Dipartimento di Statistica Università di Bologna

Matematica Finanziaria
aa 2011-2012

lezione 3: 21022012

professor Daniele Ritelli

www.unibo.it/docdenti/daniele.ritelli

Capitalizzazione mista

Si usa il regime composto per il numero intero di anni e il regime semplice per la parte rimanente.

$$\boldsymbol{m(t, C) = C\ (1 + i)^{[t]} \Big(1 + (t - [t])\ i\Big)}$$

$[t] := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq t\}$ è la parte intera di t

Esercizio. Il capitale di €5 000 ha dato, al tasso annuo $i = 0,025$ il montante di €8 500. Determinare il tempo di capitalizzazione in regime misto.

Esercizio. Il capitale di €5 000 ha dato, al tasso annuo $i = 0,025$ il montante di €8 500. Determinare il tempo di capitalizzazione in regime misto.

Questa volta è meno banale delle due precedenti.

$\boxed{1.}$ Per trovare il numero intero di anni risolviamo come fossimo in regime composto

$$\begin{aligned} 8\,500 &= 5\,000\,(1+0,025)^t \\ &\Downarrow \\ t \ln 1,025 &= \ln \frac{8\,500}{5\,000} \\ &\Downarrow \\ t &= 21,4894 \end{aligned}$$

$\boxed{2.}$ Saputo che il numero intero di anni è 21 dalla formula di capitalizzazione in regime misto, ricordato che il numero $\{t\} = t - [t]$ (parte frazionaria di t) è compreso fra 0 e 1 abbiamo:

$$\begin{aligned} 8\,500 &= 5\,000(1,025)^{21}\,(1 + 0,025\,\{t\}) \\ &\Downarrow \\ \{t\} &= 0,486267 \end{aligned}$$

$\boxed{2.}$ Saputo che il numero intero di anni è 21 dalla formula di capitalizzazione in regime misto, ricordato che il numero $\{t\} = t - [t]$ (parte frazionaria di t) è compreso fra 0 e 1 abbiamo:

$$
\begin{aligned}
8\,500 &= 5\,000(1,025)^{21}\,(1 + 0,025\,\{t\}) \\
&\Downarrow \\
\{t\} &= 0,486267
\end{aligned}
$$

cioè $\{t\} = 360 \times 0,486267 = 175.056$ giorni cioè 5 mesi e 25 giorni

Risposta 21 anni, 5 mesi, 25 giorni

Esercizio. La somma di €1 000 impiegata in regime misto per 4 anni e 9 mesi ha fruttato il montante di €1080. Si chiede di determinare il tasso di impiego.

Esercizio. La somma di €1 000 impiegata in regime misto per 4 anni e 9 mesi ha fruttato il montante di €1080. Si chiede di determinare il tasso di impiego.

Questo è un problema difficile la sua equazione risolvente è

$$1\,080 = 1\,000\,(1 + x)^4 \left(1 + \frac{9}{12}\,x\right)$$

Per risolverla dovremo ricorre a metodi approssimati che vedremo in seguito pp 34-40

Liquidazione degli interessi in regime semplice

Quando si applica la capitalizzazione semplice si deve tener conto del fatto che, trascorso un periodo di tempo unitario, è consuetudine praticare la liquidazione degli interessi

Il periodo di capitalizzazione è, di norma, un anno.

Se si investe un capitale C al termine del primo anno di impiego del capitale è disponibile il montante $C(1+i)$

Se si investe un capitale C al termine del primo anno di impiego del capitale è disponibile il montante $C\,(1+i)$

Al termine del secondo anno la capitalizzazione darà il montante $C\,(1+i)^2$

Se si investe un capitale C al termine del primo anno di impiego del capitale è disponibile il montante $C(1+i)$

Al termine del secondo anno la capitalizzazione darà il montante $C(1+i)^2$

In generale dopo n anni, ragionando induttivamente, il montante è:

$$C(1+i)^n.$$

Capitalizzazione frazionata: regime composto

Confronto fra capitalizzazioni annuali e capitalizzazioni in frazioni d'anno

mensili

bimestrali

trimestrali

quadrimestrali

semestrali

Presa una frazione d'anno, ad esempio il semestre, si impone l'uguaglianza fra i montanti alla fine del primo anno

$$1 + i = (1 + i_2)^2 .$$

l'indice 2 ci ricorda il numero dei semestri in un anno.

