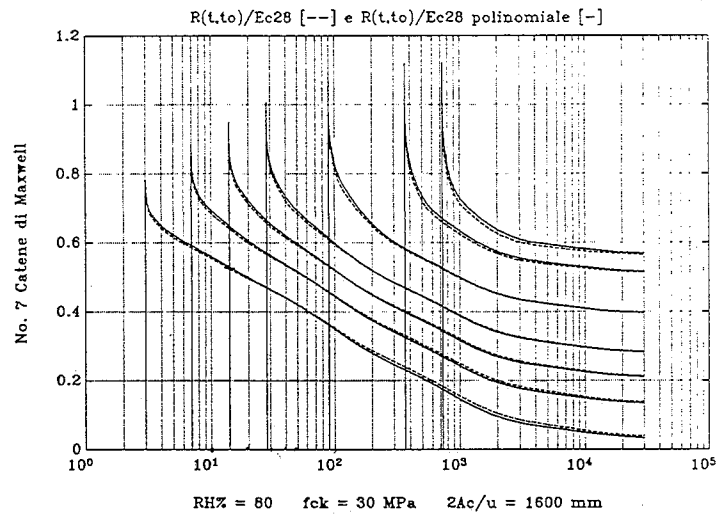


Figura 4.2.17: Confronto tra la funzione rilassamento calcolata numericamente (linea tratteggiata) e la funzione ottenuta dalla polinomiale del modello di Maxwell a 7 catene (linea continua) con  $f(h_0)$  data (4.2.14)

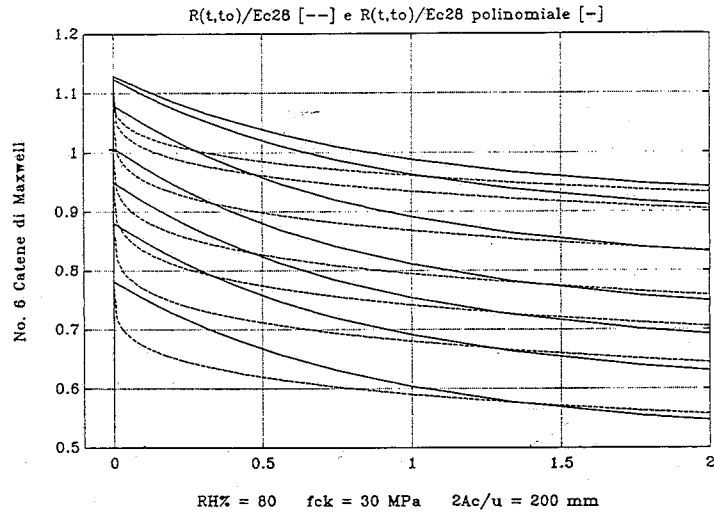


Figura 4.2.18: Confronto, nei primi due giorni, tra la funzione rilassamento calcolata numericamente (linea tratteggiata) e la funzione ottenuta dalla polinomiale del modello di Maxwell a 6 catene (linea continua)

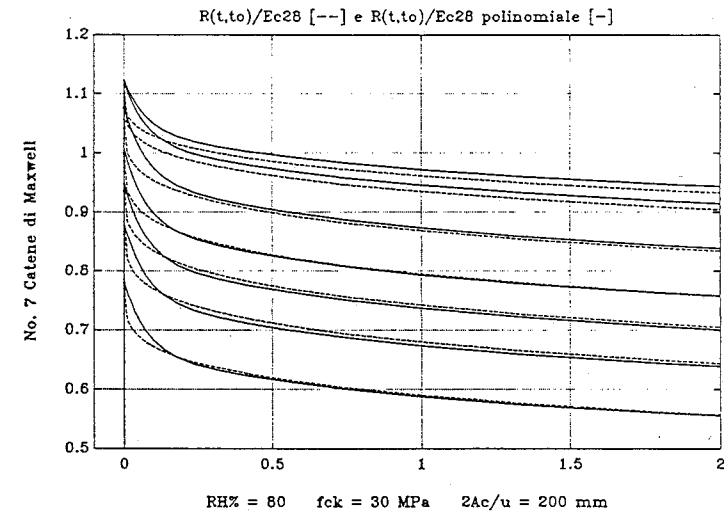


Figura 4.2.19: Confronto, nei primi due giorni, tra la funzione rilassamento calcolata numericamente (linea tratteggiata) e la funzione ottenuta dalla polinomiale del modello di Maxwell a 7 catene (linea continua)

### Esempio 1. Ritiro impedito dall'istante $t_0$

Al fine di saggiare con un semplice esempio l'applicabilità del modello di previsione del rilassamento si è preso in esame il caso di ritiro impedito da un istante  $t_0$  fino ad infinito.

Si sono considerate 7 età  $t_0 = 3, 7, 14, 28, 90, 365, 730$  giorni.

L'esempio svolto riguarda il caso

$$R.H. = 80\%, f_{ck} = 30 \text{ MPa}, h_0 = 200 \text{ mm}$$

per il quale è stata calcolata la funzione di viscosità  $J(t, \tau)$  come suggerito dal CEB MC 90 [2].

Per il medesimo caso si è valutata la funzione ritiro, che risulta:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cs0} \beta_s(t - t_s)$$

Con i parametri del caso in esame, si ha:

$$\varepsilon_{cs0} = -0.318 \cdot 10^{-3}$$

$$\beta_s(t - t_s) = \left[ \frac{t - t_s}{1400 + (t - t_s)} \right]^{0,5}$$

Introducendo le leggi e le quantità sopra indicate nella (2.3.8), ( $\varepsilon_n = \varepsilon_{cs}$ ), considerata come equazione integrale di Volterra nella incognita  $\sigma(t)$ , e risolvendola numericamente, si ottengono i risultati della figura (4.2.20) (curva tratteggiata), che costituiscono la *soluzione esatta* di riferimento per valutare la metodologia presentata.

Applicando, invece, la funzione di rilassamento proposta, si determina il valore della tensione  $\sigma(t)$ , istante per istante, mediante la procedura diretta di integrazione numerica che utilizza la regola dei trapezi.

L'algoritmo recursivo impiegato ha la seguente espressione:

$$\sigma(t_k, t_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k [R(t_k, t_i) + R(t_k, t_{i-1})] [-\varepsilon_n(t_i) + \varepsilon_n(t_{i-1})]$$

in cui viene posto  $t_0 = t_1$ .

Anche in questo caso, utilizzando la formula (4.2.4), gli intervalli di integrazione ( $t - t_0$ ) sono stati suddivisi in 8 valori per decade regolarmente spaziat, ma per migliorare la precisione della soluzione numerica dell'integrale si è posto  $t_2 - t_1 = 0,01$  giorni. Con tale suddivisione, infatti, si è aumentata di una decade la scala assoluta dei tempi, consentendo di avere dei piccoli intervalli nei primi istanti dove le variazioni della  $\varepsilon_{cs}$  e della  $R$  sono più significative e coprendo, nello stesso tempo, periodi sufficientemente lunghi con un numero contenuto di passi.

Per definire la funzione  $R(t, \tau)$  è stato scelto il modello di Maxwell a 7 catene, i cui parametri  $C_{ci}$  - dipendenti da  $R.H.$ ,  $f_{ck}$  e  $h_0$  - sono stati calcolati mediante la relazione (4.2.13) che ha fornito i seguenti valori:

RAMO	$C_1$	$C_2$	$C_3$
1	0,1027	0,0433	-0,0171
2	0,0603	0,0344	-0,0115
3	0,1241	0,0370	0,0130
4	0,2112	-0,0107	-0,0003
5	0,1612	-0,0115	-0,00163
6	0,0349	-0,00018	-0,0035
7	-0,0665	0,2606	-0,0187

TAB. 4.2.2 - Coefficienti  $C_{ci}$  per  $R.H. = 80\%$ ,  $f_{ck} = 30$  MPa,  $h_0 = 200$  mm.

Il vantaggio di questa formulazione, rispetto a quella che richiede la soluzione dell'integrale di Volterra, consiste nel fatto che la  $\sigma(t)$  viene calcolata direttamente ad ogni passo di integrazione senza dover conservare in memoria e reinserire nell'algoritmo tutti i valori precedenti della  $\Delta\sigma(t_i)$  come avviene usando il metodo diretto.

Si osserva, infine, dal grafico di figura (4.2.20) la concordanza tra i due metodi è estremamente buona, poiché le differenze tra i valori della  $\sigma(t, \tau)$  sono trascurabili.

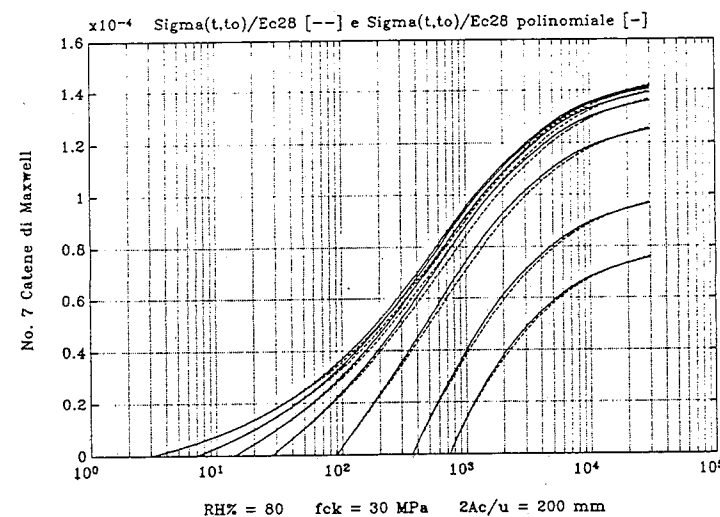


Figura 4.2.20: Confronto tra i valori della  $\sigma(t, \tau)$  ricavati numericamente dalla (2.3.8) (linea tratteggiata) e quelli derivanti dalla funzione rilassamento proposta (linea continua)

## Capitolo 5

### I principi della viscosità lineare.

#### 5.1 Generalità

Per procedere all'analisi delle strutture è necessario estendere le equazioni costitutive (2.3.8) e (2.3.11) alle relazioni che intercorrono tra le forze e gli spostamenti; tale estensione deve essere effettuata in relazione al tipo di struttura considerata tenendo conto, in particolare, del grado di eterogeneità.

Per le applicazioni pratiche le strutture vengono convenientemente suddivise nelle seguenti categorie [7]:

1. strutture omogenee con vincoli rigidi;
2. strutture internamente omogenee con vincoli elastici;
3. strutture eterogenee, nelle quali l'eterogeneità è dovuta alla diversità del materiale che compone la sezione trasversale (sezioni miste acciaio-calcestruzzo), oppure alla diversità di materiale o dei tempi di getto nelle diverse zone della struttura.

Fra le tipologie strutturali elencate, le strutture omogenee con vincoli rigidi, composte cioè da un unico getto di calcestruzzo, in regime viscoelastico lineare, possiedono particolari proprietà, sintetizzabili in alcuni principi noti come *Principi della Viscosità Lineare* [16].

Ovviamente, nessuna struttura in cemento armato può rigorosamente ritenersi omogenea data la presenza dell'armatura; in generale, tuttavia, la parte metallica ha una piccola incidenza sulla totalità della sezione trasversale: per cui il comportamento generale di una struttura in cemento armato può essere frequentemente analizzato alla luce di tali teoremi.

## 5.2 Primo e secondo principio

Nel primo principio della viscosità lineare si afferma che:

*in una struttura omogenea a comportamento visco-elastico lineare, coefficiente di Poisson costante nel tempo e vincoli rigidi, soggetta a sole azioni statiche, lo stato di sollecitazione coincide con quello valutabile in fase puramente elastica lineare, mentre lo stato di deformazione deve essere valutato sommando a quello elastico gli effetti della viscosità ad esso conseguenti.*

A tal fine, considerando una struttura soggetta a sole azioni statiche  $p_j(t)$ , figura (5.2.1), il teorema ora enunciato permette di affermare che le azioni iperstatiche  $X_i(t)$  possono essere valutate in fase puramente elastica,

$$X_i(t) = X_{ie}(t) \quad (5.2.1)$$

dove  $X_{ie}(t)$  è la soluzione che si ottiene svolgendo l'analisi elastica della struttura sotto l'azione dei carichi  $p_j(t)$ , presenti all'istante  $t$  considerato, mentre il modulo elastico  $E_c(t)$  è ininfluente.

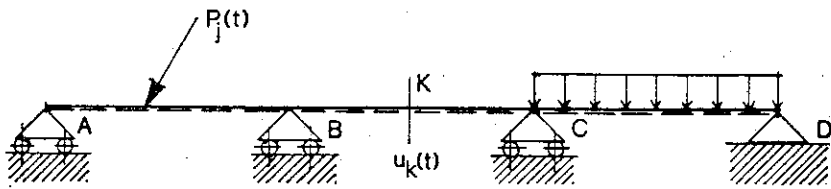


Figura 5.2.1: Struttura soggetta ad azioni statiche

Per gli spostamenti generalizzati  $u_k(t)$ , dove  $k$  è la generica coordinata della struttura, per la (2.3.13) e la (5.2.1) si può scrivere:

$$u_k(t) = u_{ke}(t_0) E_c(t_0) J(t, t_0) + E_c(t_0) \int_{t_0}^t J(t, \tau) du_{ke}(\tau) \quad (5.2.2)$$

dove con  $u_{ke}(t_0)$  si intende la deformazione elastica della struttura all'istante  $t_0$  di messa in carico, mentre  $du_{ke}(\tau)$  è l'incremento dello spostamento elastico considerato tra gli istanti  $\tau$  e  $\tau + d\tau$  per effetto dell'incremento dei carichi  $dp_j(\tau)$ .

Tutti i valori  $u_{ke}(t)$  si considerano determinati con modulo elastico  $E_c(t_0)$ .

Nel caso in cui i carichi  $p_j$  siano costanti nel tempo la (5.2.2) si semplifica nel seguente modo:

$$u_k(t) = u_{ke}(t_0) E_c(t_0) J(t, t_0). \quad (5.2.3)$$

Nel secondo principio si afferma che:

*in una struttura omogenea a comportamento visco-elastico lineare e coefficiente di Poisson costante nel tempo, soggetta a sole azioni geometriche (cedimenti vincolari, deformazioni termiche) lo stato di deformazione coincide con quello valutabile in fase puramente elastica lineare, mentre lo stato di sollecitazione deve essere valutato sommando a quello elastico gli effetti del rilassamento ad esso conseguenti.*

Pertanto, in una generica struttura omogenea, figura (5.2.2), soggetta alle sole azioni geometriche, gli spostamenti generalizzati si possono calcolare con la relazione:

$$u_k(t) = u_{ke}(t) \quad (5.2.4)$$

dove  $u_{ke}(t)$  è la soluzione elastica della struttura all'applicazione delle azioni geometriche presenti all'istante  $t$ , anche in questa analisi il modulo elastico  $E_c(t)$  è ininfluente.

Per le azioni iperstatiche  $X_i(t)$  si ha invece:

$$X_i(t) = X_{ie}(t_0) \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{1}{E_c(t_0)} \int_{t_0}^t R(t, \tau) dX_{ie}(\tau) \quad (5.2.5)$$

che si semplifica nella seguente relazione, quando le azioni geometriche sono costanti nel tempo:

$$X_i(t) = X_{ie}(t_0) \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad (5.2.6)$$

Nelle (5.2.5) e (5.2.6)  $X_{ie}(\tau)$  è il valore della  $i$ -esima iperstatica calcolato in regime elastico lineare sotto le azioni geometriche presenti in tale istante, per un modulo di Young pari a  $E_c(t_0)$ .

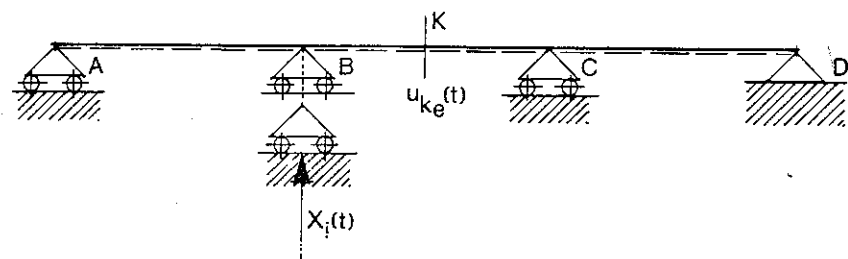


Figura 5.2.2: Struttura soggetta ad azioni geometriche

### 5.3 Terzo principio o del riacquisto del regime principale

Il principio del riacquisto del regime principale afferma che: *quando in una struttura omogenea avente m vincoli rigidi e soggetta a forze costanti nel tempo, vengono aggiunti contemporaneamente all'istante  $t_0^+$ , immediatamente successivo all'applicazione dei carichi, n vincoli rigidi aggiuntivi, le reazioni negli m+n vincoli tendono nel tempo ad assumere quei valori, che esse avrebbero, se tutti i vincoli fossero preesistenti alle azioni applicate.*

La soluzione di questo problema può essere ottenuta, utilizzando il principio di sovrapposizione, come somma di un problema di viscosità, corrispondente alla assunzione fittizia che le forze siano applicate ad una struttura vincolata con m+n vincoli (sistema 2)

ed un problema di rilassamento, corrispondente ad imporre al tempo  $t = t_0^+$  uno stato di deformazione costante, in corrispondenza degli n vincoli aggiuntivi, alla struttura iniziale dotata di m vincoli (sistema 1) [19].

Per dimostrare questo assunto si consideri la struttura di figura (5.3.1) soggetta ad azioni statiche costanti nel tempo e si assuma che gli n vincoli aggiuntivi vengano introdotti contemporaneamente all'istante  $t_0^+$  immediatamente successivo all'istante di messa in carico  $t_0$ .

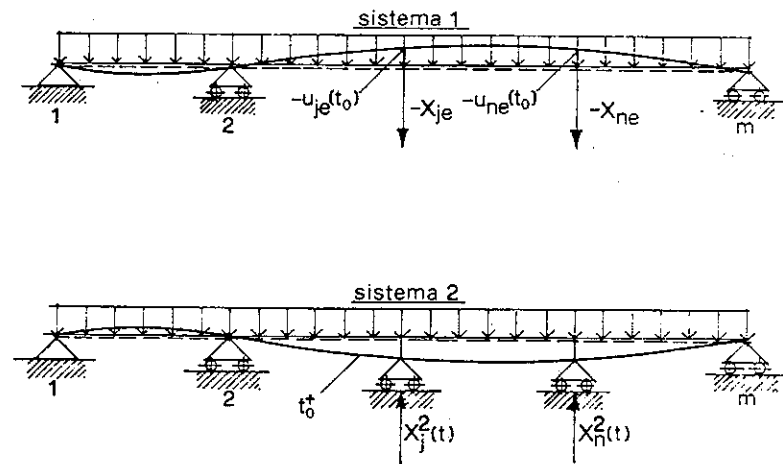


Figura 5.3.1: Struttura con vincoli aggiuntivi

Dette  $X_j^2$  le reazioni dei vincoli aggiuntivi ( $j=1,2,\dots,n$ ), necessariamente

$X_j^2(t_0^+) = 0$ , mentre nel tempo crescono, poiché tali vincoli si oppongono agli spostamenti viscosi della struttura.

Per determinare il valore delle reazioni vincolari nel tempo, si considera dapprima che gli n vincoli aggiuntivi siano preesistenti all'applicazione del carico; in tal caso, per il primo teorema della viscosità lineare, dette  $X_{je}^2$  i valori delle reazioni calcolate elasticamente si ha:

$$X_j^2(t) = X_{je}^2 \tag{5.3.1}$$

Dovendo essere nulle le  $X_j^2(t_0^+)$ , si impongono alla struttura, dotata di m vincoli, delle deformazioni negative tali da produrre all'istante iniziale delle reazioni,  $-X_{je}^2$ , agli n vincoli aggiuntivi.

Per il secondo principio della viscosità lineare si ha:

$$X_j^2(t) = -X_{je}^2 \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad (5.3.2)$$

La soluzione finale si ottiene sovrapponendo gli effetti, sommando cioè le relazioni (5.3.1) e (5.3.2):

$$X_j^2(t) = X_{je}^2 \left[ 1 - \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (5.3.3)$$

Essendo  $E_c(t_0)$  il modulo elastico del calcestruzzo all'istante di messa in carico.

Nell'equazione (5.3.3) il moltiplicatore della  $X_{je}^2$

$$\xi(t, t_0, t_0) = \left[ 1 - \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right] \quad (5.3.4)$$

è uguale a zero per  $t = t_0$ , infatti  $R(t_0, t_0) = E_c(t_0)$ ; inoltre, per  $t > t_0$ , la funzione  $\xi(t, t_0, t_0)$  caratterizza la variazione della reazione negli  $n$  vincoli aggiuntivi.

Quando l'istante di misura delle  $X_j(t)$  è molto avanzato, sufficiente per considerare esaurito il fenomeno viscoso, allora il moltiplicatore  $\xi(t, t_0, t_0)$  tende all'unità, per cui le  $X_j^2(t)$  tendono al valore che avrebbero qualora gli  $n$  vincoli aggiuntivi fossero preesistenti

all'applicazione del carico. Peraltro, essendo  $0 < \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)} < 1$ , dalla (5.3.3) è evidente che

il valore di  $X_{je}^2$  può essere solo avvicinato senza essere mai raggiunto.

In definitiva al generico istante  $t \geq t_0^+$ , si ha:

$$X_i(t) = X_{ie}^1 + \Delta X_{ie} \xi(t, t_0, t_0) \quad (5.3.5)$$

$$X_j(t) = X_{je}^2 \xi(t, t_0, t_0) \quad (5.3.6)$$

dove:

$X_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , rappresentano le reazioni negli  $m$  vincoli preesistenti;

$X_j(t)$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), rappresentano le reazioni negli  $n$  vincoli posticipati;

$\Delta X_{ie} = X_{ie}^2 - X_{ie}^1$ , sono le correzioni da imporre alla soluzione elastica del sistema 1 per rispettare le  $n$  condizioni geometriche imposte dagli  $n$  vincoli aggiuntivi.

Se, invece, i vincoli aggiuntivi vengono introdotti contemporaneamente al tempo  $t_1 > t_0^+$  la soluzione si ottiene imponendo la congruenza a partire dal tempo  $t_1$ .

Nell'intervallo  $(t_1 - t_0)$  le reazioni  $X_i(t)$  degli  $m$  vincoli preesistenti (sistema 1), dovute all'applicazione dei carichi esterni al tempo  $t = t_0$ , rimangono costanti, mentre le deformazioni si incrementano proporzionalmente alla funzione viscosità. In particolare per  $t = t_1$ , gli spostamenti degli  $n$  punti di applicazione dei vincoli aggiuntivi, attivi a partire da  $t > t_1$ , sono dati da:

$$u_j(t_1) = u_{je}^1(t_0) E_c(t_0) J(t_1, t_0). \quad (5.3.7)$$

Gli  $n$  vincoli aggiuntivi impediscono la deformazione viscosa per  $t > t_1$ : essi, dunque, impongono agli  $n$  punti della struttura le seguenti condizioni geometriche

$$u_j(t) = -u_{je}^1(t_0) E_c(t_0) [J(t, t_0) - J(t_1, t_0)]. \quad (5.3.8)$$

Applicando il secondo principio della viscosità lineare per azioni geometriche variabili nel tempo, i valori delle reazioni negli  $n$  vincoli aggiuntivi valgono [16]:

$$X_j(t) = X_{je}^2 \int_{t_1}^t R(t, \tau) dJ(\tau, t_0) \quad (5.3.9)$$

In definitiva, al generico istante  $t \geq t_1$ , si ha:

$$X_i(t) = X_{ie}^1 + \Delta X_{ie} \xi(t, t_1, t_0) \quad (5.3.10)$$

$$X_j(t) = X_{je}^2 \xi(t, t_1, t_0) \quad (5.3.11)$$

dove  $X_i(t)$ ,  $X_j(t)$  e  $\Delta X_{ie}$  hanno lo stesso significato già dato in precedenza.

In analogia con il problema precedente, la funzione:

$$\xi(t, t_1, t_0) = \int_{t_1}^t R(t, \tau) dJ(\tau, t_0) \quad (5.3.12)$$

caratterizza la variazione della reazione indotta dalla viscosità, moltiplicando la differenza tra il valore delle reazioni, riferite al sistema 2 ( $m+n$  vincoli) ed il sistema 1 ( $m$  vincoli), che competono alla struttura al tempo  $t$  quando i carichi vengono introdotti al tempo  $t = t_0$  e lo schema strutturale varia al tempo  $t = t_1$ .

Come si vedrà in seguito, note in ogni tempo le funzioni viscosità e rilassamento, la funzione  $\xi(t, t_1, t_0)$  può essere ottenuta mediante integrazione numerica.

Per  $t = t_1$ ,  $\xi(t, t_1, t_0) = 0$ , si ottiene, quindi, la soluzione elastica del sistema 1.

Per  $t_1 = t_0^+$ , si ottiene come caso particolare la soluzione del problema precedente; dall'equazione (2.3.18) si ha infatti:

$$\int_{t_0^+}^t R(t, \tau) dJ(\tau, t_0) = 1 - \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad (5.2.13)$$

inoltre si ha sempre:

$$\xi(t, t_1, t_0) < \xi(t, t_0, t_0).$$

#### 5.4 Quarto principio sulla variazione dello schema statico

Questo principio afferma che [20]:

*in una struttura omogenea, soggetta a forze costanti a partire dal tempo  $t = t_0$  ed alla applicazione di  $n$  vincoli rigidi aggiunti in tempi diversi  $t_j > t_0$ , la reazione  $X_j^j(t)$  nell'ultimo vincolo introdotto non dipende dal precedente cambiamento dello schema statico al tempo  $t_i$  ( $t_0 < t_i < t_j$ ) ed il suo valore è dato da:*

$$X_j^j(t) = X_{je}^j \xi(t, t_j, t_0), \quad t_j \leq t < t_{j+1} \quad (5.4.1)$$

dove:

$X_j^j(t)$  rappresenta la reazione del vincolo posticipato  $j$ , nel successivo schema statico  $j$ ;

$X_{je}^j$  rappresenta la reazione elastica dello schema statico  $j$ , inteso come preesistente ai carichi.

