



Lehrstuhl für Strömungslehre
und Aerodynamisches Institut
der RWTH Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder
- Fakultät für Maschinenwesen -

Bachelorarbeit

Gekoppelte 1D-3D-Simulation der oszillierenden
Strömungen in einem idealisierten Bronchialbaum

Coupled 1D-3D-simulation of the oscillatory
flow in an idealised bronchial tree

Verfasser:

Andreas Thomas Schmitt

Betreuer:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Schröder (RWTH Aachen)

Dr.-Ing. Michael Klaas (RWTH Aachen)

Prof. Dr.-Ing. Claus Wagner (DLR Göttingen)

Dipl.-Ing. Daniel Feldmann (DLR Göttingen)

Aachen, 21. März 2013

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln verfasst habe. Alle Passagen, die ich aus der Literatur oder aus anderen Quellen wie z.B. Internetseiten übernommen habe, habe ich mit Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Die Bachelorarbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form bisher bei keiner anderen Institution eingereicht.

Andreas Schmitt

Aachen, den 21. März 2013

Kurzfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein in C++ implementiertes eindimensionales Modell zur numerischen Simulation oszillierender Strömungen in der Lunge um eine Modellierung des lokalen elastischen Verhaltens der Lunge erweitert. Das Modell wurde für verschiedene praxisrelevante Kombinationen von Parameterwerten für Tidalvolumen und Oszillationsfrequenzen angewendet. Anhand der erzielten Ergebnisse wurde ausgewertet, welchen Einfluss die zusätzliche Modellierung der Elastizität auf die Druckantwort des eindimensionalen Modells ausübt. Das erweiterte Modell wurde weiterhin als Randbedingung in den auf finiten Volumen basierenden Strömungslöser OpenFOAM implementiert und zur Beschreibung der auf die siebte Generation folgenden Bronchialbaumteile genutzt. Mit dieser Randbedingung wurden dann gekoppelte 1D-3D-Simulationen von oszillierenden Strömungen in einem Rohr durchgeführt, dessen geometrischen Abmaße mit denen der siebten Generation des Bronchialbaumes übereinstimmen. Die Simulationen wurden mit $40,6 \leq Re \leq 719,3$ und $0,3 \leq Wo \leq 14,5$ berechnet, die dem praxisrelevanten Parameterraum der Hochfrequenzoszillationsventilation in der siebten Generation entsprechen. In der Auswertung der Ergebnisse wurde herausgearbeitet, dass das einfache Abschneiden der nicht dreidimensional simulierten Teile des Bronchialbaumes, ohne die Modellierung derselben als Randbedingung nicht sinnvoll ist.

Abstract

An one-dimensional model for the numerical simulation of oscillating fluxes in the lung, implemented in C++, was extended by modeling the local elastic behavior of the lung. The model was used with praxis-related tidalvolumes and oscillatory frequencies, which represent the input parameters. The effect of the extension on the calculated pressurecourse of the one-dimensional model was analyzed by evaluating the results. The extended model was then implemented as an boundary condition in the finite volume based flow solver OpenFOAM for modeling the behavior of the bronchial tree below generation seven. This boundary condition was used to calculate coupled 1D-3D-simulations of oscillating flows in a pipe. Herein geometric dimensions of the pipe match those of the seventh generation of the bronchial tree. The simulations are calculated with $40,6 \leq Re \leq 719,3$ and $0,3 \leq Wo \leq 14,5$. Those parameters span the realistic range for high-frequency oscillatory ventilation in the seventh generation. In the analysis of the results it is shown that it is important to describe the non resolved parts of the bronchial tree with a dynamic boundary condition.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	II
Abstract	III
Abbildungsverzeichnis	VI
Tabellenverzeichnis	VIII
Nomenklatur	IX
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Stand der Technik	2
1.3 Struktur und Ziel	4
2 Grundlagen	7
2.1 Strömungsmechanische Grundlagen	7
2.1.1 Reynoldszahl	7
2.1.2 Womersleyzahl	7
2.1.3 Grundgleichungen	7
2.2 Anatomische und physiologische Grundlagen	11
2.2.1 Topologie der Lunge	11
2.2.2 Spontane Atmung und maschinelle Beatmung	12
2.2.3 Elastisches Verhalten der Lunge	13
2.2.4 Parameterraum der Beatmungsfälle	14
3 Methoden	16
3.1 Dreidimensionale Simulation	16
3.1.1 Diskretisierung der Rohrgeometrie	16
3.1.2 Numerische Methoden	17
3.2 Eindimensionales Bernoulli-Modell	18
3.2.1 Ausgangsmodell	18
3.2.2 Erweiterung des Modells	21
3.3 Lösung des Gleichungssystems	23
3.4 Kopplung 3D-Simulation mit 1D-Modell-Randbedingung	24
3.4.1 Schnittstellen	24
3.4.2 Implementierung der 1D-Randbedingung	26

Inhaltsverzeichnis

4	Auswertung der numerischen Ergebnisse	32
4.1	Eindimensionales Modell	32
4.1.1	Auswirkung des Elastizität	32
4.1.2	Einfluss der Womersleyzahl	37
4.1.3	Einfluss der Reynoldszahl	38
4.1.4	konstanter Volumenstrom	40
4.2	Gitterstudie	43
4.3	Gekoppelte Simulationen im Rohr	45
4.3.1	Konstante Strömung	45
4.3.2	Oszillierende Strömung	47
5	Zusammenfassung und Ausblick	59
	Literaturverzeichnis	62

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schematische Darstellung der Kopplung einer 3D Strömungssimulation (CFD) mit einem 1D Modell zur Simulation der Lungendurchströmung.	5
2.1	Geschwindigkeitsprofil der laminaren oszillierenden Rohrströmung für verschiedene Phasen der treibenden Druckkraft	10
2.2	Geometrische Abmessungen der Atemwege nach Weibel [45]	12
2.3	Druck-Volumen Kurve des elastischen Verhaltens der Lunge bei statischer Volumenerhöhung und spontaner Atmung	13
2.4	Übersicht über den Parameterraum der Beatmungsfälle	15
3.1	Querschnitte der Rohrgeometrie mit (a) eingezeichneter Grundaufteilung zur Gittergenerierung und mit (b) verwendetem Gitter für die Strömungssimulation.	16
3.2	Eine zweifache Verzweigung mit den Volumenstrom- und Druckindizierungen.	20
3.3	Struktogramm der Arbeitsschritte der Randbedingung in der gekoppelten Simulation zur Verdeutlichung der Einbindung.	28
4.1	Zeitlicher Verlauf der Druckdifferenz Δp_{9-7} zwischen Generation 7 und 9 des starren Modells (rot) und des elastischen (grün) Modells für $Re = 85$, $Wo = 0,3$ und $C = 1 \times 10^{-6}$ $^3\text{m}/\text{Pa}$	33
4.2	Zeitlicher Verlauf der Druckdifferenz Δp_{9-7} zwischen Generation 7 und 9 des starren Modells (rot) und des elastischen (grün) Modells für $Re = 416$, $Wo = 2,4$ und $C = 1 \times 10^{-6}$ $^3\text{m}/\text{Pa}$	33
4.3	Zeitlicher Verlauf der Druckdifferenz Δp_{9-7} zwischen Generation 7 und 9 des starren Modells (rot) und des elastischen (grün) Modells für $Re = 416$, $Wo = 2,4$ und $C = 1 \times 10^{-10}$ $^3\text{m}/\text{Pa}$	35
4.4	Zeitlicher Verlauf der Drücke und Volumina des elastischen Modells in Generation 7 bis 10 für $Re = 416$ und $Wo = 2,4$ normiert auf die Maxima in Generation sieben.	36
4.5	Zeitlicher Verlauf der Drücke und Volumina des starren Modells in Generation 7 bis 10 für $Re = 416$ und $Wo = 2,4$ normiert auf die Maxima in Generation sieben.	36
4.6	Zeitlicher Verlauf des Druckes in Generation sieben p_7 für $V_T = 41$ ml und $Wo = \{0,31; 1,11; 3,44; 5,45; 10\}$ normiert auf die jeweiligen Maxima	37
4.7	Zeitlicher Verlauf der Drücke und Volumina in Generation 7 bis 10 bei $V_T = 41$ ml und $Wo = 3,44$ normiert auf die Maxima der Generation sieben.	38
4.8	Zeitlicher Verlauf der Druckdifferenz Δp_{9-7} zwischen Generation 7 und 9 für $Wo = 0,3$ und $Re = \{170, 850, 1700\}$	39

Abbildungsverzeichnis

4.9	Zeitlicher Verlauf der Druckdifferenz Δp_{9-7} zwischen Generation 7 und 9 für $Wo = 2,4$ und $Re = \{170, 850, 1700\}$	40
4.10	Zeitlicher Druckverlauf bei einem Geschwindigkeitssprung von null auf $Re = 500$, bei konstanter Geschwindigkeit für $Re = 500$ und bei konstanter Geschwindigkeit für $Re = 250$	41
4.11	Zeitlicher Druckverlauf für $Re = 500$ bei zwölf Generationen mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ s, zwölf Generationen mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 4 \times 10^{-6}$ s und vier Generationen mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ s.	42
4.12	CPU Zeit t für einen Zeitschritt (rot) und Fehler ϵ zwischen der Simulation und der analytischen Lösung (grün) einer Hagen-Poiseuille Strömung für $Re = 500$ aufgetragen gegen die Gitterpunktzahl n der untersuchten Gitter.	44
4.13	Druckantwort der 1D-Randbedingung bei Kopplung mit einer dreidimensionalen Hagen-Poiseuille Strömung (rot) im Vergleich zur Druckantwort des eindimensionalen elastischen Modells bei gleicher Einströmgeschwindigkeit.	46
4.14	Konvergenz der Druckantwort der 1D-Randbedingung und der mittleren Durchflussgeschwindigkeit bei der Vorgabe eines konstanten Druckes am Anfang. Die Anfangsbedingung der CFD ist eine Hagen-Poiseuille Strömung für $Re = 370$	46
4.15	Simulierte axiale Druckverläufe und Geschwindigkeitsprofile zu verschiedenen Zeitpunkten der Druckvorgabe für $Wo = 0,3$	48
4.16	Druckvorgabe (rot), Druckantwort (grün) und resultierende mittlere Durchflussgeschwindigkeit (blau) aufgetragen gegen die erste Schwingung nach Start der gekoppelten Rechnung für $Wo = 0,3$ und $Re = 0,36$	49
4.17	Axiale Geschwindigkeit am Ende $\tau = 0; 7,5 \times 10^{-4}; 1,3 \times 10^{-3}; 2,75 \times 10^{-3}$ charakteristische Zeiteinheiten nach dem Start der gekoppelten Simulation für $Wo = 0,3$ und $Re = 0,36$	50
4.18	Simulierte axiale Druckverläufe und Geschwindigkeitsprofile zu verschiedenen Zeitpunkten der Druckvorgabe für $Wo = 1,4$	51
4.19	Druckvorgabe (rot), Druckantwort (grün) und resultierende mittlere Durchflussgeschwindigkeit (blau) aufgetragen gegen die ersten drei Schwingungen nach Start der gekoppelten Rechnung für $Wo = 1,4$ und $Re = 37,3$	52
4.20	Simulierte axiale Druckverläufe und Geschwindigkeitsprofile zu verschiedenen Zeitpunkten der Druckvorgabe für $Wo = 2,4$	54
4.21	Druckvorgabe (rot), Druckantwort (grün) und resultierende mittlere Durchflussgeschwindigkeit (blau) aufgetragen gegen die ersten drei Schwingungen nach Start der gekoppelten Rechnung für $Wo = 2,4$ und $Re = 83,7$	55
4.22	Simulierte axiale Druckverläufe und Geschwindigkeitsprofile zu verschiedenen Zeitpunkten der Druckvorgabe für $Wo = 14,5$	56
4.23	Druckvorgabe (rot), Druckantwort (grün) und resultierende mittleren Durchflussgeschwindigkeit (blau) aufgetragen gegen die ersten zwölf Schwingungen nach Start der gekoppelten Rechnung für $Wo = 14,5$ und $Re = 16,1$	57
4.24	Axiale Geschwindigkeit am Ende $\tau = 0; 0,17; 0,41; 0,6$ charakteristische Zeiteinheiten nach dem Start der gekoppelten Simulation für $Wo = 14,5$ und $Re = 16,1$	58

Tabellenverzeichnis

2.1	Parameterkombinationen der Simulationen dieser Arbeit. Re und Wo bezogen auf die siebte Generation der Weibelgeometrie. Tidalvolumen entsprechen den Tidalvolumen für die gesamte Lunge.	13
4.1	Eigenschaften der verschiedenen getesteten Gitter der Rohrströmung.	43

Nomenklatur

Lateinische Zeichen

a	Schallgeschwindigkeit
A	Querschnitt
C	Compliance
Co	Courant Zahl
D	Durchmesser
E	Elastizität
f	Frequenz
\vec{g}	Erdbeschleunigung
i	Imaginäre Einheit
I	Trägheit
j	Zeitindex
J	Jacobi-Matrix
J_0	Besselfunktion erster Art nullter Ordnung
l	charakteristische Längeneinheit
L	Referenzlänge
Ma	Machzahl
\vec{n}	Normalenvektor
p	Druck
r	Koordinate in radiale Richtung
\vec{r}	Residuenvektor
R	Radius
Re	Reynoldszahl
t	Zeit
T	Dauer einer Periode
u	Strömungsgeschwindigkeit
\hat{u}	Spitzengeschwindigkeit (zeitliches Maximum der mittleren Durchflussgeschwindigkeit)
\bar{u}	mittlere Durchflussgeschwindigkeit
\vec{v}	Geschwindigkeitsvektor
\dot{V}	Volumenstrom
\ddot{V}	zeitliche Ableitung des Volumenstromes
V_T	Tidalvolumen
Wo	Womersleyzahl

Nomenklatur

x	Koordinate in Strömungsrichtung
z	Generationszahl

Griechische Zeichen

α	Winkel
ϵ	Fehler
ζ	Verlustbeiwert
η	dynamische Viskosität
θ	Temperatur
ν	kinematische Viskosität
ρ	Fluidichte
τ	charakteristische Zeit
ϕ	Phasenversatz
ω	Kreisfrequenz

Abkürzungen

1D	eindimensional
3D	dreidimensional
ANS	Atemnotsyndrom des Neugeborenen
ARDS	Akutes progressives Lungenversagen (Acute Respiratory Distress Syndrome)
CCS	Compact Column Storage
CFD	numerische Strömungssimulation
CO ₂	Kohlenstoffdioxid
CT	Computertomographie
DLR	Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt e.V.
FRC	Residualkapazität
GAMG	geometrisch-algebraischer Multigrid Löser (geometric-algebraic multigrid)
HFOV	Hochfrequenzoszillationsventilation
O ₂	Sauerstoff
PBiCG	Vorkonditioniertes bikonjugiertes Gradientenverfahren (Preconditioned biconjugate gradient)
PIV	Particle Image Velocimetry
RV	Ruhevolumen
TLC	Totale Lungenkapazität
VALI	Beatmungsassoziierte Lungenschädigung (Ventilator Associated Lung Injury)

Einige weitere Notationen sind im Text erläutert.

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die menschliche Atmung dient zum Austausch von Sauerstoff (O_2) und Kohlenstoffdioxid (CO_2) zwischen der Umwelt und dem Körper, welcher über die Lunge geschieht. Die Lunge besteht aus der Luftröhre (Trachea), die sich in die Hauptbronchien teilt. An diese schließen sich durch fortwährende Verzweigungen weitere Bronchien an. Ab etwa der zehnten Verzweigung (Generation) folgen die Bronchiolen, welche eine geringere Steifigkeit aufweisen, als die Bronchien. Auch diese verzweigen sich weiter und haben ab etwa der 16. Generation Ausbuchtungen mit Lungenbläschen (Alveolen). Auf die letzte Verzweigungsgeneration folgen abschließende Alveolen.

Beim Einatmen (Inspiration) wird sauerstoffreiche Luft konvektiv bis in die Bronchiolen transportiert. Dort erreicht die Luft die Alveolen, in denen ein diffusiver Austausch von O_2 und CO_2 zwischen der Atemluft und dem Blutkreislauf stattfindet. Diese Diffusion wird durch den Konzentrationsgradienten zwischen der Atemluft und dem Blut angetrieben, da jeweils verschiedene Sättigungen von Sauerstoff und Kohlenstoffdioxid vorhanden sind. Dieser Vorgang ist sehr effizient, da die Oberfläche der Atemwege auf Grund der vielen Verzweigungen bis zu den Alveolen stark zunimmt. Während des Ausatemvorgangs (Expiration) wird die mit CO_2 angereicherte Luft aus der Lunge heraustransportiert. Bei normaler ruhiger Atmung findet dieser Austausch mit einer Frequenz von etwa $f = 0,2$ Hz und einem Atemzugvolumen (Tidalvolumen) von etwa $V_T = 500$ ml statt. Diese und weitere Informationen zur Funktionsweise des respiratorischen Systems sind bei Oczenski [30] zu finden.

Bei Patienten mit akutem progressivem Lungenversagen (Acute Respiratory Distress Syndrome, ARDS), oder bei Neugeborenen mit Atemnotsyndrom des Neugeborenen (ANS) wird die Atmung mit Hilfe von Beatmungsgeräten unterstützt, oder auch vollständig ersetzt. Durch die maschinelle Beatmung kann es häufig zu beatmungsassoziierten, also zusätzlichen, Lungenschädigungen (Ventilator Associated Lung Injury, VALI) kommen [1, 26]. Diese können durch ein Überblähen der Lunge in Folge der Verwendung von zu großen Tidalvolumina und Drücken entstehen. Im Rahmen von klinischen Studien haben Krishnan & Brower [26] sowie Müller *et al.* [29] gezeigt, dass die in der Neonatologie etablierte Hochfrequenzoszillationsventilation (HFOV) eine vielversprechende Alternative für eine lungenschonende Beatmung darstellt. Um die HFOV zu optimieren und zu einer etablierten Beatmungsmethode weiterzuentwickeln, ist ein genaueres Verständnis der Gas-transportvorgänge in der hochfrequent oszillierenden Strömung in den Atemwegen nötig, wie aus den Arbeiten von z.B. Adler & Brücker [1], Choi *et al.* [4] und Elad *et al.* [14] deutlich wird. Aus diesem Grund ist die Untersuchung der strömungsphysikalischen Vorgänge in der Lunge seit etwa fünf Jahrzehnten im Fokus der Forschung. Die Ergebnisse dieser Forschung sind in den Arbeiten von Grotberg [17, 18] und Pedley [34] gut zusammengefasst.

1.2 Stand der Technik

Bei der experimentellen Untersuchung der strömungsphysikalischen Vorgänge in der Lunge treten viele Schwierigkeiten auf. Auf Grund der komplexen Geometrie der Lunge ist eine experimentelle Untersuchung nur beschränkt möglich, da Geschwindigkeitsmessungen der Strömung mit optischen Verfahren wie der Particle Image Velocimetry (PIV) durch die optische Unzugänglichkeit nicht realisierbar ist. Auch das Einbringen von Geschwindigkeits-, oder Drucksonden ist infolge der sehr feinen Struktur der luftleitenden Gefäße nicht möglich.

Diese Probleme haben Adler & Brücker [1] in einer der aktuellsten experimentellen Untersuchungen umgangen, indem sie die Geschwindigkeiten der Strömung in einem hochskalierten Silikonmodell der ersten sechs Generationen des Bronchialbaumes mit PIV gemessen haben. Die betrachteten oszillierenden Strömungen haben Tidalvolumina von 75 ml und 500 ml, welche im für die HFOV interessanten Bereich liegen. Die verwendeten Frequenzen von 0,083 Hz bis 2,5 Hz sind im Verhalten jedoch nicht mit den entsprechenden Frequenzen der Luft vergleichbar, da ein auf den Brechungsindex des Silikon angepasstes Fluid benutzt wurde, welches auf Grund der höheren Viskosität ein von Luft abweichendes Fließverhalten aufweist (s. Abschnitt 2.1.2). Daher sind numerische Untersuchungen der strömungsphysikalischen Vorgänge in der Lunge als Ergänzung essentiell, um die Gastransportvorgänge gänzlich zu untersuchen und zu verstehen.

