

# IDENTIFICAZIONE DI SCHIUME IN POLIPROPILENE E RELAZIONE TRA DENSITÀ E PARAMETRI DEI MODELLI

A. Ibba, M. Avalle

*Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Torino, C.so Duca degli Abruzzi 24 –  
10129 Torino (TO), e-mail: andrea.ibba@polito.it*

## SOMMARIO

La varietà praticamente infinita di solidi cellulari rende particolarmente ardua la modellazione di questi materiali, per ognuno dei quali è in genere necessaria una specifica identificazione. La ricerca di legami tra i parametri dei modelli e le caratteristiche note della schiuma è utile per ridurre il lavoro di identificazione ed evitare una eccessiva quantità di esperimenti.

Prove sperimentali di compressione uniassiale statica su schiume rigide di EPP a cinque densità diverse sono state utilizzate per identificare i modelli di Gibson e Rush. I parametri identificati per il modello di Gibson sono stati confrontati con quelli dati dalle espressioni dello stesso autore in funzione della densità. I parametri identificati per il modello di Rush sono stati studiati per individuare relazioni analitiche simili a quelle di Gibson tra i parametri e la densità.

## ABSTRACT

Cellular solids modelisation is a hard objective to realize because of the great amount of different materials: for each of them a specific identification is generally needed. The research of relationships between model parameters and the known physical characteristics of the foam is useful in order to contain the identification work and to avoid too much tests.

Static uniaxial compression tests have been performed on EPP rigid foam specimens with five different densities in order to identify the Gibson and Rush models. Results have been used to verify the dependency of the Gibson parameters from the density and to define a new analytical relationship between Rush parameters and density.

## 1. INTRODUZIONE

I solidi cellulari, più comunemente detti schiume, sono sempre più utilizzati nell'industria e in particolare in quella automobilistica. Tali materiali sono scelti per le loro capacità strutturali e di assorbimento energetico negli urti oltre che per il loro peso molto contenuto. Rispetto ai materiali tradizionali consentono di progettarne le caratteristiche meccaniche di elasticità, resistenza e anisotropia agendo sulla scelta del materiale di base, della porosità (e quindi della

densità) e della geometria della microstruttura. Ovviamente tali scelte devono essere supportate da apposite tecnologie di produzione che possono rappresentare il vero limite, unito al costo, nell'utilizzo delle schiume.

In questo scenario acquista fondamentale importanza la modellazione delle caratteristiche meccaniche delle schiume ai fini progettuali e dei calcoli di verifica. Le difficoltà risiedono nella caratteristica tensioni-deformazioni fortemente non lineare, nella sua dipendenza dalla densità e dalla microstruttura e nella conseguente teorica esistenza di un'infinità di schiume diverse. I modelli sviluppati sono altrettanto vari e si possono dividere in due categorie fondamentali: quelli fenomenologici e quelli micromeccanici. I primi sono definiti da formulazioni che cercano di avvicinarsi il più possibile al reale andamento della curva tensioni-deformazioni attraverso opportune scelte dei valori da assegnare ad alcuni parametri prescindendo dalle caratteristiche strutturali della schiuma e dai meccanismi fisici che governano il fenomeno. I secondi si basano sullo studio dei meccanismi di deformazione della schiuma sotto carico. In questo caso i parametri del modello sono derivati dalle caratteristiche del materiale di costituzione e dalla geometria della microstruttura o da grandezze derivate da queste (densità, allungamento delle celle elementari, eccetera). Il vantaggio dei modelli micromeccanici consiste nella capacità di modellare una grande quantità di schiume diverse a fronte di poche prove sperimentali se non addirittura nessuna. Per contro con questi modelli, in genere, si ottengono risultati meno rispondenti a quelli sperimentali a causa delle inevitabili incompletezze. Nei modelli fenomenologici invece si esegue una analisi di regressione sulle curve sperimentali.

Il lavoro si propone l'analisi del legame tra i parametri dei modelli di schiume e le caratteristiche fisiche della stessa. Nei modelli micromeccanici tale legame è il presupposto del modello che quindi può essere verificato tramite il confronto con i dati sperimentali. Nel caso dei modelli fenomenologici un legame di questo tipo non è previsto ma è comunque possibile analizzare la variazione dei parametri identificati rispetto ad alcune caratteristiche fisiche della schiuma. In particolare si vuole analizzare l'influenza della densità della schiuma sui parametri del modello proposto da Gibson [1] e su quello di Rush [2-4] sulla base di una serie di prove sperimentali di compressione uniassiale statica effettuate su provini di polipropilene espanso. Il modello di Gibson include l'influenza della densità sui parametri caratteristici, per cui si è più propriamente trattato di effettuarne una verifica.

La conoscenza di una legge che esprima i parametri di un modello fenomenologico in funzione della densità della schiuma eviterebbe la sperimentazione su ogni diversa densità purché composta dallo stesso materiale di base. Sarebbero sufficienti le prove sperimentali su pochi provini di diversa densità (al limite anche uno solo) per identificare contemporaneamente tutte le schiume ottenute dallo stesso materiale costitutivo a parità di topologia microstrutturale.