Per dimostrare questo assunto si ricorre nuovamente al metodo delle deformazioni. Infatti, i carichi, applicati al tempo  $t_0$ , determinano delle deformazioni dipendenti dal tempo, che si sviluppano a partire dal tempo  $t \geq t_0$ , figura (5.4.1).

Queste deformazioni che si ottengono, sulla base del primo teorema della viscosità lineare, moltiplicando le iniziali deformazioni elastiche - valutate nello schema statico originale in base al modulo di elasticità  $E_c(t_0)$  - per il fattore viscoso  $E_c(t_0)J(t, t_0)$  vengono impedito, a partire dal tempo  $t_j > t_0$ , dalle successive condizioni vincolari, intese come azioni geometriche imposte in tempi successivi  $t_j$ .

Applicando il secondo teorema della viscosità lineare, per azioni geometriche imposte, dal tempo  $t_j$  al tempo  $t_j \leq t < t_{j+1}$ , gli incrementi delle deformazioni sono legati per affinità mediante il fattore viscoso  $E_c(t_0) [J(t, t_0) - J(t_j, t_0)]$  alle deformazioni elastiche indotte dai carichi, valutate nel problema elastico associato allo schema statico  $j-1$  (con  $j-1$  vincoli aggiuntivi che si immaginano introdotti prima dei carichi).

La deformazione impedita dal  $j$ -esimo vincolo posticipato, imposto al tempo  $t > t_j$ , è dunque la stessa che sarebbe stata impedita se lo stesso vincolo posticipato fosse stato applicato ad una struttura avente un'originale schema statico  $j-1$ .

In definitiva al generico istante  $t \geq t_j$ , si ha:

$$X_j^j(t) = X_{je}^j \xi(t, t_j, t_0) \quad (5.4.2)$$

$$X_i^j(t) = X_i^{j-1}(t) + \alpha_{ij,e}^{j-1} X_j^j(t) \quad (5.4.3)$$

con:

$$i = 0, 1, 2, \dots, j-1; \quad j = 1, 2, \dots, n \text{ e } t_j \leq t < t_{j+1}$$

e

$$X_0^0(t) = \text{costante} = X_{0,e}^0, \text{ per } t_0 \leq t < t_1 \quad (5.4.5)$$

dove:

$X_{je}^j$  rappresenta il valore elastico della reazione al  $j$ -esimo vincolo dello schema statico  $j$ , con tutti i vincoli  $j$  pensati introdotti prima dei carichi;

$\alpha_{ij,e}^{j-1}$  rappresenta la reazione elastica nel vincolo  $i$  per effetto di una forza unitaria applicata nel vincolo  $j$  e calcolata nello schema statico  $j-1$ .

Le equazioni (5.4.2) e (5.4.3), quindi, dimostrano come per ripetute modificazioni delle condizioni vincolari nelle strutture omogenee, la funzione dipendente dal tempo  $\xi(t, t_j, t_0)$  è la sola funzione necessaria per determinare la risposta di strutture omogenee soggette a  $n$  vincoli aggiuntivi introdotti in tempi differenti  $t_j$ .

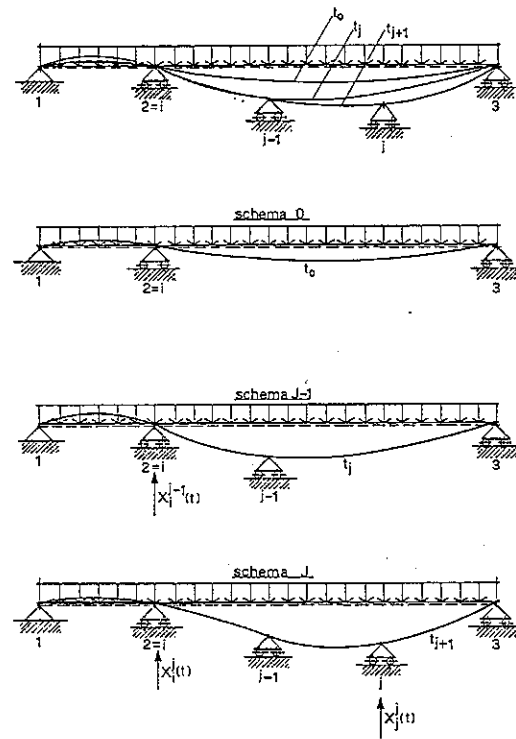


Figura 5.4.1: Variazione di schema statico in tempi successivi

## Capitolo 6

### Analisi viscoelastica lineare delle strutture

#### 6.1 Applicazione delle equazioni integrali di Volterra

Nei problemi strutturali iperstatici il numero di equazioni fornite dalla statica risulta minore del numero delle incognite.

Per determinare le incognite iperstatiche occorrono, dunque, ulteriori equazioni, dette *equazioni di congruenza*. L'insieme delle equazioni di equilibrio e di congruenza consente di ottenere la soluzione del problema.

Come è noto, i metodi classici per la risoluzione delle strutture iperstatiche sono essenzialmente due, l'uno duale dell'altro, detti *delle forze* e *delle deformazioni*:

- nel metodo *delle forze* si assume a priori una configurazione equilibrata, nella quale è presente il numero delle forze incognite: si risolve quindi il problema imponendo le condizioni di congruenza e di compatibilità;
- nel metodo *delle deformazioni* si assume a priori una configurazione compatibile, nella quale vengono esplicitati i parametri della deformazione: si impone quindi l'equilibrio per la determinazione dei parametri incogniti.

Questi due metodi vengono generalmente adottati anche nell'analisi viscoelastica: in generale, il primo viene convenientemente utilizzato per strutture esternamente iperstatiche, mentre il secondo risulta vantaggioso nel calcolo delle sezioni o delle strutture con molti gradi di iperstaticità.

La soluzione resta tuttavia connessa, in ogni caso, alla risoluzione di un sistema di equazioni integrali di Volterra rispetto al tempo.



### 6.1.1 Metodo delle forze

Affrontando l'analisi viscoelastica delle strutture con il metodo delle forze, bisogna scrivere le equazioni che determinano le deformazioni dei punti nei quali si impone la compatibilità con i vincoli esterni; queste equazioni vengono definite utilizzando il primo principio della viscoelasticità lineare [16,21].

Nel caso di forze esterne costanti nel tempo, per il primo principio, la relazione tra la deformazione al tempo  $t$ ,  $u_k(t)$ , e quella iniziale elastica,  $u_{ke}(t_0)$ , si scrive:

$$u_k(t) = u_{ke}(t_0) E_c(t_0) J(t, t_0) \quad (6.1.1)$$

quando, invece, le forze esterne sono variabili nel tempo si ha:

$$u_k(t) = E_c(t_0) \int_{t_0}^t J(t, \tau) du_{ke}(\tau), \quad (6.1.2)$$

che può essere scritta nel modo seguente, se il carico esterno assume un valore finito a partire dal tempo  $t = t_0$ :

$$u_k(t) = u_k(t_0) E_c(t_0) J(t, t_0) + E_c(t_0) \int_{t_0}^t J(t, \tau) du_{ke}(\tau). \quad (6.1.3)$$

Nel caso, invece, di una struttura omogenea con vincoli elastici il primo ed il secondo principio della viscosità lineare non possono essere applicati; in queste strutture, infatti, vi è contemporaneamente variazione dello stato di tensione e di deformazione. La soluzione, può essere dunque ottenuta, attraverso il metodo delle forze, assumendo a priori una configurazione equilibrata, nella quale sono evidenziate le forze incognite, ed imponendo che le deformazioni della struttura e dei vincoli siano compatibili. Le equazioni di compatibilità si scrivono in modo simile all'equazione (6.1.1) se i carichi esterni sono costanti ed all'equazione (6.1.2) se i carichi esterni sono variabili nel tempo.

Considerando, dunque, una generica struttura omogenea con vincoli elastici, soggetta a carichi esterni variabili nel tempo, a reazioni vincolari incognite  $X_j(t)$  ed a deformazioni non dipendenti dalla tensione (ad es. di ritiro o termiche), l'equazione di compatibilità nei vincoli elastici si scrive:

$$-a_{s,kk} X_k(t) = a_{nk}(t) + \left[ a_{k0}(t_0) + \sum_{j=1}^n a_{kj} X_j(t_0) \right] J(t, t_0) E_c(t_0) + E_c(t_0) \int_{t_0}^t J(t, \tau) da_{k0}(\tau) + E_c(t_0) \sum_{j=1}^n a_{kj} \int_{t_0}^t J(t, \tau) dX_j(\tau), \quad (k=1, \dots, n), \quad (6.1.4)$$

avendo indicato la deformazione dei vincoli elastici con la seguente relazione:

$$u_k(t) = -a_{s,kk} X_k(t). \quad (6.1.5)$$

I termini delle equazioni (6.1.4) e (6.1.5) rappresentano:

$X_j$  = reazione del  $j$ -esimo vincolo iperstatico;

$a_{s,kk}$  = deformabilità dei vincoli elastici nel punto  $k$  e nella direzione  $K$ ;

$a_{nk}(t)$  = deformazione del punto  $k$ , nella direzione  $K$ , dovuta a fenomeni non dipendenti dalla tensione (ritiro, deformazioni termiche, ecc.);

$a_{k0}$  = deformazione del punto  $k$  nella direzione  $K$ , dovuta ai carichi esterni, definita con modulo elastico  $E_c(t_0)$ ;

$a_{kj}$  = deformazione del punto  $k$ , nella direzione  $K$ , dovuta ad una forza unitaria diretta come la reazione iperstatica  $X_j$ , definita con modulo  $E_c(t_0)$ .

Se la struttura è realizzata da travi, si pone, come nella usuale analisi elastica:

$$a_{nk} = \int_S M_k d\varphi_n + \int_S N_k d\xi_n$$

$$E_c(t_0) a_{k0} = \int_S \frac{M_k M_0}{I} ds + \int_S \frac{N_k N_0}{I} ds$$

$$E_c(t_0) a_{kj} = \int_S \frac{M_k M_j}{I} ds + \int_S \frac{N_k N_j}{I} ds$$

dove:

$M_k, N_k$  = momento e sforzo normale dovuto a  $X_k = 1$ ;

$M_0, N_0$  = momento e sforzo normale dovuto ai carichi esterni;

$M_j, N_j$  = momento e sforzo normale dovuto a  $X_j$ ;

$d\varphi_n, d\xi_n$  = curvatura e deformazione assiale non dipendenti dalla tensione.

Si nota, inoltre, che quando  $t = t_0$  l'equazione (6.1.4) diventa:

$$-a_{s,kk} X_k(t_0) = a_{nk}(t_0) + a_{k0}(t_0) + \sum_{j=1}^n a_{kj} X_j(t_0) \quad (6.1.6)$$

e coincide con la soluzione elastica del problema.

L'equazione (6.1.4) rende possibile la soluzione di diversi tipi di problemi: in particolare, se gli  $n$  vincoli elastici sono stati introdotti prima dell'applicazione del carico, è necessario utilizzare nell'equazione risolutiva il valore  $X_j(t_0)$  della soluzione elastica

iniziale. Se, invece, gli  $n$  vincoli elastici vengono introdotti al tempo  $t_0^+$ , immediatamente

successivo all'applicazione del carico, si ha  $X_j(t_0) = 0$ . Quando, infine, viene applicata una deformazione imposta, al tempo  $t$ , il valore della reazione iniziale è quello che proviene dalla analisi elastica corrispondente.

In tutti i casi per ottenere il valore delle reazioni nel tempo è necessario risolvere numericamente un sistema di equazioni integrali di Volterra nelle incognite  $X_j$ .

L'equazione (6.1.4), infine, quando viene applicata alla soluzione di strutture composte da parti singolarmente omogenee, ma caratterizzate da diverse funzioni viscosità assume la seguente forma:

$$-a_{s,kk} X_k(t) = a_{nk}(t) + \sum_{\nu} \left\{ \left[ a_{k0}^{\nu}(t_0) + \sum_{j=1}^n a_{kj}^{\nu} X_j(t_0) \right] J^{\nu}(t, t_0) E_c^{\nu}(t_0) + \right. \\ \left. + E_c^{\nu}(t_0) \int_{t_0}^t J^{\nu}(t, \tau) da_{k0}^{\nu}(\tau) + E_c^{\nu}(t_0) \sum_{j=1}^n a_{kj}^{\nu} \int_{t_0}^t J^{\nu}(t, \tau) dX_j(\tau) \right\}, \quad (k=1, \dots, n) \quad (6.1.7)$$

dove con l'indice  $\nu$  si intende il numero di sottostrutture di materiale omogeneo in fase elastoviscosa.

## 6.1.2 Metodo delle deformazioni

L'analisi viscoelastica delle strutture, utilizzando il metodo delle deformazioni, si conduce considerando a priori, nella struttura principale, una configurazione compatibile, nella quale vengono esplicitati i parametri della deformazione, che costituiscono le incognite geometriche del problema. Le equazioni risolventi vengono dunque descritte considerando le equazioni di equilibrio in corrispondenza dei nodi della struttura [21,23].

Così come il metodo delle forze utilizza, per la formulazione delle equazioni risolventi, i coefficienti elastici di deformabilità, quello delle deformazioni adopera i coefficienti di rigidezza che rappresentano le forze e i momenti che sorgono ai nodi delle aste quando ad essi vengono applicati spostamenti o rotazioni di valore unitario.

Considerando il caso generale di una struttura omogenea con vincoli elastici, soggetta ad azioni statiche costanti nel tempo, in virtù del primo e del secondo principio della viscosità lineare, l'equazione di equilibrio al tempo  $t$  nella direzione  $k$  degli spostamenti si scrive:

$$X_{rk} + \sum_{j=1}^n b_{kj} y_j(t_0) \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{1}{E_c(t_0)} \sum_{j=1}^n b_{kj} \int_{t_0}^t R(t, \tau) dy_j(\tau) + \\ + b_{s,kj} y_j(t) = 0, \quad (k=1, \dots, n) \quad (6.1.8)$$

$y_j$  = spostamento del  $j$ -esimo nodo della struttura;

$b_{kj}$  = coefficiente di rigidezza del nodo  $k$  relativo ad uno spostamento (o rotazione)

unitario nel nodo  $j$  valutato con modulo elastico  $E_c(t_0)$ ;

$b_{s,kj}$  = coefficiente di rigidezza del vincolo elastico nel nodo  $k$  relativo ad uno spostamento (o rotazione) unitario nel nodo  $j$ ;

$X_{rk}$  = reazione del vincolo, nel punto  $k$ , supposto rigido, in funzione delle azioni esterne applicate.

Dall'equazione (6.1.8), quando  $t = t_0$ , si perviene alla impostazione elastica del problema:

$$X_{rk} + \sum_{j=1}^n b_{kj} y_j(t_0) + b_{s,kj} y_j(t_0) = 0 \quad (6.1.9)$$

Anche in questo caso, per ottenere il valore delle deformazioni nel tempo, è necessario risolvere un sistema di equazioni integrali di Volterra, nelle incognite  $y_j$ , definito dalla (6.1.8).

Il valore delle reazioni si ottiene, infine, sovrapponendo quello generato dalle azioni applicate, calcolato a vincoli rigidi, ovvero  $y_j(t) = 0$ , a quello prodotto dagli spostamenti  $y_j(t)$ . Il primo è costante nel tempo, come stabilito dal primo teorema della viscosità lineare, mentre il secondo, in accordo al secondo teorema della viscosità lineare, varia nel tempo in dipendenza del rilassamento della struttura viscoelastica omogenea.

Indicando rispettivamente con  $X_{rk}$  la reazione nel generico vincolo, nel nodo  $k$ , considerato rigido e con  $b_{kj}$  la rigidezza nello stesso nodo dovuta ad uno spostamento unitario  $y_j = 1$ , la reazione al tempo  $t$  si scrive:

$$X_k(t) = X_{rk} + \sum_{j=1}^n b_{kj} y_j(t_0) \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{1}{E_c(t_0)} \sum_{j=1}^n b_{kj} \int_{t_0}^t R(t, \tau) dy_j(\tau) \quad (6.1.10)$$

La (6.1.10) in corrispondenza di un vincolo elastico è equivalente alla

$$X_r(t) = b_{s,kj} y_j(t) \quad (6.1.11)$$

Anche per le sollecitazioni al tempo  $t$  si scrive:

$$S_k(t) = S_{kr} + \sum_{j=1}^n s_k(t_0) y_j(t_0) \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{1}{E_c(t_0)} \sum_{j=1}^n s_k(t_0) \int_{t_0}^t R(t, \tau) dy_j(\tau) \quad (6.1.12)$$

avendo indicato rispettivamente con  $S_{kr}$  ed  $s_k(t_0)$ , le sollecitazioni in una generica sezione  $k$ , delle quali la prima prodotta dalle azioni applicate con spostamenti nulli e la seconda corrispondente a quella elastica prodotta dallo spostamento  $y_j = 1$ .

L'equazione (6.1.8), quando viene applicata alla soluzione di sottostrutture composte di materiale omogeneo in fase elastoviscosa, assume la seguente espressione:

$$\sum_v \left[ X_{rk} + \sum_{j=1}^n b_{kj}^v y_j(t_0) \frac{R^v(t, t_0)}{E_0^v(t_0)} + \frac{1}{E_0^v(t_0)} \sum_{j=1}^n b_{kj}^v \int_{t_0}^t R^v(t, \tau) dy_j(\tau) \right] + b_{s,kj} y_j(t) = 0, \quad (k=1, \dots, n) \quad (6.1.13)$$

### Esempio 1. Struttura omogenea con un solo vincolo elastico

Questo esempio risulta interessante al fine di paragonare i metodi delle forze e delle deformazioni. Il calcolo di strutture con un solo vincolo elastico conduce, inoltre, ad un importante studio parametrico sul comportamento elastoviscoso al variare del rapporto tra la deformabilità della parte in calcestruzzo e quella del complesso struttura-vincolo elastico.

Tale rapporto, nel metodo delle forze, si può esprimere con la relazione  $\delta = a_{c,11} / (a_{c,11} + a_{s,11})$ , dove con indice  $c$  si intende la parte in calcestruzzo e con indice  $s$  si intende il vincolo elastico.

In tal modo si possono studiare tutti i casi compresi tra  $\delta = 0$ , corrispondente all'illimitata deformabilità del vincolo elastico,  $a_{s,11} \rightarrow \infty$ , e  $\delta = 1$ , relativo alla assoluta indeformabilità del vincolo,  $a_{s,11} = 0$ .

Come è noto, inoltre, nel caso di una deformazione imposta costante, i due casi estremi suddetti conducono ad un problema di viscosità per  $\delta = 0$ , e ad un problema di rilassamento per  $\delta = 1$ .

Tutti i casi intermedi risultano quindi di estremo interesse per le applicazioni pratiche nel calcolo di strutture elastoviscose [16,22].

#### Metodo delle forze

Considerando la struttura di figura (6.1.1) e volendo determinare con il metodo delle forze il valore della reazione che si sviluppa nel vincolo elastico al tempo  $t$  per effetto della deformazione iniziale  $u_0$  imposta, considerata positiva poiché diretta verso il basso e costante nel tempo, l'equazione risolutiva si ottiene particolarizzando la relazione (6.1.4):

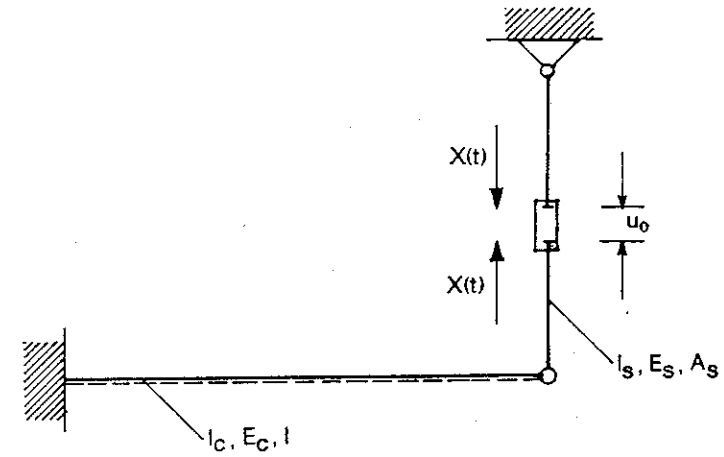


Figura 6.1.1: Struttura omogenea con vincolo elastico

$$+u_0 = a_{s,11} X(t) + a_{c,11} E_c(t_0) \int_0^t J(t, \tau) dX(\tau), \quad \text{con } a_{nk} = 0; a_{k0} = 0, \quad \text{che nell'istante}$$

iniziale da luogo alla soluzione elastica  $X(t_0) = \frac{u_0}{a_{s,11} + a_{c,11}}$ , nella quale

$$a_{s,11} = \frac{l_s}{E_s A_s}; \quad a_{c,11} = \frac{l_c^3}{3 E_c(t_0) I}.$$

L'equazione precedente in forma di sommatoria al tempo  $t_k$  diventa:

$$u_0 = a_{s,11} X(t_k) + a_{c,11} E_c(t_0) \sum_{i=1}^k \frac{\Delta X(t_i)}{2} [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1})];$$

ed al tempo  $t_{k-1}$ :

$$u_0 = a_{s,11} X(t_{k-1}) + a_{c,11} E_c(t_0) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Delta X(t_i)}{2} [J(t_{k-1}, t_i) + J(t_{k-1}, t_{i-1})];$$

sottraendo la seconda dalla prima si ha:

$$-a_{s,11}\Delta X(t_k) = \frac{a_{c,11}\Delta X(t_k) E_c(t_0)}{E_k''} + a_{c,11} E_c(t_0)\Delta u_k'';$$

avendo indicato con

$$E_k'' = \frac{2}{J(t_k, t_k) + J(t_k, t_{k-1})};$$

$$\Delta u''(t_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Delta X(t_i)}{2} [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1}) - J(t_{k-1}, t_i) - J(t_{k-1}, t_{i-1})].$$

Dividendo ambedue i membri dell'equazione per  $(a_{c,11} + a_{s,11})$ , si ottiene:

$$(\delta - 1)\Delta X(t_k) = \frac{\delta E_c(t_0) \Delta X(t_k)}{E_k''} + \delta E_c(t_0)\Delta u''(t_k)$$

dalla quale si ricava l'incremento  $\Delta X(t_k) = \frac{\Delta u''(t_k)}{\frac{(\delta - 1)}{\delta E_c(t_0)} - \frac{1}{E_k''}}$ .

Sommando questi contributi si ha infine il valore della reazione all'istante  $t_k$

$$X(t_k) = \sum_{j=1}^k \Delta X(t_j).$$

Dalla formula risolutiva si nota come per  $\delta = 1$  si ricade in un problema di rilassamento; per  $\delta = 0$  si determina, invece, un problema di viscosità, in cui la reazione vincolare rimane costante,  $\Delta X(t_k) = 0$ , mentre la deformazione si incrementa nel tempo in relazione alla legge di viscosità.

Il grafico dell'andamento della reazione adimensionalizzata  $\frac{X(t_k)}{X(t_0)}$  in funzione di

$\delta = 0,5$  e per il caso  $RH\% = 80$ ,  $f_{ck} = 30$  MPa,  $2A_c/u = 200$  mm è rappresentato nella figura (6.1.2).

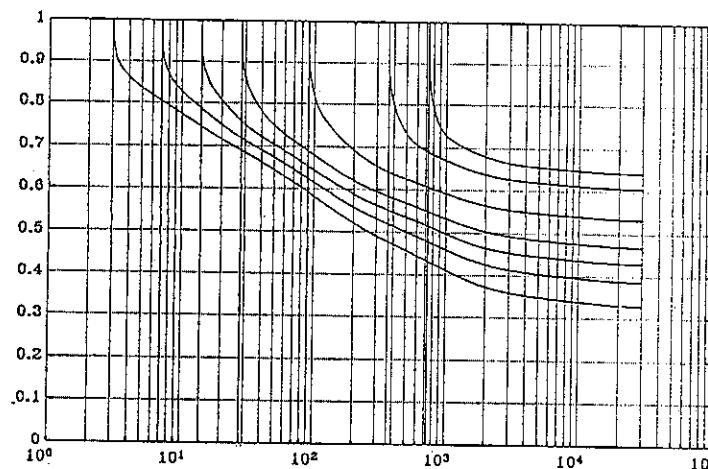


Figura 6.1.2: Andamento della reazione  $X(t)/X(t_0)$ , per  $\delta = 0,5$ , calcolata con il metodo delle forze

#### Metodo delle deformazioni

Adottando il metodo delle deformazioni l'equazione risolutiva si ottiene dalla relazione (6.1.8)

$$X_r + b_{c,11} u(t_0) \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{b_{c,11}}{E_c(t_0)} \int_0^t R(t, \tau) du(t) + b_{s,11} u(t) = 0$$

dove  $X_r$  è la reazione del vincolo elastico supposto rigido,  $b_{c,11} = -\frac{3 E_c(t_0) I}{l^3}$ ,

$b_{s,11} = -\frac{E_s A_s}{l_s}$ , che, nell'istante iniziale dà luogo alla soluzione elastica

$$u(t_0) = -\frac{X_r}{b_{c,11} + b_{s,11}}$$

che fornisce il seguente valore della reazione iniziale

$$X(t_0) = b_{s,11} u(t_0) = -\frac{X_r b_{s,11}}{b_{c,11} + b_{s,11}}$$

L'equazione risolutiva in forma di sommatoria al tempo  $t_k$  diventa:

$$X_r + \frac{b_{c,11}}{E_c(t_0)} \sum_{i=1}^k \frac{\Delta u(t_i)}{2} [R(t_k, t_i) + R(t_k, t_{i-1})] + b_{s,11} u(t_k) = 0$$

ed al tempo  $t_{k-1}$

$$X_r + \frac{b_{c,11}}{E_c(t_0)} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Delta u(t_i)}{2} [R(t_{k-1}, t_i) + R(t_{k-1}, t_{i-1})] + b_{s,11} u(t_{k-1}) = 0.$$

Sottraendo la seconda dalla prima si ha:

$$-b_{s,11} \Delta u(t_k) = E_k'' \left[ \frac{b_{c,11}}{E_c(t_0)} \Delta u(t_k) + \frac{b_{c,11}}{E_c(t_0)} \Delta u''(t_k) \right]$$

avendo indicato con

$$E_k'' = \frac{[R(t_k, t_k) + R(t_k, t_{k-1})]}{2};$$

$$\Delta u''(t_k) = \frac{1}{E_k''} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Delta u(t_i)}{2} [R(t_k, t_i) + R(t_k, t_{i-1}) - R(t_{k-1}, t_i) - R(t_{k-1}, t_{i-1})];$$

dividendo ambedue i membri dell'equazione per  $(b_{c,11} + b_{s,11})$ , si ottiene

$$-\delta \Delta u(t_k) = \frac{(1-\delta) E_k''}{E_c(t_0)} [\Delta u(t_k) + \Delta u''(t_k)];$$

dalla quale si ricava l'incremento  $\Delta u(t_k)$  all'istante  $t_k$

$$\Delta u(t_k) = \frac{(\delta-1) \Delta u''(t_k)}{E_c(t_0) \delta + (1-\delta)}$$

Sommando questi contributi si ha il valore della deformazione all'istante  $t_k$

$$u(t_k) = \sum_{j=1}^k \Delta u(t_j),$$

rappresentata per il caso  $\delta=0,5$ ;  $R.H.=80\%$ ,  $f_{ck}=30$  MPa,  $2A_c/u=200$  mm, nella figura (6.1.3), per la cui determinazione è stata utilizzata la formulazione diretta delle funzioni rilassamento, che consente una drastica riduzione dell'onere computazionale poiché la matrice diagonale delle  $R(t_k, t_i)$  non deve essere ottenuta invertendo l'equazione integrale di Volterra.