Im Falle numerischer Untersuchungen treten allerdings ebenfalls Schwierigkeiten auf. Selbst mit der heutigen Rechenleistung ist es nicht möglich die komplexe Geometrie einer kompletten Lunge zu simulieren. Hierfür müsste auf Grund der kleinen Dimensionen in den unteren Generationen ein sehr feines Gitter genutzt werden, welches zu sehr großen Rechenzeiten führen würde. Des Weiteren ist es auf Grund der limitierten Auflösungsgenauigkeit der Computertomographie-Scanner nicht möglich eine komplette Lungengeometrie aus einem bildgebenden Verfahren zu erhalten.

Mit sieben aufgelösten Generationen wurden in der Arbeit von Choi *et al.* [4] eine der komplexesten Geometrien zur Strömungssimulation genutzt. Die in dieser Arbeit betrachteten oszillierenden Strömungen liegen mit Frequenzen von 0,2 Hz und 6,28 Hz und Tidalvolumen zwischen 16,58 ml und 500 ml im Bereich der HFOV. Zur Einströmung wird ein vorgegebenes Geschwindigkeitsprofil als Randbedingung genutzt. Die auf Grund der begrenzten Rechenleistung nicht mehr explizit aufgelösten weiteren Generationen der Lungengeometrie werden durch ein eindimensionales Modell als Randbedingung der Strömungssimulation beachtet. Neben dem für hohe Frequenzen typischen Annulareffekt, der in Abschnitt 2.1.3 diskutiert wird, zeigten sich bei hohen Geschwindigkeiten auch Sekundärwirbel, die einen entscheidenden Einfluss auf das in dieser Arbeit untersuchte Mischverhalten der Strömung haben.

Für die Randbedingungen, die das Verhalten der nicht mehr explizit aufgelösten Generationen modellieren sollen, gibt es verschiedene Ansätze. Die Arbeiten von Olufsen [31] und Olufsen *et al.* [32] behandeln das vergleichbare Strömungsproblem von Blutströmungen. Bei diesen handelt es sich ebenfalls um eine Form der oszillierenden Strömungen, den pulsierenden Strömungen. Das Impedanzmodell, welches für diese hergeleitet wurde, haben Comerford *et al.* [5] für die Lungenströmung angepasst und mit einer dreidimensionalen Simulation gekoppelt. Mit dieser gekoppelten Simulation haben Comerford *et al.* das Strömungsverhalten bei spontaner Atmung und bei der Beatmung mit einem konstantem Volumenstrom, welche sich durch starke Beschleunigungen aus-

1 Einleitung

zeichnet, durchgeführt. Hierbei hat sich gezeigt, dass das angehängte Modell einen starken Einfluss auf die Ergebnisse für den Druck, jedoch einen geringen Einfluss auf die berechnete Strömung hat. Ein Vorteil des von Comerford *et al.* genutzten Modells ist die Berücksichtigung der Elastizität der Bronchien. Allerdings werden keine Verzweigungsverluste der Strömung betrachtet. Des Weiteren basiert das Modell auf den analytischen Lösungen einer oszillierenden Rohrströmung von Womersley [46], welche nur für sinusförmige Strömungen hergeleitet wurde. Daher ist es schwierig eine Aussage über die Qualität bei nicht sinusförmigen Strömungen zu treffen.

Ein weiterer Ansatz zur Modellierung der nicht mehr explizit aufgelösten Atemwege ist die Verwendung eines nichtlinearen analogen Modells, wie es von Elad *et al.* [14] entwickelt und genutzt wurde. Für diesen Ansatz wurden die strömungsmechanisch relevanten Eigenschaften der Lunge in einen elektrischen Schaltkreis übersetzt. In diesem Schaltkreis repräsentieren elektrische Widerstände die Strömungswiderstände, die Kondensatoren die elastischen Eigenschaften des Lungengewebes und die Spulen die Trägheit des Fluides. Die entsprechenden benötigten Werte wurden aus Experimenten und mathematischen Formulierungen entnommen. Anhand der mit diesem Modell durchgeführten Simulationen wurde mit Hilfe von Variationen der Einströmbedingungen, der Geometrie und des elastischen Verhaltens festgestellt, dass die Dauer und der prozentuale Anteil der Luftströmung zwischen den Tochterästen einer Generation mit steigenden Frequenzen und Tidalvolumen ansteigt. Eine Asymmetrie im Durchmesser führt zu einer ausgeprägteren asymmetrischen Strömungsverteilung, als eine Asymmetrie in der Tochterastlänge. Außerdem wurde festgestellt, dass eine asymmetrische Elastizitätsverteilung in den Tochterästen einen großen Einfluss auf eine asymmetrische Strömungsverteilung in der Lunge hat.

Kabilan *et al.* [22] koppelten ebenfalls ihre dreidimensionalen Simulationen mit Randbedingungen auf Basis eines eindimensionalen Modells, welches dem Modell von Elad *et al.* [14] ähnlich ist. Es werden Widerstände und Spulen zur Modellierung der Strömungsverluste und Trägheiten genutzt. Um den Fehler zwischen einer dreidimensionalen und einer eindimensionalen Simulation zu berechnen, verglichen Kabilan *et al.* die Ergebnisse von zwei Simulationen. In der einen Simulation wurde eine vierfache Verzweigung dreidimensional berechnet. Die andere Simulation war eine Kopplung einer zweifachen Verzweigung im dreidimensionalen mit einer eindimensionalen Modellierung der folgenden zwei Verzweigungen. Bei den Ergebnissen hat sich herausgestellt, dass das gekoppelte Modell die gleichen Druckwerte errechnet, wie die dreidimensionale Simulation. Auch beide Strömungsbilder stimmen gut mit vorherigen Studien überein. Der Vorteil des gekoppelten Modells liegt vor allem in der nahezu halbierten Berechnungszeit.

Neben der Modellierung durch einen Stromkreis, gibt es auch den Ansatz, die Strömung eindimensional mit Hilfe der Bernoulligleichung mit zusätzlichen Verlusttermen zu beschreiben. Dies wurde in der Dissertation von Teichmann [42] angewendet. Für seine Modellierung nutzt er als geometrische Randbedingung die Lungengeometrie nach Weibel [45]. Die Strömungsverluste werden als zeitlich feste Konstanten angenommen. Er hat die Ergebnisse der Simulationen von Strömungen in Tochterästen mit unterschiedlichen Durchmessern mit den Ergebnissen von ihm durchgeführter Experimente verglichen. Hierbei stellte er fest, dass sein Modell außerhalb der Strömungsumkehr sehr gute Ergebnisse liefert. In der Strömungsumkehr weichen die Ergebnisse auf Grund der konstanten Verlustterme von den experimentellen Werten ab. Sowohl im Experiment, als auch in der Simulation zeigt sich durch die einseitige Variation der Tochterastquerschnitte und der Elastizität

1 Einleitung

der Auslässe, dass Asymmetrien sowohl zu asymmetrischen Strömungen über die Verzweigung, als auch zu Strömungen zwischen den Tochterästen einer Verzweigung führen.

Das Modell von Teichmann wurde von Soodt *et al.* [40] aufgegriffen und weiterentwickelt. Das Modell von Soodt *et al.* enthält anstelle der konstanten Verlustwerte für alle Druckverluste der Strömung nur die Verluste auf Grund von Reibung. Diese wurden mit Hilfe des Reibungsverlustes einer voll ausgebildeten Rohrströmung berechnet. Zusätzlich wurde an den Auslässen der letzten simulierten Generation ein nichtlineares Elastizitätsmodell als Randbedingung hinzugefügt. In diesem Modell werden die geometrisch nicht mehr modellierten Bronchien und Alveolen als Ballons dargestellt, die das von Müller & Struchtrup [28] beschriebene nichtlineare Ballonverhalten aufweisen. Die Parameter für das nichtlineare Verhalten wurden mit Hilfe eines Experimentes bestimmt. Die Ergebnisse des Strömungsmodells wurden mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Hierbei wurde ein besonderes Augenmerk auf das Öffnungsverhalten der Ballons gerichtet, da diese Ballons zusammengefallene Alveolen und Bronchien modellieren. Es hat sich gezeigt, dass die Öffnung eines Ballons bei der spontanen Atmung entsprechenden Frequenzen und Tidalvolumina umgebende Ballons beeinflusst, die nicht weiter als 4 Generationen entfernt liegen. In den Ergebnissen der Simulation mit hohen Frequenzen zeigte sich, dass sich alle Ballons gleichzeitig öffnen und nicht einzeln, oder in kleinen Gruppen, wie es beim Experiment mit den geringen Frequenzen der Fall ist.

Auch Köthe [24] greift in seiner Masterarbeit auf das Modell von Teichmann zurück. Er hat dieses erweitert, indem er dynamische Verlustterme für die Reibung, die Trägheit des Fluides und die Verzweigungsströmung einfügt hat. Der Einfluss des elastischen Verhaltens der Lunge wird durch einen volumenabhängigen Druck modelliert, der als Randbedingung an den Enden der letzten simulierten Generationen verwendet wird. In der Arbeit wurde gezeigt, dass der Einfluss der hinzugefügten Verzweigungsverluste besonders bei hohen Reynoldszahlen, deren genaue Beschreibung in Abschnitt 2.1.1 erfolgt, im Vergleich zu den anderen betrachteten Verlusten sehr groß ist.

1.3 Struktur und Ziel

In dieser Arbeit wird das bestehende eindimensionale Modell der Lungendurchströmung von Köthe [24], welches strömungstechnische Widerstände, Trägheiten und Verzweigungsverluste beachtet, erweitert. Die Erweiterung besteht darin, das elastische Verhalten des Rohrsystems zusätzlich zu den bisher verwirklichten volumenabhängigen Druckrandbedingungen durch veränderliche Querschnitte in jedem Rohr zu modellieren und in das vorhandene C++ Programm zu implementieren. Es ist von Interesse, welche Auswirkungen das elastische Verhalten auf das eindimensionale Modell besitzt. Zur Untersuchung dieses Verhaltens werden konstante und oszillierende Strömungen mit diesem Modell simuliert. Anhand der konstanten Strömungen wird festgestellt, welchen Einfluss die Startwerte, die zeitliche Diskretisierung und die Anzahl der simulierten Generationen auf die Druckantwort des Modells besitzen. Anhand von oszillierenden Strömungsfällen wird der Einfluss der Elastizität untersucht, indem ein Vergleich zwischen dem elastischen und dem nicht elastischen Modell durchgeführt wird. Zusätzlich wird der Einfluss der strömungsbeschreibenden Kennzahlen, Reynoldszahl und Womersleyzahl, die in Abschnitt 2.1.1 und 2.1.2 erläutert werden, auf das elastische Verhalten und die daraus folgende Druckantwort untersucht.

1 Einleitung

Auf Grund der zum einen heutzutage noch begrenzten Rechenressourcen und zum anderen der fehlenden Auflösungsgenauigkeit von CT-Scans, ist es nicht möglich die gesamte Lungendurchströmung dreidimensional zu simulieren. Deswegen wird die Strömung nur in den ersten sieben bis neun Generationen mit einem dreidimensionalen Löser berechnet. Dieser Teil der Geometrie ist entweder CT-Scan basiert, oder generisch nach den Vorgaben von Weibel [45] erstellt. Die folgenden 15 bis 17 Generationen werden durch eine Randbedingung modelliert. Hierfür wird das oben beschriebene erweiterte Modell als Randbedingung für dreidimensionale Simulationen mit einem finiten Volumenverfahren im Strömungslöser OpenFOAM implementiert. Eine solche Kopplung ist in Abbildung 1.1 schematisch dargestellt. Durch die Verwendung von verschiedenen elastischen Eigenschaften der Randbedingungen an den verschiedenen Auslässen können auch einfache Modelle von erkrankten Lungen simuliert werden. Um das eindimensionale Modell für diesen Einsatzbereich zu testen, wird die Randbedingung an einem Rohr, das die geometrischen Abmaße der siebten Generation hat, genutzt. Diese gekoppelte Simulation wird mit den für die Generation sieben typischen Strömungsparametern und geometrischen Abmessungen berechnet.

Bei den Rechnungen im Rahmen dieser Arbeit wird der Fokus auf die Untersuchung des Einflusses des eindimensionalen Modells als Randbedingung auf die dreidimensionalen Simulation gelegt. Es werden Simulationen von Rohrströmungen mit konstantem Fluß durchgeführt, um das elastische Verhalten des Modells zu untersuchen. Mit der Vorgabe eines konstanten Druckes am Einlass der Rohrströmung wird getestet, ob das eindimensionale Modell als Randbedingung zu dem am Einlass vorgegebenen Druck konvergiert. Weiterhin werden Simulationen von Rohrströmungen mit oszillierendem Fluß durchgeführt, um den Einfluss des Modells auf die Geschwindigkeitsamplitude und den Phasenversatz zwischen der Geschwindigkeit und der treibenden Druckkraft zu untersuchen. Die Kontrollparameter für die verschiedenen Simulationen werden so gewählt, dass sie den Bereich der für die Praxis relevanten Parameterkombinationen abdecken.

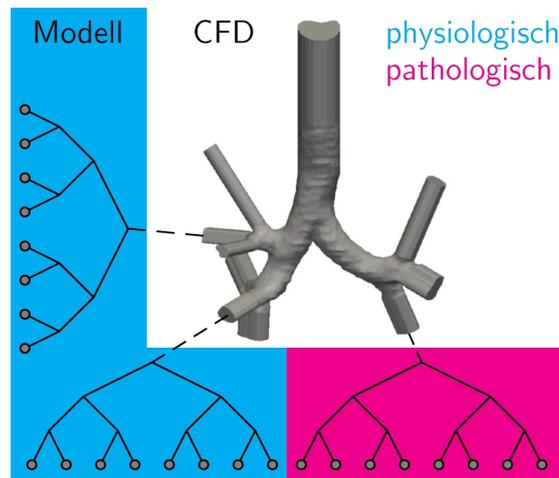


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung der Kopplung einer 3D Strömungssimulation (CFD) mit einem 1D Modell zur Simulation der Lungendurchströmung. Die markierten angehängten Modelle entsprechen den Eigenschaften einer gesunden (blau) und einer erkrankten (pink) Lunge.

1 Einleitung

Um die genannten Ziele zu erreichen wird im Folgenden zuerst auf die für die Lungenströmung notwendigen strömungsmechanischen und physiologischen Grundlagen eingegangen. Anschließend wird das zur Strömungssimulation genutzte finite Volumen Verfahren und das verwendete eindimensionale Modell vorgestellt. Im Anschluss wird die Kopplung zwischen dem finiten Volumen Verfahren und dem eindimensionalen Modell detailliert beschrieben. Im Ergebnisteil wird zunächst der Einfluss des elastischen Verhaltens im eindimensionalen Modell diskutiert. Bei den Ergebnissen der gekoppelten Simulation wird der Einfluss, den die Kopplung auf die Strömung besitzt, erläutert. Abschließend wird noch ein Ausblick auf Möglichkeiten zur weiteren Bearbeitung des Themas gegeben.

2 Grundlagen

2.1 Strömungsmechanische Grundlagen

Um einen Vergleich zwischen den verschiedenen auftretenden Strömungsfällen der oszillierenden Rohrströmung anstellen zu können, werden Kennzahlen benötigt. Mit den, im Folgenden kurz vorgestellten, Kennzahlen ist es möglich eine oszillierende Rohrströmung eindeutig zu charakterisieren. Anschließend wird auf die mathematische Beschreibung der Strömung eingegangen.

2.1.1 Reynoldszahl

Die Reynoldszahl

$$Re = \frac{\rho L \hat{u}}{\eta} = \frac{L \hat{u}}{\nu} \quad (2.1)$$

ist eine dimensionslose Kennzahl der Strömungsmechanik, die das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften angibt. Hierbei ist ρ die Dichte, η die dynamische Viskosität und ν die kinematische Viskosität des Fluides. Die Referenzlänge L ist in dieser Arbeit, da nur mit Rohrströmungen gearbeitet wird, der Durchmesser D der betrachteten Röhre. Die zur Bildung genutzte Referenzgeschwindigkeit $\hat{u} = \max_{0 < t \leq T} (\bar{u}(t))$ ist die Spitzengeschwindigkeit, die dem zeitlichen Maximum der mittleren Durchflussgeschwindigkeit \bar{u} entspricht. Mit $T = 1/f$ ist die Zeit einer Periode einer Oszillation mit der Frequenz f bezeichnet.

2.1.2 Womersleyzahl

Die Womersleyzahl

$$Wo = \frac{D}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (2.2)$$

ist eine dimensionslose Kennzahl der Biofluidmechanik. Diese gibt das Verhältnis der transienten Trägheitskraft zu der viskosen Kraft in der oszillierenden Strömung an. Hierbei ist $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz der oszillierenden Strömung. Der Durchmesser D des durchströmten Rohres wird als Referenzlänge herangezogen.

2.1.3 Grundgleichungen

Im Folgenden wird kurz auf die zur Beschreibung der Strömungsfälle nötigen Gleichungen eingegangen. Diese sind zum einen die Navier-Stokes Gleichungen und zum anderen deren analytische Lösung für die Hagen-Poiseuille Strömung und die Searl-Womersley Strömung.

Navier-Stokes Gleichungen

In dieser Arbeit wird die Strömung als inkompressibel angenommen. Die getroffene Annahme der Inkompressibilität beruht auf zwei Bedingungen nach Landau *et al.* [27]. Zum Einen, dass die Strömungsgeschwindigkeit des Fluides klein gegenüber der Schallgeschwindigkeit $u \ll a$ ist, was einer Machzahl $Ma = \frac{u}{a} \approx 0$ von annähernd Null entspricht. Für die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Parameterkombinationen der Lungenströmung ist dies gegeben. Zum Anderen wird vorausgesetzt, dass die charakteristische Zeit für signifikante Änderung der Strömungsgeschwindigkeit $\tau \gg \frac{l}{a}$ im Vergleich zu dem Zeitintervall, welches ein Schallsignal zur Ausbreitung im durchströmten Gebiet benötigt, groß sein muss. Diese Bedingung ist in den Fällen der niedrigen Frequenzen erfüllt. Für die höchsten betrachteten Frequenzen sei auf die Arbeit von Elad *et al.* [14] verwiesen. Dort wurde festgehalten, dass auch bei Beatmungsfrequenzen von 12 Hz τ immer noch zwei Größenordnungen größer ist als $\frac{l}{a}$. Somit ist die Annahme der Inkompressibilität gerechtfertigt.

Daher können in dieser Arbeit die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}, \quad (2.4)$$

bestehend aus der Massen- (2.3) und der Impulserhaltungsgleichung (2.4) zur Beschreibung der oszillierenden Strömungen verwendet werden. Hierbei entspricht \vec{v} dem Geschwindigkeitsvektor des Fluides. Der Druck wird mit p bezeichnet. Der Nablaoperator ist mit $\vec{\nabla}$ bezeichnet und $\frac{\partial}{\partial t}$ die partielle Zeitableitung.

Hagen-Poiseuille Strömung

Bei dieser Strömung handelt es sich um eine voll ausgebildete, stationäre, laminare Rohrströmung. Diese ist nach dem deutschen Ingenieur Hagen [19] und dem französischen Physiker Poiseuille [35] benannt, die beide unabhängig voneinander den Zusammenhang

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{l} \quad (2.5)$$

zwischen dem Volumenstrom und dem Druckgradienten experimentell bestimmt haben. Hierbei bezeichnet R den Radius des Rohres und $\frac{\Delta p}{l}$ ist der Druckabfall über die Länge des Rohres.