## **2. PROVE SPERIMENTALI**

Lo studio è stato affrontato partendo da prove sperimentali effettuate su schiume di polipropilene espanso con cinque diverse densità nominali: 31, 45, 70, 106 e 145 g/dm<sup>3</sup>. Si sono utilizzati provini cubici di 50 mm di lato e per ciascuna densità nominale sono state eseguite tre prove di compressione uniassiale statica [5-7] su tre provini diversi, preventivamente pesati e misurati, per un totale di 15 prove.

Le dimensioni e i pesi rilevati sui provini sono riportati in Tabella 1 e da una sua prima analisi si può notare che i valori di densità calcolati in base alle misurazioni sono spesso risultati diversi da quelli nominali e in alcuni casi anche relativamente dispersi. In Figura 1 sono riportate le curve sperimentali forza-spostamento.

Tabella 1 – Pesì e dimensioni rilevati sui provini

TIPO	Peso (g)	Densità (g/l)	L <sub>1</sub> (mm)	L <sub>2</sub> (mm)	L <sub>3</sub> (mm)	V (l)
EPP31S4	4,03	30,09	51,5	51,0	51,0	0,1340
EPP31S5	3,86	29,10	50,5	51,0	51,5	0,1326
EPP31S6	3,83	29,16	50,5	51,0	51,0	0,1314
EPP45S4	5,62	40,71	53,5	50,6	51,0	0,1381
EPP45S5	5,15	40,39	50,4	50,0	50,6	0,1275
EPP45S6	5,27	40,12	51,2	50,6	50,7	0,1314
EPP70S4	7,97	59,74	50,5	51,8	51,0	0,1334
EPP70S5	7,24	58,53	49,0	49,5	51,0	0,1237
EPP70S6	8,46	62,54	51,6	51,0	51,4	0,1353
EPP106S4	11,70	94,41	48,5	50,5	50,6	0,1239
EPP106S5	12,65	100,24	49,0	50,5	51,0	0,1262
EPP106S6	11,64	90,96	49,2	51,0	51,0	0,1280
EPP146S4	16,23	136,56	48,7	49,4	49,4	0,1188
EPP146S5	15,53	133,38	49,3	49,0	48,2	0,1164
EPP146S6	15,41	124,78	50,0	50,2	49,2	0,1235

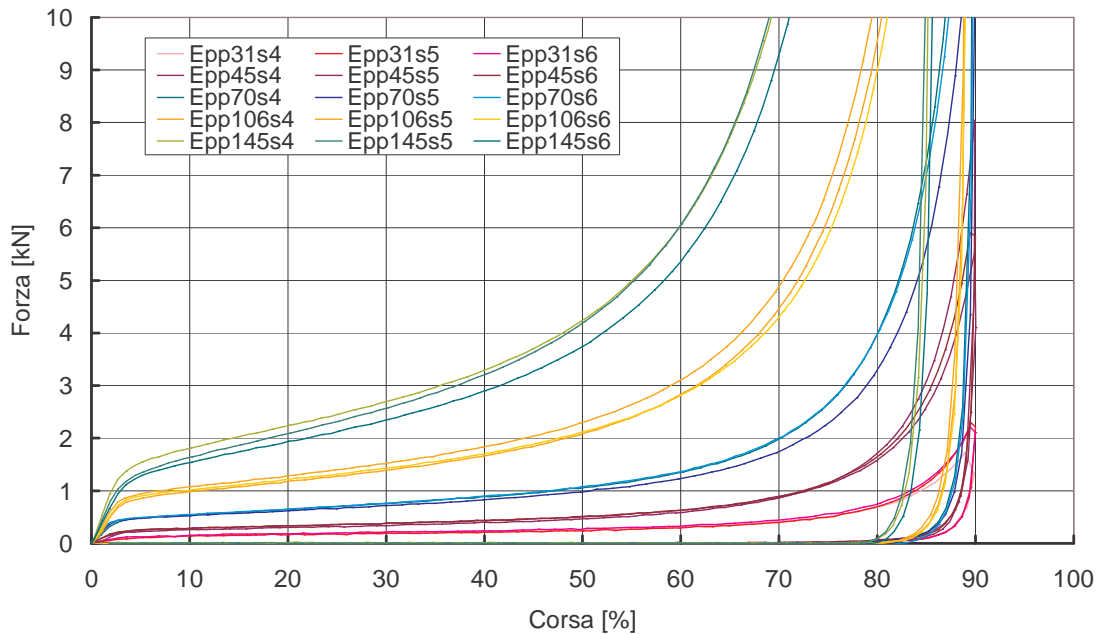


Figura 1 - Curve sperimentali forza-spostamento

### 3. MODELLI E IDENTIFICAZIONE DEI PARAMETRI

Le curve sperimentali tensione-deformazione sono state utilizzate per identificare i parametri del modello di Rush e del modello di Gibson con il metodo dei minimi scarti quadratici.