Dalla formula risolutiva si nota come per  $\delta=1$  si determina un problema di rilassamento poiché  $\Delta u(t_k)=0$  la deformazione impressa rimane costante nel tempo ed uguale a quella iniziale; per  $\delta=0$  si ricade in un problema di viscosità, poiché la deformazione varia secondo la legge di viscosità.

Per ricavare l'andamento nel tempo della reazione vincolare si utilizza infine l'equazione (6.1.10).

Il grafico dell'andamento della reazione adimensionalizzata  $\frac{X(t_k)}{X(t_0)}$  in funzione del

valore  $\delta=0,5$  e per il caso  $R.H.=80\%$ ,  $f_{ck}=30$  MPa,  $2A_c/u=200$  mm è rappresentato nella figura (6.1.4).

In questo caso, per l'esistenza del vincolo elastico, vale anche la relazione:  $X(t)/X(t_0) \equiv u(t)/u(t_0)$ , per cui il grafico della reazione adimensionata ha lo stesso andamento della deformazione del vincolo elastico.

Dal confronto dei grafici ottenuti mediante il metodo delle forze e delle deformazioni risulta una perfetta corrispondenza per la soluzione del problema in esame.

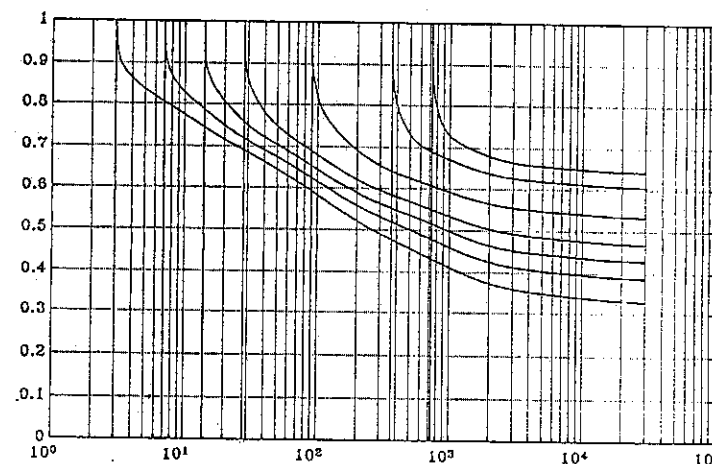


Figura 6.1.3: Andamento della deformazione  $u(t)/u(t_0)$  per  $\delta=0,5$

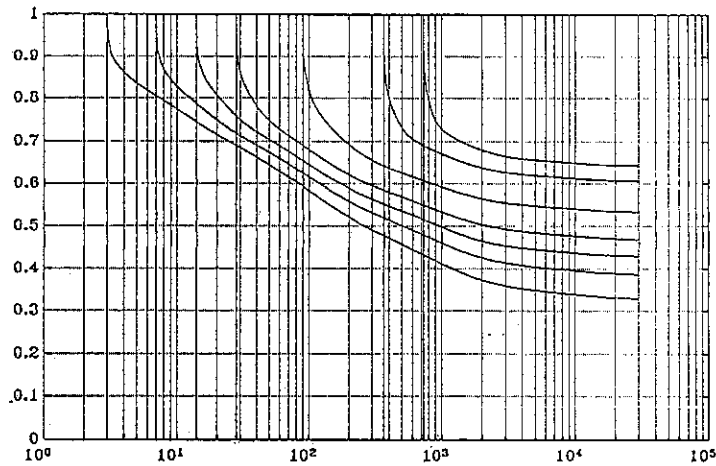


Figura 6.1.4: Andamento della  $X(t)/X(t_0)$  per  $\delta=0,5$  calcolata con il metodo delle deformazioni

### 6.1.3 Strutture eterogenee caratterizzate da un diverso comportamento viscoso

In questo paragrafo si considera la particolare classe di strutture eterogenee, formate da sottostrutture singolarmente omogenee caratterizzate ciascuna da un diverso comportamento viscoso. Per semplicità si fa riferimento a strutture realizzate mediante la connessione di due sole sottostrutture, le cui proprietà reologiche vengono descritte da due funzioni viscosità  $J^1(t-\Delta t, t_0^1)$  e  $J^2(t, t_0^2)$ , nelle quali  $t$  è la variabile temporale di riferimento,  $t_0^s$  ( $s=1,2$ ) sono gli istanti di applicazione delle azioni statiche (mantenute costanti nel tempo), mentre  $\Delta t$  è la differenza di età fra i getti delle due sottostrutture. Le travi soggette nella loro configurazione iniziale al carico permanente, continuano a deformarsi gradualmente nel tempo per la viscosità del materiale; all'istante  $t^* \geq t_0^s$  viene modificato lo schema statico con l'introduzione di un vincolo che impone, nel suo punto di applicazione, la congruenza tra gli spostamenti che si manifestano dall'istante  $t^*$  in poi.

In regime di viscosità lineare, impiegando il metodo delle forze, la scrittura dell'equazione generale di compatibilità con il vincolo posticipato, introdotto all'istante  $t^* \geq t_0^s$ , conduce alla seguente equazione integrale di Volterra [24] ottenuta dall'equazione (6.1.7):

$$0 = a_{10}^1 E_c^1(t_0^1) \left[ J^1(t - \Delta t, t_0^1) - J^1(t^* - \Delta t, t_0^1) \right] + a_{10}^2 E_c^2(t_0^2) \left[ J^2(t, t_0^2) - J^2(t^*, t_0^2) \right] + \\ + a_{11}^1 E_c^1(t_0^1) \int_{t^*}^t J^1(t - \Delta t, \tau - \Delta t) dX(\tau) + a_{11}^2 E_c^2(t_0^2) \int_{t^*}^t J^2(t, \tau) dX(\tau);$$

dove:

$a_{10}^s$  ed  $a_{11}^s$ , ( $s=1,2$ ), sono i coefficienti di deformabilità della prima e della seconda sottostruttura nel punto in cui viene inserito il vincolo;

$E_c^s(t_0^s)$ , ( $s=1,2$ ), è il modulo di elasticità del conglomerato all'istante  $t_0^s$  di applicazione del carico;

$X(t)$  è la reazione iperstatica che si verifica al tempo  $t$  nella struttura per effetto dell'introduzione del vincolo al tempo  $t^*$ .

Se, invece, il vincolo è introdotto in coincidenza dell'istante iniziale di carico delle due travi, l'equazione precedente si semplifica come segue:

$$0 = a_{10}^1 E_c^1(t_0^1) J^1(t - \Delta t, t_0^1) + a_{10}^2 E_c^2(t_0^2) J^2(t, t_0^2) + \\ + a_{11}^1 E_c^1(t_0^1) \int_{t^*}^t J^1(t - \Delta t, \tau - \Delta t) dX(\tau) + a_{11}^2 E_c^2(t_0^2) \int_{t^*}^t J^2(t, \tau) dX(\tau).$$

#### Esempio 1. Struttura eterogenea soggetta a carichi permanenti

In riferimento alla formulazione del paragrafo precedente si consideri la struttura di figura (6.1.5) composta da due travi gettate in due tempi diversi: BC anteriormente e scasserata all'età di 28 giorni ( $t_0^2$ ); AB gettata ventuno giorni dopo e scasserata all'età di 7 giorni ( $t_0^1$ ). Le travi, sollecitate dal solo peso proprio, vengono collegate mediante una cerniera al taglio, nello stesso istante  $t^* = t_0^1 = t_0^2$  nel quale sono liberate dai casseri.

L'istante d'imposizione del vincolo  $t^*$  è coincidente dunque con l'istante iniziale di carico delle due travi.

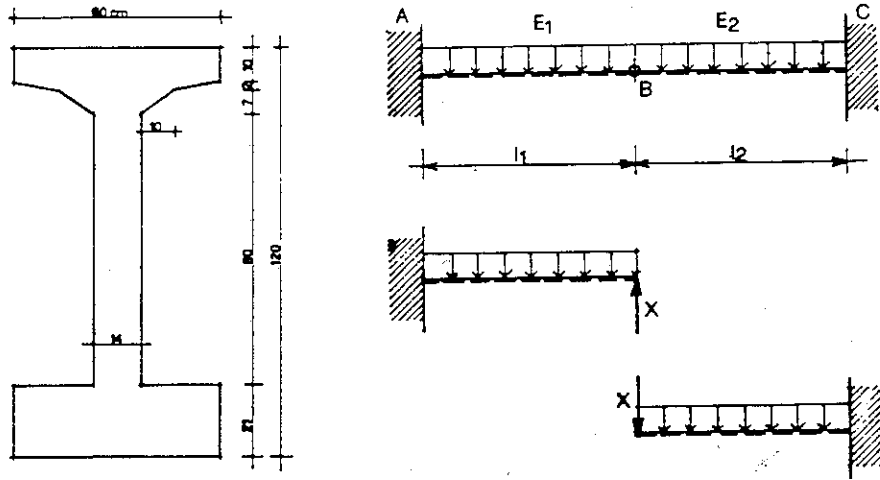


Figura 6.1.5: Struttura eterogenea soggetta a cambiamento di schema statico

### Metodo delle forze

Nel caso particolare, i coefficienti di deformabilità dell'equazione di congruenza assumono i seguenti valori:

$$a_{10}^1 = \frac{ql_1^4}{8E_c^1(t_0^1)I}; \quad a_{10}^2 = -\frac{ql_2^4}{8E_c^2(t_0^2)I}; \quad a_{11}^1 = \frac{l_1^3}{3E_c^1(t_0^1)I}; \quad a_{11}^2 = \frac{l_2^3}{3E_c^2(t_0^2)I},$$

mentre  $\Delta t = 21$ gg. è la differenza di età fra i getti delle due sottostrutture.

La soluzione elastica del problema è dunque:  $X(t_0) = \frac{a_{10}^1 + a_{10}^2}{a_{11}^1 + a_{11}^2}$ , il cui valore è nullo

quando  $a_{10}^1 = a_{10}^2$ . Per determinare la variazione della  $X(t)$  nel tempo, si scrive l'equazione integrale in forma di sommatoria al tempo  $t_k$  e sottraendo la stessa al tempo  $t_{k-1}$  si ha:

$$0 = \Delta a_{10}^{n1}(t_k) + \Delta a_{10}^{n2}(t_k) + \frac{a_{11}^1 E_c^1(t_0^1) \Delta X(t_k)}{E_k^{n1}} + \frac{a_{11}^2 E_c^2(t_0^2) \Delta X(t_k)}{E_k^{n2}} + a_{11}^1 E_c^1(t_0^1) \Delta y^{n1}(t_k) + a_{11}^2 E_c^2(t_0^2) \Delta y^{n2}(t_k)$$

avendo indicato con:

$$\Delta a_{10}^{ns}(t_k) = a_{10}^s E_c^s(t_0^s) [J^s(t_k, t_0^s) - J^s(t_{k-1}, t_0^s)],$$

gli incrementi delle deformazioni viscosi nel tempo, dovute ai carichi esterni, calcolate in ognuna delle due travi e con:

$$E_k^{ns} = \frac{2}{[J^s(t_k, t_k) + J^s(t_k, t_{k-1})]},$$

$$\Delta y^{ns}(t_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Delta X(t_i)}{2} [J^s(t_k, t_i) + J^s(t_{k-1}, t_{i-1}) - J^s(t_{k-1}, t_i) - J^s(t_k, t_{i-1})].$$

Dalla equazione incrementale si ricava:

$$\Delta X(t_k) = - \left[ \Delta a_{10}^{n1}(t_k) + \Delta a_{10}^{n2}(t_k) + a_{11}^1 E_c^1(t_0^1) \Delta y^{n1}(t_k) + a_{11}^2 E_c^2(t_0^2) \Delta y^{n2}(t_k) \right] \cdot \left[ \frac{E_k^{n1} \cdot E_k^{n2}}{a_{11}^1 E_c^1(t_0^1) E_k^{n2} + a_{11}^2 E_c^2(t_0^2) E_k^{n1}} \right]$$

Sommando questi contributi si ha infine il valore della reazione all'istante  $t_k$ :

$$X(t_k) = \sum_{j=1}^k \Delta X(t_j).$$

Assumendo i seguenti valori delle caratteristiche geometriche e dei parametri reologici delle due sottostrutture:

$$\left\{ \begin{array}{l} q = 10 \text{ KN/m} \\ h_1 = h_2 = 10 \text{ m} \\ I_1 = I_2 = 6 \times 10^{-2} \text{ m}^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E_c^1(t_0 = 7) = 28794 \text{ MPa} \\ E_c^2(t_0 = 28) = 32643 \text{ MPa} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2A_c/u = h_0 = 170 \text{ mm} \\ f_{ck} = 35 \text{ MPa} \\ R.H. = 50\% \end{array} \right.$$

e risolvendo l'equazione integrale di Volterra, dai grafici della figura (6.1.6) risulta l'andamento nel tempo della reazione  $X(t)/X(t_0)$  in corrispondenza della cerniera a taglio; il diagramma dei momenti flettenti e del taglio nell'istante iniziale di carico ed al tempo infinito sono rappresentati in figura (6.1.7).

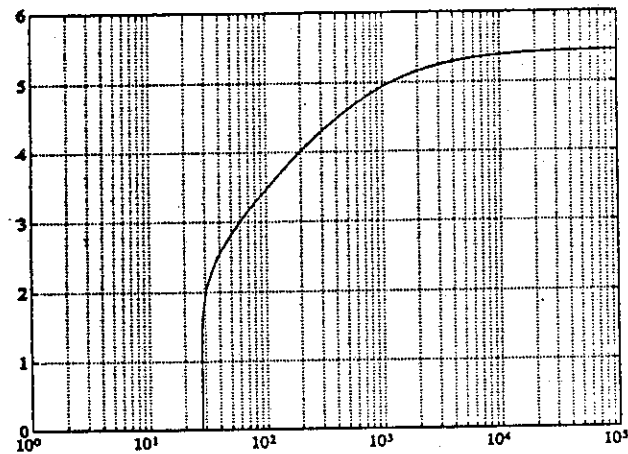


Figura 6.1.6: Andamento della  $X(t)/X(t_0)$

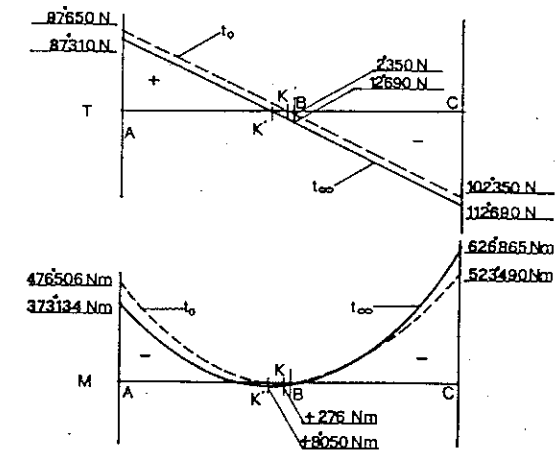


Figura 6.1.7: Diagrammi dei momenti flettenti e del taglio

#### Metodo delle deformazioni

Applicando il metodo delle deformazioni l'equazione risolutiva assume la seguente forma:

$$X_r + b_{c,11}^1 y(t_0) \frac{R^1(t, t_0^1)}{E_c^1(t_0^1)} + \frac{b_{c,11}^1}{E_c^1(t_0^1)} \int_{t_0^1}^t R^1(t, \tau) dy(\tau) + b_{c,11}^2 y(t_0) \frac{R^2(t, t_0^2)}{E_c^2(t_0^2)} + \frac{b_{c,11}^2}{E_c^2(t_0^2)} \int_{t_0^2}^t R^2(t, \tau) dy(\tau) = 0$$

dove  $X_r = \left( \frac{3}{8} q h_1 + \frac{3}{8} q h_2 \right)$  è la reazione del vincolo introdotto, supposto rigido;

$$b_{c,11}^1 = -\frac{3 E_c^1(t_0^1) I}{l_1^3}; \quad b_{c,11}^2 = -\frac{3 E_c^2(t_0^2) I}{l_2^3};$$

che nell'istante iniziale dà luogo alla soluzione elastica



$$X_r + b_{c,11}^1 y(t_0) + b_{c,11}^2 y(t_0) = 0$$

dalla quale si determina la deformazione iniziale

$$y(t_0) = -\frac{X_r}{b_{c,11}^1 + b_{c,11}^2}$$

che fornisce i valori delle reazioni iperstatiche  $X^1(t_0) = -X^2(t_0)$ , all'istante iniziale a

sinistra ed a destra del vincolo introdotto dove,  $X^1(t_0) = y(t_0) b_{c,11}^1 + \frac{3}{8} q l_1$  e

$$X^2(t_0) = -y(t_0) b_{c,11}^2 - \frac{3}{8} q l_2.$$

Per determinare la variazione della  $y(t)$  nel tempo, si scrive l'equazione integrale in forma di sommatoria al tempo  $t_k$  e sottraendo la stessa al tempo  $t_{k-1}$  si ha:

$$0 = E_k^1 \left[ \frac{b_{c,11}^1}{E_c^1(t_0^1)} \Delta y(t_k) + \frac{b_{c,11}^1}{E_c^1(t_0^1)} \Delta y^1(t_k) \right] + E_k^2 \left[ \frac{b_{c,11}^2}{E_c^2(t_0^2)} \Delta y(t_k) + \frac{b_{c,11}^2}{E_c^2(t_0^2)} \Delta y^2(t_k) \right]$$

avendo indicato con

$$E_k^s = \frac{R^s(t_k, t_k) + R^s(t_k, t_{k-1})}{2}$$

$$\Delta y^s(t_k) = \frac{1}{E_k^s} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\Delta y(t_i)}{2} \left[ R^s(t_k, t_i) + R^s(t_k, t_{i-1}) - R^s(t_{k-1}, t_i) - R^s(t_{k-1}, t_{i-1}) \right]$$

dalla quale si ricava l'incremento  $\Delta y(t_k)$  all'istante  $t_k$ :

$$\Delta y(t_k) = - \left[ E_k^1 \frac{b_{c,11}^1}{E_c^1(t_0^1)} \Delta y^1(t_k) + E_k^2 \frac{b_{c,11}^2}{E_c^2(t_0^2)} \Delta y^2(t_k) \right] \cdot \left[ \frac{E_c^1(t_0^1) E_c^2(t_0^2)}{E_k^1 b_{c,11}^1 E_c^2(t_0^2) + E_k^2 b_{c,11}^2 E_c^1(t_0^1)} \right]$$

Sommando questi contributi si ha infine il valore della deformazione all'istante  $t_k$

$$y(t_k) = \sum_{j=1}^k \Delta y(t_j).$$

Per ricavare l'andamento nel tempo delle reazioni iperstatiche  $X^1(t), X^2(t)$  si utilizzano, infine, le seguenti equazioni:

$$X^1(t) = X^2(t)$$

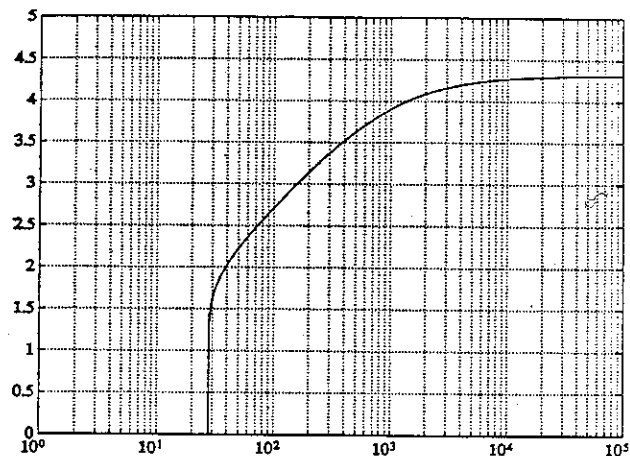
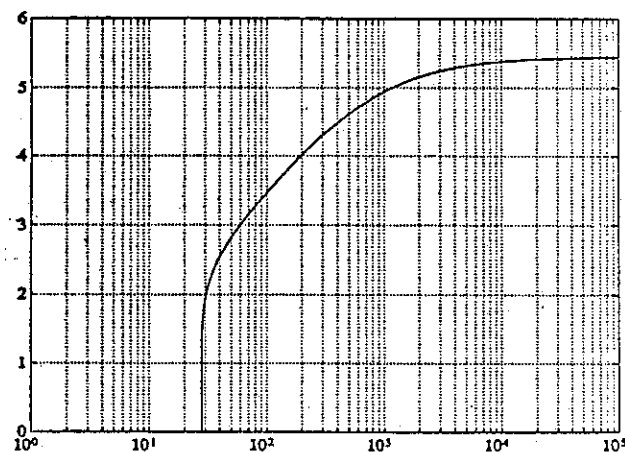
con

$$X^1(t) = \frac{3}{8} q l_1 + b_{c,11}^1 y(t_0) \frac{R^1(t, t_0^1)}{E_c^1(t_0^1)} + \frac{b_{c,11}^1}{E_c^1(t_0^1)} \int_{t_0^1}^t R^1(t, \tau) dy(\tau)$$

$$X^2(t) = -\frac{3}{8} q l_2 - b_{c,11}^2 y(t_0) \frac{R^2(t, t_0^2)}{E_c^2(t_0^2)} - \frac{b_{c,11}^2}{E_c^2(t_0^2)} \int_{t_0^2}^t R^2(t, \tau) dy(\tau)$$

dove le  $R^1(t, \tau), R^2(t, \tau)$  vengono ricavate mediante la formulazione diretta delle funzioni rilassamento.

La figura (6.1.8) rappresenta il grafico della deformazione  $y(t)/y(t_0)$  nel tempo, mentre l'andamento delle reazioni  $X^s(t)/X^s(t_0)$  in corrispondenza della cerniera a taglio è rappresentata in figura (6.1.9). I grafici ottenuti dai metodi delle forze e delle deformazioni corrispondono perfettamente.

Figura 6.1.8: Andamento della  $y(t)/y(t_0)$ Figura 6.1.9: Andamento delle  $X^s(t)/X^s(t_0)$ , ( $s=1,2$ )

## 6.2 Applicazione del metodo differenziale

Si è già accennato ai vantaggi che si ottengono nel calcolo viscoelastico delle strutture utilizzando la formulazione differenziale *elastica-quasi elastica* che esprime la relazione tra le tensioni e le deformazioni legata al modello delle catene di Maxwell, piuttosto che adoperare il metodo generale delle equazioni integrali di Volterra che richiedono un oneroso impegno computazionale.

Come è già stato evidenziato, infatti, ambedue le formulazioni, adottando il principio di sovrapposizione, conducono alla stessa relazione incrementale tra le tensioni e le deformazioni per una storia di tensione variabile nel tempo:

$$\Delta \varepsilon_r = \frac{\Delta \sigma_r}{E_r} + \Delta \varepsilon_r'' \quad (6.2.1)$$

L'identità tra i due procedimenti si può caratterizzare per mezzo del primo principio della viscosità lineare che nelle equazioni integrali associa, come è noto [16], le relazioni tensioni-deformazioni ed azioni-spostamenti, in un punto  $k$  della struttura:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t, \tau) d\sigma(\tau) + \varepsilon_n(t) \quad (6.2.2)$$

$$u_k(t) = E_c(t_0) \int_0^t J(t, \tau) du_{ke}(\tau) + u_{kn}(t) \quad (6.2.3)$$

evidenziando in particolare la corrispondenza

$$\varepsilon(t) \rightarrow u_k(t) \quad (6.2.4)$$

$$\sigma(t) \rightarrow E_c(t_0) u_{ke}(t)$$

dove il termine  $u_{ke}(t)$  indica la deformazione per effetto dei carichi esterni variabili nel tempo, in un punto generico della struttura.