Für diesen Strömungsfall lässt sich eine analytische Lösung der Navier-Stokes Gleichungen ableiten. Im Folgenden wird diese analytische Herleitung kurz skizziert, die in [38] aufgeführt ist. Ausgehend von Gleichung (2.4) kann auf Grund der Stationarität die zeitliche Ableitung $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ vernachlässigt werden. Des Weiteren sagen die Annahmen aus, dass eine Geschwindigkeit $u(r)$ ausschließlich in Richtung der Rohrachse existiert. Der Druck ist in jedem Querschnitt konstant und ändert sich linear entlang der Rohrachse. Damit ergibt sich in Zylinderkoordinaten die Differentialgleichung

$$\eta \left(\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.6)$$

2 Grundlagen

Wird diese mit der Haftbedingung $u(r = R) = 0$ integriert, ergibt sich ein parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil der Form

$$u(r) = u_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (2.7)$$

mit $u_{max} = 2\bar{u} = \frac{R^2}{4\eta} \frac{\Delta p}{l}$. Dies lässt sich mit der Abhängigkeit für die mittlere Durchflussgeschwindigkeit $\bar{u} = \dot{V}/\pi R^2$ exakt in den eingangs erwähnten Volumenstrom umschreiben.

Sexl-Womersley Strömung

Sexl [39] und Womersley [46] haben beide unabhängig voneinander eine analytische Lösung für laminare oszillierende Rohrströmungen veröffentlicht. Die Herleitung wird im Folgenden skizziert und ist bei Schlichting & Gersten [37] ausführlich diskutiert. Für die Herleitung werden die Navier-Stokes-Gleichungen (2.3) und (2.4) in Zylinderkoordinaten genutzt. Es handelt sich um eine instationäre, ebene Strömung. Auf Grund der Annahme, dass die Strömung eben ist, fallen die instationären Anteile des Geschwindigkeitsfeldes parallel zur Wand $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ weg. Dies führt mit der Kontinuitätsgleichung (2.3) dazu, dass die v -Komponente der Geschwindigkeit im Falle einer undurchlässigen Wand verschwindet. Somit erhält man aus den Navier-Stokes Gleichungen

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.8)$$

mit der Randbedingung $u(r = R, t) = 0$ (Haftbedingung). Die oszillierende Strömung wird durch einen periodischen Druckgradienten der Form

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = C \cdot \sin(\omega t) = -i C e^{i\omega t} \quad (2.9)$$

angetrieben. Dabei ist i die imaginären Einheit und C die Amplitude. Verschieden Umformungen der Gleichungen (2.8) und (2.9) führen, wie z.B. in [37] beschrieben, zu einer Differentialgleichung (DGL), deren Lösung

$$u(r, t) = -\frac{C}{\omega} e^{i\omega t} \left[1 - \frac{J_0 \left(r \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right)}{J_0 \left(R \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \right)} \right] \quad (2.10)$$

das zeitabhängige Geschwindigkeitsprofil der laminaren oszillierenden Rohrströmung repräsentiert. Hierbei bezeichnet J_0 die Besselfunktion erster Art und nullter Ordnung.

In Abbildung 2.1 sind Geschwindigkeitsprofile für verschiedene Wo zu sehen. Bei $Wo \ll 1$ stellt sich zu jedem Zeitpunkt eine Hagen-Poiseuille-Strömung passend zu dem aktuellen Druckgradienten ein. Dies geschieht, da der Einfluss der Trägheit bei so niedrigen Wo gering ist. Bei steigender Womersleyzahl flacht das Geschwindigkeitsprofil ab und es entsteht ein Phasenversatz zwischen der treibenden Druckkraft und der Geschwindigkeit. Beide Effekte basieren auf der Trägheit des Fluides. Der Phasenversatz stellt sich ein, weil das in eine Richtung strömende Fluid zunächst durch den wechselnden Druckgradienten abgebremst werden muss, bevor es in die entgegengesetzte Richtung strömen kann. Das Abflachen des Geschwindigkeitsprofils entsteht dadurch, dass die Geschwindigkeit im Rohrzentrum stärker durch die Trägheit beeinflusst wird, als die wandnahe Strömung. Die wandnahe Strömung wird hauptsächlich durch die Reibung beeinflusst. Dies führt dazu, dass

2 Grundlagen

bei $Wo = 1$ ein leichter Phasenversatz bei annähernd parabelförmigen Geschwindigkeitsprofilen auftritt. Steigt die Womersleyzahl über eins, bildet sich ein Geschwindigkeitsprofil aus, welches sehr hohe Gradienten in Wandnähe hat. Des Weiteren besitzt das Geschwindigkeitsprofil im Rohrzentrum ein Plateau, wobei die maximale Geschwindigkeit zwischen den zentralen und wandnahen Bereichen auftritt. Dieser Versatz des Maximums der Geschwindigkeit wird nach Richardson und Tyler [36] Annulareffekt genannt. Bei $Wo > 1$ ist es in der Strömungsumkehr auch möglich, dass die Strömungsrichtungen im Rohrzentrum und in Wandnähe verschieden sind. Dies wird im weiteren Gegenstrom genannt. Bei $Wo \gg 1$ weist das Profil annähernd einen Phasenversatz von $\phi = \pi/2$ gegenüber dem treibenden Druckgradienten auf. Diese Strömung verhält sich ähnlich wie ein Festkörper, da sich nahezu ein Blockprofil ausbildet, welches nur sehr nah an der Wand auf Grund von der Reibung von dem konstanten Plateau abweicht.

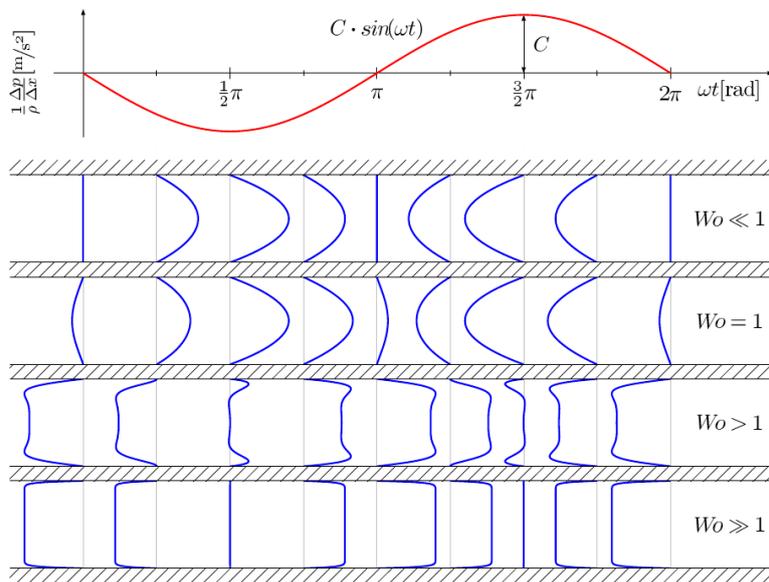


Abbildung 2.1: Geschwindigkeitsprofile (blau) nach Gleichung (2.10) der laminaren oszillierenden Rohrströmung für verschiedene Phasen der treibenden Druckkraft (rot). Abbildung entnommen aus [15]

2.2 Anatomische und physiologische Grundlagen

Ein Verständnis für die Anatomie und Physiologie des Atmungssystems ist essentiell für die in dieser Arbeit betrachteten Strömungsfälle. Aus diesem Grund werden im Folgenden die nötigen Grundlagen kurz dargelegt.

2.2.1 Topologie der Lunge

Das Atmungssystem besteht aus dem Respirationstrakt und der Atemmuskulatur. Der Respirationstrakt kann in das Luftleitungssystem und das Gasaustauschsystem aufgeteilt werden. Bei Ersterem handelt es sich um den Teil, der zum Transport der Luft von der Umwelt zu den Alveolen genutzt wird. Dieser kann in die oberen Atemwege (Nase mit Nasennebenhöhlen, Rachen (Pharynx) und Kehlkopf (Larynx)) und die unteren Atemwege (Luftröhre (Trachea) und Bronchialbaum) aufgeteilt werden. Beim Gasaustauschsystem handelt es sich um die Lunge, also um die Lungengefäße, die Lungenbläschen (Alveolen) und das Bindegewebe (Interstitium). Genauere Angaben zur Anatomie und Physiologie der Lunge finden sich z.B. in Oczeni [30].

Zur Abbildung der Topologie der Lunge existieren verschiedene Verfahren. Zwei Möglichkeiten, ein realistisches Modell auf Basis von CT-Daten zu erhalten, sind die Arbeiten von Krenkel *et al.* [25] und Tawahai *et al.* [41]. Tawahai nutzt CT-Daten zur Darstellung der Lunge und Krenkel beschreibt die Arbeitsschritte, mit denen ein Modell des Bronchialbaumes aus CT-Daten erstellt werden kann.

Da ein derartig gewonnenes Modell jedoch geometrisch zu komplex für eine eindimensionale Strömungsmodellierung ist, wird in dieser Arbeit auf ein älteres Modell aus dem Jahre 1963 zurück gegriffen, welches durch Mittelung von Vermessungen mehrerer Lungen erwachsener Männer erstellt wurde. Diese, von Weibel [45] beschriebene, Geometrie wird im Weiteren Weibelgeometrie genannt. Die Weibelgeometrie hat den Vorteil, dass sie trotz ihrer Simplität noch in gewissem Maße die grundlegenden Eigenschaften der Geometrie der Lunge wiedergibt. Weibel beschränkt sich hierbei auf symmetrische Verzweigungen von Röhren. In dieser Arbeit wird für den Verzweigungswinkel der Wert $\alpha = 70^\circ$ nach Horsfield *et al.* [21] genutzt. Die Verzweigungen führen zu einer Einteilung der Lunge in 24 Generationen mit der Trachea als die nullte Generation. Auf die erste Verzweigung folgt dann die erste Generation usw. Der Durchmesser und die Länge einer Röhre wird in der Weibelgeometrie durch Funktionen beschrieben, die abhängig von der Generation sind. Für Generation null bis einschließlich Generation drei lauten die Gleichungen

$$l_1(z) = l_0 \cdot e^{-0,92 \cdot z} \quad (2.11)$$

$$d_1(z) = d_0 \cdot e^{-0,388 \cdot z}, \quad (2.12)$$

wobei $l_0 = 120$ mm die Ausgangslänge und $d_0 = 18$ mm den Ausgangsdurchmesser darstellt. Die folgenden Generationen werden durch

$$l_2(z) = l'_0 \cdot e^{-0,17 \cdot z} \quad (2.13)$$

$$d_2(z) = d'_0 \cdot e^{-(0,293 - 0,0062 \cdot z) \cdot z} \quad (2.14)$$

mit dem angepassten Durchmesser $d'_0 = 12$ mm und der angepasste Länge $l'_0 = 25$ mm beschrieben. In Abbildung 2.2 ist der Verlauf des Durchmessers und der Länge gegen die Generationen

2 Grundlagen

aufgetragen. Es ist gut zu erkennen, dass ab der dritten Generation der durchströmte Querschnitt immer größer wird. Das Größenspektrum der Geometrie erstreckt sich von einem Durchmesser von 18 mm und einer Länge von 120 mm bei der Trachea bis zu einem Durchmesser von 0,5 μm und einer Länge von 0,5 mm in der 23. Generation.

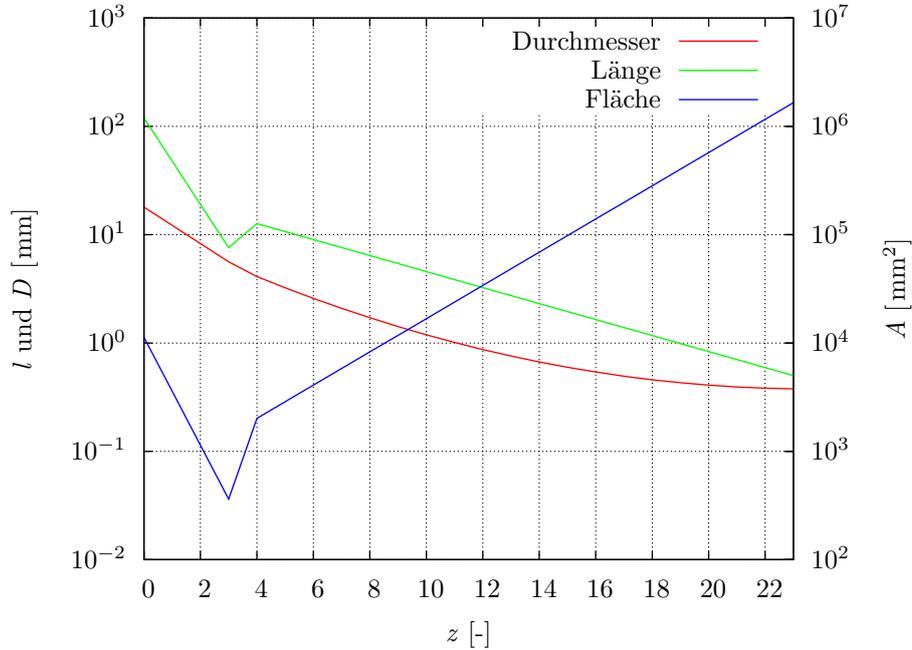


Abbildung 2.2: Geometrische Abmessungen der Atemwege nach Weibel [45] in Abhängigkeit der Generation z für den gesamten Bronchialbaum von Generation null bis 23. Durchmesser D , Länge l und durchströmte Querschnittsfläche A

2.2.2 Spontane Atmung und maschinelle Beatmung

Die spontane Atmung kann in zwei Phasen aufgeteilt werden. Die erste Phase ist das Einatmen (Inspiration). Hierbei wird mit Hilfe der Atemmuskulatur ein Unterdruck im Brustkorb (Thorax) erzeugt. Zu der Atemmuskulatur gehört das Zwerchfell, welches durch Anspannen nach unten gezogen wird und somit den Raum für die Lunge vergrößert, und die Muskeln, die durch Kontraktion den Brustkorb durch anheben der Rippen erweitern. Auf die erste Phase folgt das Ausatmen (Expiration) als zweite Phase. Beim Ausatmen wird die Atemmuskulatur entspannt, so dass sich die Lunge zum Druckausgleich wieder zusammenziehen kann. Zum forcierten Ausatmen werden zusätzlich noch weitere Muskeln zur Verkleinerung des Thorax angespannt.

Die maschinelle Beatmung wird bei Patienten zur Unterstützung oder als vollständiger Ersatz der spontanen Atmung genutzt. Hierfür gibt es verschiedene Methoden, die entweder Volumen-, oder Druckgesteuert sind. Der für diese Arbeit interessante Spezialfall der maschinellen Beatmung ist die sogenannte HFOV-Beatmung. Diese zeichnet sich durch die, im Vergleich zur spontanen Atmung, hohen Frequenzen aus. Bei diesen hohen Frequenzen werden geringere Tidalvolumen benötigt, wodurch die beatmungsbedingten Schäden an der Lunge des Patienten (VALI) möglichst gering

2 Grundlagen

gehalten werden sollen. Hager *et al.* [20] hat Tidalvolumen bei verschiedenen Einstellungen an einem HFOV-Beatmungsgerät gemessen. Auf der Basis dieser Messungen wurden für diese Arbeit zwei Simulationen mit Parametern praxisrelevanter Beatmungsfälle erstellt. Ein Überblick über die Parameterkombinationen aller Simulationen dieser Arbeit ist in Tabelle 2.1 gegeben.

Tabelle 2.1: Parameterkombinationen der Simulationen dieser Arbeit. Re und Wo bezogen auf die siebte Generation der Weibelgeometrie. Tidalvolumen entsprechen den Tidalvolumen für die gesamte Lunge.

Fall	Re	Wo	Tidalvolumen V_T [ml]	Frequenzen f [Hz]
spontane Atmung ($Wo_{0,3}$)	85	0,3	500	0,25
Hochfrequenzoszillationsventilation niedrige Wo ($Wo_{1,4}$)	677	1,4	200	4
Hochfrequenzoszillationsventilation hohe Wo ($Wo_{2,4}$)	416	2,4	41	12
Testfall für sehr hohe Wo ($Wo_{14,5}$)	45	14,5	7×10^{-4}	500

2.2.3 Elastisches Verhalten der Lunge

Das elastische Verhalten der Lunge ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Aufgetragen sind sowohl die statische Abhängigkeit zwischen dem Druck und dem Volumen, als auch die dynamische Abhängigkeit bei spontaner Atmung. Im Falle der statischen Betrachtung startet die Kurve als Asymptote zum Ruhesvolumen (RV). Bis zum unteren Infektionspunkt steigt die Kurve stark an. Zwischen dem unteren und oberen Infektionspunkt zeigt die Kurve nahezu ein lineares Verhalten. Anschließend verringert sich die Steigung der Kurve wieder, so dass sie sich asymptotisch der totalen Lungen-

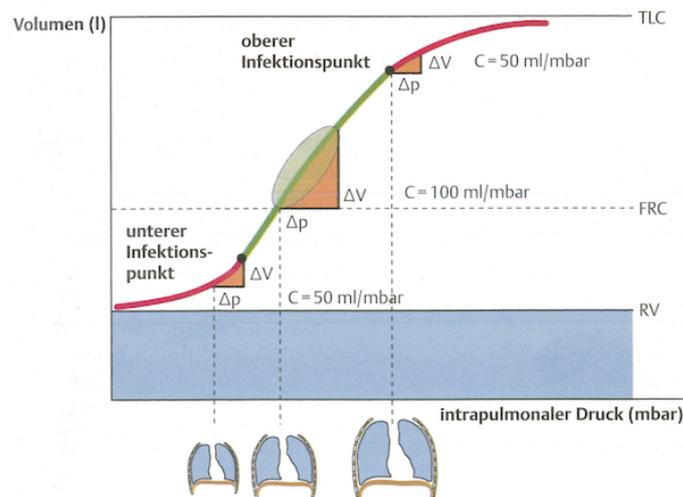


Abbildung 2.3: Druck-Volumen Kurve des elastischen Verhaltens der Lunge bei statischer Volumenerhöhung (rot/grün) und bei spontaner Atmung (blau). Abbildung entnommen aus Oczenski [30]

kapazität (TLC) nähert. Zu den Infektionspunkten und der funktionalen Residualkapazität (FRC) sind jeweils die Steigungen der Kurve eingetragen. Diese entsprechen der Compliance C , die das elastische Verhalten der Lunge charakterisiert.

Ausgehend von der FRC ist das dynamische Elastizitätsverhalten bei der spontanen Atmung abgebildet. Dieses beschreibt eine Ellipse um das statische Verhalten mit nahezu konstanter Steigung. In dieser Arbeit wird deswegen davon ausgegangen, dass das elastische Verhalten der gesunden Lunge mit einer linearen Abhängigkeit zwischen dem Druck und dem Volumen beschrieben werden kann. Als Proportionalitätskonstante wird hierfür die Compliance von $C = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{Pa}$ genutzt.

2.2.4 Parameterraum der Beatmungsfälle

Für die dreidimensionale Simulation muss keine besondere Annahme für die Einströmrandbedingung getroffen werden. Hierfür können die in Tabelle 2.1 aufgelisteten Fälle genutzt werden. Da jedoch das eindimensionale Modell auf eine voll ausgebildete, laminare Strömung ausgelegt ist, werden Einschränkungen nötig. Eine solche Strömung liegt vor, wenn $Re < 2300$ [38] gilt. Somit gibt es eine Einschränkung für die Einströmgeschwindigkeit. Diese nimmt über die Generationen ab, da der Volumenstrom sich immer weiter aufteilt und die insgesamt durchströmte Fläche zunimmt. Neben der durch die Reynoldszahl ausgedrückten Geschwindigkeit hat auch die Trägheit der oszillierenden Strömung einen Einfluss auf das Turbulenzverhalten. Anhand der Womersleyzahl kann der Einfluss der Trägheit abgeschätzt werden.