#### 3.1 Modello di Gibson

È composto da tre equazioni distinte [1] per caratterizzare ciascuna delle tre regioni in cui si divide la curva tensioni-deformazioni:

- Regione lineare elastica:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{se} \quad \sigma \leq \sigma_{yield} \quad (1)$$

- Regione di plateau:

$$\sigma = \sigma_{yield} \quad \text{se} \quad \varepsilon_{yield} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_D (1 - D^{-1/m}) \quad (2)$$

- Regione di densificazione:

$$\sigma = \sigma_{yield} \frac{1}{D} \left( \frac{\varepsilon_D}{\varepsilon_D - \varepsilon} \right)^m \quad \text{se} \quad \varepsilon > \varepsilon_D (1 - D^{-1/m}) \quad (3)$$

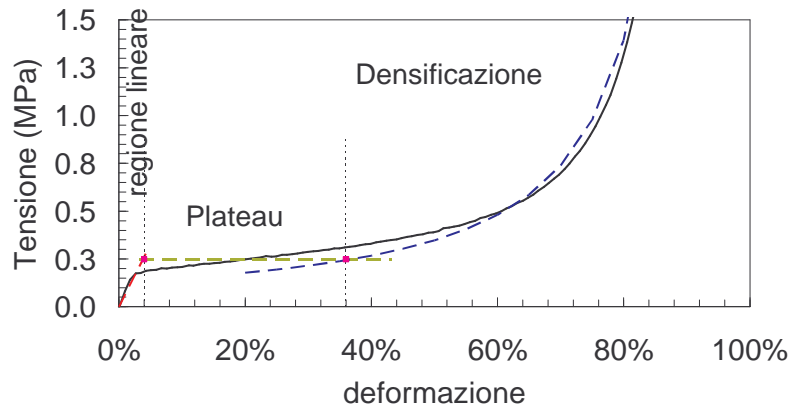


Figura 2 – Confronto tra curva sperimentale e modello di Gibson per la schiuma EPP70

I punti di intersezione tra i tre tratti di curva variano in funzione della scelta dei parametri. La Figura 2 mostra la curva tensioni-deformazioni del modello a confronto con una curva sperimentale. Si è scelto di identificare i parametri in base a ciascuna prova sperimentale per avere la possibilità di confrontare i modelli ottenuti con quelli definiti dalle sole formule di Gibson. L'identificazione è stata condotta considerando i parametri del modello come variabili da ottimizzare per rendere minima la somma degli scarti quadratici. In particolare si sono considerati i parametri  $E$ ,  $\sigma_{yield}$ ,  $\varepsilon_D$ ,  $D$  ed  $m$ . La Tabella 2 riassume i risultati ottenuti.

Tabella 2 – Parametri del modello di Gibson identificati per ciascuna prova sperimentale

Provino	Densità EPP (g/l)	$E$ (MPa)	Tens. Collasso (MPa)	$\varepsilon_D$	$D$	$m$	somma scarti quadr.
EPP31s5	29,1	1,20	0,0242	0,946	0,548	1,014	<b>0,0141</b>
EPP31s6	29,2	1,32	0,0609	0,912	1,031	0,771	<b>0,0015</b>
EPP31s4	30,1	1,31	0,0570	0,933	1,031	0,826	<b>0,0040</b>
EPP45s6	40,1	2,21	0,1393	0,958	1,960	1,262	<b>0,0829</b>
EPP45s5	40,4	2,17	0,1177	0,933	1,648	1,168	<b>0,0207</b>
EPP45s4	40,7	2,63	0,0789	0,934	0,827	0,977	<b>0,0133</b>
EPP70s5	58,5	6,57	0,2480	0,965	1,904	1,341	<b>0,4521</b>
EPP70s4	59,7	10,00	0,2268	0,930	1,334	1,144	<b>0,1264</b>
EPP70s6	62,5	8,52	0,2159	0,935	1,252	1,153	<b>0,0934</b>
EPP106s6	91	9,86	0,3153	0,934	1,016	1,271	<b>0,3728</b>
EPP106s4	94,4	9,86	0,2952	0,944	1,021	1,381	<b>0,3540</b>
EPP106s5	100,2	9,86	0,3175	0,940	1,015	1,378	<b>0,5357</b>
EPP145s6	124,8	15,00	0,3574	0,920	0,985	1,666	<b>6,5103</b>
EPP145s5	133,4	15,00	0,4268	0,908	0,939	1,554	<b>3,0884</b>
EPP145s4	136,6	15,00	0,3105	0,941	0,996	1,967	<b>35,8955</b>
						<b>TOT.</b>	<b>47,5649</b>

### 3.2 Modello di Rush

È un modello fenomenologico e la sua formulazione [2-4] è particolarmente semplice:

$$\sigma = A\varepsilon^m + B\varepsilon^n \quad \text{con} \quad 0 < m < 1 \quad \text{e} \quad 1 < n < \infty \quad (4)$$

Per bassi valori di deformazione il secondo termine è trascurabile e perciò al primo termine è affidata la modellazione della regione elastica e di plateau. Per alti valori di deformazione il primo termine rimane quasi costante ed il secondo modella la densificazione della schiuma. I parametri da identificare sono quattro: i due coefficienti  $A$  e  $B$ , e i due esponenti  $m$  e  $n$ . I primi due definiscono rispettivamente l'altezza del plateau (e la pendenza della regione elastica) e la pendenza della densificazione. I due esponenti definiscono invece la regolarità del passaggio rispettivamente tra regione elastica e plateau e tra plateau e densificazione.