Applicando, dunque, il metodo differenziale al calcolo strutturale, bisogna ugualmente associare alla deformazione  $\varepsilon(t)$  del modello di Maxwell lo spostamento  $u_k(t)$  della struttura discretizzata, ed alla tensione relativa ad ogni ramo della catena  $\sigma_\mu(t)$  il prodotto  $E_c(t_0) u_{\mu ke}(t)$ , con la condizione:

$$E_c(t_0) \sum_{\mu=1}^n u_{\mu ke}(t) = E_c(t_0) u_{ke}(t)$$

nella quale  $n = m + 1$  rappresenta il numero delle catene del modello adottato.

Nell'ambito del metodo delle forze, per chiarire l'analogia tra la formulazione integrale e quella differenziale, si consideri una generica struttura omogenea con vincoli elastici, soggetta a carichi variabili nel tempo, a reazioni vincolari incognite  $X_j(t)$  ed a deformazioni non dipendenti dalla tensione. Per questa struttura, l'equazione di

compatibilità nei vincoli elastici si ottiene sottraendo l'equazione (6.1.4), scritta al tempo  $t_{r-1}$  dalla stessa valutata al tempo  $t_r$ :

$$-a_{s,kk} \Delta X_k(t_r) = \Delta a_{nk}(t_r) + \frac{\Delta a_{k0}(t_r) E_c(t_0)}{E_r''} + \Delta a_{k0}''(t_r) +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \frac{a_{kj} \Delta X_j(t_r) E_c(t_0)}{E_r''} + \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta u_k''(t_r), \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (6.2.5)$$

dove:

$\Delta a_{nk}(t_r)$  = incremento della deformazione del punto  $k$ , nella direzione  $k$ , dovuta a fenomeni non dipendenti dalla tensione (ritiro, variazioni termiche);

$\Delta a_{k0}(t_r)$  = incremento elastico della deformazione del punto  $k$ , nella direzione  $k$ , al tempo  $t_r$  per effetto della variazione nello stesso istante dei carichi applicati;

$$\Delta a_{k0}''(t_r) = \sum_{i=1}^{r-1} E_c(t_0) \frac{\Delta a_{k0}(t_i)}{2} [J(t_r, t_i) + J(t_r, t_{i-1}) - J(t_{r-1}, t_i) - J(t_{r-1}, t_{i-1})],$$

incremento viscoso della deformazione del punto  $k$ , al tempo  $t_r$ , dovuto a precedenti variazioni del carico esterno;

$a_{kj}$  = deformabilità del punto  $k$  dovuta ad una forza unitaria diretta come la  $X_j$ ;

$$\Delta u_k''(t_r) = \sum_{i=1}^{r-1} E_c(t_0) \frac{\Delta X_j(t_i)}{2} [J(t_r, t_i) + J(t_r, t_{i-1}) - J(t_{r-1}, t_i) - J(t_{r-1}, t_{i-1})],$$

incremento viscoso della deformazione del punto  $k$  al tempo  $t_r$ , dovuto alle precedenti variazioni  $\Delta X(t_i)$ ;

$$E_r'' = \frac{2}{[J(t_r, t_r) + J(t_r, t_{r-1})]},$$

modulo pseudo elastico istantaneo.

Adottando invece la formulazione differenziale si può scrivere direttamente, in conformità alla relazione costitutiva del modello di Maxwell, al tempo  $t_r$ :

$$\Delta u_k(t_r) = \Delta a_{nk}(t_r) + \frac{\Delta a_{k0}(t_r) E_c(t_0)}{E_r''} + \frac{\sum (1 - e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_\mu}}) a_{\mu k0}(t_{r-1}) E_c(t_0)}{E_r''} +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \frac{a_{kj} \Delta X_j(t_r) E_c(t_0)}{E_r''} + \frac{\sum (1 - e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_\mu}}) a_{ij} X_{\mu j}(t_{r-1}) E_c(t_0)}{E_r''};$$

$(k=1, 2, \dots, n); (j=1, 2, \dots, n); (\mu=1, 2, \dots, m+1), \quad (6.2.6)$

dove  $(m+1)$  è il numero di rami del modello di Maxwell adottato e

$$E_r'' = \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}} + E_{\infty r - \frac{1}{2}}$$

rappresenta il modulo pseudo-elastico.

Per ogni ramo del modello vale, inoltre, la seguente relazione:

$$a_{\mu k0}(t_r) E_c(t_0) + \sum_{j=1}^n a_{kj} X_{\mu j}(t_r) E_c(t_0) = a_{\mu k0}(t_{r-1}) e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_\mu}} E_c(t_0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^n a_{kj} X_{\mu j}(t_{r-1}) E_c(t_0) e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_\mu}} + \lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}} [\Delta u_k(t_r) - \Delta a_{nk}(t_r)], \quad (6.2.7)$$

nella quale all'istante iniziale, i valori di  $a_{k0}(t_0) = \sum_{\mu} a_{\mu k0}(t_0)$ ,  $X_j(t_0) = \sum_{\mu} X_{\mu j}(t_0)$  si ripartiscono sulle  $m+1$  catene mediante le:

$$a_{\mu k0}(t_0) = \frac{a_{k0}(t_0) E_{\mu}(t_0)}{\sum_{\mu} E_{\mu}(t_0)}, \quad X_{\mu j}(t_0) = \frac{X_j(t_0) E_{\mu}(t_0)}{\sum_{\mu} E_{\mu}(t_0)} \quad (6.2.8)$$

Nella (6.2.7) gli  $a_{\mu k 0}(t_r)$  sono noti ad ogni passo, in quanto corrispondono alla deformazione viscosa, mentre le  $X_{\mu j}(t_r)$  si determinano dalla (6.2.7) sostituendo il valore di  $[\Delta u_k(t_r) - \Delta a_{nk}(t_r)]$  ricavato dalla (6.2.6).

Confrontando le (6.2.5) e (6.2.6) si rileva come i termini:

$$E_r'' = \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu r} F_{\mu r - \frac{1}{2}} + E_{\infty r - \frac{1}{2}} = \frac{2}{J(t_r, t_r) + J(t_r, t_{r-1})};$$

$$\Delta a_{k0}''(t_r) = \frac{\mu \sum (1 - e^{-\tau_{\mu} \frac{\Delta t_r}{\tau_{\mu}}}) a_{\mu k 0}(t_{r-1}) E_c(t_0)}{E_r''};$$

$$a_{kj} E_c(t_0) \Delta u_k''(t_0) = \frac{\mu \sum (1 - e^{-\tau_{\mu} \frac{\Delta t_r}{\tau_{\mu}}}) a_{kj} X_{\mu j}(t_{r-1}) E_c(t_0)}{E_r''};$$

coincidono ad ogni passo  $\Delta t_r = (t_r - t_{r-1})$ .

## Esempio 1. Deformazione di una trave con carico variabile nel tempo

### Metodo integrale

In applicazione del primo principio, adottando la formulazione integrale per il calcolo dello spostamento verticale  $u_k(t_r)$ , al tempo  $t_r$ , nel punto  $k$ , della trave di figura (6.2.1), sollecitata da un carico  $P_k(t)$  variabile nel tempo, la relazione (6.2.3) viene scritta in forma di sommatoria adottando la regola dei trapezi:

$$u_k(t_r) = \sum_{i=1}^r E_c(t_0) \frac{\Delta a_{k0}(t_i)}{2} [J(t_r, t_i) + J(t_r, t_{i-1})]$$

che al tempo  $t_{r-1}$  diventa:

$$u_k(t_{r-1}) = \sum_{i=1}^{r-1} E_c(t_0) \frac{\Delta a_{k0}(t_i)}{2} [J(t_{r-1}, t_i) + J(t_{r-1}, t_{i-1})]$$

Sottraendo la seconda dalla prima si ha l'equazione incrementale:

$$\Delta u_k(t_r) = \frac{\Delta a_{k0}(t_r) E_c(t_0)}{E_r''} + \Delta a_{k0}''(t_r)$$

dove:

$\Delta u_k(t_r)$ , incremento viscoelastico dello spostamento del punto  $k$  al tempo  $t_r$ ;

$\Delta a_{k0}(t_r)$ , incremento elastico della deformabilità della trave al tempo  $t_r$  per effetto della variazione nello stesso istante del carico applicato;

$$\Delta a_{k0}''(t_r) = \sum_{i=1}^{r-1} E_c(t_0) \frac{\Delta a_{k0}(t_i)}{2} [J(t_r, t_i) + J(t_r, t_{i-1}) - J(t_{r-1}, t_i) - J(t_{r-1}, t_{i-1})],$$

rappresenta l'incremento viscoso dello spostamento del punto  $k$  al tempo  $t_r$ ;

$$E_r'' = \frac{2}{[J(t_r, t_r) + J(t_r, t_{r-1})]}, \text{ modulo pseudo-elastico istantaneo;}$$

$E_c(t_0)$ , modulo elastico del calcestruzzo nell'istante iniziale di carico.

### Metodo differenziale

Adottando invece la formulazione differenziale si può scrivere direttamente:

$$\Delta u_k(t_r) = \frac{\Delta a_{k0}(t_r) E_c(t_0)}{E_r''} + \frac{\sum (1 - e^{-\Delta t_r / \tau_{\mu}}) a_{k0\mu}(t_{r-1}) E_c(t_0)}{E_r''}, \quad (a)$$

con:

$$a_{k0\mu}(t_r) E_c(t_0) = a_{k0\mu}(t_{r-1}) E_c(t_0) e^{-\Delta t_r / \tau_{\mu}} + \lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}} \Delta u_k(t_r). \quad (b)$$

Nella relazione incrementale (a) il termine

$$E_r'' = \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}} + E_{\infty r - \frac{1}{2}}$$

rappresenta il modulo pseudo-elastico dipendente dal modello di Maxwell adottato ed il termine

$$\Delta a_{k0}''(t_r) = \frac{\sum_{\mu} (1 - e^{-\Delta t_r / \tau_{\mu}}) a_{k0\mu}(t_{r-1}) E_{\mu}(t_0)}{E_r''}$$

è l'incremento viscoso dello spostamento del punto  $k$  all'istante  $t_r$ .

Inoltre, nell'istante iniziale il valore di  $a_{k0}(t_0) = \sum_{\mu} a_{k0\mu}(t_0)$ , si ripartisce sulle

$n = m + 1$  catene mediante la  $a_{k0\mu}(t_0) = \frac{a_{k0}(t_0) E_{\mu}(t_0)}{\sum_{\mu} E_{\mu}(t_0)}$ , mentre gli  $a_{\mu k0}(t_r)$  si

determinano ad ogni passo dalla (b) sostituendo il valore di  $\Delta u_k(t_r)$  ricavato dalla (a).

In qualunque istante  $t_r$ , i risultati delle due formulazioni coincidono; tuttavia, mentre nel calcolo dei  $\Delta u_k(t_r)$  con il metodo generale è necessario conservare tutti i valori  $\Delta a_{k0}(t_i)$  dei tempi precedenti, con il metodo differenziale è sufficiente aggiornare ad ogni passo i valori di  $a_{k0\mu}(t_r)$ , trascurando tutti i passi precedenti.

Per verificare l'analogia si adotta per il calcolo della deformazione del punto  $k$  della trave di figura (6.2.1), avente le seguenti caratteristiche reologiche:  $R.H. = 50\%$ ,  $f_{ck} = 30\text{MPa}$ ,  $2A_c / u = 100\text{ mm}$ , una storia di carico come quella rappresentata, calibrando i parametri della catena di Maxwell mediante il modello a sette rami corrispondente alla formulazione CEB 90.

Dai diagrammi di figura (6.2.2) che rappresentano il rapporto tra l'evoluzione della deformazione nel tempo e quella iniziale  $u_k(t)/u_k(t_0)$  si nota come i risultati siano in perfetto accordo.

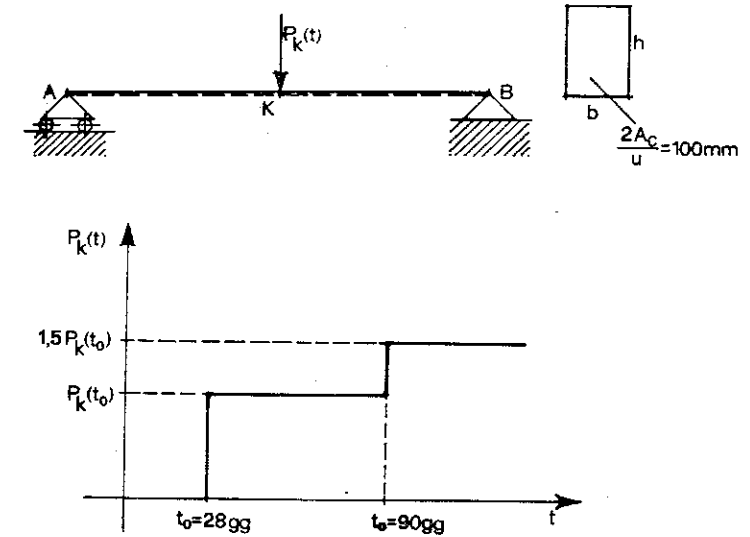


Figura 6.2.1: Trave con carico variabile nel tempo

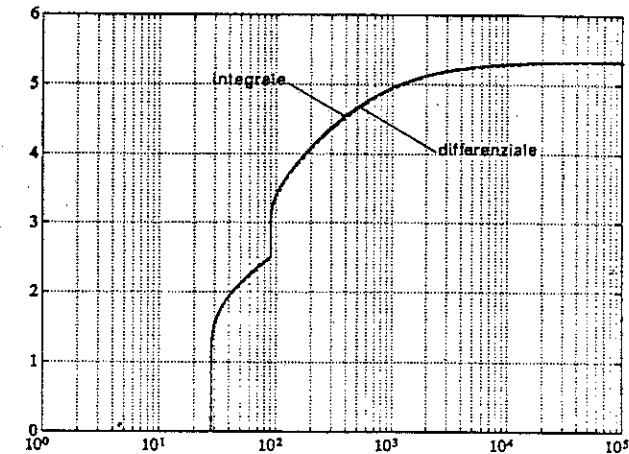


Figura 6.2.2: Andamento della deformazione  $u_k(t)/u_k(t_0)$

## Esempio 2. Struttura omogenea soggetta a cambiamento di schema statico

La struttura di figura (6.2.3) è soggetta ad un carico uniformemente ripartito di intensità costante nel tempo applicato a  $t_0 = 3$  giorni; all'istante  $t^* = 28$  giorni, il suo schema statico viene modificato introducendo un vincolo rigido nel punto C.

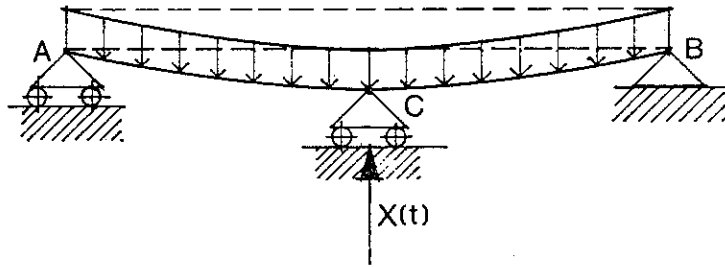


Figura 6.2.3: Struttura con vincolo posticipato

### Metodo integrale

Adottando il metodo delle forze, l'equazione risolutiva per la determinazione dell'incognita iperstatica  $X_C(t) = X_1(t)$  assume la seguente forma [16]:

$$a_{10}E_c(t_0)[J(t, t_0) - J(t^*, t_0)] = -a_{11}E_c(t_0) \int_{t^*}^t J(t, \tau) dX_1(\tau).$$

Scrivendo l'equazione risolutiva al tempo  $t_r$ , e sottraendo la stessa al tempo  $t_{r-1}$  si ottiene l'espressione incrementale:

$$0 = \Delta a_{10}''(t_r) + \frac{a_{11}E_c(t_0)\Delta X_1(t_r)}{E_r''} + a_{11}\Delta u_1''(t_r)$$

dove:

$$\Delta a_{10}''(t_r) = a_{10}E_c(t_0)[J(t_r, t_0) - J(t_{r-1}, t_0)];$$

$$\Delta u_1''(t_r) = \sum_{i=1}^{r-1} E_c(t_0) \frac{\Delta X_1(t_i)}{2} [J(t_r, t_i) + J(t_r, t_{i-1}) - J(t_{r-1}, t_i) - J(t_{r-1}, t_{i-1})];$$

$$E_r'' = \frac{2}{[J(t_r, t_r) + J(t_r, t_{r-1})]};$$

che consente di determinare  $X_1(t_r) = \sum_{j=1}^r \Delta X_1(t_j)$  mediante la regola dei trapezi.

### Metodo differenziale

La stessa equazione scritta in forma differenziale diventa:

$$0 = \frac{\sum (1 - e^{-\Delta t_r / \tau_\mu}) a_{\mu 0}(t_{r-1}) E_c(t_0)}{E_r''} + \frac{a_{11} E_c(t_0) \Delta X_1(t_r)}{E_r''} + \frac{\sum (1 - e^{-\Delta t_r / \tau_\mu}) a_{11} X_{\mu 1}(t_{r-1}) E_c(t_0)}{E_r''},$$

dove  $E_r'' = \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}} + E_{\infty r - \frac{1}{2}}$ ; inoltre, per ogni ramo della catena di Maxwell si ha:

$$a_{\mu 0}(t_r) E_c(t_0) + a_{11} E_c(t_0) X_{\mu 1}(t_r) = a_{\mu 0}(t_{r-1}) E_c(t_0) e^{-\Delta t_r / \tau_\mu} + a_{11} E_c(t_0) X_{\mu 1}(t_{r-1}) e^{-\Delta t_r / \tau_\mu},$$

nel quale il prodotto  $\lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}} \Delta u(t_r)$  è nullo, in quanto, per la formulazione generale, la

$$\Delta u(t_r) = 0.$$

Imponendo le condizioni iniziali  $X_1(t_0) = \sum_{\mu} X_{\mu 1}(t_0)$ ,  $a_{10}(t_0) = \sum_{\mu} a_{\mu 0}(t_0)$ , ed

essendo noti, in ogni istante i coefficienti  $a_{\mu 0}(t_r)$  il calcolo della  $X_1(t_r) = \sum_{\mu} X_{\mu 1}(t_r)$  è immediato.

I valori degli  $E_{\mu}(t_r)$  del metodo differenziale, derivano dalla formulazione diretta delle funzioni rilassamento adottando il modello di Maxwell a sette rami.

Fissando i seguenti parametri reologici:  $R.H.=50\%$ ,  $f_{ck}=40$  MPa,  $2A_c/u=200$  mm, nel grafico di figura (6.2.4) viene confrontato l'andamento della  $X(t)/X_{el}$ , con  $X_{el}=a_{10}/a_{11}$ , ottenuto dai due metodi di calcolo.

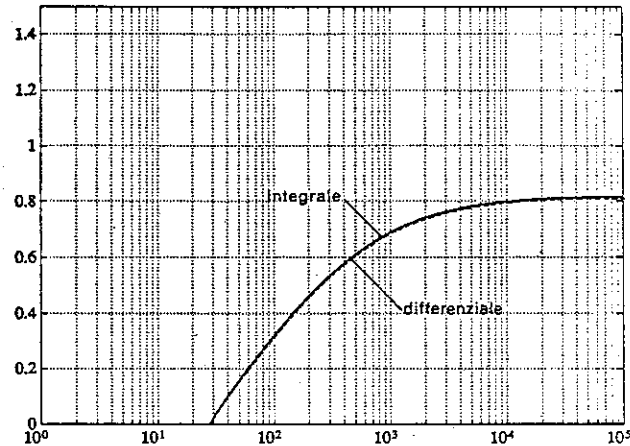


Figura 6.2.4: Andamento della  $X(t)/X_{el}$

### Esempio 3. Struttura omogenea con un solo vincolo elastico

Per lo stesso esempio di figura (6.1.1), già svolto con il metodo generale, l'equazione risolvente in forma differenziale con le solite notazioni si scrive:

$$-a_{s,11}\Delta X(t_r) = \frac{a_{c,11}E_c(t_0)\Delta X(t_r)}{E_r''} + \frac{\sum (1 - e^{-\Delta t_r/\tau_{\mu}}) a_{c,11} X_{\mu}(t_{r-1}) E_c(t_0)}{E_r''} \quad (a)$$

dividendo ambedue i membri per  $(a_{c,11} + a_{s,11})$  si ha:

$$(\delta - 1)\Delta X(t_r) = \frac{\delta E_c(t_0)\Delta X(t_r)}{E_r''} + \frac{\sum (1 - e^{-\Delta t_r/\tau_{\mu}}) a_{c,11} X_{\mu}(t_{r-1}) E_c(t_0)}{E_r''} \quad (a')$$

per cui la relazione viene così semplificata

$$\frac{(\delta - 1)}{\delta E_c(t_0)} \Delta X(t_r) = \frac{\Delta X(t_r)}{E_r''} + \frac{\sum (1 - e^{-\Delta t_r/\tau_{\mu}}) X_{\mu}(t_{r-1})}{E_r''}$$

dalla quale si determina

$$\Delta X(t_r) = \frac{\sum (1 - e^{-\Delta t_r/\tau_{\mu}}) X_{\mu}(t_{r-1})}{E_r''} \frac{1}{\left[ \frac{(\delta - 1)}{\delta E_c(t_0)} - \frac{1}{E_r''} \right]} \quad (b)$$

e per ogni ramo del modello di Maxwell si ha inoltre:

$$X_{\mu}(t_r) = X_{\mu}(t_{r-1}) e^{-\Delta t_r/\tau_{\mu}} + \lambda_{\mu} E_{\mu} E_{\mu}^{-\frac{1}{2}} \frac{(\delta - 1)}{\delta E_c(t_0)} \Delta X(t_r) \quad (c)$$

ed anche:

$$a_{c,11} E_c(t_0) X_{\mu}(t_r) = a_{c,11} E_c(t_0) X_{\mu}(t_{r-1}) e^{-\Delta t_r/\tau_{\mu}} + \lambda_{\mu} E_{\mu} E_{\mu}^{-\frac{1}{2}} (-a_{s,11} \Delta X(t_r)) \quad (c')$$

poiché  $\Delta u(t_r) = [-a_{s,11} \Delta X(t_r)]$  dove  $\Delta X(t_r)$  è dato dalla (b).

Fissando a priori i valori di  $\delta$ , con  $0 \leq \delta \leq 1$ , e ponendo le condizioni iniziali

$$X(t_0) = \sum_{\mu} X_{\mu}(t_0)$$

$$X_{\mu}(t_0) = \frac{X(t_0) E_{\mu}(t_0)}{\sum_{\mu} E_{\mu}(t_0)}$$

si ottiene direttamente l'andamento della reazione adimensionata  $X(t)/X(t_0)$  nel tempo.

Dall'equazione (b) si nota come per  $\delta=1$  si ricade in un problema di rilassamento; per  $\delta \rightarrow 0$  si ottiene  $\Delta X(t_r) \rightarrow 0$  che corrisponde ad un vincolo elastico infinitamente deformabile.

Per confronto con il metodo integrale in figura (5.4.5) è riportato il grafico per il caso:

$$R.H. = 80, f_{ck} = 30 \text{ MPa}, 2A_c/u = 200 \text{ mm}, \delta = 0,5.$$

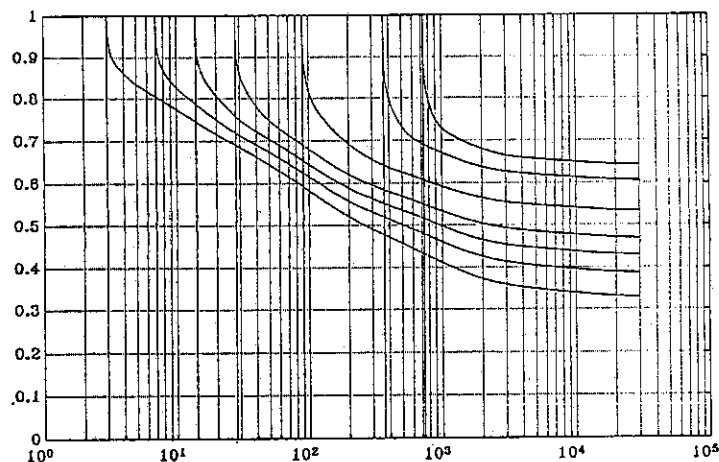


Figura 6.2.5: Andamento della reazione  $X(t)/X(t_0)$

#### Esempio 4. Struttura eterogenea soggetta a carichi permanenti

La struttura di figura (6.1.5), già analizzata con il metodo integrale, viene ora risolta con il metodo differenziale. Adottando i parametri geometrici precedentemente applicati, l'equazione di congruenza al tempo  $t_r$ , nel vincolo introdotto, associando ad ognuna delle due sottostrutture un modello di Maxwell, viene scritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} & \frac{a_{11}^1 E_c^1(t_0^1) \Delta X(t_r)}{E_r^{n1}} + \frac{\sum_{\mu} \left(1 - e^{-\Delta t_r / \tau_{\mu}}\right) a_{\mu 10}^1(t_{r-1}) E_c^1(t_0^1)}{E_r^{n1}} + \\ & \frac{\sum_{\mu} \left(1 - e^{-\Delta t_r / \tau_{\mu}}\right) a_{11}^1 X_{\mu}(t_{r-1}) E_c^1(t_0^1)}{E_r^{n1}} = \frac{\sum_{\mu} \left(1 - e^{-\Delta t_r / \tau_{\mu}}\right) a_{11}^2 X_{\mu}(t_{r-1}) E_c^2(t_0^2)}{E_r^{n2}} + \\ & \frac{\sum_{\mu} \left(1 - e^{-\Delta t_r / \tau_{\mu}}\right) a_{\mu 10}^2(t_{r-1}) E_c^2(t_0^2)}{E_r^{n2}} + \frac{a_{11}^2 E_c^2(t_0^2) \Delta X(t_r)}{E_r^{n2}} \end{aligned} \quad (a)$$

per indicare che  $\Delta u_k^1(t_r) = \Delta u_k^2(t_r)$ , ossia l'incremento di deformazione nel punto  $k$  della sottostruttura 1 deve in ogni istante eguagliare l'incremento di deformazione nello stesso punto della sottostruttura 2.