In Abbildung 2.4 sind die beiden Kennzahlen gegeneinander aufgetragen und die Punkte der verschiedenen Generationen für die Beatmungsfälle nach Hager *et al.* [20] eingetragen. Der äußerste rechte Punkt jedes Beatmungsfalles markiert die Kennzahlen in der nullten Generation, also in der Trachea. Die nach links folgenden Punkte repräsentieren die folgend aufsteigenden Generationen. Zusätzlich ist eine Grenze der linearen Stabilitätsanalyse für oszillierende Strömungen nach Trukenmüller [44] eingetragen. Um einschätzen zu können, welche Parameterkombinationen im Bereich der turbulenten Strömung liegen, ist eine Grenze aus den experimentellen Ergebnisse von Eckmann *et al.* [13] abgebildet. Diese markiert den Bereich, in dem von einer laminaren Strömung ausgegangen werden kann. Es ist zu erkennen, dass in der Trachea Reynoldszahlen im Bereich von $2000 < Re < 22000$ und Womersleyzahlen im Bereich von $2,5 < Wo < 20$ auftreten. Somit ist die Trachea nicht als Startgeneration für das Modell geeignet. In dem Bereich der laminaren Strömung liegen die Parameterkombinationen der siebten Generation aller aufgelisteten Fälle. Diese bewegen sich in den Bereichen der Kennzahlen von $130 < Re < 1400$ und $0,3 < Wo < 2,5$. Somit muss der Auslass der dreidimensionalen Simulation mindestens der siebten Generation entsprechen, um den Bedingungen des eindimensionalen Modells zu entsprechen. Dies passt gut mit der getroffenen Annahme überein, dass die ersten sieben bis neun Generationen in folgenden Arbeiten mittels einer dreidimensionalen numerischen Strömungssimulation (CFD) berechnet werden und das Modell erst in den folgenden Generationen ansetzt.

Anhand der Abbildung 2.4 lässt sich die Wahl der in Tabelle 2.1 genannten Parameterkombinationen gut erkennen. Mit $Wo_1,4$ wird eine Parameterkombination berechnet, die eine hohe Re besitzt. $Wo_2,4$ wird auf Grund der hohen Wo betrachtet. Als Vergleich zwischen der Beatmung und der spontanen Atmung wird $Wo_0,3$ ebenfalls in dieser Arbeit behandelt. Um auch eine Wo

2 Grundlagen

aus dem Bereich der Trachea zu Testzwecken berechnen zu können, wird zusätzlich $Wo_{14,5}$ untersucht. Die genannten Kombinationen sind zum Überblick in der Abbildung 2.4 eingetragen. Das in dieser Arbeit betrachtete Fluid ist die Luft bei einer Temperatur von $\theta = 30\text{ °C}$. Diese Temperatur wird angenommen, da die Luft von der Umgebungstemperatur in den oberen Atemwegen vorgewärmt wird. Mit den 30 °C wird somit ein mittlerer Wert zwischen der Körper- und Umgebungstemperatur verwendet. Bei dieser Temperatur hat die Luft eine Dichte von $\rho = 1.16\text{ kg/m}^3$ und eine kinematische Viskosität von $\nu = 1.63 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$.

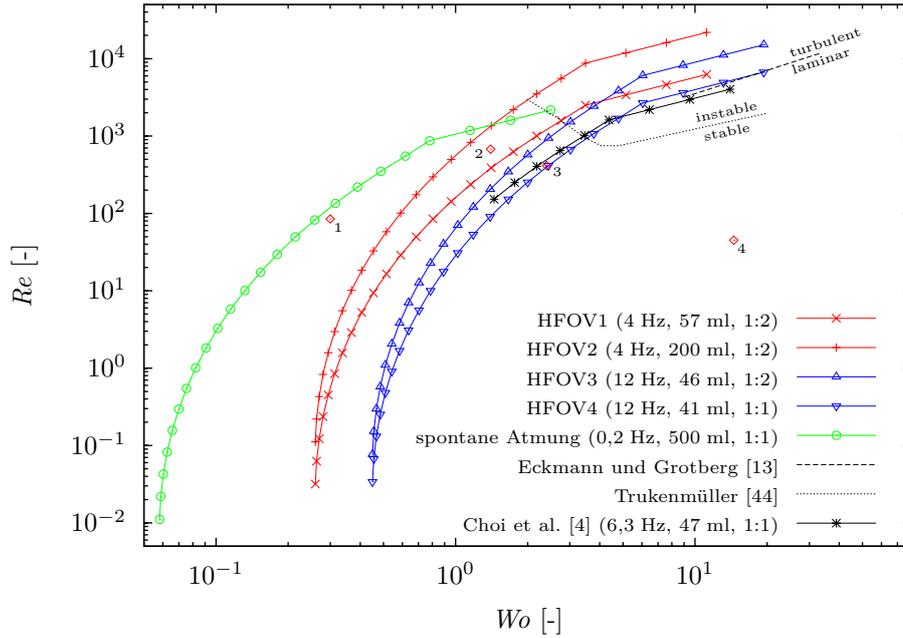


Abbildung 2.4: Übersicht über den Parameterraum der Beatmungsfälle. Eingetragen sind Beatmungsfälle mit den Parameterkombinationen pro Generation (Punkte). In der Legende sind die Frequenz, das Tidalvolumen und das Verhältnis (E:A) zwischen Einatmung (T_{in}) und Ausatmung (T_{ex}) der Beatmungsfälle angegeben. Der Punkt 1 entspricht $Wo_{0,3}$, Punkt 2 $Wo_{1,4}$, Punkt 3 $Wo_{2,4}$, Punkt 4 $Wo_{14,5}$. Abbildung angelehnt an [15]

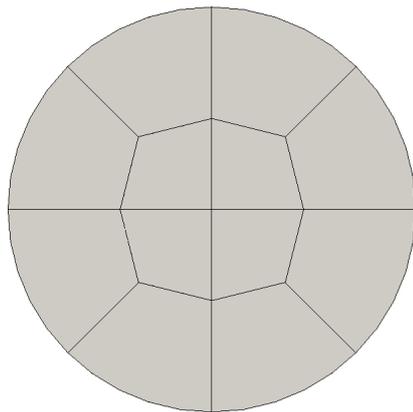
3 Methoden

3.1 Dreidimensionale Simulation

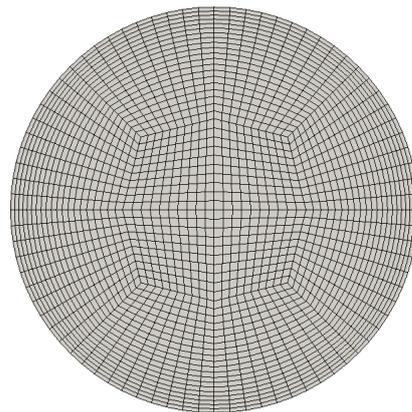
Im Folgenden wird sowohl auf die Gittergenerierung für die Rohrgeometrie der dreidimensionalen CFD, als auch auf die hierfür genutzte Lösungsmethode eingegangen.

3.1.1 Diskretisierung der Rohrgeometrie

Das Modell soll später als Randbedingung die nicht aufgelösten Bereiche ab etwa der siebten Bronchialbaumgeneration einer numerischen Simulation der oszillierenden Strömungen in einer Lungengeometrie ersetzen. Daher wird zum Testen der Modellimplementierung eine Rohrgeometrie verwendet, die den Eigenschaften der Weibelgeometrie in der siebten Generation entspricht. Somit hat das Rohr eine Länge von $l = 7,6$ mm und einen Durchmesser von $D = 2,09$ mm. Um ein Hexaedernetz zu erhalten, wurde die Querschnittsfläche des Rohres so aufgeteilt, dass der innere Teil der durchströmten Fläche in vier viereckigen Blöcke geteilt wurde, um die herum noch acht Blöcke mit radial ausgerichtetem Netz liegen. Diese Aufteilung ist in Abbildung 3.1(a) dargestellt. Um die hohen wandnahen Geschwindigkeitsgradienten der oszillierenden Strömung (s. Abb. 2.1) auflösen zu können, wird in Wandnähe ein feineres Netz verwendet. Die Verfeinerung wird auf den radial ausgerichteten Gitternetzlinien vorgenommen und so gewählt, dass das Verhältnis zwischen größter und kleinster Zelle $\frac{\delta_{gro\beta}}{\delta_{klein}} = 2$ beträgt. Es wird eine gleichförmige Wachstumsrate genutzt.



(a) Aufteilung des Rohrquerschnittes zur optimalen Vernetzung.



(b) Gitter für die dreidimensionalen Simulationen der Rohrströmungen.

Abbildung 3.1: Querschnitte der Rohrgeometrie mit (a) eingezeichneter Grundaufteilung zur Gittergenerierung und mit (b) verwendetem Gitter für die Strömungssimulation.

Die Gitterstudie (s. Abschnitt 4.2) hat ergeben, dass eine Auflösung von 30 Gitterpunkten in Strömungsrichtung und 30 Gitterpunkten im Radius ein guter Kompromiss zwischen Rechenzeit und Diskretisierungsfehler darstellt. Das Gitter mit diesen Spezifikationen ist in Abbildung 3.1(b) dargestellt und hat eine Gesamtzahl von 63271 Gitterpunkten. Alle Simulationen der dreidimensionalen Rohrströmungen in dieser Arbeit werden auf diesem Gitter durchgeführt.

3.1.2 Numerische Methoden

Zur Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (Gleichungen (2.3) und (2.4)) wird der Löser `icoFoam` von OpenFOAM genutzt. In diesem werden die Gleichungen (2.3) und (2.4) in diskretisierter Form mit einer Finite-Volumen Methode auf unstrukturierten Gittern gelöst. Für die Zeitintegration wird das implizite Eulerverfahren erster Ordnung genutzt. Die räumliche Diskretisierung wird mit einem unbeschränkten zentralen Differenzenschema zweiter Ordnung erreicht. Zur Lösung der Kopplung zwischen dem Druck und der Geschwindigkeit wird der PISO-Algorithmus verwendet. Dieser Algorithmus schätzt in jeder Zeitintegration das unbekannte Druckfeld. Auf Basis dessen wird das Geschwindigkeitsfeld berechnet. Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (2.3) werden anschließend innerhalb des Zeitschrittes Druck- und Geschwindigkeitskorrekturschritte vorgenommen, bis eine vorgegebene Genauigkeit erfüllt ist. Die resultierenden zwei linearen Gleichungssysteme werden mit einem vorkonditionierten bikonjugierten Gradientenverfahren (Preconditioned biconjugate gradient (PBiCG)), bzw. mit einem geometrisch-algebraischen multigrid Löser (geometric-algebraic multigrid (GAMG)) gelöst.

Für die Simulationen wird an der Wand des Rohres für den Druck eine von Neumann Randbedingung $\partial_r p|_W = 0$ angesetzt. Die Geschwindigkeit wird mit einer Dirichlet Randbedingung an der Wand $u|_W = 0$, der Haftbedingung entsprechend, auf Null gesetzt. Zur einfachen Orientierung wird dem Rand des Rechengebietes im Ursprung der Strömungsrichtungskordinate der Name Anfang (Index A) und dem Rand auf der anderen Seite des Rohres der Name Ende (Index E) gegeben. Am Anfang und Ende werden ebenfalls Randbedingungen für Geschwindigkeit und Druck benötigt. Für den Druck wird am Anfang und am Ende eine Dirichlet Randbedingung genutzt. Diese sind im Falle der konstanten Strömung $p|_A = C$ und $p|_E = 0$, bzw. bei der Kopplung mit dem eindimensionalen Modell $p|_E = p_{Modell}$. Bei den oszillierenden Strömungen wird für den Druck am Anfang eine zeitlich variierenden Dirichlet Randbedingung genutzt. Diese hat die Form $p|_A = C \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Für die Geschwindigkeit wird an beiden Rändern eine kombinierte Dirichlet - von Neumann Randbedingung genutzt. Diese kombinierte Randbedingung differenziert an jeder Zelle, ob eine Aus-, oder Einströmung vorliegt. Entsprechend sorgt sie dafür, dass im Falle des Ausströmens des Fluides die von Neumann Randbedingung zum freien Ausströmen, also $\partial_x u|_{A,E} = 0$, verwendet wird. Im Falle des Einströmens wird mit der Dirichlet Randbedingung eine Geschwindigkeit vorgegeben. Diese entspricht der Geschwindigkeit $u|_{A,E} = \vec{v} \cdot \vec{n}$, wobei \vec{v} der Geschwindigkeit in der ersten Volumenzelle am Rand des Rechengebietes entspricht.

Da an keiner Randbedingung eine Geschwindigkeit vorgegeben wird, ist nicht sichergestellt, dass mit den gewählten Geschwindigkeitsrandbedingungen die Kontinuitätsgleichung über das Rohr erfüllt ist. Dies liegt daran, dass beim Einströmen eine unbekannte Geschwindigkeit vorgegeben wird. Dass Simulationen von oszillierenden Strömungen in Rohren und Rohrverzweigungen mit

einer solchen Kombination von zeitlich variablen Druckrandbedingungen trotzdem gut und stabil möglich sind, haben Feldmann & Wagner [15] gezeigt.

Außerdem wird zum Testen der Randbedingung bei konstanter Einströmung auch eine Simulation mit einer Dirichlet Randbedingung für die Geschwindigkeit $u|_A = u(r)$ durchgeführt. Diese Randbedingung gibt für die Geschwindigkeit ein voll ausgebildetes Parabelprofil, dessen Berechnung in Abschnitt 2.1.3 dargelegt wurde, vor. Der Druck am Anfang erhält eine von Neumann Randbedingung $\partial_x p|_A = 0$.

Bei allen Rechnungen wird der Zeitschritt so gewählt, dass für die Courantzahl $Co = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x}$ während der gesamten Simulation $Co \leq 0.1$ gilt, wobei Δt ein Zeitschritt der Zeitlichen Diskretisierung ist und Δx die Länge der kleinsten Zelle in Strömungsrichtung ist. Die Courantzahl gibt an, um wie viele Zellen sich das Fluid pro Zeitschritt maximal fortbewegt. Die genannte Wahl wurde getroffen, um sicher zu stellen, dass das gewählte Verfahren stabil ist.

3.2 Eindimensionales Bernoulli-Modell

Im Folgenden wird das eindimensionale Modell vorgestellt, welches in dieser Arbeit verwendet wird, um die oszillierende Strömung in einem sich verzweigenden Rohrsystem zu beschreiben. Es handelt sich hierbei um eine erweiterte Version des Modells, welches Thomas Köthe im Rahmen seiner Masterarbeit [24] am DLR aufgebaut und in einem eigenständigen C++ Programm implementiert hat. Zuerst wird das Modell aus der Masterarbeit beschrieben und anschließend wird auf die Erweiterung eingegangen.

3.2.1 Ausgangsmodell

Das in der Masterarbeit von Köthe [24] vorgestellte eindimensionale Modell zur Beschreibung der Lungenströmung bedient sich der Geometrie basierend auf den von Weibel [45] ermittelten mittleren Abmaßen einer menschlichen Lunge, wie sie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben wurden. Das Modell basiert auf der Beschreibung einer stationären, voll ausgebildeten, laminaren und reibungsfreien Rohrströmung. Die so betrachteten Rohrteile werden zu Verzweigungen zusammengesetzt. Mehrere dieser Verzweigungen ergeben zusammengesetzt den generischen Bronchialbaum.

Mit den getroffenen Annahmen wird die Gleichung (2.4) durch Integration über die Koordinate in Strömungsrichtung zu der Bernoulligleichung

$$p + \frac{\rho}{2} u^2 = konst. \quad (3.1)$$

vereinfacht. Gleichung (3.1) beschreibt die Energieerhaltung stationärer, inkompressibler Strömungen entlang einer Stromlinie als Druckgleichung. So ergibt sich unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung $\dot{V} = A \cdot u = konst$

$$p_E - p_A = \Delta p = 0 \quad (3.2)$$

für die Energieerhaltungsgleichung eines Rohres, da die Querschnittfläche A des Rohres konstant ist. Hierbei entspricht p_E dem Druck am Ende des Rohres und p_A dem Druck am Anfang. Trotz der getroffenen Annahmen soll in dem generischen Bronchialbaum eine instationäre, reibungsbehaftete

3 Methoden

Verzweigungsströmung modelliert werden können, ohne die einfache Struktur der Gleichung (3.2) zu verlieren. Um dies zu erreichen, werden zu dieser Gleichung Druckverlustterme hinzugefügt, die das gewünschte Verhalten beschreiben. Da eine stationäre, laminare Rohrströmung vorausgesetzt wird, kann für die Reibung der Druckverlust durch Wandreibung der Hagen-Poiseuille Strömung angenommen werden. Dieser lautet nach Gleichung (2.5)

$$\Delta p_x = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{\pi \cdot R^4} \cdot \dot{V}. \quad (3.3)$$

Da die Rohre zu Verzweigungen zusammengesetzt werden, müssen auch Verzweigungsverluste beachtet werden. Der Druckverlust über eine solche Verzweigung kann ebenfalls durch einen Zusatzterm [16] erfasst werden. Dieser Druckverlust hat die Form

$$\Delta p_x = \frac{\zeta \cdot \rho \cdot \dot{V}^2}{2 \cdot A^2}, \quad (3.4)$$

wobei ζ den an die Geometrie der Verzweigung angepassten Verlustbeiwert darstellt. Dieser Verlustbeiwert wird nach den von Truckenbrodt [43] angegebenen Beiwerten für symmetrische Verzweigungs- und Vereinigungsströmungen verwendet. Hierfür wird ein Verzweigungswinkel von $\alpha = 70^\circ$ nach Horsfield [21] verwendet.

Somit ist es möglich eine reibungsbehaftete Verzweigungsströmung zu modellieren, ohne die einfache Struktur der Gleichung zu verlieren. Um auch oszillierende Strömungen berechnen zu können, muss die Instationarität ebenfalls in der Gleichung durch einen Druckverlustterm betrachtet werden. Dies geschieht durch den Druckverlust auf Grund der Trägheit des Fluides. Dieser Term [47] kann in der Form

$$\Delta p_x = I \frac{\partial \dot{V}}{\partial t} \quad (3.5)$$

angenommen werden. Die Trägheit, hier mit I bezeichnet, lässt sich leicht zu dem Term $I = \frac{\rho \cdot l}{A}$ herleiten. Diese Herleitung ist in der Arbeit von Köthe [24] nachzulesen. Kombiniert man die Gleichungen (3.2) bis (3.5) ergibt sich die Gleichung

$$p_E - p_A = \Delta p = \frac{\zeta \cdot \rho}{2 \cdot A} \cdot \dot{V}^2 + \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{\pi \cdot R^4} \cdot \dot{V} + \frac{\rho \cdot l}{A} \cdot \frac{\partial \dot{V}}{\partial t}, \quad (3.6)$$

die nun eine Modellierung der gewünschten instationären, reibungsbehafteten Verzweigungsströmung in einem Rohr der Verzweigung ist.