Se si vuole convertire in semestrale un tasso annuo basta risolvere rispetto a i_2

$$i_2 = (1 + i)^{1/2} - 1$$

Analogamente il tasso quadrimestrale equivalente i_3 è definito da:

$$1 + i = (1 + i_3)^3,$$

in quanto suddividiamo l'anno in tre quadrimestri.

tasso trimestrale:

$$1 + i = (1 + i_4)^4$$

tasso bimestrale:

$$1 + i = (1 + i_6)^6$$

tasso mensile:

$$1 + i = (1 + i_{12})^{12}$$

In generale se si divide il periodo di capitalizzazione in $p \in \mathbb{N}$ sotto-periodi la relazione di equivalenza è:

$$1 + i = (1 + i_p)^p \,,$$

da cui:

$$i_p = (1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1.$$

Capitalizzazione frazionata: regime semplice

Confronto fra capitalizzazioni annuali e capitalizzazioni in frazioni d'anno

a) mensili
b) bimestrali
c) trimestrali
d) quadrimestrali
e) semestrali

$$1 + i = 1 + j_p \cdot p, \quad p = 12,\ 6,\ 3,\ 4,\ 2 \implies j_p = \frac{i}{p}$$

Tassi nominali convertibili

Tasso nominale convertibile $p\,(\in \mathbb{N})$ volte

Nel regime composto anziché utilizzare il tasso i_p si utilizza il tasso proveniente dal regime semplice j_p

Tale tasso produce capitalizzazioni maggiori del tasso annuo equivalente, infatti:

$$(1 + j_p)^p - 1 > p\,j_p = i.$$

Disuguaglianza di Bernoulli

Sia $x \geq -1$ un numero reale. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che:

$$\boldsymbol{(1+x)^n \geq 1 + n\,x}$$

Dimostrazione

La tesi è ovvia se $x = 0$, e per $x = -1$

Sia $x \neq 0, -1$. Se $n = 1$ la tesi si riduce a $(1 + x)^1 = 1 + 1\,x$

Dimostrazione

La tesi è ovvia se $x = 0$, e per $x = -1$

Sia $x \neq 0, -1$. Se $n = 1$ la tesi si riduce a $(1+x)^1 = 1 + 1\,x$

Ammettiamo che esista $s \in \mathbb{N}$ per cui vale la tesi. Se $x > -1$ allora $1 + x > 0$ quindi:

$(1+x)^{s+1} = (1+x)^s\,(1+x) \geq (1+s\,x)\,(1+x) = 1+(1+s)\,x+s\,x^2.$

L'ultimo termine è strettamente positivo, dunque:

$$(1+x)^{s+1} \geq 1 + (1+s) \cdot x,$$

da cui l'induttività della formula

Significato finanziario di e

Se un creditore versa denaro con maturazione di interesse, nell'ipotesi in cui in ogni singolo momento l'interesse maturato capitalizzi proporzionalmente al tasso annuo, quale sarà il risultato alla fine dell'anno?

Supponiamo di aver depositati € 1 e che gli interessi siano capitalizzati n volte all'anno al tasso x. Dopo il primo periodo di tempo il saldo è

$$b_1 = \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Supponiamo di aver depositati € 1 e che gli interessi siano capitalizzati n volte all'anno al tasso x. Dopo il primo periodo di tempo il saldo è

$$b_1 = \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Dopo il secondo periodo

$$b_2 = \left(1 + \frac{x}{n}\right) b_1 = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2.$$

Supponiamo di aver depositati € 1 e che gli interessi siano capitalizzati n volte all'anno al tasso x. Dopo il primo periodo di tempo il saldo è

$$b_1 = \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Dopo il secondo periodo

$$b_2 = \left(1 + \frac{x}{n}\right) b_1 = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2.$$

Dopo n periodi

$$b_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Capitalizzazione istantanea significa mandare $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Capitalizzazione istantanea significa mandare $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

ma se scriviamo:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n/x}\right]^x$$

Capitalizzazione istantanea significa mandare $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

ma se scriviamo:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x}\right]^x$$

vediamo che:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Forza istantanea di interesse

Consideriamo la generica legge di capitalizzazione in una variabile $m(t, C) = Cf(t)$. Calcoliamo l'interesse per unità di capitale fra gli istanti $t + h$ e t

$$\frac{Cf(t+h) - Cf(t)}{Cf(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{f(t)}. \tag{1}$$

Il rapporto non dipende dal capitale iniziale C.