Nell'equazione (a) i moduli pseudo-elastici valgono:

$$E_r^{n1} = \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}}^1 + E_{\mu r - \frac{1}{2}}^1, \quad E_r^{n2} = \sum_{\mu=1}^m \lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}}^2 + E_{\infty r - \frac{1}{2}}^2$$

inoltre, per ogni ramo delle catene di Maxwell che descrivono le due sottostrutture si può scrivere:

$$\begin{aligned} & a_{\mu 10}^1(t_r) E_c^1(t_0^1) + a_{\mu 11}^1 E_c^1(t_0^1) X_{\mu 1}(t_r) = a_{\mu 10}^1(t_{r-1}) E_c^1(t_0^1) e^{-\Delta t_r / \tau_{\mu}} + \\ & + a_{\mu 11}^1 E_c^1(t_0^1) X_{\mu}(t_{r-1}) e^{-\Delta t_r / \tau_{\mu}} + \lambda_{\mu r} E_{\mu r - \frac{1}{2}}^1 \Delta u_k^2(t_r); \end{aligned} \quad (b)$$



$$a_{\mu 10}^2(t_r) E_c^2(t_0^2) + a_{\mu 11}^2 E_c^2(t_0^2) X_{\mu 1}(t_r) = a_{\mu 10}^2(t_{r-1}) E_c^2(t_0^2) e^{-\Delta t_r / \tau_\mu} +$$

$$+ a_{\mu 11}^2 E_c^2(t_0^2) X_{\mu 1}(t_{r-1}) e^{-\Delta t_r / \tau_\mu} + \lambda_{\mu r} E_c^2 \frac{\Delta u_k^1}{\mu r - 1/2}(t_r). \quad (c)$$

Utilizzando le condizioni iniziali

$$X(t_0) = \sum_{\mu} X_{\mu}(t_0) = 0; \quad a_{10}^1(t_0^1) = \sum_{\mu} a_{\mu 10}^1(t_0); \quad a_{10}^2(t_0^2) = \sum_{\mu} a_{\mu 10}^2(t_0);$$

ed essendo noti, in ogni istante, i coefficienti  $a_{\mu 10}^1(t_r)$  e  $a_{\mu 10}^2(t_r)$ , il calcolo della

$$X(t_r) = \sum_{\mu} X_{\mu}(t_r) \text{ si effettua agevolmente dalla (b) o dalla (c).}$$

Per il confronto con il metodo integrale in figura (6.2.6) è riportato il grafico per il caso:

$$R.H. = 50, f_{ck} = 35 \text{ MPa}, 2A_c/u = 170 \text{ mm}$$

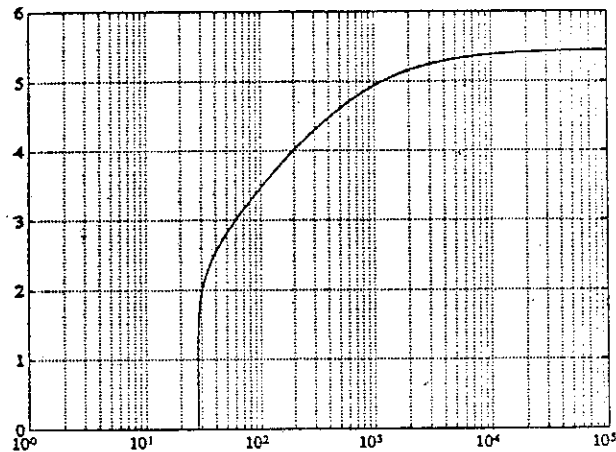


Figura 6.2.6: Andamento della  $X(t)/X(t_0)$

### 6.3 Strutture omogenee soggette a modificazione dello schema statico

La modificazione delle condizioni vincolari susseguente all'applicazione del carico è un problema frequente nella realizzazione delle strutture in calcestruzzo. Poiché, inoltre, il comportamento del calcestruzzo è dipendente dal tempo la distribuzione delle tensioni ne viene largamente influenzata.

L'analisi viscoelastica lineare, i cui risultati sono sintetizzati nel Terzo e Quarto Teorema, conferma i dati sperimentali che dimostrano come i vincoli aggiuntivi, inizialmente scarichi, vengono progressivamente sollecitati dall'incrementarsi delle reazioni dovute alla viscosità.

Secondo gli enunciati del Terzo e Quarto Teorema, inoltre, la funzione integrale  $\xi(t, t_1, t_0)$  è l'unica funzione che regola il problema specifico della influenza della viscosità nella distribuzione delle tensioni nelle strutture omogenee in calcestruzzo con vincoli rigidi, soggette a carichi permanenti costanti applicati all'età  $t_0$  ed alla variazione dello schema statico al tempo  $t_1 \geq t_0$ . Lo scopo del presente paragrafo è, dunque, quello di presentare le procedure numeriche per il tracciamento dei grafici della funzione  $\xi$ , in relazione ai parametri reologici ed ai tempi  $t_0, t_1$ , che consentono la soluzione immediata del problema una volta nota la soluzione elastica associata.

L'impiego dei grafici facilita, tra l'altro, la soluzione di particolari problemi connessi alla scelta di un opportuno istante di solidarizzazione al fine di ottimizzare lo stato di sollecitazione interno a fenomeno viscoso esaurito.

Per il calcolo delle  $\xi$  è stato adottato il metodo generale, utilizzando il modello di viscosità del CEB-MC 90, che specifica la funzione viscosità  $J(t, t_0)$ , la sua dipendenza dal tempo attuale  $t$ , dal tempo iniziale di carico  $t_0$ , nonché dai parametri ambientali e geometrici.

Viene inoltre presentato un algoritmo di calcolo che utilizza la legge incrementale elastica quasi-elastica, del modello differenziale delle catene di Maxwell, e che permette di determinare i valori della  $\xi(t, t_1, t_0)$  con esattezza e con il minimo impiego di memoria.

I parametri del modello derivano, ovviamente, dalla formulazione diretta della funzione rilassamento.

I diagrammi delle  $\xi$ , ottenuti utilizzando il metodo generale, sono stati estratti da un lavoro [32] collegato a questa tesi; i diagrammi ottenuti con il metodo differenziale, invece, sono originali e dimostrano la grande attendibilità del metodo. È necessario sottolineare, tuttavia, che nella determinazione della funzione  $\xi$ , negli ultimi anni, sono stati realizzati altri lavori [20], che presentano algoritmi particolarmente vantaggiosi per la riduzione dei tempi di calcolo.

### 6.3.1 Determinazione della funzione $\xi(t, t_1, t_0)$ con legge integrale

Per la determinazione della funzione integrale  $\xi$  bisogna prima valutare la funzione di rilassamento  $R(t, t_0)$  ed effettuare poi il calcolo dell'integrale.

Si ricorre, quindi, dapprima all'inversione della equazione integrale di Volterra

$$1 = E_c(t_0) J(t, t_0) + \int_{t_0}^t J(t, \tau) dR(t, \tau), \quad (6.3.1)$$

impiegando la procedura numerica del Metodo Generale, che fornisce per il generico istante  $t_k$  la seguente equazione incrementale:

$$\Delta R(t_k, t_0) = - \frac{\sum_{i=1}^{k-1} \Delta R(t_i, t_0) [J(t_k, t_i) + J(t_k, t_{i-1}) - J(t_{k-1}, t_i) - J(t_{k-1}, t_{i-1})]}{J(t_k, t_k) + J(t_k, t_{k-1})}, \quad (6.3.2)$$

con  $\Delta R(t_1, t_0) = 1/J(t_1, t_0) = E_c(t_0)$ , ( $t_1 = t_0$ ); nota la funzione rilassamento, per la determinazione di  $\xi(t, t_1, t_0)$  occorre calcolare l'integrale (6.3.1), approssimabile mediante la regola dei trapezi con la seguente relazione:

$$\xi(t, t_1, t_0) = \int_{t_1}^t R(t, \tau) dJ(\tau, t_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k [R(t_k, t_i) + R(t_k, t_{i-1})] [J(t_i, t_0) - J(t_{i-1}, t_0)]. \quad (6.3.3)$$

Calcolando la  $R(t_k, t_i)$ , mediante la (6.3.2), per il generico istante  $t_i$ , con  $\Delta R(t_i, t_i) = 1/J(t_i, t_i) = E_c(t_i)$ , ed introducendo i valori nella (6.3.3) si ottiene l'algoritmo ricorrente per il calcolo dei valori della funzione integrale  $\xi(t, t_1, t_0)$ , all'istante  $t$ . Per i calcoli pratici è conveniente scegliere i tempi discreti  $(t_k - t_0)$  in progressione geometrica, in modo che  $(t_k - t_0)/(t_{k-1} - t_0) = \text{costante} = q$ .

Nella scala dei tempi logaritmica,  $\log(t_k - t_0)$ , questi tempi appaiono ugualmente spaziatati e ponendo  $q = 10^{1/m}$  si ha:

$$(t_k - t_0) = 10^{1/m} (t_{k-1} - t_0), \text{ ovvero } \log(t_k - t_0) = \frac{1}{m} + \log(t_{k-1} - t_0),$$

dove  $m$  rappresenta il numero dei passi per decade. Nel caso particolare si è utilizzato:

$$\begin{cases} \Delta t_2 = t_2 - t_1 = 0,01 \text{ giorno} \\ m = 8, q = 1,3335 \\ N = 61, \text{ numero dei passi per coprire un periodo di } 10^5 \text{ giorni (274 anni)} \end{cases}$$

Questi ordini di grandezza per il primo intervallo e per la progressione geometrica sono considerati adeguati per l'accuratezza dei risultati oltre la terza cifra decimale.

In questo modo sono stati tracciati i grafici della funzione integrale  $\xi(t, t_1, t_0)$ , figura (6.3.1), che consentono l'immediata soluzione del problema del cambiamento dello schema statico di strutture omogenee, qualora i vincoli posticipati siano introdotti all'istante  $t_1 > t_0$  ed il carico permanente venga applicato all'istante  $t_0$ .

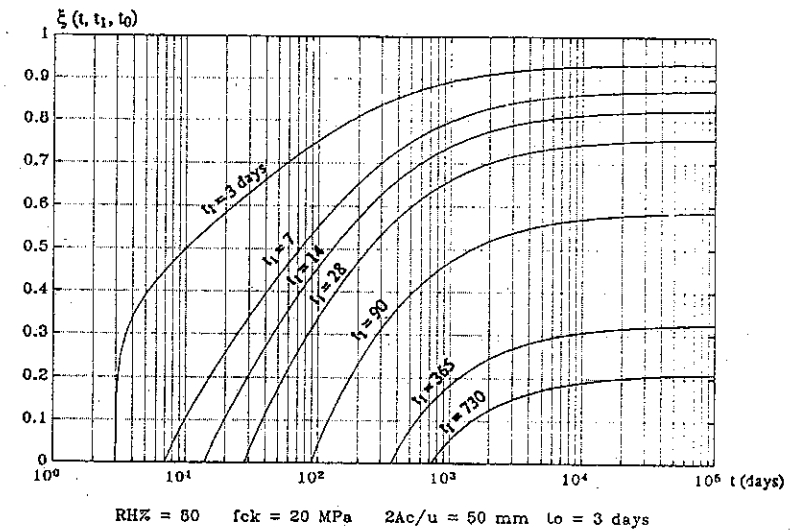


Figura 6.3.1: Funzione  $\xi(t, t_1, t_0)$  con metodo integrale

### 6.3.2 Determinazione della funzione $\xi(t, t_1, t_0)$ con legge differenziale

L'onere computazionale derivante dalle equazioni integrali, per la determinazione della funzione  $\xi$ , viene notevolmente ridotto facendo ricorso al metodo differenziale.

Per analogia con il problema strutturale della variazione dello schema statico, si considera il modello di Maxwell, di figura (6.3.2), sollecitato da una tensione  $\sigma_0$  costante dal tempo  $t_0$ , coincidente con l'istante iniziale di carico.

L'equazione che regola il sistema, come è noto, è la seguente:

$$\Delta \varepsilon_r = \frac{\Delta \sigma_r}{E_r''} + \Delta \varepsilon_r'' \quad (6.3.4)$$

dove:

$\Delta \varepsilon_r$  = incremento della deformazione viscoelastica al tempo  $t_r$ ;

$\Delta \sigma_r$  = variazione, al tempo  $t_r$ , delle tensioni esterne al modello;

$\Delta \varepsilon_r''$  = incremento della deformazione viscosa;

$E_r'' = \sum_{\mu} \lambda_{\mu r} E_{\mu} \frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}} + E_{\infty r} \frac{1}{2}$ , modulo pseudo elastico istantaneo.

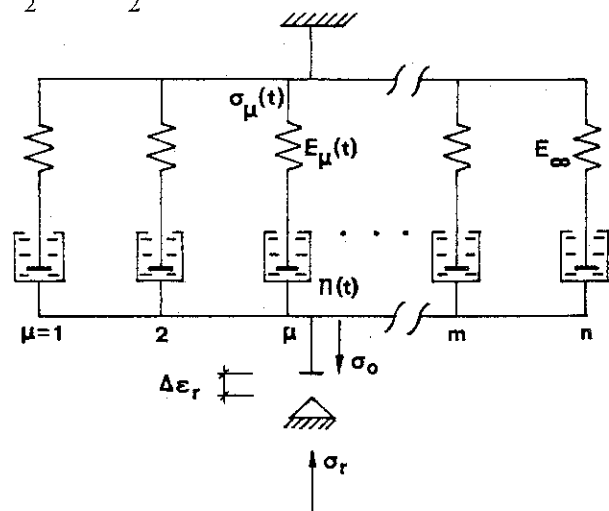


Figura 6.3.2: Modello di Maxwell con vincolo posticipato

Se all'istante  $t_1 \geq t_0$  si impone un vincolo che impedisce lo scorrimento libero del sistema, il problema della determinazione della  $\xi$  diventa quello di calcolare la variazione della tensione nel vincolo affinché l'incremento di deformazione  $\Delta \varepsilon_r$  sia nullo.

Prima dell'imposizione del vincolo, per  $t_r < t_1$ , per ogni catena del modello valgono le seguenti relazioni:

$$\sigma_{0\mu r} = \sigma_{0\mu r-1} e^{-\Delta t_r / \tau_{\mu}} + \lambda_{\mu r} E_{\mu} \frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}} \Delta \varepsilon_r, \quad (6.3.5)$$

associate alla condizione iniziale:  $\sigma_{0\mu} = \frac{\sigma_0 E_{\mu}(t_0)}{\sum_{\mu} E_{\mu}(t_0)}$ , che soddisfano la relazione

$$\Delta \varepsilon_r = \Delta \varepsilon_r'', \quad \Delta \varepsilon_r'' = \frac{\sum_{\mu} \left(1 - e^{-\Delta t_r / \tau_{\mu}}\right) \cdot \sigma_{0\mu r-1}}{E_r''}, \text{ dalla quale si calcola la deformazione}$$

viscosa. Ad ogni passo  $\sum_{\mu} \sigma_{0\mu r} = \sigma_0$ .

Dal momento di imposizione del vincolo la (6.3.4) diventa:

$$0 = \frac{\Delta \sigma_r}{E_r''} + \Delta \varepsilon_r'', \quad (6.3.6)$$

indicando, in tal modo, che l'incremento della tensione nel vincolo deve impedire la deformazione del modello; per cui introducendo nella (6.3.5)  $\Delta \varepsilon_r = 0$  per  $t_r = t_1$ , si ottiene la variazione di tensione in ogni catena per effetto del vincolo introdotto:

$$\sigma_{0\mu}(t_r) = \sigma_{0\mu}(t_1) e^{-(t_r-t_1)/\tau_{\mu}} \quad (6.3.7)$$

$$\Delta \sigma_{0\mu}(t_r) = \sigma_{0\mu}(t_1) - \sigma_{0\mu}(t_1) e^{-(t_r-t_1)/\tau_{\mu}}$$

L'andamento della  $\xi(t_r, t_1, t_0)$  si può subito determinare sommando tutti i contributi

$\frac{\Delta \sigma_{0\mu}(t_r)}{\sigma_0}$  dal tempo  $t_1$  di imposizione del vincolo:

$$\xi(t_r, t_1, t_0) = -\frac{\sum \sigma_{0\mu}(t_1) - \sum \sigma_{0\mu}(t_1) e^{-(t_r-t_1)/\tau_\mu}}{\mu \sigma_0} = \frac{\sigma_0 - \sum \sigma_\mu(t_1) e^{-(t_r-t_1)/\tau_\mu}}{\mu \sigma_0} \quad (6.3.8)$$

Confrontando il grafico della figura (6.3.3) con quello ottenuto dalle relazioni integrali, si nota come i due metodi siano in perfetto accordo.

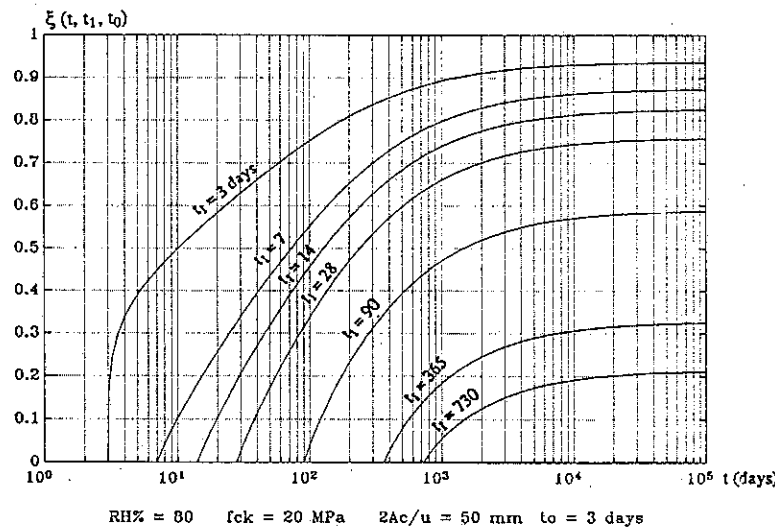


Figura 6.3.3: Funzione  $\xi(t, t_1, t_0)$  con metodo differenziale

### 6.4 Strutture omogenee con vincoli elastici

L'analisi viscoelastica di strutture omogenee in calcestruzzo soggette ad  $n$  vincoli elastici iperstatici è un fenomeno complesso governato da un sistema di  $n$  equazioni integrali di Volterra, la cui soluzione anche se può essere affrontata con le note tecniche del metodo generale, comporta quasi sempre l'impossibilità di evidenziare l'influenza della deformabilità di ogni singolo vincolo sul comportamento generale del sistema strutturale.

Soluzioni più semplici si ottengono, invece, nel caso di un solo vincolo elastico addizionale [16], dipendenti dal coefficiente  $\omega$  che rappresenta il rapporto tra la

deformabilità della struttura viscosa e la deformabilità del complesso struttura-vincolo elastico.

Le difficoltà connesse alla soluzione di strutture con  $n$  vincoli elastici possono essere, tuttavia, notevolmente semplificate adottando il metodo delle funzioni rilassamento ridotte [21,22], che consente di definire una tecnica di soluzione particolarmente conveniente dal punto di vista analitico. Questa tecnica contribuisce inoltre a chiarire l'influenza della deformabilità di tutti gli  $n$  vincoli sulla struttura e costituisce la generalizzazione della soluzione concernente un solo vincolo elastico.

Il metodo delle funzioni rilassamento ridotte rispetto a quelli semplificati adottati in passato, non richiede alcuna modificazione della funzione viscosità  $J(t, t_0)$ , prendendo in considerazione l'effettivo comportamento invecchiante del calcestruzzo.

Il metodo consiste nel disaccoppiare l'originale sistema di  $n$  equazioni integrali di Volterra in  $n$  equazioni indipendenti, attraverso un'opportuna trasformazione lineare operata sulle reazioni iperstatiche incognite e nella conseguente introduzione nella equazione risolvente delle *funzioni di rilassamento ridotte*,  $R_i^*(t, t_0)$ .

Le  $R_i^*(t, t_0)$ , inoltre, sono associate attraverso il legame integrale alle funzioni viscosità modificate,  $J_i^*(t, t', t_0)$ , che dipendono dagli autovalori  $\omega_i$ ,  $0 \leq \omega_i \leq 1$ , della matrice delle reazioni vincolari incognite.

Gli autovalori  $\omega_i$  rappresentano la generalizzazione, al caso di  $n$  vincoli elastici sovrabbondanti, della soluzione ottenuta dall'unico coefficiente  $\omega$  nel caso di un solo vincolo elastico.

Diventa così possibile determinare separatamente le funzioni rilassamento ridotte  $R_i^*(t, t_0)$  ed esprimere la soluzione del problema in una forma semplice e generalizzata che consiste, sostanzialmente, nella correzione, dipendente dalle  $R_i^*(t, t_0)$ , della soluzione elastica.

Il metodo delle funzioni rilassamento ridotte consente, anche, l'analisi di sezioni eterogenee in c.a. e c.a.p. o miste acciaio-calcestruzzo, considerando che la parte in acciaio rappresenta un vincolo esterno elastico per la parte viscoelastica in calcestruzzo. Nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, risulta conveniente operare mediante il metodo delle deformazioni, assumendo quali incognite i parametri che definiscono la deformazioni della sezione: due in caso di flessione retta, tre nel caso generale di flessione deviata.

In questa parte, richiamandosi alle linee generali del metodo delle funzioni rilassamento ridotte, si descrive un algoritmo che, utilizzando la determinazione diretta delle funzioni rilassamento mediante le catene di Maxwell, permette di ricavare

algebricamente le  $R_i^*(t, t_0)$  a partire dai parametri fisici del problema e dalle caratteristiche meccaniche della sezione.

### 6.4.1 Soluzione dei problemi di vincolo elastico mediante le funzioni di rilassamento ridotte

La funzione rilassamento formulata nel Capitolo 4 consente di risolvere direttamente i problemi di deformazioni impresse in solidi viscosi omogenei a vincoli rigidi, quali ad esempio ritiro impedito, cedimenti vincolari, variazioni termiche.

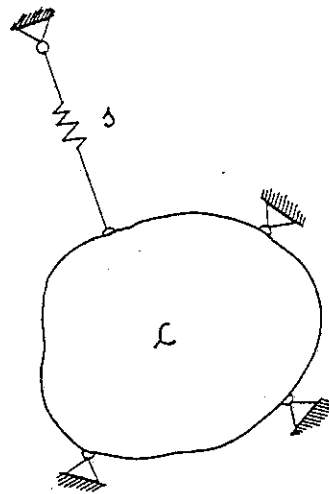
Nel caso invece di solidi viscosi con un vincolo elastico interno od esterno, figura (6.4.1), il fenomeno è governato dal parametro:

$$\omega = \frac{\delta_{c11}(t_0)}{\delta_{c11}(t_0) + \delta_{s11}} \quad (6.4.1)$$

essendo,

$\delta_{c11}(t_0)$ : deformabilità all'istante  $t_0$  del solido viscoso nel punto di applicazione del vincolo elastico e nella direzione di questo;

$\delta_{s11}$ : deformabilità del vincolo elastico lungo il suo asse.



$\delta_{s11}$ : deformabilità acciaio

$\delta_{c11}$ : deformabilità cls

$$\omega = \frac{\delta_{c11}(t_0)}{\delta_{c11}(t_0) + \delta_{s11}}$$

Figura 6.4.1: Solido omogeneo con vincolo elastico

Al variare del parametro  $\omega$  (compreso tra 0 ed 1) risultano rappresentate tutte le possibili situazioni, da vincolo elastico infinitamente deformabile ( $\omega=0$ ) a vincolo infinitamente rigido ( $\omega=1$ ).

Corrispondentemente si avrà, per le situazioni estreme:

$\omega=0$ , vincolo infinitamente cedevole: il vincolo corrisponde ad una forza, si applica il primo principio della viscosità e la reazione vincolare resta costante,  $X(t) = X(t_0) = \text{costante}$ , mentre la deformazione varia secondo la funzione viscosità;

$\omega=1$ , vincolo rigido: si applica il secondo principio della viscosità e la deformazione resta costante, mentre la reazione del vincolo varia secondo la funzione rilassamento,  $X(t) = X(t_0)R(t, t_0)/R(t_0, t_0)$ .

In caso di valori intermedi di  $\omega$  non si applicano i principi di viscosità e sia la deformazione che la reazione del vincolo variano nel tempo.

La soluzione è nota da tempo nel caso di solidi viscosi di tipo ereditario od invecchiante. In particolare, nel caso di comportamento invecchiante, in cui la funzione viscosità assume la forma:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E} + \varphi_{\infty}[\beta(t) - \beta(t_0)] \quad (6.4.2)$$

e la funzione rilassamento vale:

$$R(t, t_0) = E e^{-\varphi_{\infty}[\beta_f(t) - \beta_f(t_0)]} \quad (6.4.3)$$

la reazione del vincolo elastico risulta [43]:

$$X(t) = X(t_0) e^{-\omega \varphi_{\infty}[\beta_f(t) - \beta_f(t_0)]} \quad (6.4.4)$$

Da essa è agevole ritrovare i risultati limite, rispettivamente per  $\omega=0$  ed  $\omega=1$ .

Tale soluzione è stata in anni più recenti [21,62] generalizzata a funzioni viscosità di tipo qualsiasi, scrivendo:

$$X(t) = X(t_0) \frac{R^*(t, t_0)}{E_c(t, t_0)} \quad (6.4.5)$$

essendo  $R^*(t, t_0)$  la funzione rilassamento associata alla funzione viscosità variata

$$J^*(t, t', t_0) = \frac{1-\omega}{E_c(t_0)} + \omega J(t, t'). \quad (6.4.6)$$

L'applicazione delle (6.4.5) e (6.4.6) al caso particolare di funzione viscosità invecchiante è immediato, risulta infatti:

$$J^*(t, t') = \frac{1}{E} + \omega \varphi_{\infty}[\beta_f(t) - \beta_f(t')]$$

$$R^*(t, t_0) = E e^{-\omega \varphi_\infty [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)]}$$

per cui la (6.4.5) coincide con la (6.4.4).