Dieses Modell einer Rohrdurchströmung wird zu einem Modell der Durchströmung eines generischen Bronchialbaumes zusammengesetzt. Dies geschieht, indem die Rohre als Rohrelemente mit Knotenelementen zusammengefügt werden. Das Ende eines Rohres wird mit den Anfängen von zwei weiteren Rohren an einem Knotenelement verbunden. Das Rohr, welches in dem Knotenelement endet, wird die Elterngeneration genannt. Die beiden von dem Knotenelement abgehenden Rohre werden Töchteräste, oder Tochtergeneration genannt. Die Volumenströme werden den Rohrelementen und die Drücke den Knotenelementen zugewiesen. Der Druckverlust über ein Rohrelement wird durch die Gleichung (3.6) beschrieben. Aus Gleichung (2.3) folgt durch Integration in Strömungsrichtung über eine Verzweigung

$$\dot{V}_E - \dot{V}_{T1} - \dot{V}_{T2} = 0 \quad (3.7)$$

3 Methoden

für die Massenerhaltung an den Knotenelementen. Der Index E steht für die Elterngeneration und die Indizes $T1$ und $T2$ für die Tochtergenerationen. Es ergibt sich ein Notationsschema, welches sich an den modellierten Generationen der Lunge orientiert. Wird von der Generation z startend eine einfache Verzweigung modelliert, ergibt sich am Anfang des Rohres der Generation z der Druck p_z . Am Ende des Rohres der Elterngeneration ist der Druck p_{z+1} , der gleichzeitig der Druck der Anfänge der Tochtergeneration ist. Am Ende des linken Tochterastes liegt der Druck $p_{z+2,1}$ vor. Dementsprechend ist $p_{z+2,2}$ der Druck am Ende des rechten Tochterastes. Ebenso verhält es sich mit den Volumenströmen. Der Volumenstrom der Generation z wird mit \dot{V}_z bezeichnet. Der Volumenstrom $\dot{V}_{z+1,1}$ ist im linken Tochterast und $\dot{V}_{z+1,2}$ im rechten Tochterast. Für größere Systeme setzt sich die Art der Bezeichnung nach diesem Schema fort. In Abbildung 3.2 ist beispielhaft eine zweifache Verzweigung von Generation null bis zwei mit den entsprechenden Drücken und Volumenströmen abgebildet.

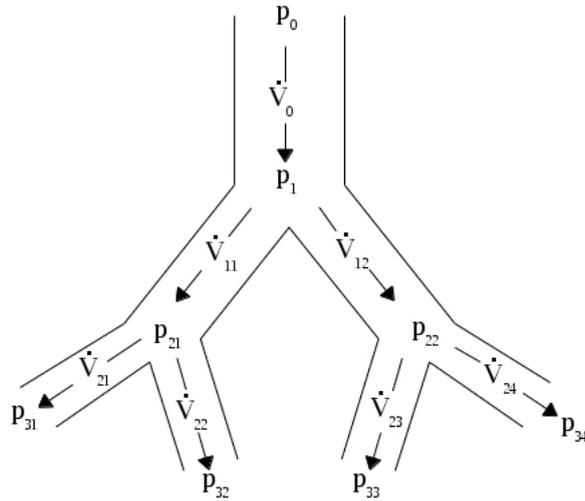


Abbildung 3.2: Eine zweifache Verzweigung ausgehend von Generation null bis Generation zwei mit den Volumenstrom- und Druckindizierungen.

3 Methoden

Diese Modellierung führt am Beispiel einer zweifachen Verzweigung zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
p_0 - p_1 &= \zeta_{Bif,0} \cdot \dot{V}_0^2 + \zeta_{Fric,0} \cdot \dot{V}_0 + \zeta_{Ine,0} \cdot \frac{\partial \dot{V}_0}{\partial t} \\
p_1 - p_{21} - \zeta_{Bif,1} \cdot \dot{V}_{11}^2 - \zeta_{Fric,1} \cdot \dot{V}_{11} - \zeta_{Ine,1} \cdot \frac{\partial \dot{V}_{11}}{\partial t} &= 0 \\
p_1 - p_{22} - \zeta_{Bif,1} \cdot \dot{V}_{12}^2 - \zeta_{Fric,1} \cdot \dot{V}_{12} - \zeta_{Ine,1} \cdot \frac{\partial \dot{V}_{12}}{\partial t} &= 0 \\
p_{21} - \zeta_{Fric,2} \cdot \dot{V}_{21} - \zeta_{Ine,2} \cdot \frac{\partial \dot{V}_{21}}{\partial t} &= p_{31} \\
p_{21} - \zeta_{Fric,2} \cdot \dot{V}_{22} - \zeta_{Ine,2} \cdot \frac{\partial \dot{V}_{22}}{\partial t} &= p_{32} \\
p_{22} - \zeta_{Fric,2} \cdot \dot{V}_{23} - \zeta_{Ine,2} \cdot \frac{\partial \dot{V}_{23}}{\partial t} &= p_{33} \\
p_{22} - \zeta_{Fric,2} \cdot \dot{V}_{24} - \zeta_{Ine,2} \cdot \frac{\partial \dot{V}_{24}}{\partial t} &= p_{34} \\
\dot{V}_0 - \dot{V}_{11} - \dot{V}_{12} &= 0 \\
\dot{V}_{11} - \dot{V}_{21} - \dot{V}_{22} &= 0 \\
\dot{V}_{12} - \dot{V}_{23} - \dot{V}_{24} &= 0.
\end{aligned}$$

Die Verlustterme für die Reibung $\zeta_{Fric,z} = \frac{8 \cdot \eta \cdot l_z}{\pi R_z^4}$, die Trägheit $\zeta_{Ine,z} = \frac{\rho \cdot l_z}{A_z}$ und die Verzweigung $\zeta_{Bif,z} = \frac{\zeta_z \cdot \rho}{2 \cdot A_z}$ sind innerhalb einer Generation gleich. Der Index $z \in \{0 \dots 23\}$ gibt die zugehörige Generation an. Der Volumenstrom der nullten Generation \dot{V}_0 wird als Randbedingung in Form einer Funktion vorgegeben. Im Fall der 1D-3D-Kopplung wird der Volumenstrom aus der Geschwindigkeit berechnet, die von der dreidimensionalen Strömungssimulation an der Randbedingung errechnet wird. Ist die Funktion der Volumenstromrandbedingung zeitabhängig, wird als Vorgabe eine zeitlich diskretisierte Form benötigt. Die Drücke am Auslass p_{31} bis p_{34} werden ebenfalls als Randbedingung vorgegeben. Für diese Drücke können konstante Werte gewählt werden. Alternativ besteht die Möglichkeit mit einer dynamischen Randbedingung eine Abhängigkeit zwischen dem eingeströmten Volumen und dem sich dadurch einstellenden Druckwert herzustellen. Dies wird genutzt, um mit diesem ballonartigen Verhalten das elastische Verhalten der gesamten Lunge zu modellieren. Aus dieser Modellierung lässt sich gut erkennen, dass der gesuchte Druck $p_0 = f(V, \dot{V}, \ddot{V})$ eine Funktion des Volumens, des Volumenstromes und der zeitlichen Ableitung des Volumenstromes ist.

3.2.2 Erweiterung des Modells

Das oben beschriebene Ausgangsmodell aus der Arbeit von Köthe [24] wurde in dieser Arbeit erweitert, so dass die Elastizität des Lungengewebes in jedem Bronchus als elastische Querschnittsveränderung der Röhren im Modell beachtet wird.

Elastische Querschnittsänderung

Das Ziel der Einführung der elastischen Querschnittsänderung ist es, den elastischen Einfluss des Gewebes in jedem Bronchus zu berücksichtigen. In dem Ausgangsmodell von Köthe [24] wurde

3 Methoden

das elastische Verhalten ausschließlich durch einen abschließenden Ballon modelliert. Ein solcher Ballon bleibt zur Modellierung der nicht simulierten Generationen weiterhin bestehen.

Der Einfluss der Elastizität an jedem Bronchus führt zu dessen Verformung. Beim Einatmen erweitert sich das Volumen des Bronchus und verringert sich wieder beim Ausatmen. Somit wird während des Einatmens ein Teil des einströmenden Volumens in die Vergrößerung aufgenommen. In der Modellierung wird vorgegeben, dass die Länge des Rohres unveränderlich ist. Daher führt die Elastizität zu einer Querschnittsveränderung. Hieraus resultiert eine vom elastischen Verhalten abhängige Geschwindigkeit.

Da die Querschnittsveränderung ein instationärer Vorgang ist, der sich in der Ebene normal zur Strömungsrichtung auswirkt, muss der Einfluss der Elastizität in dem Gleichungssystem modelliert werden. Schließlich basiert das bisherige Modell auf den Annahmen einer stationären, bzw. quasi-stationären und eindimensionalen Strömung. Die Ausdehnung der Rohre beeinflusst die aktuellen Modellierung auf zwei Weisen. Zum einem muss die Querschnittserweiterung in den Verlusten der Druckgleichungen betrachtet werden. Zum anderen ist es nötig, den Teil des einströmenden Volumenstroms in den Kontinuitätsgleichungen zu beachten, der zur Volumenveränderung des Rohres benötigt wird. Die Modellierung beider Effekte basiert auf der elastischen Abhängigkeit zwischen dem Druck p und dem Volumen V des Rohres, welche im allgemeinen Fall

$$p = f(V) \quad (3.8)$$

lautet. Aus den in Abschnitt 2.2.3 dargelegten Angaben wird geschlossen, dass für eine gesunde Lunge in erster Näherung ein lineares Elastizitätsmodell genutzt werden kann. Somit ergibt sich mit

$$p = E \cdot V = \frac{1}{C} \cdot V \quad (3.9)$$

eine Gleichung, in der die Elastizität E der Proportionalitätsfaktor ist. Die, im medizinischen Bereich öfter genannte, Compliance C ist der Kehrwert der Elastizität. Hieraus wird die Querschnittserweiterung

$$A = \frac{V}{l} = \frac{C \cdot p}{l} \quad (3.10)$$

abgeleitet. Die durch die Querschnittserweiterung veränderte Geschwindigkeit in dem Rohr tritt in den Strömungsverlusten der Druckgleichungen auf. Somit wird bei der Berechnung der Verlustbeiwerte $\zeta_{Fric,z}$, $\zeta_{Ine,z}$ und $\zeta_{Bif,z}$ der elastische Querschnitt herangezogen.

Um nun mit den vergrößerten Volumen nicht die Kontinuitätsgleichung zu verletzen, muss diese ebenfalls angepasst werden. Beispielsweise muss die Kontinuitätsgleichung des Knotenelementes der ersten Verzweigung

$$\dot{V}_0 - \dot{V}_{11} - \dot{V}_{12} - \frac{\partial V_1}{\partial t} = 0 \quad (3.11)$$

lauten. Das zeitlich veränderte Volumen lässt sich mit Gleichung (3.10) beschreiben. Damit ergibt sich

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = C \cdot \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (3.12)$$

3 Methoden

ebenfalls für die erste Verzweigung. Für diese Berechnung wird der Druck in der Verzweigung $p = p_1$ genutzt. Dies führt in der diskreten Form mit Rückwärtsdifferenzen zu dem diskreten Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 p_0^j - p_1^j &= \zeta_{Bif,0}^j \cdot \dot{V}_0^{2j} + \zeta_{Fric,0}^j \cdot \dot{V}_0^j + \zeta_{Ine,0}^j \cdot \frac{V_0^j - V_0^{j-1}}{\Delta t} \\
 p_1^j - \zeta_{Fric,1}^j \cdot \dot{V}_{11}^j - \zeta_{Ine,1}^j \cdot \frac{V_{11}^j - V_{11}^{j-1}}{\Delta t} &= p_{11}^j \\
 p_1^j - \zeta_{Fric,1}^j \cdot \dot{V}_{12}^j - \zeta_{Ine,1}^j \cdot \frac{V_{12}^j - V_{12}^{j-1}}{\Delta t} &= p_{12}^j \\
 \dot{V}_{11}^j + \dot{V}_{12}^j + \frac{C \cdot (p_1^j - p_1^{j-1})}{\Delta t} &= \dot{V}_0^j.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Die aufgeführten Verlustbeiwerte $\zeta_{Bif,z}$, $\zeta_{Fric,z}$ und $\zeta_{Ine,z}$ sind alle abhängig vom zeitlich veränderlichen Querschnitt des entsprechenden Rohres der Generation z und haben somit ebenfalls den Zeitindex j .

Die Gesamt-Compliance $C_{ges} = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{Pa}$ [30] des Bronchialbaumes wird für jedes Rohrelement volumenskaliert. Der Skalierung wird mit

$$C_{Rohr} = C_{ges} \cdot \frac{V_{Rohr}}{V_{ges}} \tag{3.14}$$

berechnet, wobei V_{ges} dem gesamt Volumen der Lunge entspricht, V_{Rohr} dem Volumen des Rohres und C_{Rohr} der Compliance des Rohres. Mit der gleichen Formel lässt sich auch die Compliance des abschließenden Ballons bestimmen. Bei dieser Berechnung wird anstelle des Rohrvolumens das Volumen der gesamten durch den Ballon dargestellten Generationen verwendet.

3.3 Lösung des Gleichungssystems

Das Gleichungssystem (3.13), welches die Form $f(\vec{x}) = \vec{b}$ hat, soll gelöst werden. Die Diskretisierung mit Rückwärtsdifferenzen wurde vorgenommen, um das System von Differentialgleichungen in ein System von diskreten quadratischen Gleichungen umzuschreiben. Diese Diskretisierung ist möglich, da der Volumenstrom, wie in Abschnitt 3.2.1 erwähnt wurde, zeitlich diskretisiert vorgegeben wird. Somit ist zu jedem Zeitpunkt der Volumenstrom des vorherigen Zeitpunktes bekannt. Dieses System wird mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens gelöst. Dieses Verfahren hat bei geeigneten Startwerten eine quadratische Konvergenzordnung [23]. Auf Grund dieser führt es in wenigen Iterationen zu der Lösung. Um gute Startwerte zu gewährleisten, wird zunächst für den ersten Zeitschritt die Lösung des nicht elastischen Modells vorgegeben, in der angenommen wird, dass die Strömung sich an jeder Verzweigung symmetrisch aufteilt. In den folgenden Zeitschritten ist der Startwert für das Newton-Raphson-Verfahren immer die Lösung des vorherigen Zeitschrittes. Mit den Startwerten wird das Gleichungssystem ausgewertet und aus den Ergebnissen ein Residuenvektor \vec{r} bestimmt. Im Anschluss wird der Vektor \vec{x} für den nächsten Iterationsschritt berechnet. Somit lautet das Verfahren

$$\vec{x}^{j+1} = \vec{x}^j - J(\vec{x})^{-1} \cdot \vec{r}(\vec{x}). \tag{3.15}$$

Hierbei ist J die Jacobi-Matrix, die durch

$$J(\vec{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

gebildet wird. Das Abbruchkriterium für die Rechnung ist, dass das maximale Residuum

$$\epsilon_{ist} = \max |r_i| < \epsilon_{soll} \quad (3.17)$$

geringer ist, als der gewählte Soll Wert von $\epsilon_{soll} = 1 \times 10^{-8}$.

3.4 Kopplung 3D-Simulation mit 1D-Modell-Randbedingung

In dieser Arbeit wurde das genannte eindimensionale Modell der Lungendurchströmung als Randbedingung passend für das OpenSource CFD-Tool OpenFOAM [33] implementiert. Zur Implementierung dieser Kopplung wurde die Programmiersprache C++ verwendet. Im Folgenden werden zuerst die benötigten Schnittstellen genannt und anschließend auf die Implementierung eingegangen.

3.4.1 Schnittstellen

Zuweisung der Randbedingung

Der Aufruf der Randbedingung erfolgt wie für OpenFOAM üblich durch das Zuweisen dieser an einen bestimmten Bereich der dreidimensionalen Geometrie. Die Zuweisung zu dem vorher definierten Bereich (Patch) `outlet` sieht beispielhaft folgendermaßen aus:

```

outlet
{
    type            lungBernoulli1D;
    startGen       7;
    endGen         23;
    rho            1.16;
    nu             1.63e-5;
    pStart         0.0;
    subType        elastic;
    resBalloon     1e6;
    compliance     1e-6;
    nL             0;
    output         1;
    value          uniform 0;
}

```

3 Methoden

Hier wird unter dem Stichwort **type** angegeben, um welche Art der Randbedingung es sich beim **outlet** handelt. Der Typ **lungBernoulli1D** ist das Stichwort für das eindimensionale Modell der Lungenströmung. Des Weiteren wird die Angabe der Start- und Endgeneration **startGen** und **endGen** für das Modell benötigt. Mit den Stichworten **rho** und **nu** werden die Dichte und kinematische Viskosität angegeben. Die Einstellung eines Anfangsdruckes in dem Modell ist mit **pStart** möglich. Der **subType** gibt an, welche Art des Modells genutzt werden soll. Neben dem Typ **elastic**, der in dieser Arbeit beschrieben und genutzt wird, existieren auch noch die ungetestete nicht elastische Versionen des Modells als Randbedingung. Der **subType elastic** erhält die Elastizitätseigenschaften durch die Angabe der Compliance der gesamten Lunge unter dem Stichwort **compliance**. Die Angabe **resBalloon** wird nur für einen anderen **subType** genutzt, der hier nicht zum Einsatz kommt. Für die weitere Entwicklung gibt es noch die Möglichkeit die Compliance auf ein nichtlineares Modell umzustellen, indem unter dem Stichwort **nL** eine 1 eingetragen wird. In dieser Arbeit wird jedoch ausschließlich die lineare Elastizitätsmodellierung verwendet. Anhand des Wertes von **output** kann angegeben werden, ob die Ausgabe der berechneten Druckwerte und Einströmgeschwindigkeiten jeden Zeitschritt in eine separate Datei stattfindet.

outletValues

Zusätzlich zu den genannten Parametern, die bei der Zuweisung der Randbedingung angegeben werden, wird noch die Datei **outletValues** benötigt. Diese befindet sich im **constant** Ordner des OpenFOAM Falles. In dieser Datei werden die elastischen Eigenschaften der abschließenden Ballons angegeben. Für jedes Rohrende, das nicht durch ein Knotenelement verbunden ist, wird ein Eintrag benötigt. So ist es möglich, verschieden steife Ballons für die Berechnung zu nutzen. Der angegebene Wert bleibt weiterhin die gesamte Elastizität, die im Programm, wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben, auf die vorgesehene Generationenzahl skaliert wird. Somit ist im Falle einer Gesamt-Compliance von $C = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{Pa}$ eine Elastizität von $E = 1 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{Pa}$ für jeden Ballon anzugeben. Die Datei sieht am Beispiel einer zweifachen Verzweigung, die vier freie Rohrenden besitzt, folgendermaßen aus.

```

/*-----*- C++ -*-----*/
| ===== |
| \\ / F i e l d | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| \\ / O p e r a t i o n | Version: 2.1.0 |
| \\ / A n d | Web: www.OpenFOAM.org |
| \\ / M a n i p u l a t i o n | |
/*-----*/

FoamFile
{
    version 2.0;
    format ascii;
    class dictionary;
    object outletValues;
}
// ***** //
    outlet
    {
        value
        (
            1e6
            1e6
            1e6
            1e6
        );
    }

```

Direkte Kommunikation 1D-3D

Die 1D-Randbedingung erhält aus der Rechnung in der dreidimensionalen Geometrie das Geschwindigkeitsvektorfeld des Patches. Dieses Feld wird zuerst mit Hilfe einer Flächenmittelung zu einem Vektor zusammengefasst, der anschließend mit der Flächennormalen skalar multipliziert wird, um die eindimensionale Einströmgeschwindigkeit für das Modell zu bestimmen.

Der im eindimensionalen Modell errechnete Druckwert wird an die dreidimensionale CFD zurückgegeben. Dieser Druckwert wird dann auf dem gesamten Patch vorgegeben. Zusätzlich werden in jedem Zeitschritt, in dem auch die Datensätze der dreidimensionalen Simulation ausgegeben werden, alle Variablen des Modells in eine Datei im OpenFOAM Zeitordner ausgegeben.

3.4.2 Implementierung der 1D-Randbedingung

Zur Anbindung des eindimensionalen Modells an OpenFOAM wurden die nötigen Funktionen einer Randbedingung implementiert. Diese beinhalten die verschiedenen Konstruktoren, Funktionen zum Mappen (`autoMap`, `rmap`), die Funktion, die von OpenFOAM aufgerufen wird zum aktualisieren der Randbedingungswerte in einem neuen Zeitschritt (`updateCoeffs`), welche die Funktion zur

Berechnung des Randwertes (`calculatePressure`) aufruft, und die Funktion zum Ausschreiben der Randbedingungswerte in die Zeitordner (`write`). Es wird nur auf den in dieser Arbeit betrachteten `subType elastic` eingegangen.