L'identificazione di tali parametri è stata effettuata in due modi diversi. Il primo ricavando i valori dei quattro parametri per ciascuna curva sperimentale in modo da minimizzare gli scarti quadratici. Il secondo imponendo che i parametri  $m$  e  $n$  fossero sempre gli stessi per tutte le curve sperimentali e adattando solo i parametri  $A$  e  $B$  a ciascuna curva. In questa seconda ipotesi si suppone che gli esponenti  $m$  ed  $n$  dipendano solamente dal materiale e dal meccanismo di collasso e non dalla densità. Per questo secondo metodo si è utilizzata come funzione obiettivo la somma degli scarti quadratici relativi a tutte le prove sperimentali.

La Tabella 3 e la Tabella 4 riassumono i parametri ottenuti per ciascuna curva, le relative somme degli scarti quadratici e la loro somma totale.

Tabella 3 – Parametri del modello di Rush identificati per ciascuna prova sperimentale

Provino	Densità EPP (g/l)	$A$	$0 < m \leq 1$	$B$	$n > 1$	Somma scarti quadratici
EPP31s5	29,1	0,151	0,53	3,31	14,08	<b>0,0092</b>
EPP31s6	29,2	0,148	0,42	1,79	10,42	<b>0,0028</b>
EPP31s4	30,1	0,151	0,46	2,22	12,39	<b>0,0048</b>
EPP45s6	40,1	0,332	0,56	9,81	14,90	<b>0,0786</b>
EPP45s5	40,4	0,352	0,71	15,58	17,01	<b>0,1030</b>
EPP45s4	40,7	0,318	0,54	7,28	13,64	<b>0,0506</b>
EPP70s5	58,5	0,646	0,59	18,65	14,45	<b>0,3319</b>
EPP70s4	59,7	0,860	0,81	40,11	17,61	<b>0,5373</b>
EPP70s6	62,5	0,807	0,73	29,48	15,92	<b>0,4452</b>
EPP106s6	91	2,034	1,00	108,74	18,54	<b>3,0290</b>
EPP106s4	94,4	1,989	1,00	86,78	16,75	<b>2,6413</b>
EPP106s5	100,2	2,222	1,00	119,49	17,85	<b>3,7829</b>
EPP145s6	124,8	3,876	1,00	753,86	21,00	<b>17,3603</b>
EPP145s5	133,4	4,250	1,00	786,92	20,09	<b>20,1412</b>
EPP145s4	136,6	4,134	1,00	622,08	18,93	<b>19,8843</b>
					<b>TOT.</b>	<b>68,4024</b>

Ai fini della minimizzazione degli scarti quadratici l'importanza del primo e del secondo termine della formula di Rush cambia in funzione della densità. Le schiume a bassa densità presentano una zona di plateau più estesa, che è modellata dal primo termine della formula. Al contrario le schiume ad alta densità presentano, già a valori relativamente bassi di deformazione, una rapida crescita della tensione e una densificazione anticipata per la cui modellazione interviene il secondo termine della formula. Per le schiume a densità 106 g/l e

146 g/l l'esponente del primo termine arriva al valore limite unitario, indicando un andamento lineare che non modella adeguatamente la zona elastica e di plateau ma che evidentemente migliora la modellazione della regione di densificazione che è più estesa. Anche con l'identificazione effettuata imponendo un unico valore per gli esponenti si ottiene per  $m$  il valore unitario.

La minore importanza globale del primo termine è anche dovuta al minore valore assoluto degli scarti nelle regioni elastica e di plateau, dove le tensioni sono molto minori che nella regione di densificazione. Lo stesso errore relativo del modello rispetto alla prova sperimentale porta a scarti di entità molto maggiore nella regione di densificazione che nella regione di plateau.

Tabella 4 - Parametri del modello di Rush identificati imponendo un unico valore per  $m$  e  $n$

provino	Densità EPP (g/l)	A	$0 < m \leq 1$	B	$n > 1$	somma scarti quadratici
EPP31s5	29,1	0,229	1,00	6,176	20,02	<b>0,03506</b>
EPP31s6	29,2	0,256		6,312		<b>0,03452</b>
EPP31s4	30,1	0,240		5,204		<b>0,03440</b>
EPP45s6	40,1	0,496		16,971		<b>0,19509</b>
EPP45s5	40,4	0,453		22,199		<b>0,13505</b>
EPP45s4	40,7	0,486		15,326		<b>0,15038</b>
EPP70s5	58,5	0,974		34,132		<b>0,90671</b>
EPP70s4	59,7	1,028		53,491		<b>0,64781</b>
EPP70s6	62,5	1,058		48,416		<b>0,74536</b>
EPP106s6	91	2,132		131,350		<b>3,40736</b>
EPP106s4	94,4	2,225		132,486		<b>4,72639</b>
EPP106s5	100,2	2,399		157,771		<b>5,01284</b>
EPP145s6	124,8	3,685		650,225		<b>18,83913</b>
EPP145s5	133,4	4,219		779,196		<b>20,16851</b>
EPP145s4	136,6	4,379		734,132		<b>22,64734</b>
					<b>TOT.</b>	<b>77,6859</b>

#### 4. RELAZIONI TRA DENSITÀ E PARAMETRI

I valori identificati per ciascun parametro dei modelli su tutte le schiume provate sono stati riportati in un grafico in funzione della densità. Per il modello di Rush [2-4] la distribuzione dei punti ricavati permette di risalire ad una relazione tra densità e parametri. Per il modello di Gibson è possibile valutare la differenza tra i parametri identificati e quelli prevedibili in base alla formulazione del modello [1].