Se i vincoli elastici sono  $n$  è necessario disaccoppiare il sistema per mezzo degli  $n$  autovalori  $\omega_i$  della matrice di interazione:

$$\underline{D} = [\underline{\delta}_c(t_0) + \underline{\delta}_s]^{-1} \underline{\delta}_c(t_0) \quad (6.4.7)$$

Ad ogni autovalore  $\omega_i$  corrisponde allora una funzione rilassamento ridotta, per mezzo della quale si ottengono le variabili disaccoppiate e, operando il passaggio inverso, le reazioni degli  $n$  vincoli elastici [21,22,62].

Il procedimento è rigoroso e di portata del tutto generale. Per la sua applicazione occorre naturalmente conoscere le funzioni rilassamento ridotte, o calcolandole preventivamente con il legame integrale tra la funzione viscosità e rilassamento, a partire dalle funzioni viscosità modificate, oppure formulandole direttamente.

## 6.4.2 Formulazione diretta delle funzioni rilassamento ridotte

Ci si propone, dunque, di ricercare una espressione delle funzioni rilassamento ridotte direttamente a partire dai valori dei parametri fisici  $R.H.$ ,  $f_{ck}$ ,  $h_0$  e degli autovalori  $\omega_i$ , utilizzando ancora il modello di figura (6.4.2).

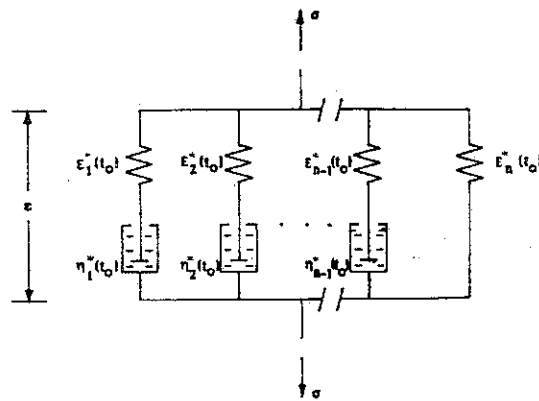


Figura 6.4.2: Modello di Maxwell costituito da  $n$  rami in parallelo

A tal fine, piuttosto che ripercorrere la procedura già utilizzata nella formulazione diretta delle funzioni rilassamento, inserendo anche  $\omega$  all'interno della regressione multipla, si è preferito partire dalle funzioni rilassamento già determinate nel Capitolo 4, modificandole con considerazioni ai limiti.

Denominando  $E^*$  ed  $\eta^*$  i parametri del modello di figura (6.4.2) relativi alle funzioni rilassamento ridotte, e mantenendo gli stessi valori dei tempi di rilassamento  $\tau$ , si può allora imporre il rispetto delle condizioni per  $t = t_0$ ,  $t = t_u = 10^5$  giorni,  $\omega = 0$  e  $\omega = 1$ .

Per  $t = t_0$  si ha dalla relazione

$$R(t, t_0) = \sum_{i=1}^n E_i(t_0) e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau_i}}, \quad (n=1,2,\dots,7)$$

$$R(t_0, t_0) = \sum_{i=1}^7 E_i(t_0) = E_c(t_0).$$

Lo stesso valore deve essere assunto dalle funzioni rilassamento ridotte, non essendo modificata la risposta iniziale elastica:  $J^*(t_0, t_0) = J(t_0, t_0)$ .

Si ha quindi:

$$\sum_{i=1}^7 E_i^*(t_0) = \sum_{i=1}^7 E_i(t_0) = E_c(t_0), \quad (6.4.8)$$

inoltre per  $t = t_u$ :

$$R(t_u, t_0) = E_7(t_0)$$

$$R^*(t_u, t_0) = E_7^*(t_0).$$

In base a quanto detto sull'applicazione rispettivamente del 1° e 2° principio di viscosità, deve essere:

$$\text{- per } \omega = 0, \quad E_7^*(t_0) = E_c(t_0) = \sum_{i=1}^7 E_i(t_0)$$

$$\text{- per } \omega = 1, \quad E_7^*(t_0) = E_7(t_0).$$

Si può allora definire la funzione

$$g(\omega, t_0) = \frac{E_c(t_0) - E_7^*(t_0)}{E_c(t_0) - E_7(t_0)}, \quad (6.4.9)$$

che, per quanto detto, varia tra 0 ed 1 al variare di  $\omega$  e, calcolata per differenti  $t_0$ , presenta gli andamenti di figura (6.4.3) (per una determinata scelta dei parametri fisici  $R.H.$ ,  $f_{ck28}$  e  $h_0$ ).

Essa è ben rappresentabile da espressioni del tipo:

$$g(\omega, t_0) = \frac{\omega}{1 + a(t_0)(\omega - 1)} \quad (6.4.10)$$

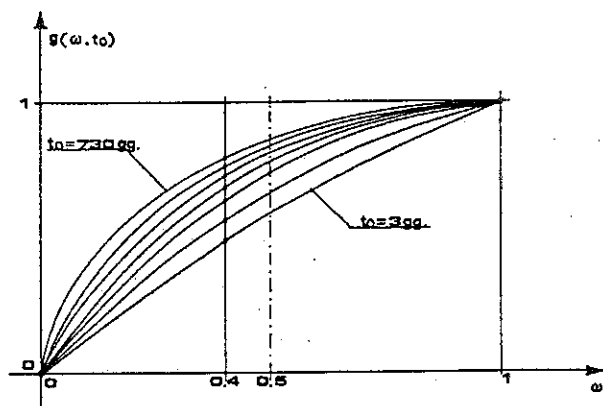


Figura 6.4.3: Funzione  $g(\omega, t_0)$

Considerando ora l'andamento in funzione di  $t_0$  (per  $\omega$  prefissato) si osserva una sensibile linearità rispetto a  $\log(t_0)$ . Data la forma delle curve è risultato conveniente esaminare il valore  $\omega = 0,4$  scrivendo:

$$g(0,4, t_0) = k_1 \log(t_0) + k_2$$

da cui:

$$a(t_0) = 1,67 \left[ 1 - \frac{0,4}{k_1 \log(t_0) + k_2} \right] \quad (6.4.11)$$

I coefficienti  $k_1$  e  $k_2$  devono naturalmente essere determinati in funzione dei parametri fisici  $R.H.$ ,  $f_{ck}$  e  $h_0$ . Considerando tutte le combinazioni di parametri di interesse pratico si sono ottenute le seguenti espressioni:

$$k_1 = -0,0781 + 0,0004 R.H. + 0,0004 f_{ck} + 0,00490 f(h_0) \quad (6.4.12a)$$

$$k_2 = +0,9883 - 0,0024 R.H. - 0,0028 f_{ck} - 0,00241 f(h_0) \quad (6.4.12b)$$

La procedura per pervenire alla formulazione diretta delle funzioni rilassamento ridotte è allora la seguente: noti i parametri fisici  $R.H.$ ,  $f_{ck}$  e  $h_0$  si determinano dalla formulazione diretta della funzione rilassamento ottenuta dal modello di Maxwell a 7 catene (Capitolo 4) i coefficienti  $C_{ai}$  e, con le (6.4.12), i coefficienti  $k_1$  e  $k_2$ . Nota l'età iniziale  $t_0$  si determinano i moduli  $E_i(t_0)$  delle funzioni rilassamento e, con la (5.6.11) il coefficiente  $a(t_0)$ . Noto l'autovalore  $\omega$  con la (5.6.10) si determina  $g(\omega, t_0)$  da cui, invertendo la (6.4.9), si ottiene:

$$E_7^*(t_0) = E_c(t_0) - g(\omega, t_0) [E_c(t_0) - E_7(t_0)]. \quad (6.4.13)$$

Determinando in tal modo  $E_7^*(t_0)$ , che fornisce il valore al tempo finale della funzione rilassamento ridotta, i restanti  $E_i^*(t_0)$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), che definiscono l'andamento nel tempo, si determinano, rispettando la (6.4.8), ponendo:

$$E_i^*(t_0) = E_i(t_0) \left[ 1 - \frac{E_7^*(t_0) - E_7(t_0)}{\sum_{i=1}^6 E_i(t_0)} \right], \quad (6.4.14)$$

con i quali:

$$R^*(t, t_0) = \sum_{i=1}^7 E_i^*(t_0) e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau_i}} \quad (6.4.15)$$

Si noti che la (6.4.14) è assunta identica per tutti i casi, indipendentemente dai parametri fisici in gioco. Ciò comporta alcune modeste imprecisioni nei tempi intermedi, in particolare per combinazioni di parametri fisici lontani dalla media.

La figura (6.4.4) mette a confronto le funzioni rilassamento ridotte ottenute con la (6.4.15), per diversi valori di  $\omega$ , con quelle calcolate numericamente a partire dalla funzione viscosità variata. L'accordo è buono per quanto riguarda i valori finali (di regola i più importanti), mentre per i tempi intermedi si osservano le imprecisioni dovute all'utilizzo delle stesse formule (6.4.14) in tutti i casi; i risultati peraltro sono ancora accettabili, in particolare tenuto conto dello scarso interesse pratico dei valori di  $R^*$  per tempi intermedi.

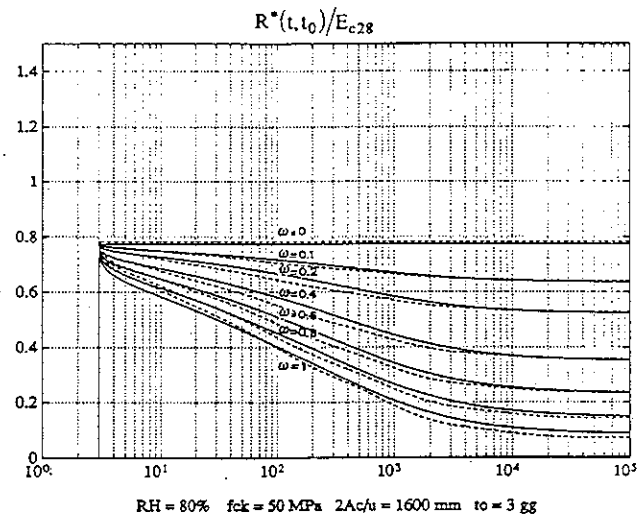


Figura 6.4.4: Confronto tra la funzione rilassamento ridotta calcolata numericamente (linea continua) e la funzione rilassamento ridotta ottenuta dall'equazione (6.4.15) (linea tratteggiata)

### 6.4.3 Applicazione alle sezioni miste acciaio-clc

Le sezioni eterogenee possono essere analizzate considerando che la parte in acciaio rappresenta vincoli esterni elastici per la parte viscoelastica in calcestruzzo; può, pertanto, essere utilizzata la teoria basata sulle funzioni rilassamento ridotte. Come si è detto, ammessa l'ipotesi di Bernoulli-Navier, risulta conveniente operare mediante il metodo delle deformazioni, assumendo quali incognite i parametri che definiscono la deformazione della sezione, supposta piana: due in caso di flessione composta retta, tre nel caso generale di flessione composta deviata.

Si consideri allora una generica sezione eterogenea ed una terna destra di assi  $x, y, z$ , i cui primi due, contenuti nel piano della sezione, abbiano origine in un punto arbitrario all'interno di essa ed il terzo sia ortogonale agli altri due (figura 6.4.5).

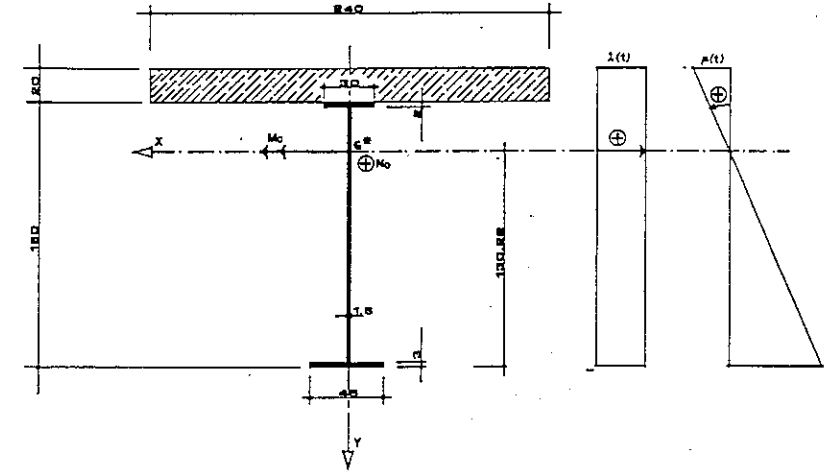


Figura 6.4.5: Sezione eterogenea acciaio-clc

Si indichino con  $\lambda, \zeta, \mu$  le tre componenti di deformazione della sezione, la prima delle quali è riferita all'asse  $z$  mentre le altre definiscono le curvature rispettivamente nei piani  $xz$  e  $yz$ , assunte positive se danno luogo ad allungamenti per valori positivi di  $x$  e  $y$ .

Risulta allora, avendo ammesso la conservazione delle sezioni piane,

$$\epsilon(t) = \lambda(t) + \zeta(t)x + \mu(t)y \quad (6.4.16)$$

o, in forma vettoriale

$$\epsilon(t) = \rho^T \underline{\psi}(t)$$

essendo:

$$\underline{\psi}(t) = \begin{bmatrix} \lambda(t) \\ \zeta(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}$$

$$\rho^T = [1 \quad x \quad y].$$

Applicando al caso in esame la teoria delle funzioni rilassamento ridotte e rimandando alla pubblicazione originale [21] per il dettaglio dei passaggi analitici, si perviene alla seguente equazione risolvante:



$$\begin{aligned} \underline{\underline{\psi}}(t) = & \underline{\underline{K}}^*(t_0) \left[ \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Omega}}^*(t_0) \right]^{-1} \left[ \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Omega}}^*(t_0) \right] \underline{\underline{R}}^*(t, t_0) / E_c(t_0) \underline{\underline{K}}^*(t_0)^{-1} \underline{\underline{\psi}}(t_0) + \\ & + \underline{\underline{K}}^*(t_0) \int_{t_0}^t \underline{\underline{R}}^*(t, t') / E_c(t_0) \underline{\underline{K}}^*(t_0)^{-1} d \underline{\underline{\psi}}_{cs}^{(e)}(t'), \end{aligned} \quad (6.4.17)$$

in cui:

$\underline{\underline{K}}^*(t_0)$  è la matrice modale della matrice di interazione  $\underline{\underline{D}}(t, t_0) = \left[ \underline{\underline{B}}_c(t_0) + \underline{\underline{B}}_s \right]^{-1} \underline{\underline{B}}_c(t_0)$ ;

$\underline{\underline{\Omega}}^*$  è la matrice diagonale formata dagli  $\omega_i^*$ , autovalori di  $\underline{\underline{K}}^*$ ;

$\underline{\underline{R}}^*(t, t_0)$  è la matrice diagonale formata dalle funzioni rilassamento ridotte relative alle funzioni viscosità variate:

$$J_i^*(t, t', t_0) = \frac{\omega_i^*}{E_c(t_0)} + (1 - \omega_i^*) J(t, t'), \quad (6.4.18)$$

$$\underline{\underline{\psi}}_{cs}^{(e)}(t) = \left[ \underline{\underline{B}}_c(t_0) + \underline{\underline{B}}_s \right]^{-1} \underline{\underline{Q}}_{cs}(t) \quad (6.4.19)$$

ove  $\underline{\underline{Q}}_{cs}(t)$  è il vettore della componente di azione interna staticamente equivalente al ritiro, calcolato elasticamente con modulo  $E_c(t_0)$ .

Se ci si riferisce al caso più comune di pressoflessione retta, in cui le componenti di spostamento incognito si riducono a due,  $\lambda$  e  $\mu$ , la (6.4.17) può essere facilmente esplicitata in due relazioni scalari.

Infatti, definite le caratteristiche geometriche:

$A_c$  = area della parte in calcestruzzo;

$A_s$  = area della parte in acciaio;

$A^*$  = area della sezione ideale omogeneizzata al modulo  $E_c(t_0)$ ;

$J^*$  = momento d'inerzia rispetto a  $x$  della sezione ideale omogeneizzata al modulo  $E_c(t_0)$ ;

$S_c$  = momento statico rispetto a  $x$  della parte in calcestruzzo;

$J_c$  = momento d'inerzia rispetto a  $x$  della parte in calcestruzzo;

$J_s$  = momento d'inerzia rispetto a  $x$  della parte in acciaio;

risulta:

$$\begin{cases} \omega_1^* \\ \omega_2^* \end{cases} = \frac{1}{2} \left[ \frac{A_c}{A^*} + \frac{J_c}{J^*} \right] \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{A_c}{A^*} \right)^2 + 4 \frac{S_c^2}{A^* J^*}},$$

$$\underline{\underline{K}}^* = \begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ \frac{1}{d_2} & 1 \end{bmatrix}$$

ove  $d_1$  e  $d_2$  rappresentano (a meno del segno) le distanze dei punti di Busemann [64] della sezione:

$$d_1 = \left( \frac{J_c}{J^*} - \omega_2^* \right) \frac{J^*}{S_c};$$

$$d_2 = \frac{S_c}{A^* \left( A_c / A^* - \omega_1^* \right)};$$

$$\underline{\underline{\psi}}_{cs}^{(e)}(t) = \begin{bmatrix} A_c \\ A^* \\ S_c \\ J^* \end{bmatrix} \varepsilon_{cs}(t)$$

essendo  $\varepsilon_{cs}(t)$  la deformazione dovuta al ritiro.

Per quanto riguarda le funzioni rilassamento ridotte, occorre tenere presente che la funzione viscosità variata (6.4.18), utilizzata nella analisi delle sezioni, differisce da quella (6.4.6) in base alla quale si sono formulate le funzioni rilassamento ridotte.

Il passaggio dalle une alle altre è però immediato, in quanto è sufficiente porre:

$$\omega_i = 1 - \omega_i^*$$

e calcolare le funzioni rilassamento  $R_i^*(t, t')$  ridotte relative agli  $\omega_i$ ; nelle formule che

seguono si è posto, per semplicità di scrittura,  $r_i^*(t, t') = R_i^*(t, t') / E_c(t_0)$ .

I parametri della deformazione della sezione:

$$\varepsilon(t) = \lambda(t) + \mu(t) y \quad (6.4.20)$$

sono allora esprimibili ciascuno come somma di 3 termini, rispettivamente legati allo sforzo normale, al momento flettente ed al ritiro del calcestruzzo:

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \lambda_3(t) \quad (6.4.22)$$

con:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \frac{N_0}{E_c(t_0) A^*} \left[ \frac{1 - (1 - \omega_1) r_1^*}{\omega_1} - \frac{1 - (1 - \omega_2) r_2^*}{\omega_2} \frac{d_1}{d_2} \right] \frac{d_2}{d_2 - d_1}, \\ \lambda_2(t) &= \frac{M_0}{E_c(t_0) J^*} \left[ \frac{1 - (1 - \omega_2) r_2^*}{\omega_2} - \frac{1 - (1 - \omega_1) r_1^*}{\omega_1} \right] \frac{d_1 d_2}{d_2 - d_1}, \\ \lambda_3(t) &= \frac{A_c}{A^*} \left[ I_1 - \frac{d_1}{d_2} I_2 \right] \frac{d_2}{d_2 - d_1} + \frac{S_c}{J^*} \frac{d_1 d_2}{d_2 - d_1} (I_2 - I_1); \\ \mu(t) &= \mu_1(t) + \mu_2(t) + \mu_3(t) \end{aligned} \quad (6.4.23)$$

con:

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \frac{N_0}{E_c(t_0) A^*} \left[ \frac{1 - (1 - \omega_1) r_1^*}{\omega_1} - \frac{1 - (1 - \omega_2) r_2^*}{\omega_2} \frac{d_1}{d_2} \right] \frac{1}{d_2 - d_1}, \\ \mu_2(t) &= \frac{M_0}{E_c(t_0) J^*} \left[ \frac{1 - (1 - \omega_2) r_2^*}{\omega_2} - \frac{1 - (1 - \omega_1) r_1^*}{\omega_1} \right] \frac{d_2}{d_2 - d_1}, \\ \mu_3(t) &= \frac{A_c}{A^* (d_2 - d_1)} (I_1 - I_2) + \frac{S_c}{J^*} \frac{d_2}{d_2 - d_1} \left[ I_2 - \frac{d_1}{d_2} I_1 \right], \end{aligned}$$

avendo posto  $I_i = \int_{t_0}^t r_i^*(t, \tau) d\varepsilon_{cs}(\tau)$ ,  $i=1, 2$ , tali integrali possono essere agevolmente calcolati con uno dei ben noti procedimenti di integrazione numerica.

La struttura delle (6.4.21), (6.4.22), almeno per i termini relativi ai carichi, risulta assai semplice: l'effetto della viscosità si presenta, infatti, come moltiplicatore delle

deformazioni elastiche  $\frac{N_0}{E_c(t_0) A^*}$  e  $\frac{M_0}{E_c(t_0) J^*}$ ; in tutte le formule, inoltre, è presente una notevole simmetria.

Merita rilevare che, in molti casi, l'istante di applicazione di  $N_0, M_0$  e l'inizio dello sviluppo del ritiro saranno diversi tra di loro; ciò non comporta alcuna complicazione in quanto sarà sufficiente adottare per ogni termine le funzioni  $r_i^*(t, t_0)$  relative all'istante appropriato.

Valutati così i termini  $\lambda$  e  $\mu$ , la (6.4.20) consente di ottenere lo stato di deformazione e, immediatamente, lo stato di tensione nella parte elastica:  $\sigma_s(t) = E_s[\lambda(t) + \mu(t) y]$ .

Lo stato di tensione nel calcestruzzo, se richiesto, può facilmente essere ricavato imponendo l'equilibrio della sezione.

Il procedimento qui illustrato, pur essendo del tutto rigoroso, non presenta difficoltà aggiuntive rispetto ai metodi approssimati (modulo fittizio, modulo fittizio aggiustato), e, fornendo la soluzione in forma chiusa, si presta ad essere facilmente formalizzato in procedure utilizzando fogli elettronici.

## Esempio 1. Sezione mista acciaio calcestruzzo

Si consideri la sezione di figura (6.4.5), soggetta ad un momento flettente costante  $M_0 = 300$  KNm applicato a  $t_0 = 28$  gg. ed al ritiro della parte in calcestruzzo che si suppone avvenire dal medesimo istante in cui sono stati applicati i carichi; il procedimento, peraltro, non cambia se si considera che il ritiro si sviluppi a partire da un'età diversa.

Risulta:

$$A_c = 4800 \text{ cm}^2, S_c = -190656 \text{ cm}^2, J_c = 7732856 \text{ cm}^4,$$

$$A_s = 427,5 \text{ cm}^2, J_s = 3330121 \text{ cm}^4, h_0 = 184 \text{ mm}^2.$$

Si assume:

$$f_{ck} = 20 \text{ MPa}, E_{c28} = 30 \text{ MPa}, R.H. = 80\%, E_s = 210 \text{ MPa}$$

e, pertanto:

$$A^* = 7792,5 \text{ cm}^2, J^* = 31043704 \text{ cm}^4.$$

Valutando il ritiro in accordo con il modello MC 90 [2], si ha:

$$\varepsilon_{cs}(t) = -0,355 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{(t-28)}{(t-28)+1193} \right]^{0,5}$$

Gli autovalori risultano:

$$\omega_1^* = 0,86129 \quad \omega_1 = 0,1387$$

$$\omega_2^* = 0,0036 \quad \omega_2 = 0,9964$$

ed i termini che compaiono negli autovettori sono:

$$d_1 = +39,97 \text{ cm}, \quad d_2 = -99,736 \text{ cm}$$

che, con il segno cambiato, rappresentano le ordinate dei punti di Busemann [64].

Valutati con il procedimento delineato nel Capitolo 4 i moduli  $E_i$  delle  $R(t, t_0)$ , in funzione di  $R.H.$ ,  $f_{ck28}$ ,  $h_0$ , si calcolano le funzioni rilassamento ridotte relative ai valori di  $\omega_i$  sopra riportati.

Si ha al tempo finale (pari a  $10^5$  gg.):

$$r_1^*(10^5, 28) = 0,777, \quad r_2^*(10^5, 28) = 0,246$$

e gli integrali  $I_1$  e  $I_2$  valgono

$$I_1 = -3,1841 \cdot 10^{-4}, \quad I_2 = -1,5825 \cdot 10^{-4}$$

Nel caso in esame, essendo  $N_0 = 0$ ,  $\lambda_1$  e  $\mu_1$  risultano nulli. Applicando le (6.4.21), (6.4.22), si ottengono i risultati della tabella seguente:

$t = t_0 = 28 \text{ gg.}$		Deformazioni nell'acciaio		Tensioni nell'acciaio [N/mm <sup>2</sup> ]	
		Lembo sup.	Lembo inf.	Lembo sup.	Lembo inf.
$\lambda_2 = 0,0$	$\mu_2 = 3,221 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$	$-9,573 \cdot 10^{-5}$	$4,196 \cdot 10^{-4}$	-20,1	88,12
$\lambda_3 = 0,0$	$\mu_3 = 0,0$	-	-	-	-
Totale					
$\lambda = 0,0$	$\mu = 3,221 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$	$-9,573 \cdot 10^{-5}$	$4,196 \cdot 10^{-4}$	-20,1	88,12
$t = t_u = 10^5 \text{ gg.}$		Deformazioni nell'acciaio		Tensioni nell'acciaio [N/mm <sup>2</sup> ]	
		Lembo sup.	Lembo inf.	Lembo sup.	Lembo inf.
$\lambda_2 = -1,269 \cdot 10^{-4}$	$\mu_2 = 4,504 \cdot 10^{-6}$	$-2,607 \cdot 10^{-4}$	$4,598 \cdot 10^{-5}$	-54,74	96,56
$\lambda_3 = -1,959 \cdot 10^{-4}$	$\mu_3 = 1,950 \cdot 10^{-6}$	$-2,538 \cdot 10^{-4}$	$5,815 \cdot 10^{-5}$	-53,29	12,21
Totale					
$\lambda = -3,228 \cdot 10^{-4}$	$\mu = 6,454 \cdot 10^{-6}$	$-5,145 \cdot 10^{-4}$	$5,179 \cdot 10^{-4}$	-108,03	108,77

A titolo di confronto è stato effettuato il calcolo utilizzando il metodo del modulo fittizio. Con i dati dell'esempio ( $R.H. = 80\%$ ,  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$  e  $h_0 = 184 \text{ mm}$ ) si

ottiene:  $\phi(\infty, 28) = 2,09$ , per cui il modulo fittizio risulta  $E_c^* = 9,709 \text{ MPa}$ .