Ein schematischer Ablauf ist im Struktogramm in Abbildung 3.4.2 dargestellt. Es werden nur die Arbeitsschritte der 1D-Randbedingung aufgelistet. Die von OpenFOAM durchgeführten Schritte sind nicht detailliert aufgelistet, aber gekennzeichnet, damit die Interaktion ersichtlich ist. Die dargestellten Abläufe werden in den folgenden Abschnitten erläutert. Um die verwendeten Löser für Gleichungssysteme mit dünnbesetzten Matrizen nutzen zu können, müssen die Löserbibliothek UMFPACK [9] und das Paket AMD [10] installiert sein. Die Funktionsweise der Pakete ist in Amestoy *et al.* [2, 3] und Davis *et al.* [6, 7, 8, 11, 12] beschrieben.

Konstrukturen

Der während der Initialisierung von OpenFOAM standardmäßig aufgerufene Konstruktor der 1D-Randbedingung belegt die Variablen, deren Werte durch die Zuweisung der Randbedingung vorgegeben sind. Diese sind

- die Generationstiefe, durch Angabe der Start- und Endgeneration
- die Fluideigenschaften (Dichte ρ und kinematische Viskosität ν)
- die Elastizitätseigenschaften (Gesamt-Compliance C und Druck zu Beginn der Rechnung)
- die boolesche Variable zur Angabe, ob linear oder nichtlinear gerechnet wird
- die boolesche Variable zur Angabe, ob die Ausgabe der Drücke erfolgt oder nicht ,

die in Abschnitt 3.4.1 genannt wurden. Des Weiteren wird die Resistance der einzelnen abschließenden Ballons aus der Datei `outletValues` ausgelesen. Diese werden genau so wie die Compliance auf die entsprechenden Generationen skaliert, wie in Gleichung (3.14) diskutiert.

Neben diesen Parametern werden noch die variablen Größen der Berechnung initialisiert. Hierzu gehören der Lösungsvektor, der alle Drücke und Volumenströme des Modells beinhaltet, der Vektor der Ballonvolumina und der Vektor der Ballondrücke. Für den Fall, dass die Rechnung von einer vorher berechneten Lösung weitergeführt wird, werden diese Variablen mit den Werten des Startzeitschrittes belegt. Die Werte des Startzeitschrittes werden hierfür aus der `_Bernoulli` Datei jedes Auslasses ausgelesen. Ansonsten wird der Nutzer gewarnt, dass keine alten Werte gefunden werden konnten. Dies führt dazu, dass die Variablen mit Nullen initialisiert werden und so in den Zeitordner gespeichert werden.

Die Kopierkonstrukturen wurden so angepasst, dass alle benötigten Parameter und Variablen übergeben werden.

`write`

Die Funktion `write` wird von OpenFOAM genutzt um die zum Start der Berechnung angegebenen Werte wieder in die Zeitordner der Ausgabezeitpunkte zu schreiben. Somit wurde hier dafür gesorgt, dass die vorher eingelesenen Werte (genannt im Abschnitt 3.4.1) unter den gleichen Stichworten

3 Methoden

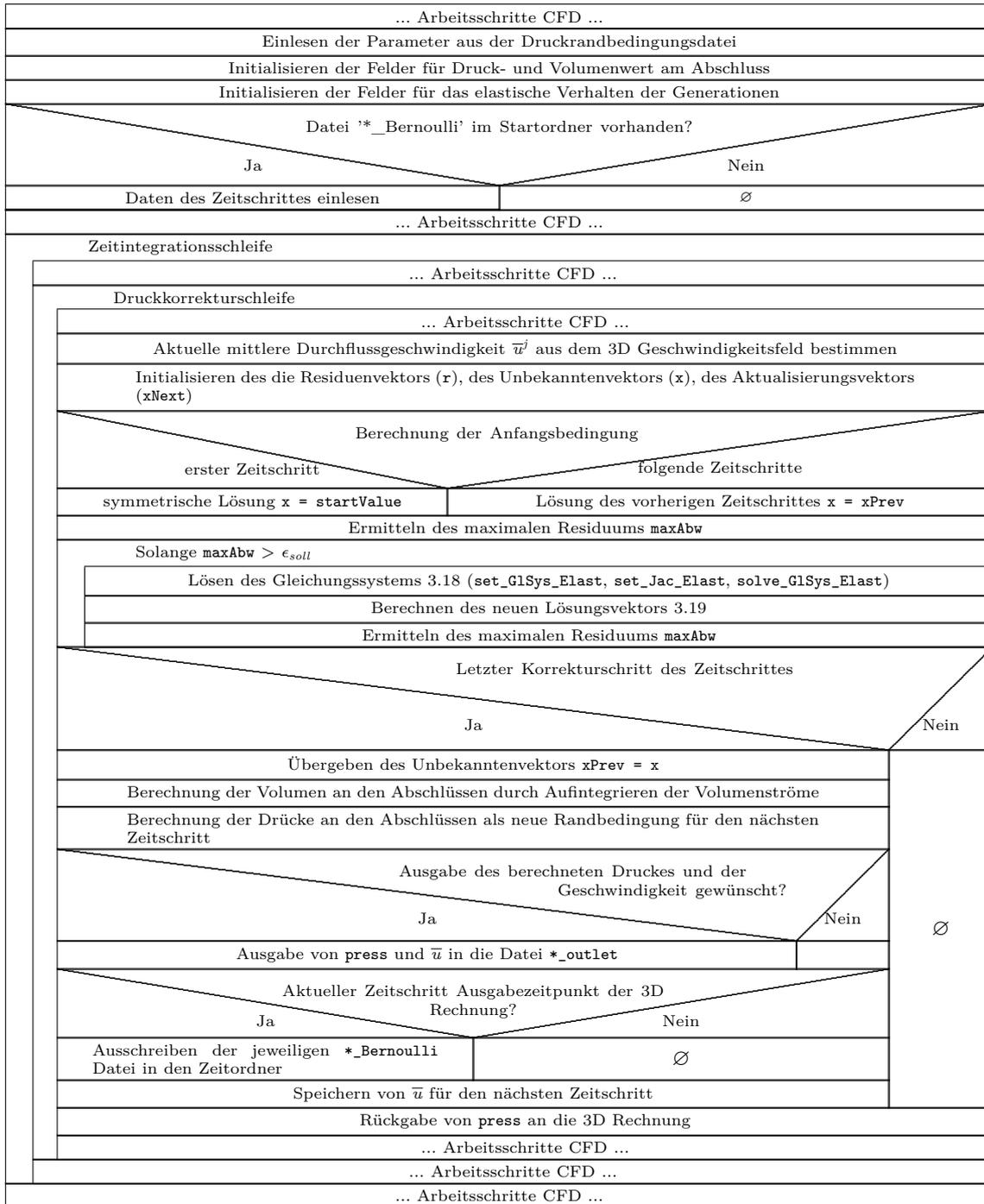


Abbildung 3.3: Struktogramm der Arbeitsschritte der Randbedingung in der gekoppelten Simulation zur Verdeutlichung der Einbindung.

wieder ausgeschrieben werden. Zusätzlich wird der aktuelle Druckwert der Randbedingung unter dem Stichwort `value` ausgeschrieben.

updateCoeffs / calculatePressure

Innerhalb der Zeitintegrationsschleife des finiten Volumen Verfahrens liegt die Druckkorrekturschleife des PISO-Algorithmus, die in jedem Korrekturschritt die 1D-Randbedingung auswertet. Dies geschieht durch den Aufruf der Funktion `updateCoeffs`. Diese Funktion ruft die Funktion `calculatePressure` auf, mit der die Druckantwort der 1D-Randbedingung berechnet wird.

Zur Berechnung der Druckantwort wird zunächst die Geschwindigkeitskomponente, die normal auf dem Patch steht, flächengemittelt. Somit wird aus dem dreidimensionalen Geschwindigkeitsfeld am Patch die für diesen Korrekturschritt aktuelle eindimensionale Geschwindigkeit \bar{u}^j ermittelt. Da die zeitlichen Ableitungen mit einer Rückwärtsdifferenz berechnet werden, wird zu der aktuellen Geschwindigkeit auch die des vorherigen Zeitschrittes benötigt. Falls diese nicht vorliegt, weil die Rechnung neu gestartet wurde, wird für die alte Geschwindigkeit auch die aktuelle angenommen. So wird umgangen, dass es zu Beginn sehr große Gradienten gibt.

Mit diesen Geschwindigkeiten und den im Konstruktor initialisierten Parametern und Variablen wird die Funktion `calcPress_elast` aufgerufen, in der die eigentliche Druckberechnung stattfindet. In dieser Funktion wird das in Abschnitt 3.3 genannte Iterative Verfahren angewandt. Da die Invertierung der Jacobi-Matrix numerisch nicht sinnvoll ist, wird das Newton-Raphson-Verfahrens in

$$J(\bar{x}^j) \cdot \vec{\Delta x} = -f(x) \quad (3.18)$$

$$\bar{x}^{j+1} = \bar{x}^j + \vec{\Delta x} \quad (3.19)$$

abgewandelt genutzt. Diese Abwandlung führt zu einem Vorgehen in zwei Schritten. Im ersten Schritt wird das Gleichungssystem (3.18) gelöst. Im folgenden Schritt (Gleichung (3.19)) wird der Lösungsvektor mit dem Aktualisierungsvektor $\vec{\Delta x}$ auf den neuen Iterationsschritt aktualisiert.

Um dieses Verfahren einsetzen zu können werden zunächst der Vektor für die Residuen ($\mathbf{r} \hat{=} f(x)$), der der rechten Seite des Gleichungssystems entspricht, angelegt. Des Weiteren werden der Aktualisierungsvektor ($\mathbf{xNext} \hat{=} \vec{\Delta x}$) und der Unbekanntenvektor des aktuellen Zeitschrittes ($\mathbf{x} \hat{=} \bar{x}^j$) angelegt. Der Unbekanntenvektor wird im ersten Zeitschritt mit der symmetrischen nicht elastischen Lösung des Modells als Anfangsbedingung belegt. In den folgenden Zeitschritten wird die Lösung des vorherigen Zeitschrittes `xPrev` als Anfangsbedingung genutzt. Mit `set_G1Sys_Elast` wird das Gleichungssystem aufgestellt und der Residuenvektor zu der Anfangsbedingung berechnet. Anschließend wird das maximale Residuum `maxAbw` bestimmt.

Die Iterationsschleife des Newton-Raphson-Verfahrens iteriert bis `maxAbw` $< \epsilon_{soll}$, wobei $\epsilon_{soll} = 1 \times 10^{-8}$ ist. In der Iterationsschleife werden drei Funktionen aufgerufen und erneut das maximale Residuum `maxAbw` bestimmt. Diese sind `set_G1Sys_Elast`, `set_Jac_Elast` und `solve_G1Sys_Elast` und werden in den folgenden Abschnitten noch genauer betrachtet. Anschließend wird der errechnete Druck `press` an `calculatePressure` zurückgegeben.

Wenn der aktuelle Korrekturschritt der letzte des Zeitschrittes ist, wird der errechnete Unbekanntenvektor `xPrev = x` auf den Unbekanntenvektor des alten Zeitschrittes übertragen. Unter der gleichen Bedingung wird auch der in diesem Zeitschritt in die abschließenden Ballons geströmte

3 Methoden

Volumenstrom aufintegriert, um das neue, in diesen vorhandene, Volumen zu bestimmen. Aus dem neuen Volumen werden die Druckrandbedingungen für den nächsten Zeitschritt für das eindimensionale Modell berechnet. Ist die Ausgabe der Einströmgeschwindigkeit und des dazu errechneten Druckes für jeden Zeitpunkt gewünscht, werden diese in eine Ausgabedatei geschrieben. Die Datei trägt als Namen den Namen der Randbedingung mit dem Anhang `_outlet.txt`. Wenn von OpenFOAM in diesem Zeitschritt ein Zeitordner erstellt wird, um die berechneten Felder des Zeitschrittes zu speichern, wird auch der komplette Lösungsvektor inklusive der Ballondrücke und -volumina in eine Datei in den Zeitordner geschrieben. Diese Datei erhält ebenfalls den Namen der Randbedingung, jedoch mit dem Anhang `_Bernoulli`.

In jedem Korrekturschritt wird die errechnete Druckantwort `press` an den dreidimensionalen Löser weitergegeben, damit die Druckkorrektur durchgeführt werden kann.

set_GISys_Elast

In dieser Funktion wird das Residuum des Gleichungssystems, welches in Abschnitt 3.2.2 gezeigt wurde, mit dem aktuellen Lösungsvektor berechnet. Der Lösungsvektor am Beispiel eines Bronchiaalbaumes mit 3 Generationen hat die Form

$$\vec{x}^T = [p_0, p_1, p_{21}, \dot{V}_{11}, p_{22}, \dot{V}_{12}, \dot{V}_{21}, \dot{V}_{22}, \dot{V}_{23}, \dot{V}_{24}] .$$

Somit wird in der Implementierung für p_0 der Ausdruck $x[0]$, bzw. x_0 genutzt usw. Dies führt mit den genannten Gleichungen zu dem Gleichungssystem des Residuenvektors

$$\begin{aligned} r_0^j &= x_0^j - x_1^j - \zeta_{Bif,0}^j \cdot \dot{V}_0^{2j} - \zeta_{Fric,0}^j \cdot \dot{V}_0^j - \zeta_{Ine,0}^j \cdot \frac{\dot{V}_0^j - \dot{V}_0^{j-1}}{\Delta t} \\ r_1^j &= x_1^j - x_2^j - \zeta_{Bif,1}^j \cdot x_3^{2j} - \zeta_{Fric,1}^j \cdot x_3^j - \zeta_{Ine,1}^j \cdot \frac{x_3^j - x_3^{j-1}}{\Delta t} \\ r_2^j &= x_1^j - x_4^j - \zeta_{Bif,1}^j \cdot x_5^{2j} - \zeta_{Fric,1}^j \cdot x_5^j - \zeta_{Ine,1}^j \cdot \frac{x_5^j - x_5^{j-1}}{\Delta t} \\ r_3^j &= x_2^j - p_{31}^j - \zeta_{Fric,2}^j \cdot x_6^j - \zeta_{Ine,2}^j \cdot \frac{x_6^j - x_6^{j-1}}{\Delta t} \\ r_4^j &= x_2^j - p_{32}^j - \zeta_{Fric,2}^j \cdot x_7^j - \zeta_{Ine,2}^j \cdot \frac{x_7^j - x_7^{j-1}}{\Delta t} \\ r_5^j &= x_4^j - p_{33}^j - \zeta_{Fric,2}^j \cdot x_8^j - \zeta_{Ine,2}^j \cdot \frac{x_8^j - x_8^{j-1}}{\Delta t} \\ r_6^j &= x_4^j - p_{34}^j - \zeta_{Fric,2}^j \cdot x_9^j - \zeta_{Ine,2}^j \cdot \frac{x_9^j - x_9^{j-1}}{\Delta t} \\ r_7^j &= \dot{V}_0^j - x_3^j - x_5^j - \frac{C \cdot (x_1^j - x_1^{j-1})}{\Delta t} \\ r_8^j &= x_3^j - x_6^j - x_7^j - \frac{C \cdot (x_2^j - x_2^{j-1})}{\Delta t} \\ r_9^j &= x_5^j - x_8^j - x_9^j - \frac{C \cdot (x_4^j - x_4^{j-1})}{\Delta t} . \end{aligned}$$

Hierbei sind r_0 bis r_6 die Residuen der Impulserhaltung und r_7 bis r_9 die Residuen der Kontinuitätsgleichung. \dot{V}_0 ist das durch die Kopplung vorgegebene Einströmvolume und p_{31} bis p_{34} sind die vom eingeströmten Volumen abhängigen Druckrandbedingungen.

set_Jac_Elast

In dieser Funktion wird die Jacobi-Matrix des Gleichungssystemes aufgestellt. Diese Matrix der Form Gleichung (3.16) soll möglichst effizient gespeichert werden. Da es sich um eine dünnbesetzte Matrix handelt, bietet es sich an, Compressed Coloumn Storage Verfahren (CCS) anzuwenden. Dieses benötigt zum speichern drei Listen. In der ersten Liste sind die nicht Null Einträge der Matrix spaltenweise gespeichert. Die zweite Liste enthält den Zeilenindex des jeweilig in der ersten Liste gespeicherten Eintrages. In der dritten Liste wird festgehalten, wie viele nicht Null Einträge pro Spalte hinzugekommen sind. Ausgegangen wird vom ersten Element in der Liste mit dem Wert Null. Anschließend wird nach jeder Spalte die Anzahl der nicht Null Elemente dieser Spalte zu dem vorherigen Wert in der Liste hinzuaddiert und in der Liste gespeichert.

Dieses Format hat den Vorteil, dass es sehr platzsparend und für die gewählte Löserbibliothek passend vorsortiert ist. Der effiziente Löser für dünnbesetzte Matrizen aus dem Paket UMFPACK benötigt genau diese drei spaltenweise sortierten Listen.

solve_GISys_Elast

Das durch die zwei vorher genannten Funktionen vorgearbeitete Gleichungssystem (3.18) kann nun in dieser Funktion mit Hilfe der numerischen Bibliothek UMFPACK gelöst werden. Anschließend wird der errechnete Aktualisierungsvektor $\vec{\Delta x}$ genutzt, um den Lösungsvektor auf den nächsten Iterationsschritt zu aktualisieren (Gleichung (3.19)).

4 Auswertung der numerischen Ergebnisse

4.1 Eindimensionales Modell

In den folgenden Abschnitten wird anhand der Ergebnisse von Testfällen mit oszillierenden Strömungen herausgearbeitet, welchen Einfluss die Elastizität, die Womersleyzahl und die Reynoldszahl auf das Verhalten des eindimensionalen Modells haben. Des Weiteren wird anhand der Ergebnisse von Simulationen konstanter Volumenströme diskutiert, welchen Einfluss die Einströmgeschwindigkeit, die zeitliche Diskretisierung und die Anzahl der simulierten Generationen auf die Druckantwort des Modells besitzen.

4.1.1 Auswirkung des Elastizität

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Simulationen mit dem um die elastischen Querschnitte erweiterten eindimensionalen Modell (elastisches Modell) diskutiert. Es wurden oszillierende Strömungen in den Generationen sieben bis zehn mit den Einströmparameterkombinationen aus Tabelle 2.1 simuliert. Für die Compliance der gesamten Lunge wurde ein Wert von $C = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{Pa}$ [30] angenommen, der, wie in Abschnitt 3.2.2 angemerkt wurde, passend zu dem Teilstück der Lunge skaliert wurde. Mit den genutzten Parameterkombinationen wurden auch Simulationen mit dem Modell ohne die elastischen Querschnitte (starres Modell) durchgeführt. Im Folgenden wird von den Parameterkombinationen insbesondere der $Wo_{2,4}$ Fall mit $Re = 416$ und $Wo = 2,4$ betrachtet. Die Simulationsergebnisse der anderen Kombinationen werden nur erwähnt, falls sie abweichende Ergebnisse liefern.

In Abbildung 4.1 ist die Druckdifferenz zwischen Generation neun und sieben $\Delta p_{9-7} = p_9 - p_7$ gegen die dimensionslose Zeit $\tau = t/T$ aufgetragen. Es lässt sich die Auswirkung der elastischen Modellierung daran erkennen, dass ein zeitlicher Versatz der Amplituden auftritt. In den Einströmphasen, gekennzeichnet durch positive Strömungsgeschwindigkeiten, liegt die Druckamplitude des elastischen Modells vor, und in den Ausströmphasen, gekennzeichnet durch negative Strömungsgeschwindigkeiten, hinter der Amplitude des starren Modells. Der gleiche Unterschied zeigt sich in Abbildung 4.2 für die Simulation $Wo_{2,4}$. Dieser ist auf Grund des deutlich geringeren Tidalvolumens jedoch in der Abbildung nicht so gut zu erkennen.