##### 4.1 Relazioni di Gibson

Gibson ha proposto alcune formulazioni [1] per legare i parametri del modello alla densità relativa e ad altre caratteristiche fisiche della schiuma. In particolare per il modulo elastico e per la tensione di collasso plastico (plateau) si hanno le seguenti espressioni:

$$\frac{E}{E_s} \approx \left( \frac{\rho}{\rho_s} \right)^2 \quad (5)$$

$$\frac{\sigma_{pl}}{\sigma_{ys}} = 0,3 \left( \frac{\rho}{\rho_s} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (6)$$

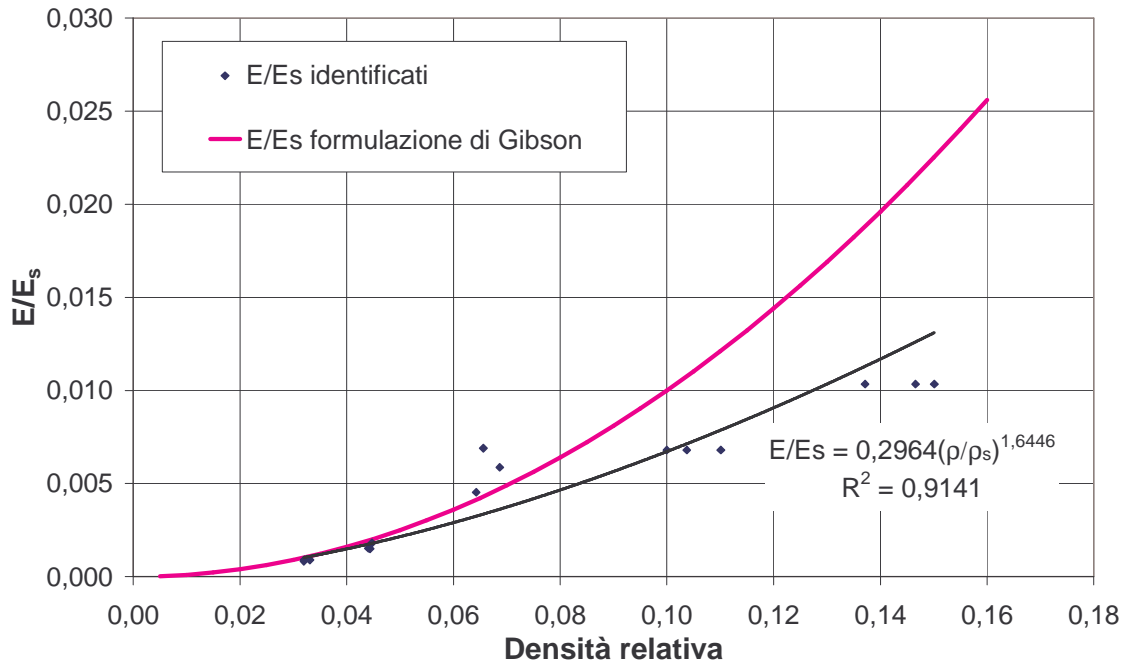


Figura 3 - Confronto tra la formulazione di Gibson per il rapporto ( $E / E_s$ ) e la curva di regressione