I risultati sono nella tabella che segue, dalla quale si rileva che il metodo del modulo fittizio approssima in modo soddisfacente l'effetto dei carichi, ma sottostima di circa il 15% l'effetto del ritiro.

$t = t_u = 10^5 \text{ gg.}$	Tensioni nell'acciaio [N/mm <sup>2</sup> ]	
	Lembo sup.	Lembo inf.
Effetto di $M_0$	-55,07	96,60
Effetto del ritiro	-45,95	11,09
Totale	-101,02	107,69



$$E_{c,ef}(t, t_0) = \frac{1}{J(t, t_0)} = \frac{E_c(t_0)}{1 + [E_c(t_0)/E_c] \varphi(t, t_0)} \quad (7.1.3)$$

ed il age-adjusted effective modulus:

$$E_{c,adj}(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi(t, t_0) [E_c(t_0)/E_c] \varphi(t, t_0)} \quad (7.1.4)$$

L'andamento del coefficiente di invecchiamento è rappresentato in figura (7.1.1).

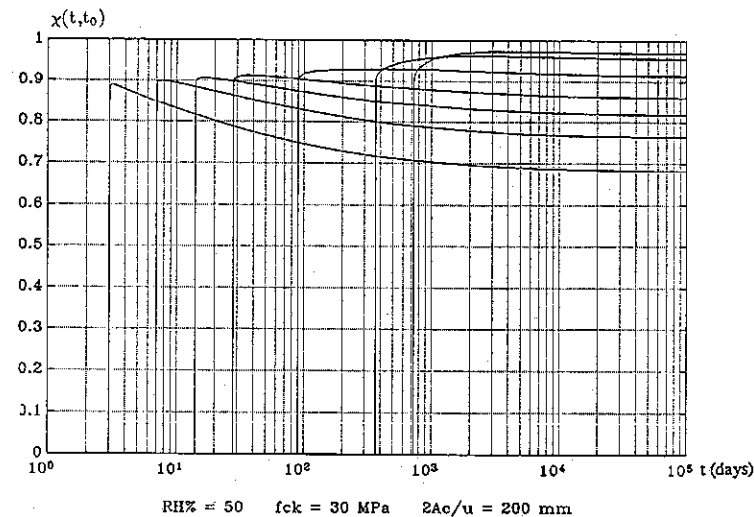


Figura 7.1.1: Diagramma del coefficiente di invecchiamento  $\chi(t, t_0)$

L'equazione (7.1.1) corrisponde esattamente a quella integrale (2.3.8) in tutti i casi che provengono da una combinazione lineare di problemi di viscosità (tensione costante, deformazione dipendente dalla funzione viscosità) e problemi di rilassamento (deformazione costante, tensione dipendente dalla funzione rilassamento).

Tuttavia, l'equazione (7.1.1) può essere applicata con sufficiente approssimazione ad un ampio numero di problemi caratterizzati da uno sviluppo asintotico della storia di tensione o di deformazione [16].

Si dimostra, inoltre, che [62]:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} 0,5 \left[ 1 + \frac{\frac{dE_c(t)}{dt}}{\frac{\partial R(t, t_0)}{\partial t}} \right] \leq \chi(t, t_0) \leq 1 \quad (7.1.5)$$

ponendo  $\chi(t, t_0) = 1$  nell'equazione (7.1.1), ossia uguale al suo limite superiore, si ricade nel metodo EM (*Effective Modulus*); assumendo, invece,  $\chi(t, t_0) = 0,5$ , uguale al suo limite inferiore, si ricade nel metodo MS (*Mean Stress*).

## 7.2 Il coefficiente di invecchiamento $\chi(t, t_0)$

In relazione ad ogni funzione viscosità  $J(t, t_0)$  assunta, i valori del coefficiente di invecchiamento si possono ottenere dall'equazione (7.1.2), che utilizza entrambe le funzioni  $J(t, t_0)$  e  $R(t, t_0)$ .

La determinazione del coefficiente di invecchiamento, quindi, richiede a priori il calcolo della funzione rilassamento determinata attraverso l'inversione numerica dell'integrale di Volterra (Metodo Generale).

Al fini di semplificare il calcolo della  $\chi(t, t_0)$  e facilitare la soluzione delle equazioni integrali, studi recenti hanno proposto espressioni approssimate,  $\tilde{\chi}$ , del coefficiente di invecchiamento del metodo AAEM, senza determinare preventivamente la funzione rilassamento.

Una iniziale approssimazione, ampiamente applicata nella pratica progettuale, proviene dalla prima formulazione del metodo sviluppato da Trost [65]: essa consiste nell'adottare per  $\tilde{\chi}$  un valore costante pari a 0,8, senza tener conto dell'età di carico  $t_0$ , della resistenza del calcestruzzo e della combinazione degli altri parametri reologici che riguardano la struttura.

Successivamente fu proposta da Trevino [67] una espressione approssimata,  $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}(t_0)$ , del coefficiente di invecchiamento, che prende in considerazione esclusivamente l'influenza dell'età iniziale di carico  $t_0$ , supponendo trascurabili gli effetti della durata del carico.

Questa considerazione, in riferimento alla funzione viscosità del CEB MC 90 [2], fu sviluppata in seguito nei lavori di Chiorino [68] e Chiorino-Lacidogna [53], dove è stata proposta una funzione di interpolazione dei valori esatti a lungo termine del coefficiente di invecchiamento  $\chi(3 \cdot 10^4, t_0)$  (quando, cioè, il fenomeno della viscosità è completamente

esaurito) attraverso il metodo dei minimi quadrati, utilizzando un'ampia serie di risultati numerici ottenuti dall'equazione (7.1.2).

L'espressione proposta è la seguente:

$$\tilde{\chi}(3 \cdot 10^4, t_0) = \frac{t_0^{0,5}}{1 + t_0^{0,5}} \quad (7.2.1)$$

Essa fornisce una stima approssimata del coefficiente di invecchiamento a  $3 \cdot 10^4$  giorni, in funzione di  $t_0$ , descrivendo l'andamento medio del fascio di curve  $\chi(3 \cdot 10^4, t_0)$  ottenuto al variare dei parametri reologici: umidità relativa  $R.H.$ , resistenza specifica del calcestruzzo  $f_{ck}$ , spessore fittizio  $2A_c/u = h_0$ , figura (7.2.1). L'equazione (7.2.1) è stata proposta in [53,68] ed adottata nel CEB Model Code 1990, § 5.8.4.3 [2].

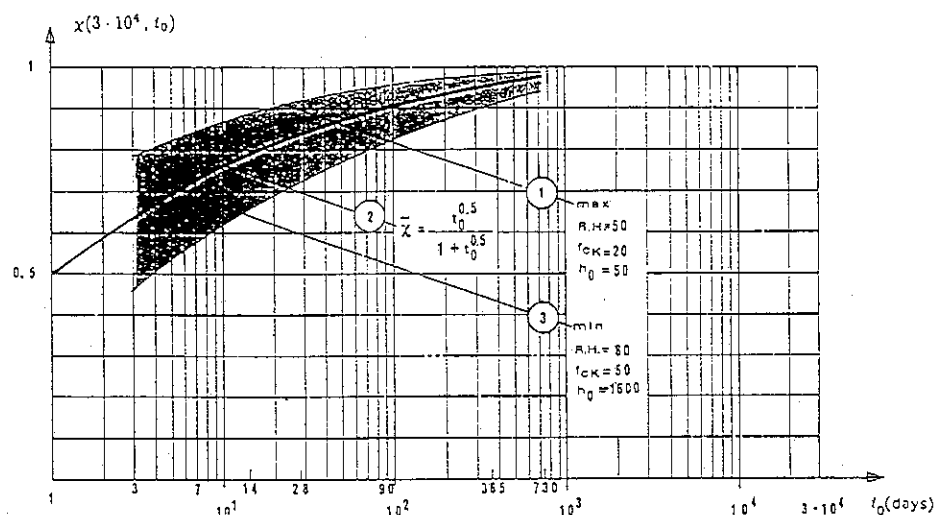


Figura 7.2.1: Andamento del valore a lungo-termine  $\chi(3 \cdot 10^4, t_0)$  del coefficiente di invecchiamento per il modello di viscosità CEB 1990, in funzione del tempo  $t_0$ . Le curve 1 e 3 corrispondono rispettivamente ai più bassi ed ai più alti valori del coefficiente di viscosità, mentre la curva 2 è ottenuta dall'equazione (7.2.1).

In un lavoro successivo [54], esaminando i diagrammi  $\chi(3 \cdot 10^4, t_0)$ , rappresentati come funzioni di  $t_0$ , tenendo costanti i valori di due parametri reologici umidità relativa e resistenza caratteristica del calcestruzzo, è stato messo in evidenza come la famiglia di

curve ottenute al variare dello spessore fittizio,  $h_0$ , segue l'andamento della funzione rappresentata dall'equazione (7.2.1), Curva 2 nella figura (7.2.1), ma per bassi valori di  $t_0$  la banda di curve diverge alquanto dalla Curva 2; inoltre, all'aumentare del tempo iniziale di carico le curve tendono tutte asintoticamente ad 1.

Per minimizzare questa divergenza, è stata proposta una espressione approssimata per  $\tilde{\chi}(3 \cdot 10^4, t_0)$ , che prende in considerazione una produttoria di termini, ciascuno funzione di un singolo parametro reologico [54].

Il primo termine coincide con l'equazione (7.2.1) e rappresenta il comportamento medio, mentre gli altri tre termini sono da considerarsi dei coefficienti correttivi.

Le verifiche numeriche eseguite sulla funzione hanno mostrato che il metodo proposto, sebbene sufficientemente valido per  $t_0 > 14$  giorni, conduce ad errori percentuali non trascurabili ( $\approx 8\%$ ) per  $t_0 = 3$  giorni.

È stata proposta, quindi, una nuova funzione del coefficiente di invecchiamento, introducendo nell'equazione (7.2.1) un coefficiente correttivo  $n$ , funzione dei tre parametri reologici,  $R.H.$ ,  $f_{ck}$  e  $h_0$ .

### 7.3 Espressione approssimata, $\tilde{\chi}$ , del coefficiente di invecchiamento

L'equazione (7.2.1) rappresenta con soddisfacente approssimazione l'evoluzione del fascio di curve di figura (7.2.1) in funzione del tempo  $t_0$ , trascurando la dipendenza dal tempo  $t$  sulla base di comprovate considerazioni sulla limitata influenza della durata di carico ( $t - t_0$ ).

Tuttavia, la sua curvatura non riflette l'influenza degli altri parametri reologici,  $R.H.$ ,  $f_{ck}$  e  $h_0$ . La divergenza di ciascuna curva da quella media, figura (7.2.1), può essere minimizzata riscrivendo l'equazione (7.2.1) nella seguente forma generale:

$$\tilde{\chi}(3 \cdot 10^4, t_0) = \frac{t_0^{0,5}}{n + t_0^{0,5}} \quad (7.3.1)$$

dove, fissando  $t_0$ ,  $n$  viene calibrato in relazione ai parametri reologici.

L'equazione (7.3.1) ha un asintoto orizzontale uguale a 1 per  $t_0 \rightarrow \infty$ , ma la pendenza iniziale è definita dal nuovo coefficiente correttivo  $n$ . I punti della funzione (7.3.1) tenderanno, perciò, a coincidere con quelli delle funzioni da approssimare quando  $n$  assumerà i valori numerici che rendono il valore iniziale della (7.3.1), per  $t_0 = 3$  giorni, uguale a quelli delle curve del tipo rappresentato nella figura (7.3.1).

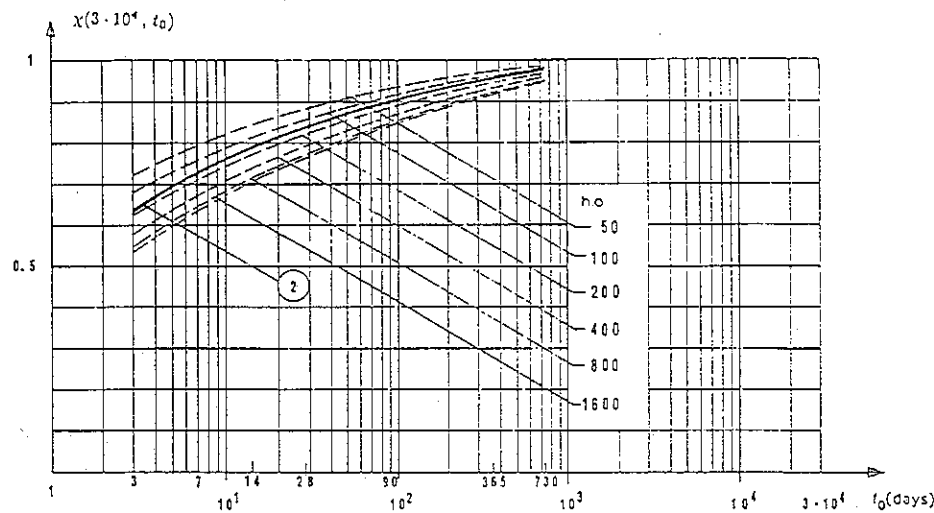


Figura 7.3.1: Andamento dei valori finali del coefficiente di invecchiamento per  $h_0$  variabile,  $R.H. = 50\%$ ,  $f_{ck} = 20$  MPa

In termini matematici si scrive:

$$\tilde{\chi}(3 \cdot 10^4, t_0) = \chi(3 \cdot 10^4, t_0)$$

e dall'equazione (7.3.1) si ottiene:

$$\frac{t_0^{0,5}}{n + t_0^{0,5}} = \chi(3 \cdot 10^4, t_0),$$

nella quale, introducendo  $t_0 = 3$ , si ottiene il valore di  $n$  in funzione di  $R.H.$ ,  $f_{ck}$  e  $h_0$ :

$$n = \frac{t_0^{0,5} [1 - \chi(3 \cdot 10^4, t_0)]}{\chi(3 \cdot 10^4, t_0)} \quad (7.3.2)$$

Diagrammando  $n$  come funzione di  $h_0$  e ponendo  $R.H.$ ,  $f_{ck}$  costanti, si nota che le curve determinate dall'equazione (7.3.2) hanno un andamento crescente ed i loro valori sono compresi tra un minimo 0,477 per alti valori della deformabilità viscosa

( $R.H. = 50\%$ ,  $f_{ck} = 20$  MPa,  $h_0 = 50$  mm) ed un massimo di 2,066 quando la deformabilità viscosa è bassa ( $R.H. = 80\%$ ,  $f_{ck} = 50$  MPa,  $h_0 = 1600$  mm). figure (7.3.2)-(7.3.8).

Nei calcoli pratici, per determinare il coefficiente  $n$  dell'equazione (7.3.1), è possibile leggere direttamente il valore di  $n$  dai diagrammi delle figure (7.3.2)-(7.3.9) una volta fissati i valori di  $R.H.$ ,  $f_{ck}$  e dello spessore fittizio  $h_0$ .

Tuttavia, effettuando un'analisi funzionale [69] delle curve che forniscono il coefficiente  $n$ , è possibile ottenere un'equazione semplice dal punto di vista analitico ed efficace nelle applicazioni, che approssima  $n$  in funzione di tutte le combinazioni dei parametri reologici.

Inizialmente, è stata utilizzata come curva di riferimento quella corrispondente a  $R.H. = 50\%$ ,  $f_{ck} = 20$  MPa, Curva (a) della figura (7.3.2), appartenente alla famiglia di funzioni esponenziale del tipo [70]:

$$Y = aX^b e^{cX}$$

per la quale si ricava, applicando il metodo statistico dei punti selezionati, la seguente espressione:

$$f_a(h_0) = 0,13 h_0^{1/3} e^{-(10^{-4} h_0)},$$

valida per  $50 \leq h_0 \leq 1600$ .

L'analisi statistica condotta anche sui parametri  $R.H.$  e  $f_{ck}$  [32,56] conduce poi alla seguente espressione per il coefficiente  $n$ :

$$n = f_a(h_0) \left[ 1 + \left( 1 - \frac{R.H.}{50} \right) f_b(h_0) \right] f(f_{ck}) \quad (7.3.3)$$

$$f_a(h_0) = 0,13 h_0^{1/3} e^{-(10^{-4} h_0)} \quad (7.3.4)$$

$$f_b(h_0) = -0,772 + 2,917 \cdot 10^{-4} h_0 \quad (7.3.5)$$

$$f(f_{ck}) = 0,772 + 0,0114 f_{ck} \quad (7.3.6)$$

valida per:  $50\% \leq R.H. \leq 80\%$ ,  $20 \leq f_{ck} \leq 50$  e  $50 \leq h_0 \leq 1600$ .

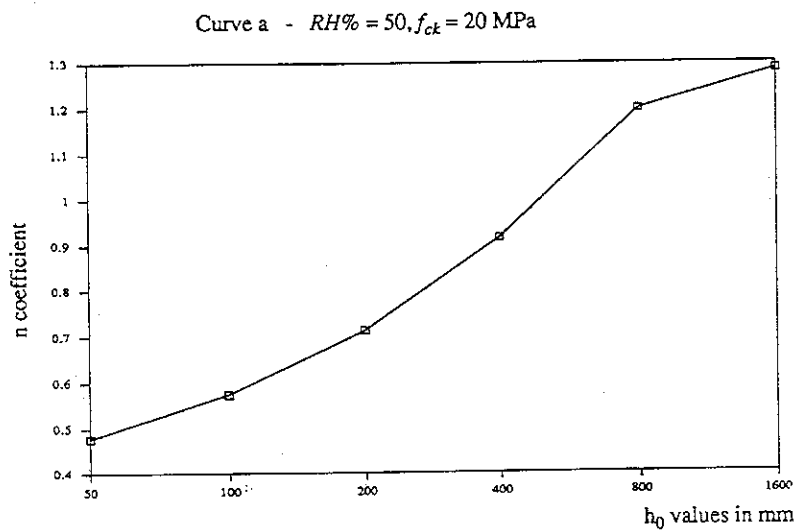


Figura 7.3.2

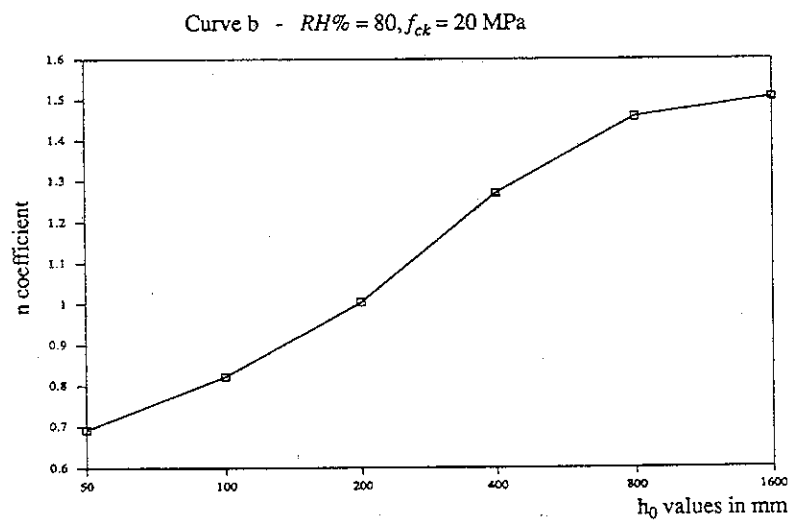


Figura 7.3.3

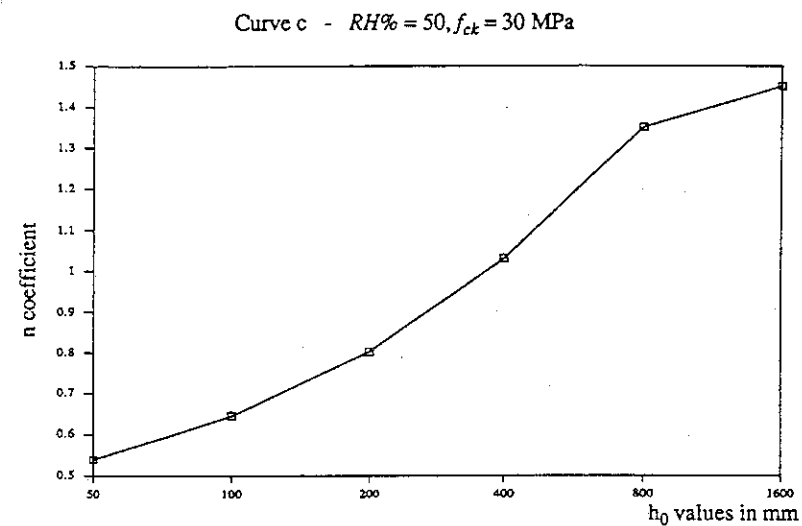


Figura 7.3.4

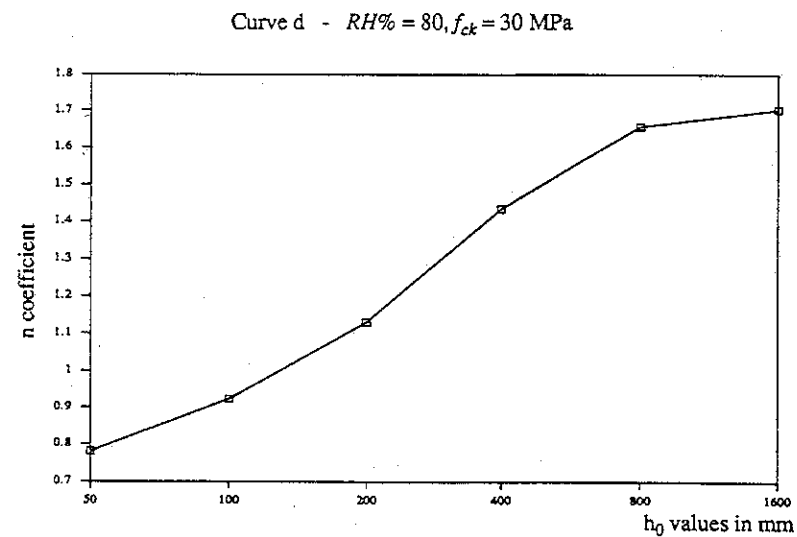


Figura 7.3.5



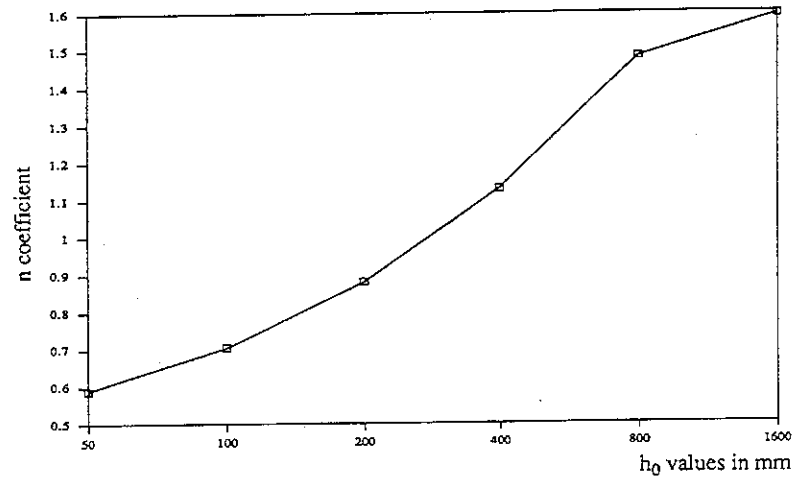
Curve e -  $RH\% = 50, f_{ck} = 40$  MPa

Figura 7.3.6

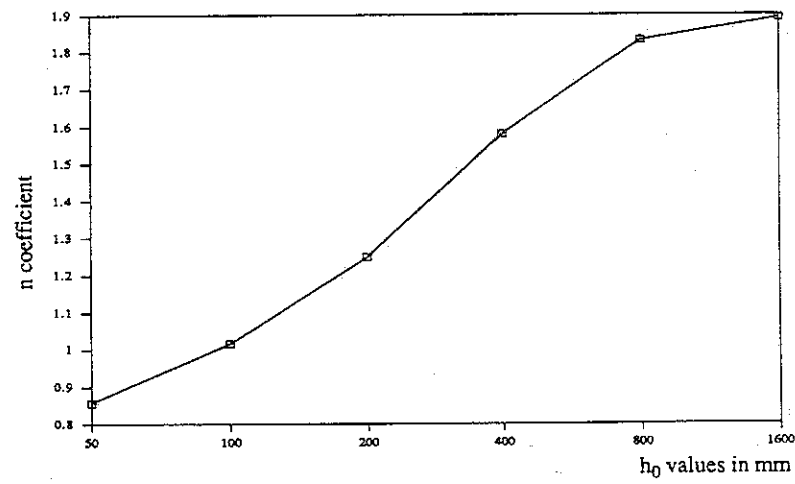
Curve f -  $RH\% = 80, f_{ck} = 40$  MPa

Figura 7.3.7

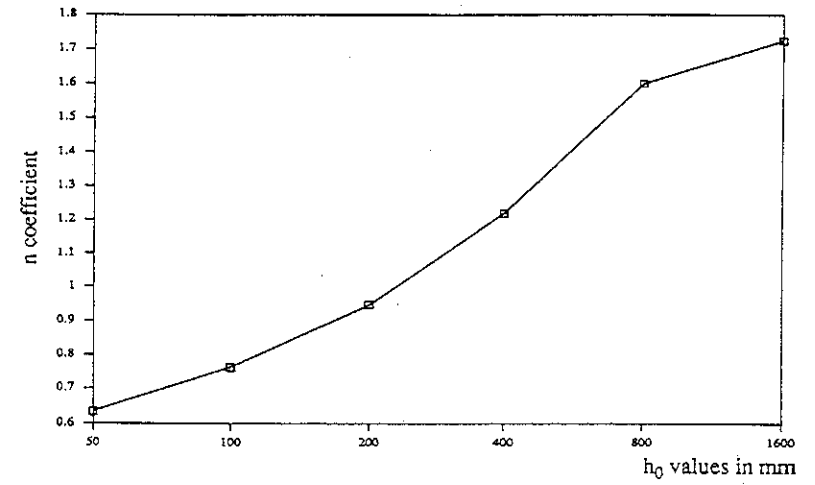
Curve g -  $RH\% = 50, f_{ck} = 50$  MPa

Figura 7.3.8

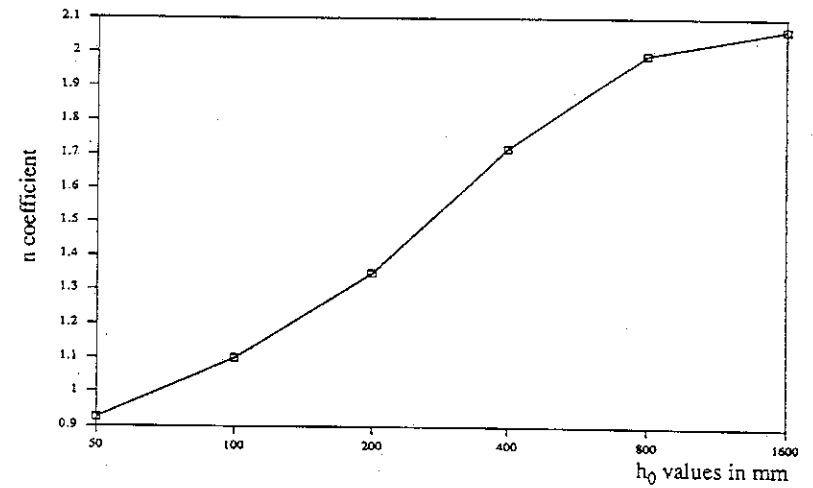
Curve h -  $RH\% = 80, f_{ck} = 50$  MPa

Figura 7.3.9

### 7.4 Espressione approssimata della funzione rilassamento ottenuta dalla $\tilde{\chi}$

Introducendo nell'equazione (7.1.2) l'espressione algebrizzata del coefficiente di invecchiamento [54,55], è possibile ottenere una forma approssimata della funzione rilassamento:

$$\tilde{R}(t, t_0) = E_c(t_0) \left\{ 1 - \frac{E_c(t_0) J(t, t_0) - 1}{1 + \tilde{\chi} [E_c(t_0) J(t, t_0) - 1]} \right\} \quad (7.4.1)$$

Nelle figure (7.4.1) e (7.4.2), l'evoluzione della  $\tilde{R}(t, t_0)$  ottenuta dalla (7.4.1) viene comparata con quella esatta proveniente dall'inversione della funzione  $J(t, t_0)$  del CEB Model Code 1990 [2].