In allen Fällen liefert das elastischen Modell geringere Amplituden, wie in Abbildung 4.1 und 4.2 zu erkennen ist. Die maximalen Abweichungen zwischen den Amplituden des elastischen und starren Modells liegen zwischen 7,8% bei $Wo_{2,4}$ und 30,6% bei $Wo_{0,3}$. Sowohl die Reduzierung der Amplitude, als auch deren zeitlicher Versatz lassen sich durch die Querschnittsvergrößerung erklären, die zu einer geringeren Geschwindigkeit in den Röhren führt. Durch die geringeren Geschwindigkeiten sinken auch die Strömungsverluste, welche die geringere Druckdifferenz Δp_{9-7} des

4 Auswertung der numerischen Ergebnisse

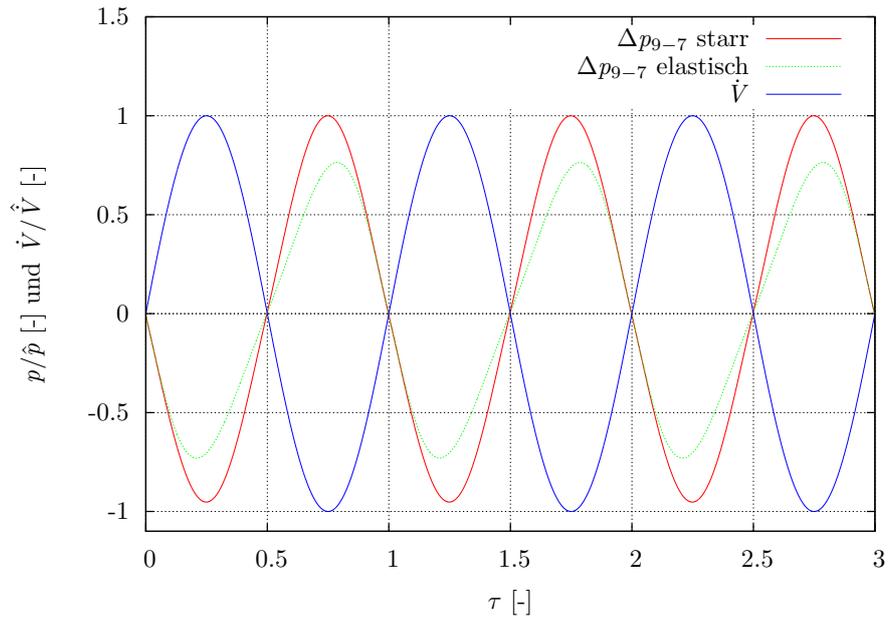


Abbildung 4.1: Zeitlicher Verlauf der Druckdifferenz Δp_{9-7} zwischen Generation 7 und 9 des starren Modells (rot) und des elastischen (grün) Modells für $Re = 85$, $Wo = 0,3$ und $C = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{Pa}$.

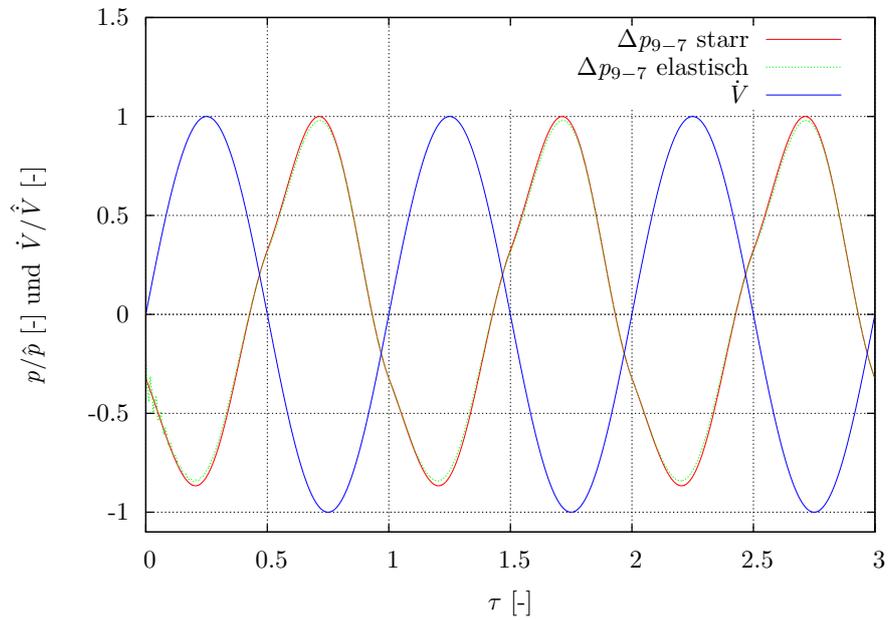


Abbildung 4.2: Zeitlicher Verlauf der Druckdifferenz Δp_{9-7} zwischen Generation 7 und 9 des starren Modells (rot) und des elastischen (grün) Modells für $Re = 416$, $Wo = 2,4$ und $C = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{Pa}$.

elastischen Modells erklären. Auf Grund des in allen Röhren des Systems durchgängig positiven Druckes, beispielhaft für $Wo_{2,4}$ in Abbildung 4.4 gezeigt, ergibt sich nur eine Querschnittsvergrößerung der Röhren. Da der Querschnitt über den gesamten Atemvorgang im Vergleich zum Querschnitt der Weibelgeometrie vergrößert ist, ist auch der Druckdifferenz $\Delta p_{9-7} = p_9 - p_7$ des elastischen Modells absolut gesehen immer kleiner, als die des starren Modells.

Der betragsmäßige Größenunterschied in Abbildung 4.1 und 4.2 zwischen der positiven und der negativen Amplitude entsteht durch die unterschiedlichen Verlustbeiwerte ζ für die Verzweigungsströmung beim Ein- und Ausströmen. Der zeitliche Versatz des Minimums ergibt sich aus der kontinuierlichen Erweiterung des Querschnittes auf Grund des einströmenden Volumens für $0 \leq \tau \leq 0,5$. Deswegen steigt der Unterschied der Druckdifferenzen zwischen den Modellen über den gesamten dimensionslosen Zeitraum $0 \leq \tau \leq 0,5$ an.

Ähnlich verhält es sich mit dem Maximum. Hier handelt es sich um eine kontinuierliche Verringerung des Unterschiedes der Druckdifferenzen auf Grund des im dimensionslosen Zeitintervall $0,5 \leq \tau \leq 1$ ausströmenden Volumens. Aus den genannten Gründen unterscheiden sich auch die auf- und absteigenden Flanken des Δp -Verlaufs. In den aufsteigenden Flanken liegt eine größere Differenz im Querschnitt vor, als in den Absteigenden und somit auch ein größerer Unterschied in den Druckverlusten.

Des Weiteren fällt auf, dass für $Wo_{2,4}$ zu Beginn $\tau \leq 0,25$ der ersten Einströmung ein oszillierendes Verhalten auftritt, wie in Abbildung 4.2 zu erkennen ist. Diese Oszillation ist in den Anfangswerten für den Druck und die Geschwindigkeit begründet, die mit dem starren Modell berechnet werden. Bei oszillierenden Strömungen entsteht durch die Trägheit des Fluides ein Phasenversatz zwischen der Geschwindigkeit und der treibenden Druckkraft (Abb. 2.1). Dieser Phasenversatz ist an den zeitlich versetzten Nulldurchgängen der Einströmgeschwindigkeit und der Druckdifferenzen zu erkennen. Somit liegt zu Beginn ein Anfangsdruck ungleich des Referenzdruckes $p_{ref} = 0$ vor. Da bei der Berechnung der Anfangswerte, mit dem starren Modell keine Querschnittsveränderung berücksichtigt wird, entsteht eine Unstimmigkeit in der Kopplung zwischen Druck und Querschnittsveränderung, welche sich über $\tau = 0,3$ charakteristische Zeiteinheiten ausgleicht.

Die Abhängigkeit dieses Effektes von der elastischen Modellierung ist in Abbildung 4.3 zu erkennen. Hier sind die Druckdifferenzen Δp_{9-7} der Simulationen des starren und des elastischen Modells gegen die Zeit aufgetragen, wobei beim elastischen Modell eine Elastizität von $E = 1 \times 10^{10} \text{ Pa/m}^3$ genutzt wurde. Bei diesem steifen Verhalten zeigt sich keine Oszillation in der Druckdifferenz zu Beginn der Simulation. In diesem Fall ist der Einfluss der elastischen Querschnitte klein. Der maximale Unterschied zwischen den Druckverlusten dieser beiden Rechnungen beträgt nur 0,12 Pa. Das entspricht 1,2% der maximalen Druckantwort aus der Simulation mit dem starren Modell.

In Abbildung 4.4 sind die Druckverläufe an den Knotenelementen des für die Simulation genutzten Bronchialbaumteiles dargestellt. Zusätzlich sind die Volumenströme jeder Generation eingetragen. An den Druckverläufen ist zu erkennen, dass ein, mit zunehmender Generation sinkender, Phasenversatz zu dem Volumenstrom besteht. Dieser Phasenversatz ist abhängig von der über die Generationen sinkenden Womersleyzahl. Im folgenden Abschnitt 4.1.2 wird dies ausführlich diskutiert.

4 Auswertung der numerischen Ergebnisse

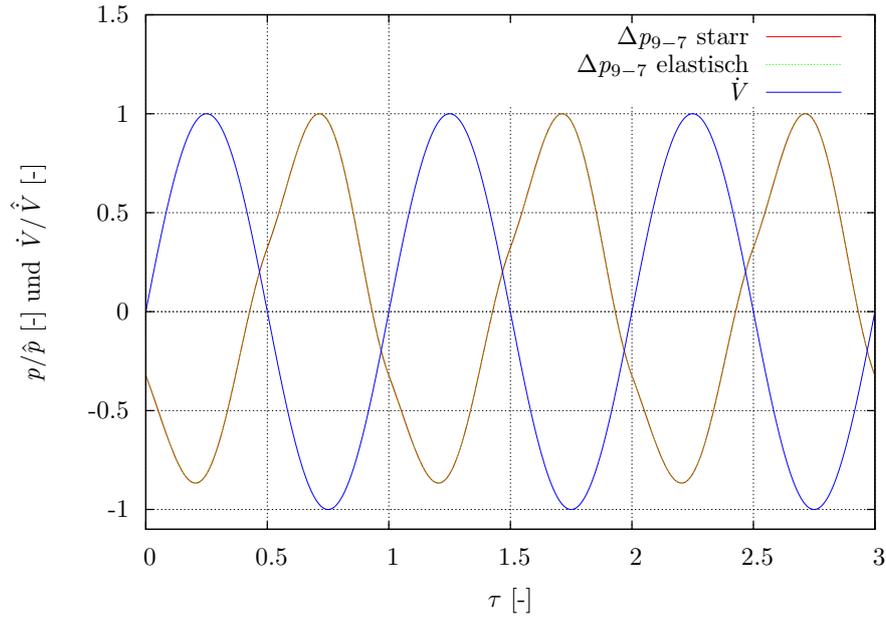


Abbildung 4.3: Zeitlicher Verlauf der Druckdifferenz Δp_{9-7} zwischen Generation 7 und 9 des starren Modells (rot) und des elastischen (grün) Modells für $Re = 416$, $Wo = 2,4$ und $C = 1 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{Pa}$.

Zwischen den Volumenströmen der verschiedenen Generationen gibt es keinen Phasenversatz. Im Punkt der maximalen Einströmung werden 0,5% des Volumenstromes zur Erweiterung des Querschnittes verwendet.

Wird der Verlauf der Drücke in Abbildung 4.4 betrachtet, ist zu erkennen, dass diese, abgesehen von dem Phasenversatz durch die Trägheit, einen weiteren Phasenversatz von $\Delta\phi_{Elast} = \pi/2$ zu den Volumenströmen besitzen. Dies lässt sich gut beim Vergleich zwischen den maximalen Amplituden der Volumenströme und den maximalen Amplituden des Druckes p_{111} erkennen, der nur einen sehr geringen Phasenversatz auf Grund der Trägheit aufweist. Dieser Phasenversatz $\Delta\phi_{Elast}$ basiert auf der Abhängigkeit des Druckes vom Volumen auf Grund des elastischen Verhaltens. Da das Volumen dem integrierten Volumenstrom entspricht, existiert zwischen diesen ein Phasenversatz von $\pi/2$. Da die Druckantwort durch das elastische Verhalten und nicht die Reibungs- und Strömungsverluste bestimmt wird, ist dieser Versatz auch zwischen Druckverlauf und Volumenstrom vorhanden.

Beim Vergleich der Druckverläufe des elastischen Modells in Abbildung 4.4 und der Druckverläufe des starren Modells in Abbildung 4.5 ist zu erkennen, dass der Einfluss der elastischen Querschnitte auf den qualitativen Druck- und Volumenverlauf sehr klein ist. Dies ist jedoch nicht verwunderlich, da sich die Druckkurven aus den Strömungsverlusten und dem Druck durch die abschließenden Elastizitäten zusammensetzen. Da der Unterschied zwischen den beiden Modellen die Elastizität der einzelnen Röhren ist, können auch nur Unterschiede durch die verringerten Druckverluste und den geringeren Volumenstrom in den tieferen Generationen auftreten. Der größte Teil des Druckes basiert jedoch auf den abschließenden Elastizitäten. Das Druckniveau beider Modelle ist nahezu gleich, da nur ein sehr geringer Anteil des Tidalvolumens in den erweiterten Volumen der

4 Auswertung der numerischen Ergebnisse

elastischen Röhren aufgenommen wird. Der Unterschied der Druckverluste ist im Vergleich zum gesamten Druck ebenfalls sehr gering. Der Unterschied ist nur quantitativ zu finden. Die Drücke des elastischen Modells sind ca. 3% größer, als die des starren Modells. Die zuvor diskutierten Druckschwingungen auf Grund der Anfangsbedingung sind ebenfalls in den zeitlichen Verläufen des Druckes wieder zu finden.

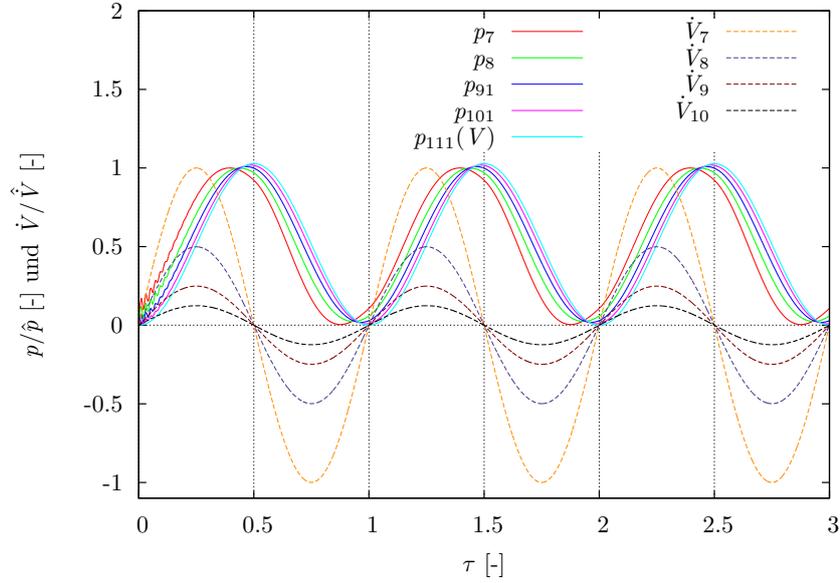


Abbildung 4.4: Zeitlicher Verlauf der Drücke und Volumina des elastischen Modells in Generation 7 bis 10 für $Re = 416$ und $Wo = 2,4$ normiert auf die Maxima in Generation sieben.

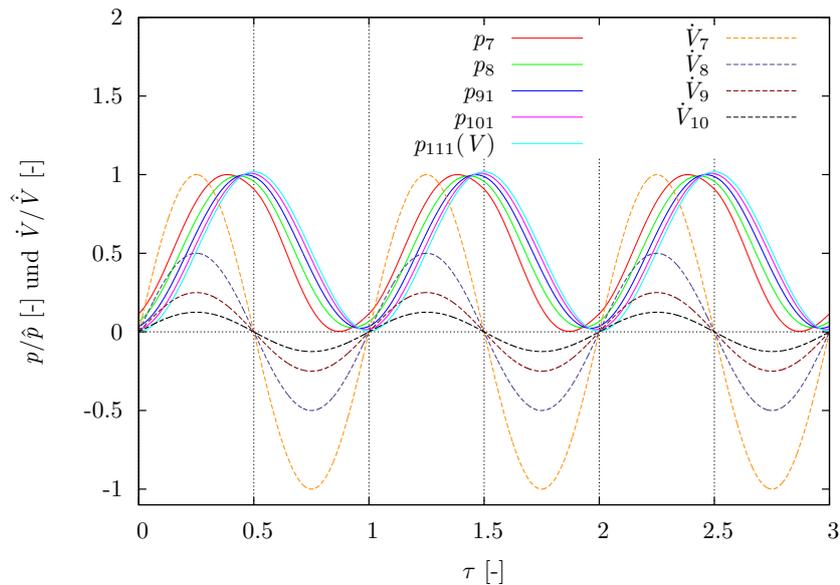


Abbildung 4.5: Zeitlicher Verlauf der Drücke und Volumina des starren Modells in Generation 7 bis 10 für $Re = 416$ und $Wo = 2,4$ normiert auf die Maxima in Generation sieben.

4.1.2 Einfluss der Womersleyzahl

Um den Einfluss der Oszillationsfrequenz auf das idealelastische Verhalten des Rohrsystems zu untersuchen, werden im Folgenden Simulationsergebnisse für fünf verschiedene Wo von 0,31 bis 10 bei einem Tidalvolumen von $V_T = 41$ ml verglichen. Alle sonstigen Vorgaben für die Simulation entsprechen denen aus Abschnitt 4.1.1.

In Abbildung 4.6 ist sehr gut zu erkennen, dass eine steigende Womersleyzahl zu einem stärkeren Phasenversatz zwischen den Druck- und Volumenstromverläufen führt. Dieser Phasenversatz begründet sich in der Trägheit des Fluides. Dies wurde in Abschnitt 2.1.3 genauer erläutert. Bei den $Wo \geq 3,44$ tritt zusätzlich zu dem Phasenversatz ein Einschwingverhalten auf. Der Grund für das Einschwingverhalten ist, wie in Abschnitt 4.1.1 diskutiert wurde, die Wahl der Anfangsbedingung. Mit steigender Wo steigen auch die Amplituden der Druckverläufe an. Bei $Wo = 5,45$ ist die Druckamplitude mit $p = 185,958$ Pa etwa 4,5 mal so groß, wie die Amplitude bei $Wo = 0,31$ von $p = 42,5303$ Pa. Diese höheren Drücke werden erreicht, da der Druck die treibende Kraft für die Fluidbewegung ist und bei steigender Womersleyzahl eine größere Beschleunigung benötigt wird, um die gleiche Fluidmenge in kürzerer Zeit ein-, bzw. ausströmen zu lassen. Genau aus diesem Grund fallen auch die Druckkurven der oberen Generationen ab einer gewissen Womersleyzahl unter den Referenzdruck $p_{ref} = 0$. Hier wird zum Abbremsen und Rückströmen des Fluides in den simulierten Generationen eine größere Druckdifferenz benötigt, als die, welche zwischen dem Druck der abschließenden Elastizität und dem Referenzdruck existiert.