Dividendo la frazione in (1) per la lunghezza dell'intervallo di tempo $h > 0$ abbiamo l'interesse per unità di capitale medio nell'intervallo $[t, t+h]$:

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{f(t)} \frac{1}{h} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \frac{1}{f(t)}. \tag{1b}$$

Dividendo la frazione in (1) per la lunghezza dell'intervallo di tempo $h > 0$ abbiamo l'interesse per unità di capitale medio nell'intervallo $[t, t+h]$:

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{f(t)}\frac{1}{h} = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}\frac{1}{f(t)}. \tag{1b}$$

Passando al limite per $h \to 0^+$ in (1b) otteniamo l'interesse per unità di capitale istantaneo al tempo t

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\frac{1}{f(t)} = \frac{f'(t)}{f(t)} \tag{1c}$$

La funzione $\delta(t)$ viene chiamata **derivata logaritmica** della funzione $f(t)$, in quanto:

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt} \ln f(t).$$

La funzione $\delta(t)$ viene chiamata **derivata logaritmica** della funzione $f(t)$, in quanto:

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt} \ln f(t).$$

Dal punto di vista finanziario, trattandosi dell'interesse per unità di capitale istantaneo, si parla di **forza istantanea di interesse**

La peculiarità del regime composto è che la forza istantanea di interesse è costante nel tempo, infatti se $f(t) = (1 + i)^t$ è evidente che:

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{(1+i)^t \ln(1+i)}{(1+i)^t} = \ln(1+i).$$

La peculiarità del regime composto è che la forza istantanea di interesse è costante nel tempo, infatti se $f(t) = (1+i)^t$ è evidente che:

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{(1+i)^t \ln(1+i)}{(1+i)^t} = \ln(1+i).$$

Mentre nel regime semplice, $f(t) = 1 + i\,t$ si vede che:

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{i}{1+it}.$$

Usando le equazioni differenziali a variabili separabili, possiamo di invertire il punto di vista e concludere che il regime esponenziale è l'unico regime a godere di specifiche proprietà.

Usando le equazioni differenziali a variabili separabili, possiamo di invertire il punto di vista e concludere che il regime esponenziale è l'unico regime a godere di specifiche proprietà. Infatti se cercassimo *quel* regime di capitalizzazione con forza di interesse costante, diciamo uguale a $\delta > 0$, ci troveremmo a considerare l'equazione differenziale separabile:

Usando le equazioni differenziali a variabili separabili, possiamo di invertire il punto di vista e concludere che il regime esponenziale è l'unico regime a godere di specifiche proprietà. Infatti se cercassimo *quel* regime di capitalizzazione con forza di interesse costante, diciamo uguale a $\delta > 0$, ci troveremmo a considerare l'equazione differenziale separabile:

$$\begin{cases} f'(t) = \delta f(t), \\ f(0) = 1, \end{cases}$$

Usando le equazioni differenziali a variabili separabili, possiamo di invertire il punto di vista e concludere che il regime esponenziale è l'unico regime a godere di specifiche proprietà. Infatti se cercassimo *quel* regime di capitalizzazione con forza di interesse costante, diciamo uguale a $\delta > 0$, ci troveremmo a considerare l'equazione differenziale separabile:

$$\begin{cases} f'(t) = \delta f(t), \\ f(0) = 1, \end{cases}$$

che, usando la formula risolutiva porge:

$$\int_1^f \frac{dz}{z} = \int_0^t \delta dt \implies \ln f = \delta t \implies f(t) = e^{\delta t}$$

Questo significa che il regime composto è caratterizzato, nel senso che è l'unico regime di capitalizzazione con questa proprietà, dal fatto di aver forza istantanea di interesse costante nel tempo.

Questo significa che il regime composto è caratterizzato, nel senso che è l'unico regime di capitalizzazione con questa proprietà, dal fatto di aver forza istantanea di interesse costante nel tempo. Nel caso generale: forza istantanea di intessa non specificata funzione $\delta(t)$ il fattore montante della legge di capitalizzazione associata si determina come segue:

$$\ln f(t) = \int_0^t \delta(s)\, ds \implies f(t) = \exp\left(\int_0^t \delta(s)\, ds\right).$$

Esercizio Dopo aver dimostrato che la funzione

$$f(t) = t + \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2},$$

è un fattore di capitalizzazione, se ne calcoli la forza istantanea di interesse.