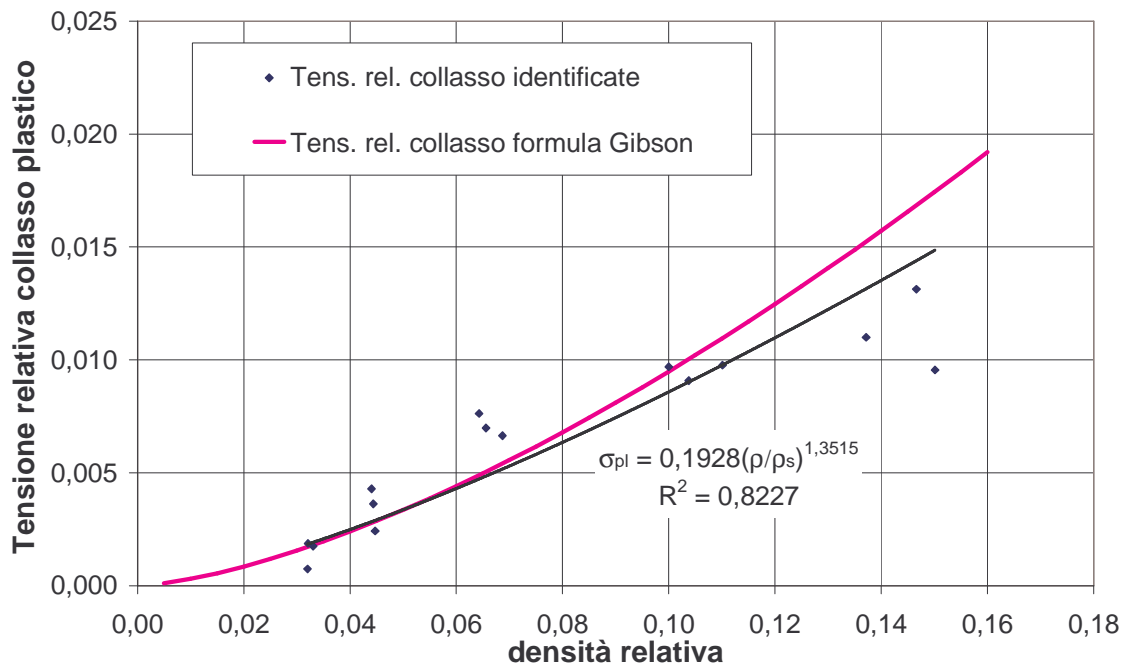


Figura 4 - Confronto tra la formulazione di Gibson per la tensione relativa di collasso plastico e la curva di regressione

Il modulo elastico e la tensione di collasso plastico identificati su ciascuna prova sperimentale sono riportati rispettivamente in Figura 3 e in Figura 4 in funzione della densità. Nelle figure i parametri sperimentali sono confrontati con le previsioni del modello analitico di Gibson e con la curva di regressione. I parametri relativi alla modellazione della regione di densificazione risultano più dispersi rendendo più difficile e meno significativo il confronto con i valori suggeriti da Gibson.

## 4.2 Possibili relazioni per il modello di Rush

Per i parametri  $A$  e  $B$  del modello di Rush è stato ipotizzato un andamento del tipo

$$A = C_{1,A} \cdot \rho^{C_{2,A}} \quad B = C_{1,B} \cdot \rho^{C_{2,B}} \quad (7)$$

Le costanti  $C_{1,A}$ ,  $C_{2,A}$ ,  $C_{1,B}$  e  $C_{2,B}$  sono state ricavate con il metodo dei minimi scarti quadratici e considerando due riferimenti diversi per i valori di  $A$  e di  $B$ . Si sono prima utilizzati i valori ricavati con l'identificazione su ogni singola curva (Figura 5 e Figura 6), e poi quelli ottenuti dall'identificazione che impone un unico valore dei parametri  $m$  e  $n$  per tutte le curve (Figura 7 e Figura 8).

I valori degli esponenti sono risultati molto vicini a 2 per il parametro  $A$  e a 3 per il parametro  $B$  nel caso in cui si consideri l'identificazione sull'errore totale su tutte le curve ( $m$  ed  $n$  costanti). Per analogia con la formula di Gibson relativa al modulo elastico, si sono calcolati i valori del parametro  $C_{1,A}$  e  $C_{1,B}$  per il caso in cui siano fissati gli esponenti  $C_{2,A} = 2$  e  $C_{2,B} = 3$ . Il confronto con le curve precedenti è visibile in Figura 7 e in Figura 8. Le differenze tra le curve ricavate con i due metodi sono modeste e giustificano l'adozione degli esponenti interi.

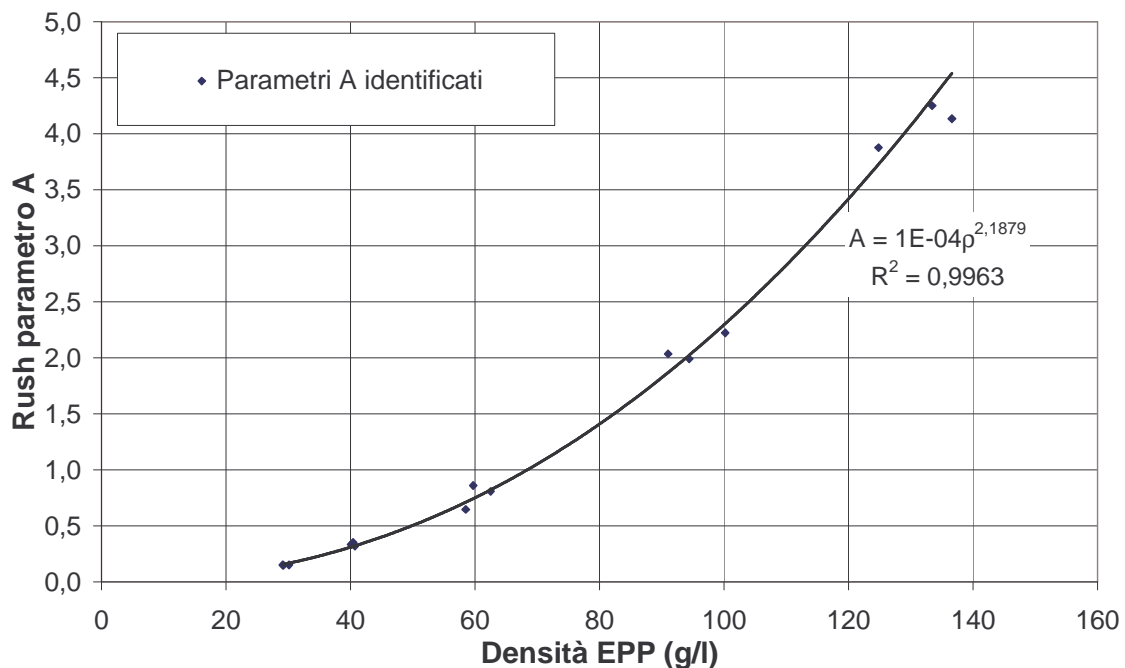


Figura 5 – Curva di regressione dei parametri  $A$  identificati su ciascuna prova sperimentale

## 5. CONCLUSIONI

Le prove sperimentali eseguite sulle schiume e le relative identificazioni effettuate sui modelli di Gibson e di Rush hanno permesso di valutare e confrontare le capacità dei due modelli. L'identificazione dei parametri per diversi valori di densità dello stesso tipo di schiuma è servita a studiare le relazioni che intercorrono tra parametri e densità.