Dai diagrammi si nota come la funzione approssimata  $\tilde{R}(t, t_0)$  descrive in modo congruente l'intero sviluppo della funzione rilassamento  $R(t, t_0)$  (massima deviazione per tempi intermedi minori del 4,5%), mentre i valori a lungo termine sono praticamente sovrapponibili (errori  $\leq 1\%$ ).

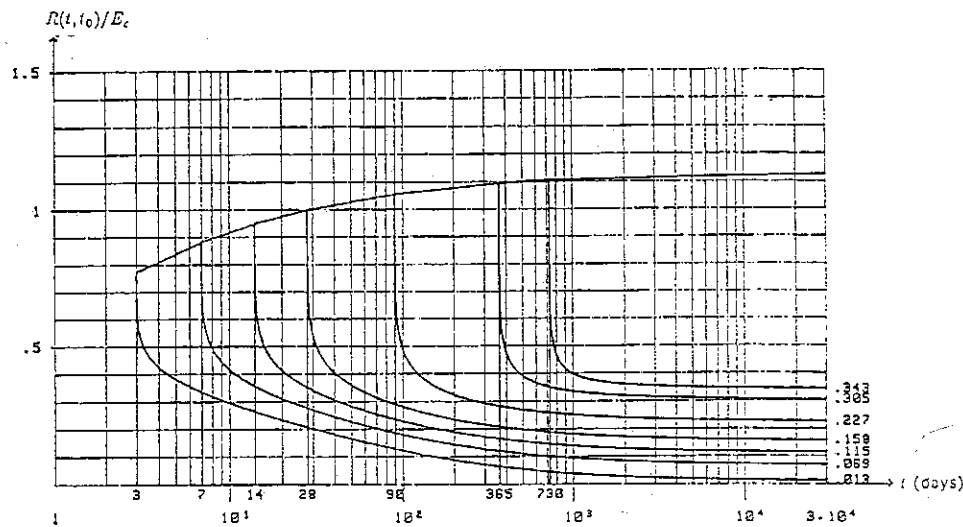


Figura 7.4.1: Andamento della funzione  $R(t, t_0)$ , parametri reologici:  $R.H. = 50\%$ ,  $f_{ck} = 20\text{MPa}$ ,  $h_0 = 50\text{ mm}$

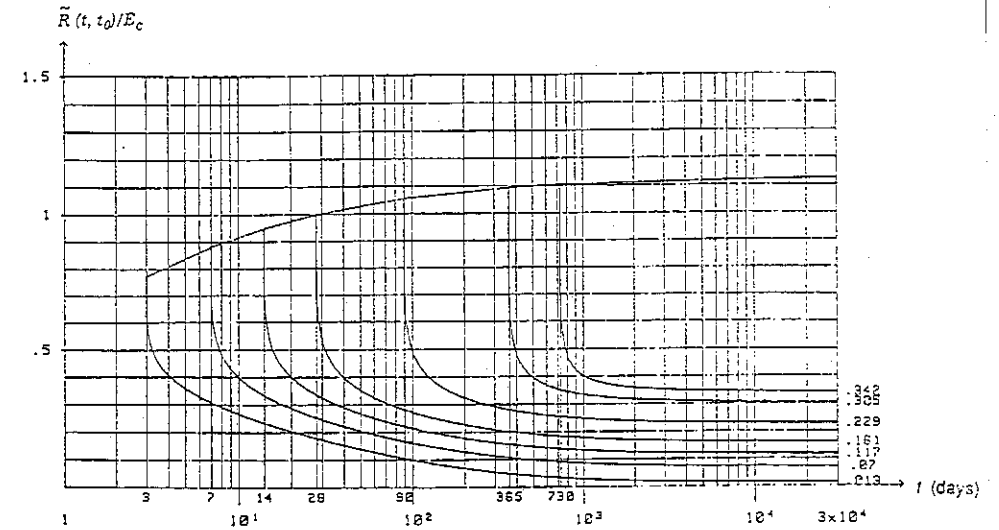


Figura 7.4.2: Andamento della funzione  $\tilde{R}(t, t_0)$ , parametri reologici:  $R.H. = 50\%$ ,  $f_{ck} = 20\text{MPa}$ ,  $h_0 = 50\text{ mm}$

## Conclusioni

L'analisi viscoelastica lineare per i materiali invecchianti, che si utilizza per la valutazione degli effetti strutturali della viscosità e del ritiro del calcestruzzo è generalmente basata su modelli del materiale che specificano la funzione viscosità in relazione ai parametri fisici del problema, come l'umidità relativa, la resistenza specifica del calcestruzzo e lo spessore fittizio dell'elemento.

In questa tesi, in modo duale, è stato formulato un modello in grado di rappresentare il comportamento viscoso del calcestruzzo in termini di funzione rilassamento [59], che utilizza quali dati di ingresso gli stessi parametri reologici che vengono impiegati nella previsione della funzione viscosità del Codice Modello CEB 90 [2].

Le due formulazioni sono tra loro equivalenti poiché soddisfano con ottima approssimazione il legame integrale tra la funzione viscosità e rilassamento.

Tuttavia, il *modello di rilassamento* ottenuto dalle catene di Maxwell e regolato dalle equazioni costitutive differenziali, consente la elaborazione dei problemi strutturali secondo modalità più semplici delle procedure basate su relazioni costitutive integrali.

Esso conduce, inoltre, all'applicazione di algoritmi risolvitori di tipo passo-passo che non richiedono la memorizzazione dell'intera storia di carico [26].

Questa procedura, infatti, è stata utilizzata per la soluzione di strutture soggette a variazione dello schema statico [16,20] determinando la *funzione integrale*  $\xi(t, t_1, t_0)$  con precisione e con il minimo impiego di memoria.

Il modello di rilassamento è stato poi applicato al Metodo delle Funzioni Rilassamento Ridotte,  $R^*(t, t_0)$ , presentando un metodo analitico per la *determinazione in forma chiusa delle*  $R^*(t, t_0)$  che risulta di buona precisione [60].

Nell'ambito dei metodi algebrici [61] è stata presentata, una *Espressione Algebrizzata del Coefficiente di Invecchiamento*  $\tilde{\chi}$ , proposta nel 1992 [56] e poi adottata dal CEB, Bulletin d'Information No. 215 [32].

Ulteriori sviluppi di questa tesi potrebbero riguardare l'analisi di elementi strutturali sollecitati oltre il limite delle tensioni ammissibili, prendendo in considerazione il coefficiente di viscosità non lineare definito nel Modello CEB 90. Altri aspetti di non linearità potrebbero ancora essere affrontati considerando gli effetti della viscosità nelle sezioni fessurate in cemento armato.

Un altro importante campo di applicazione potrebbe, infine, riguardare l'elaborazione di programmi di calcolo ad elementi finiti per la discretizzazione di strutture bidimensionali, adottando modelli di previsione della viscosità più raffinati che tengano conto del reale comportamento microstrutturale del calcestruzzo come avviene nella teoria della diffusione [8,25].

## Ringraziamenti

Il lavoro presentato in questa Tesi di Dottorato è stato svolto, dal 1990 al 1993, con la guida del Prof. Ing. Paolo Napoli del Dipartimento di Ingegneria Strutturale del Politecnico di Torino.

Desidero, dunque, ringraziare il Prof. Paolo Napoli per la sua insostituibile guida nei miei studi e per i consigli dati nella stesura del presente lavoro.

Esprimo, inoltre, una profonda riconoscenza al Prof. Ing. Mario Alberto Chiorino per i suoi insegnamenti e la sua comprensione in questo periodo di Dottorato.

Desidero ringraziare il Coordinatore del Dottorato di Ricerca in Ingegneria Strutturale 6° Ciclo Prof. Ing. Alberto Carpinteri per i suoi commenti e le proficue discussioni sulla presentazione di questo documento.

Sono grato, infine, al dott. arch. Massimo Aprile per la sua collaborazione nella redazione grafica del presente lavoro.

dott. arch. Giuseppe Lacidogna

Torino, febbraio 1994

## Bibliografia

- [1] RILEM Technical Committee TC 69, "Mathematical Modeling of Creep and Shrinkage of Concrete", "Conclusions for Structural Analysis and for Formulation of Standard Design Recommendations". Material and Structures, Vol. 20 No. 119, Sept. 1987, pp. 395-98.
- [2] CEB, Comité Euro-International du Béton, "CEB-FIP Model Code 1990, Final Draft". CEB Bulletin No. 203, 204, 205, July 1991. Printed Edition by Thomas Telford, London, 1993.
- [3] Sargin, M., "Stress-Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections". University of Waterloo, Solid Mechanics Division (Studies Series 4), Waterloo, Canada, 1971.
- [4] Carpinteri, A. ed al., "Meccanica dei Materiali e della Frattura". Pitagora Editrice, Bologna, 1992.
- [5] Ottosen, N.S., "A Failure Criterion for Concrete". Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 103, No. EM4, August, 1977.
- [6] Ottosen, N.S., "Constitutive Model for Short-Time Loading of Concrete". Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 105, No. EM1, February, 1979.
- [7] Chiorino, M.A., "Guidelines for the Creep Analysis of Concrete Structures: Criteria for a Code Type Formulation". Atti del Dipartimento di Ingegneria Strutturale, No. 23, Turin, 1990. Also Festschrift Prof. H.K. Hilsdorf, Universität Karlsruhe, Verlag and Son, Berlin, 1990, pp. 267-294.
- [8] RILEM, "Mathematical Modeling of Creep and Shrinkage of Concrete". Edited by Z.P. Bažant, John Wiley and Sons, 1988.
- [9] Neville, A.M., "Properties of Concrete". 3rd edn, Pitman, London and Marshfield, Mass., p. 779.
- [10] Wittman, F.H., "Creep and Shrinkage Mechanisms". I Creep and Shrinkage in Concrete Structures, Edited by Z.P. Bažant and F.H. Wittman, Wiley, Chichester, 1982.
- [11] Wittman, F.H., "Interaction of Hardened Cement Paste and Water". Journal American Ceramics Soc., 1973.
- [12] Wittman, F.H., "The Structure of Hardened Cement Paste. A Basis for a Better Understanding of the Material Properties". In Hydraulic Cement Pastes, Cement & Concr. Assoc., Slough, UK, 1976a.

- [13] Feldman, R.F., Sereda, P.J., "The Model for Hydrated Portland Cement Paste as Deduced from Sorption-Length Change and Mechanical Properties". Mater. Constr., Paris, 1968.
- [14] Powers, T.C., "A Hypothesis of Carbonation Shrinkage". Journal PCA Res. Devel. Labs, 1962b.
- [15] Hobbs, D.W., "Influence of Specimen Geometry upon Weight Change and Shrinkage of Air-Dried Concrete Specimens". Mag. Concr. Res., 1977.
- [16] Chiorino, M.A. (Chairman) ed al., "CEB Design Manual. Structural Effects of Time-dependent Behaviour of Concrete". CEB Bulletin No. 142/142 bis, Georgi Publishing Co., Saint Saphorin, Switzerland, 1984, pp. 391.
- [17] Ghali, A., Favre, R., "Concrete Structures: Stresses and Deformations". Chapman and Hall, London, 1986.
- [18] Šmerda, Z., Krístek, V., "Creep and Shrinkage of Concrete Elements and Structures". Elsevier Science Publishing Co., New York, 1988.
- [19] Levi, F., Pizzetti, G., "Fluage, Plasticité, Precontrainte". Dunod, Paris, 1951.
- [20] Chiorino, M.A., Dezi, L., Tarantino, A.M., "Viscoelastic Structures with Variable Structural System". Proceedings of the Fifth International RILEM Symposium, Creep and Shrinkage of Concrete, pagg. 579-590, Barcellona, Spain, September 1993.
- [21] Mola, F., "Analisi Generale in Fase Viscoelastica Lineare di Strutture e Sezioni a Comportamento Reologico non Omogeneo". Studi e Ricerche, Vol. 8, Italcementi, Bergamo, 1986.
- [22] Chiorino, M.A., Creazza, G., Mola, F., Napoli, P., "Analysis of Aging Viscoelastic Structures with n-redundant Elastic Restraints". In Mathematical Modeling of Creep and Shrinkage of Concrete". John Wiley and Sons, Chichester and New York, 1988, pp. 459.
- [23] Migliacci, A., "Applicazioni dei Principi di Viscosità". Tamburini Editrice, Milano, 1971.
- [24] Dezi, L., Menditto, G., Tarantino, A.M., "Viscoelastic Heterogeneous Structures with Variable Structural System". Journal Eng. Mech. Div., ASCE, 119(2).
- [25] Bažant, Z.P., Kim, J.K. and Panula, L., "Improved Prediction Model for Time-Dependent Deformations of Concrete: Part 1 - Shrinkage". Mater. Struct., 24 (143), 1991; "Part 2 - Basic Creep". *Ibid.* 24(143), 1991; "Part 3 - Creep at Drying". *Ibid.* 25(145), 1992; "Part 4 - Temperature Effects". *Ibid.* 25(146), 1992; "Part 5 - Cyclic load and Cyclic Humidity". *Ibid.* 25, 1992.
- [26] Bažant, Z.P., and Wu, S.T., "Rate-Type Creep Law of Aging Concrete Based on Maxwell Chain". Materials and Structures, Paris, 1974a.
- [27] Boltzmann, Z., "Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung". Sitzber. Akad. Wiss., Wiener Bericht 70, 1876.
- [28] Volterra, V., "Leçons sur les Fonctions de Ligne". Gauthier-Villars, Paris, 1913.
- [29] McHenry, D., "A New Aspect of Creep in Concrete and its Application to Design". Proc. ASTM, 43, 1943.

- [30] Maslov, G.N., "Thermal Stress States in Concrete Masses, with Account of Concrete Creep", (in Russo). Izvestia Nauchno-Issledovatel'skogo Instituta Gidrotechniki, Gosenergoizdat, 1940.
- [31] Bažant, Z.P., "Numerical Determination of Long-range Stress History from Strain History in Concrete". Material and Structures (RILEM), Vol. 5, 1972.
- [32] Chiorino, M.A., Lacidogna, G., "Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete". CEB Bulletin D'Information No. 215, Losanna, Marzo, 1993.
- [33] McDonald, J.E., "An experimental Study of Multiaxial Creep in Concrete". Concrete for Nuclear Reactors, ACI SP-34, Detroit, 732-68.
- [34] York, G.P., Kennedy, T.W., Perry, E.S., "Experimental Investigation of Creep in Concrete Subjected to Multiaxial Compressive Stresses and Elevated Temperatures". Res. Rep. 2864-2, Univ. of Texas, Austin, 1970.
- [35] Neville, A.M., and Diger, W., "Creep of Concrete, Plain, Reinforced, Prestressed". North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [36] Neville, A.M., Diger, W.H., and Brooks, J.J., "Creep of Plain and Structural Concrete". Construction Press-Longman, London, New York, 1983, 361 pp.
- [37] Mandel, J., "Sur le Corps Viscoelastiques Lineaires dont les Proprietes Dependent de l'Age". Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, 1958.
- [38] Bažant, Z.P., "Effect of Creep and Shrinkage of Concrete in Statically Indeterminate Structures with Concrete of Nonuniform Age". (in Cecoslovacco), Inzenyrshé Slavby, SNTL, Praga, 1961.
- [39] Bažant, Z.P., "Creep of Concrete in Structural Analysis". (in Cecoslovacco), State Publishers of Technical Literature (SNTL), Praga, 1966a, 186 pp.
- [40] Bažant, Z.P., "Theory of Creep and Shrinkage in Concrete Structures: a Precip of Recent Developments". Mechanics Today, Vol. 2, Pergamon Press, New York, NY, 1975, pp. 1-93.
- [41] Huet, C., "Adaptation of Bažant's Algorithm to the Analysis of Ageing Viscoelastic Composite Structures". (in Francese), Materials and Structures (RILEM), Parigi, 1980.
- [42] Nowacki, W., "Théorie du Fluage". Eyrolles, Parigi, 1965.
- [43] Dischinger, F., "Untersuchungen über die Knicksicherheit, die Elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken". Der Bauingenieur, Vol. 18, 1937, pp. 487-520, 539-552, 595-621.
- [44] Rüsç, H., Jungwirth, D., and Hilsdorf, H., "Kritische Sichtung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden des Betons auf das Verhalten der Tragwerke". Beton-und Stahlbetonbau, 68(3), 1973.
- [45] CEB, Comité Euro-International du Béton, "Code Modèle CEB-FIP pour les Structures en Béton", (annexe e). CEB, Bulletin d'information No. 124/125 - f, Paris 1978, pp. 319-334.
- [46] Trost, H., "Spannungs-Dehnungs-Gesetz eines Viskoelastischen Fest-Körpers wie Beton und Folgerungen für Stabtragwerke aus Stahlbeton und Spannbeton". Beton, 6/1966, pag. 233.
- [47] Levi, F., "Représentation des Proprietes Rheologiques du Beton Durei". Hommage au Prof. Campus, Liege, 1964.

- [48] Chiorino, M.A., "Rheological Concepts Applied to Concrete". Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni, Politecnico di Torino, Facoltà di Ingegneria, 1972.
- [49] Whitney, Ch. S., "Plain and Reinforced Concrete Arches. Process Report on the Limitations of the Theory of Elasticity and the Effect of Plastic Flow, Temperature Variations and the Freyssinet Method of Adjustment". ACI Journal, Vol. 28, 1932.
- [50] Bazant, Z.P., and Wu, S.T., "Dirichlet Series Creep Function for Aging Concrete". J. Eng. Mech. Div. ASCE, 99(EM2), 1973a.
- [51] Müller, H.S., and Hilsdorf, H.K., "Evaluation of the Time Dependent Behaviour of Concrete, Summary Report on the Work of General Task Groups 9". CEB Bulletin, No. 199, August, 1990, pp 201.
- [52] Chiorino, M.A., Lacidogna, G., "Design Aids for Linear Creep Analysis of Concrete Structures (CEB Model 1990 for Creep), Part I, II, Diagrams of Creep and Relaxation Functions and of Aging Coefficient". Atti del Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Torino, No. 30, Ottobre, 1991.
- [53] Chiorino, M.A., Lacidogna, G., "Approximate Values of Aging Coefficient for the Age-Adjusted Effective Modulus Methods in Linear Analysis of Concrete Structures (CEB Model 1990 for Creep). Atti del Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Torino, No. 31, Novembre, 1991.
- [54] Lacidogna, G., Tarantino, A.M., "Espressioni Approssimate per il Coefficiente di Invecchiamento e la Funzione di Rilassamento nell'Analisi Viscoelastica di Strutture in Calcestruzzo". Atti del Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Torino, No. 32, Novembre, 1991.
- [55] Chiorino, M.A., Lacidogna, G., "Approximate Values of the Relaxation Function in Linear Creep Analysis of Concrete Structures (CEB Model 1990 for Creep)". Atti del Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Torino, No. 34, Aprile 1992.
- [56] Lacidogna, G., "Improvements to the Approximate Expressions for the Aging Coefficient of the Age-Adjusted Effective Modulus Method and for the Relaxation Function in Linear Creep Analysis of Concrete Structures (CEB Model 1990 for Creep)". Atti del Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Torino, No. 35, Maggio, 1992.
- [57] Chiorino, M.A., Lacidogna, G., "Design Aids for Linear Creep Analysis of Concrete Structures (CEB Model 1990 for Creep), Part III, Diagrams of Function  $\xi(t, t_1, t_0)$  Regulating the Problems of Modification of Restraint Condition (Variation of Statical Scheme after Loading)". Atti del Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Torino, No. 40, Ottobre, 1993.
- [58] Lacidogna, G., Napoli, P., "Modellazione Analitica del Rilassamento del Calcestruzzo Corrispondente alla Formulazione Fluage CEB-MC 90: una Funzione del Tipo *Rate of Creep*". Atti del Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Torino, No. 38, Agosto, 1992.
- [59] Lacidogna, G., Napoli, P., "Analytical Modeling of Relaxation in Concrete in Accordance with the CEB MC 90 Creep Formulation". Proceedings of the Fifth International RILEM Symposium, Creep and Shrinkage of Concrete, pagg. 665-671, Barcellona, Spain, September 6-9, 1993.

- [60] Lacidogna, G., Napoli, P., "Formulazione Diretta delle Funzioni Rilassamento Ridotte del Calcestruzzo e loro Utilizzo nel Calcolo degli Effetti della Viscosità". Atti dell'Università di Trento, Facoltà di Ingegneria, Primo Workshop Italiano sulle Strutture Composte, Trento, Giugno, 1993.
- [61] Bazant, Z.P., "Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method". ACI Journal, Vol. 69, 1972, pp. 212-217.
- [62] Mola, F., "Metodi di Analisi di Strutture in c.a. e c.a.p. a Comportamento Elasto-Viscoso e Lineare". Studi e Ricerche, Vol. 3, Italcementi, Bergamo, 1981.
- [63] Mola, F., "Analisi in Fase Viscoelastica Lineare di Strutture non Omogenee Lungo il Proprio Asse". Studi e Ricerche, Vol. 9, Italcementi, Bergamo, 1987, pp. 9-33.
- [64] Busemann, R., "Kriechberechnung von Verbundträgern unter Benutzung von zwei Kriechfasern". Der Bauingenieur, h. 25, 1950.
- [65] Trost, H., "Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech und Relaxation Probleme bei Beton und Spannbeton". Beton-und-Stahlbetonbau, Vol. 62 (1967), No. 10, pp. 230-238, No. 11, pp. 261-269.
- [66] Trost, H., "Folgerungen aus Theorien und Versuchen für die Baupraktische Untersuchung von Kriech und Relaxationsproblemen in Spannbetontragwerken". Symposium IABSE Design of Concrete Structures for Creep, Shrinkage and Temperature Changes, Madrid, 1970.
- [67] Trevino, J., "Methode Directe de Calcul del Etat de Déformation et de Contrainte à Long Terme d'une Structure Composée". These No. 728 (1988), Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, 1988, Favre, R., rapporteur.
- [68] Chiorino, M.A., "Proposal for Chapt. 5.3.6, Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete". First Draft, CEB Bulletin No. 195, March 1990, pp. 520-526.
- [69] Ralston, A., Rabinowitz, P., "A First Course in Numerical Analysis", McGraw Hill International Book Company, London, 1978.
- [70] Kendall, M.G., Stuart, A., "The Advanced Theory of Statistics Inference and Relationship", Vol. 2, Charles Griffin & Company Limited, London, 1967.
- [71] Chiorino, M.A., (Chairman) et al., "Manual-Structural Effects of Time-Dependent Behaviour of Concrete". Second Draft, CEB, Bull. d'Information No. 80, Feb. 1972.
- [72] Napoli, P., "Determinazione della Funzione Rilassamento per il Calcestruzzo Tenendo Conto della Variabilità del Modulo Elastico". Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni, Politecnico di Torino, 1975.