Esercizio Dopo aver dimostrato che la funzione

$$f(t) = t + \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2},$$

è un fattore di capitalizzazione, se ne calcoli la forza istantanea di interesse. In primis si deve verificare che $f(0) = 1$

Esercizio Dopo aver dimostrato che la funzione

$$f(t) = t + \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2},$$

è un fattore di capitalizzazione, se ne calcoli la forza istantanea di interesse. In primis si deve verificare che $f(0) = 1$

Poi che la $f(t)$ è crescente

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{2(t+1)^2} > 0$$

Infine si deve valutare

$$\delta(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

$$\delta(t) = \frac{2t^2 + 4t + 1}{(t+1)\left(2t^2 + 3t + 2\right)}$$

Attualizzazione

L'attualizzazione pone il problema inverso della capitalizzazione.

$\mathcal{E}$ possiede un titolo di credito esigibile nel futuro

Questo significa in concreto che un soggetto $\mathcal{D}$ si impegna a corrispondere a $\mathcal{E}$ il capitale C in una fissata data futura

operazione di **attualizzazione**

si inverte la situazione studiata nella capitalizzazione

Attualizzazione

L'attualizzazione pone il problema inverso della capitalizzazione.

$\mathcal{E}$ possiede un titolo di credito esigibile nel futuro

Questo significa in concreto che un soggetto $\mathcal{D}$ si impegna a corrispondere a $\mathcal{E}$ il capitale C in una fissata data futura

$\mathcal{E}$ decide di rivolgersi ad un intermediario $\mathcal{B}$ allo scopo di cedere immediatamente il credito, in modo da avere subito disponibile il capitale $C_a < C$

operazione di **attualizzazione**

si inverte la situazione studiata nella capitalizzazione

Definizione. Diremo legge di attualizzazione associata alla legge di capitalizzazione $m(t; C)$ la funzione $a\,(t; C)$:

$$m\,(t; a(t; C)) = C$$

La funzione di attualizzazione è determinata dalla funzione capitalizzazione cui fa riferimento

$$C = m\left(t; a(t; C)\right)$$

La funzione di attualizzazione è determinata dalla funzione capitalizzazione cui fa riferimento

$$
\begin{aligned}
C &= m\,(t; a(t; C)) \\
&= a(t; C)\, f(t)
\end{aligned}
$$

La funzione di attualizzazione è determinata dalla funzione capitalizzazione cui fa riferimento

$$
\begin{aligned}
C &= m\,(t; a(t;C)) \\
&= a(t;C)\,f(t) \\
&\Downarrow
\end{aligned}
$$

La funzione di attualizzazione è determinata dalla funzione capitalizzazione cui fa riferimento

$$
\begin{aligned}
C &= m\,(t; a(t; C)) \\
&= a(t; C)\, f(t) \\
&\Downarrow \\
a(t; C) &= \frac{C}{f(t)}
\end{aligned}
$$

La funzione di attualizzazione è determinata dalla funzione capitalizzazione cui fa riferimento

$$\begin{aligned} C &= m\left(t; a(t; C)\right) \\ &= a(t; C)\, f(t) \\ &\Downarrow \\ a(t; C) &= \frac{C}{f(t)} \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{f(t)}$$

La funzione di attualizzazione è determinata dalla funzione capitalizzazione cui fa riferimento

$$\begin{aligned} C &= m\,(t; a(t; C)) \\ &= a(t; C)\, f(t) \\ &\Downarrow \\ a(t; C) &= \frac{C}{f(t)} \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{f(t)}$$

si dice **fattore di attualizzazione** coniugato al fattore di capitalizzazione.

È ben definito in forza del fatto che $f(t) > 0$.

I fattori di attualizzazione coniugati rispettivamente alle leggi lineare ed esponenziale sono:

$$\varphi_L(t) = \frac{1}{1 + i\,t},$$

I fattori di attualizzazione coniugati rispettivamente alle leggi lineare ed esponenziale sono:

$$\varphi_L(t) = \frac{1}{1 + i\,t}, \quad \varphi_E(t) = \frac{1}{(1+i)^t}$$