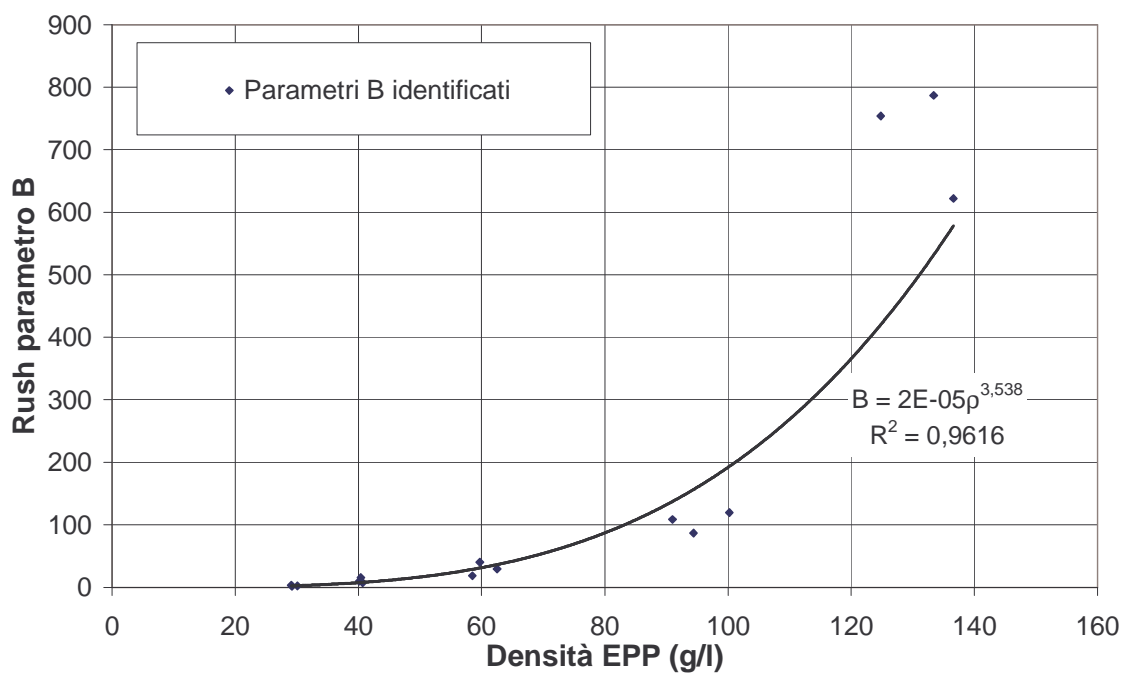


Figura 6 – Curva di regressione dei parametri  $B$  identificati su ciascuna prova sperimentale

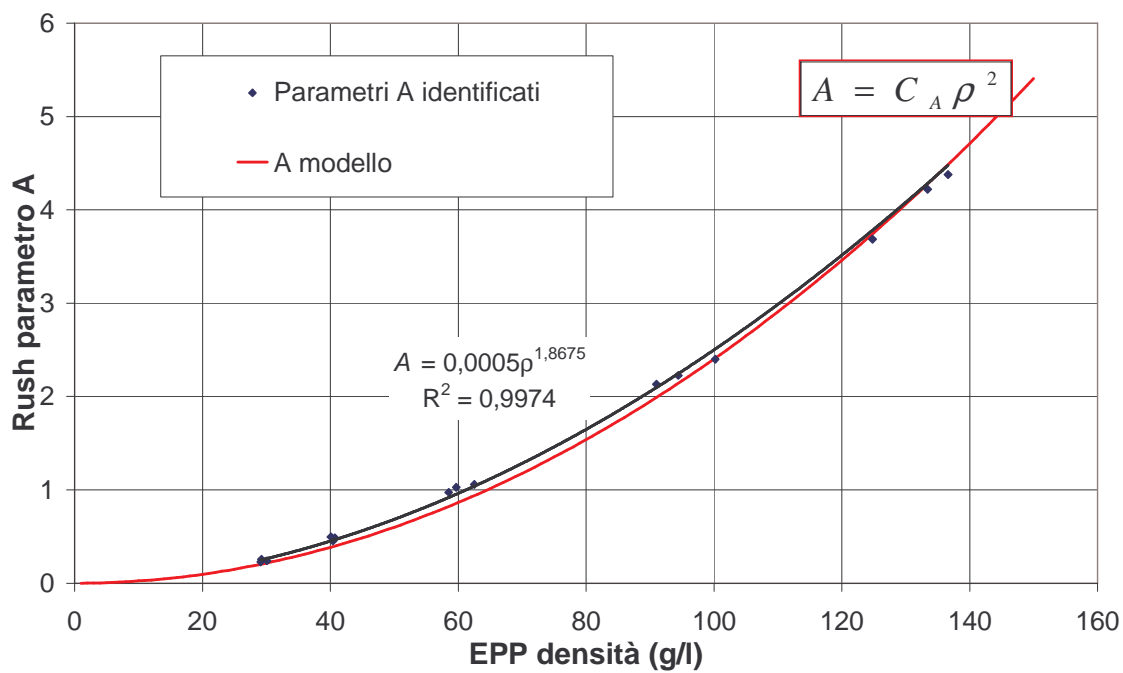


Figura 7 – Regressione dei valori sperimentali del parametro  $A$  identificato con gli esponenti  $m$  e  $n$  non variabili con la densità, con due funzioni di interpolazione

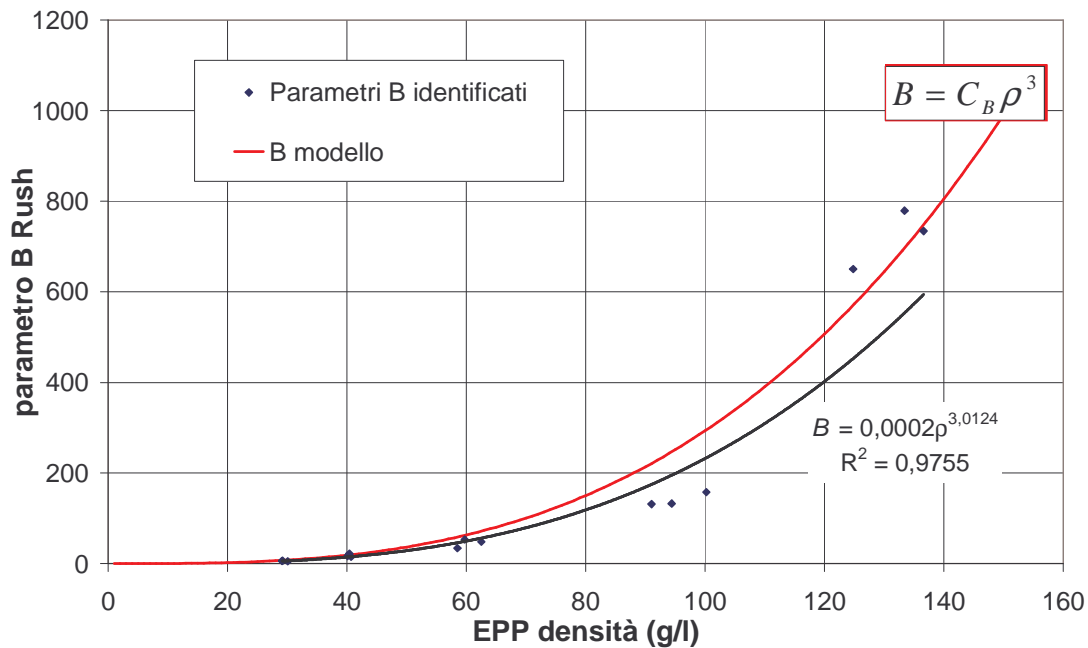


Figura 8 – Regressione dei valori sperimentali del parametro  $B$  identificato con gli esponenti  $m$  e  $n$  non variabili con la densità, con due funzioni di interpolazione

Con il modello di Gibson si sono ottenuti scarti quadratici mediamente minori del modello di Rush: le differenze sono comunque modeste ed entrambi i modelli hanno dimostrato una buona sovrapposizione con le curve sperimentali. Le formule di Gibson che esprimono il modulo elastico e la tensione di collasso plastico in funzione della densità della schiuma sono risultate sufficientemente vicine alle curve di regressione dei parametri identificati.

Il modello di Rush, nonostante sia un modello fenomenologico, è sembrato più adatto all'utilizzo di formule che definiscono i parametri in funzione della densità. Le relazioni proposte tra i parametri ( $A$  e  $B$ ) e la densità della schiuma approssimano bene i valori identificati e i relativi coefficienti di correlazione sono più elevati di quelli ottenuti sui parametri di Gibson.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] K.C. Rush, "Load-Compression Behavior of Flexible Foams", *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 13, 1969, pp.2297-2311.
- [2] K.C. Rush, "Energy-Absorbing Characteristics of Foamed Polymers", *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 14, 1970, pp.1133-1147.
- [3] K.C. Rush, "Load-Compression Behavior of Brittle Foams", *Journal of Applied Polymer Science*, Vol. 14, 1970, pp.1263-1273
- [4] L. J. Gibson, M. F. Ashby, Cellular Solid. Structure and properties, Cambridge University Press, 1997
- [5] ASTM D1621-94, Standard Test Method for Compressive Properties of Rigid Cellular Plastics, 1994.
- [6] M. Avale, G. Belingardi, R. Montanini, E. Mangino, "Energy absorption characteristics of polymeric structural foams for passive safety applications", *Atti Convegno ATA'99*, 1999, paper n. 99A4044
- [7] M. Avale, G. Belingardi, R. Montanini, "Characterization of polymeric structural foams under compressive impact loading by means of energy-absorption diagram", *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 25, 2001, pp. 455-472