Die Simulation mit der $Wo = 10$ bricht noch während des ersten Einströmvorganges ab, weil der unphysikalische Fall eines negativen Querschnittes auftritt. Dieser basiert auf der Modellierung der

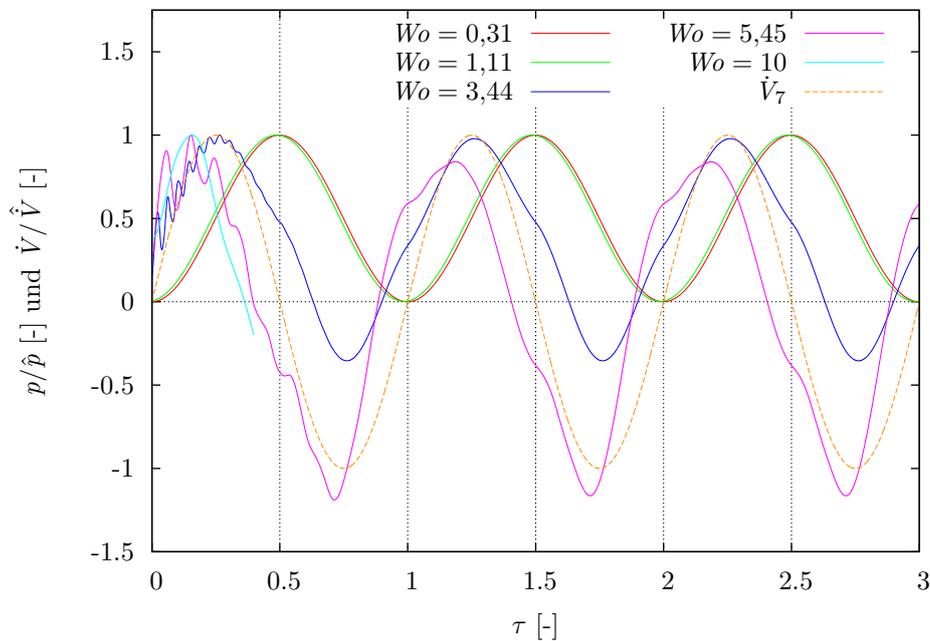


Abbildung 4.6: Zeitlicher Verlauf des Druckes in Generation sieben p_7 für $V_T = 41$ ml und $Wo = \{0,31; 1,11; 3,44; 5,45; 10\}$ normiert auf die jeweiligen Maxima

4 Auswertung der numerischen Ergebnisse

elastischen Querschnitte mit einer linearen Elastizität. Der Druck für die Querschnittsberechnung wird aus den oben genannten Gründen so stark negativ, dass auch der Querschnitt negativ wird. Dies tritt für das gewählte Tidalvolumen bei Womersleyzahlen ab $Wo = 5,45$ auf.

In Abbildung 4.7 ist zu erkennen, dass der Phasenversatz zwischen den Druck- und Volumenverläufen über die Generationen abnimmt. Der abnehmende Versatz begründet sich im sinkenden Wo , auf Grund der Abhängig vom Rohrdurchmesser.

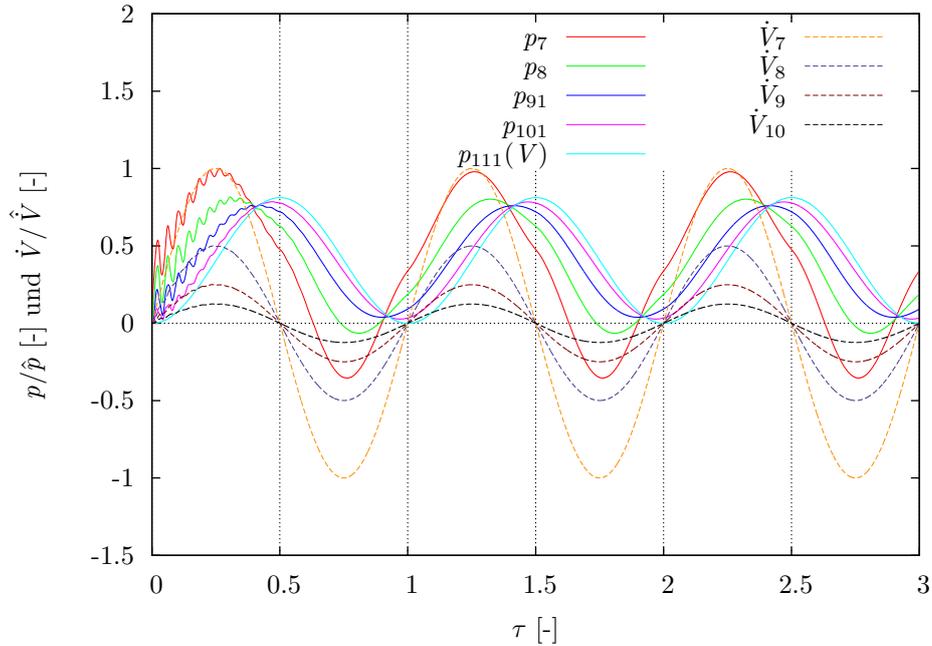


Abbildung 4.7: Zeitlicher Verlauf der Drücke und Volumina in Generation 7 bis 10 bei $V_T = 41$ ml und $Wo = 3,44$ normiert auf die Maxima der Generation sieben.

4.1.3 Einfluss der Reynoldszahl

Neben dem Einfluss der Womersleyzahl wurde auch der Einfluss der Reynoldszahl auf das Strömungsverhalten untersucht. Hierfür wurde bei der festen Womersleyzahl von $Wo = 0,3$ eine Variation der Reynoldszahl durch Veränderung der Tidalvolumina durchgeführt. Auch für diese Simulationen bleiben die sonstigen Einstellungen bei denen aus Abschnitt 4.1.1.

In Abbildung 4.8 sind die Druckdifferenzen zwischen Generation neun und sieben Δp_{9-7} der verschiedenen Rechnungen gegen die Zeit aufgetragen. Es ist sehr gut zu erkennen, dass eine steigende Reynoldszahl zu steigenden Druckdifferenzen führt. Die unterschiedlichen Steigungen der Kurven bei den Nulldurchgängen basieren auf der Querschnittserweiterung. Diese ist bei höheren Reynoldszahlen deutlich größer, da in den gleich großen generischen Bronchialbaum bei gleichem elastischen Verhalten ein deutlich größeres Volumen eingebracht wird. Die Änderungen der Druckdifferenzen sind in den absoluten Druckverläufen jedoch nicht zu erkennen, da die gesamte Druckamplitude vom Druck durch das elastische Verhalten dominiert wird.

4 Auswertung der numerischen Ergebnisse

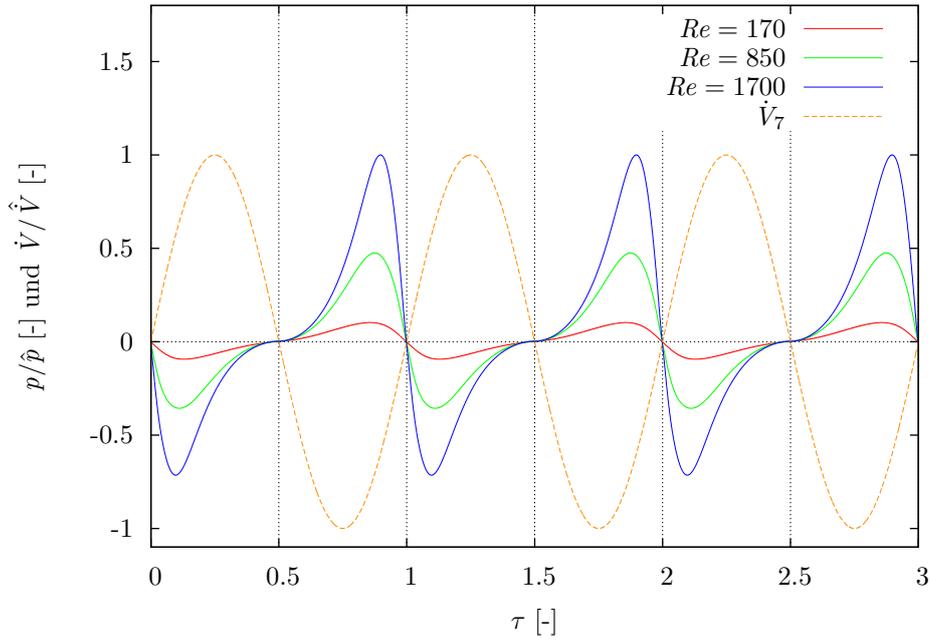


Abbildung 4.8: Zeitlicher Verlauf der Druckdifferenz Δp_{9-7} zwischen Generation 7 und 9 für $Wo = 0,3$ und $Re = \{170, 850, 1700\}$.

Die gleichen Effekte sind auch in Abbildung 4.9 zu erkennen, in welcher die entsprechende Untersuchung bei einer Womersleyzahl von $Wo = 2,44$ durchgeführt wurde. Zusätzlich ist zu erkennen, dass bei dieser höheren Wo ein Phasenversatz stattfindet. Der Phasenversatz führt auch hier zu dem gut sichtbaren Einschwingverhalten der Druckkurven auf Grund der Wahl der Anfangsbedingungen, welches in Abschnitt 4.1.1 diskutiert wurde. Außerdem steigen die Druckdifferenzen deutlich an. Die maximale Druckdifferenz bei $Wo = 0,3$ beträgt in Generation sieben $\Delta p_7 = 10,68745$ Pa. Bei $Wo = 2,44$ beträgt die maximale Differenz $\Delta p_7 = 92,0845256$ Pa. Der Anstieg findet vor allem statt, da die Trägheitsverluste auf Grund der höheren Frequenz stark ansteigen.

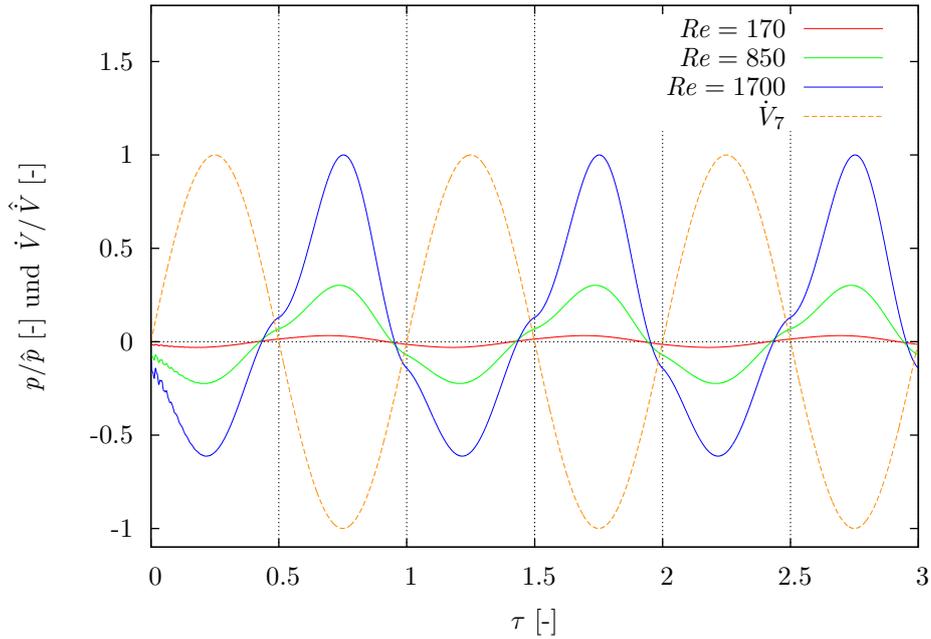


Abbildung 4.9: Zeitlicher Verlauf der Druckdifferenz Δp_{9-7} zwischen Generation 7 und 9 für $Wo = 2,4$ und $Re = \{170, 850, 1700\}$.

4.1.4 konstanter Volumenstrom

Einfluss der Einströmgeschwindigkeit

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der Einströmgeschwindigkeit auf die Druckantwort diskutiert. Hierfür wurden drei verschiedene Rechnungen durchgeführt. Auf Grund der verwendeten Rückwärtsdifferenzen wurde für die Anfangsbedingung sowohl die aktuelle Geschwindigkeit w^j , als auch die Geschwindigkeit aus dem alten Zeitschritt w^{j-1} benötigt. In der ersten Rechnung (Geschwindigkeitssprung) wurde von einem instantanen Geschwindigkeitssprung von $w^{j-1} = 0$ m/s auf $w^j = 3,9$ m/s ausgegangen, was einer Reynoldszahl von $Re = 500$ entspricht. In der zweiten Rechnung (konstante Geschwindigkeit) wurde bei der Anfangsbedingung davon ausgegangen, dass auch zum alten Zeitschritt schon die aktuelle Geschwindigkeit von $w^{j-1} = w^j = 3,9$ m/s vorhanden war, damit der Geschwindigkeitsgradient des ersten Zeitschrittes begrenzt ist. Bei der dritten Rechnung (halbe Geschwindigkeit) wurde ebenfalls die alte Geschwindigkeit der neuen gleichgesetzt, jedoch wurde der Wert der Geschwindigkeit halbiert $w^{j-1} = w^j = 1,95$ m/s. Dies entspricht folglich einer Reynoldszahl von $Re = 250$. Das Modell wurde in allen Rechnungen über zwölf Generationen mit einer Gesamt-Compliance von $C = 1 \times 10^{-6}$ m³/Pa genutzt. In allen Rechnungen wurde ein Zeitschritt von $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ s verwendet.

In Abbildung 4.10 sind die Verläufe der Druckantwort dieser Rechnungen über die Zeit aufgetragen. Die rote, dem Geschwindigkeitssprung zugehörige, Kurve zeigt in der ersten Iteration einen sprunghaften Anstieg der Druckantwort auf $p = 1250$ Pa. Im folgenden Zeitschritt fällt der Druck wieder auf $p = 37,85$ Pa. Im Anschluss gibt es ein abklingendes oszillierendes Verhalten, welches sich einer konstant steigenden Geraden annähert. Die Schwankungen des oszillierenden Verhal-

4 Auswertung der numerischen Ergebnisse

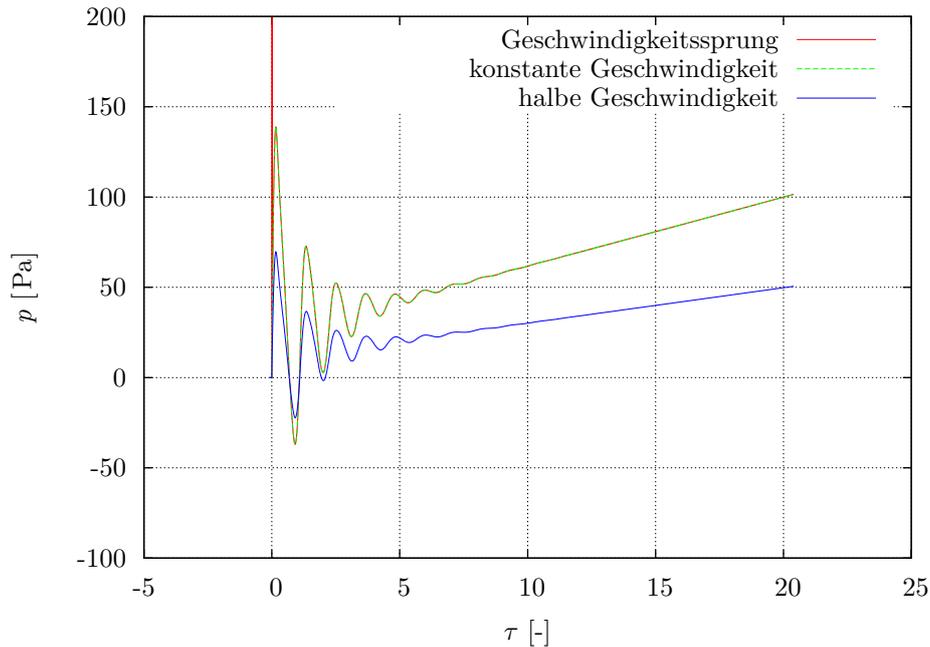


Abbildung 4.10: Zeitlicher Druckverlauf bei einem Geschwindigkeitssprung von null (rot) auf $Re = 500$, bei konstanter Geschwindigkeit für $Re = 500$ und bei konstanter Geschwindigkeit für $Re = 250$. Die Druckspitze der roten Kurve liegt bei $p = 1250$ Pa.

tens fallen in etwa $\tau = 10$ charakteristischen Zeiteinheiten auf eine Größenordnung von $\Delta p = 1 \times 10^{-4}$ Pa. Die charakteristische Zeiteinheit $\tau = l/u$ entspricht der Rohrlänge dividiert durch die Einströmgeschwindigkeit. Auf Grund dieses Verhaltens kann von einem Einschwingvorgang gesprochen werden. Die konstant steigende Gerade spiegelt das linear elastische Verhalten wieder. Die Druckantwort folgt dem eingeströmten Volumen linear.

Die grüne, zur konstanten Geschwindigkeit zugehörige, Kurve beschreibt exakt das gleiche Einschwing- und Langzeitverhalten. Der Unterschied zu der vorherigen Rechnung liegt in dem nicht vorhandenen Drucksprung im ersten Zeitschritt. Da dieser hier nicht auftaucht, wird davon ausgegangen, dass dieser Sprung in dem starken Geschwindigkeitsgradienten des ersten Zeitschrittes begründet ist. Es wird vermutet, dass das schnell abklingende Einschwingverhalten darin begründet ist, dass die Rechnung mit einem Geschwindigkeitsstartwert ungleich Null beginnt.

Aus diesem Grund wurde die oben erwähnte Rechnung mit halber Geschwindigkeit durchgeführt. In dem zugehörigen blauen Graphen ist zu erkennen, dass sich das Einschwingverhalten von der Amplitude her ziemlich genau halbiert. Die erste Amplitude verringert sich von $p = 138.96$ Pa auf $p = 69.71$ Pa. Jedoch bleiben sowohl die Phase, als auch die Dauer des Einschwingvorganges gleich. Dies lässt darauf schließen, dass die Amplitude des Einschwingverhaltens minimiert werden kann, indem Einströmgeschwindigkeiten nahe Null als Startbedingung vorgegeben werden. Somit muss bei der Nutzung der Randbedingung für die oszillierenden Strömungen der Startzeitpunkt der Kopplung entsprechend gewählt werden.

Einfluss des Zeitschrittes und der Anzahl der simulierten Generationen

In Abbildung 4.11 ist die Rechnung mit der konstanten Geschwindigkeit des vorherigen Abschnittes in Rot eingetragen. Zusätzlich wurde in einer weiteren Rechnung (Zeitschritt) der Zeitschritt von $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ s auf $\Delta t = 4 \times 10^{-6}$ s verringert. Der Druckverlauf dieser Rechnung ist in Grün abgebildet. Es ist zu erkennen, dass durch die Verkleinerung des Zeitschrittes die Amplitude des Einschwingverhaltens ansteigt. Auch die Dauer des Einschwingvorganges verlängert sich hierdurch. Die Phase hingegen bleibt gleich. Dies zeigt, dass der Zeitschritt einen Einfluss auf das Verhalten des Modells hat. Durch die höhere Auflösung des Schwingungsverhaltens wird dieses weniger geglättet. Nach dem Einschwingprozess hat die unterschiedliche zeitliche Diskretisierung keinen Einfluss. Beide eingetragenen Kurven zeigen das gleiche lineare Verhalten. Bei einer geeigneten Wahl des Startzeitpunktes bezüglich der Geschwindigkeit, ist der Einfluss des Zeitschrittes gering.

Anhand des blauen Graphen ist zu erkennen, dass die Frequenz des Einschwingverhaltens von der berechneten Generationstiefe abhängig ist. Die zugehörige Rechnung (Generationstiefe) von Generation sieben bis zehn weist eine deutlich höhere Frequenz auf, als die Rechnung mit der konstanten Geschwindigkeit, die von Generation sieben bis 18 gerechnet wurde. Die erste Amplitude des Einschwingverhaltens ist in beiden Rechnungen gleich groß. Die Schwingung ist jedoch schwächer gedämpft, wodurch das Einschwingen länger dauert. Es ist auch zu erkennen, dass beide Rechnungen sich der gleichen Steigung annähern. Diese entspricht der in beiden Fällen gleich gewählten Gesamt-Compliance. Der Druckunterschied zwischen den beiden Geraden ist in den

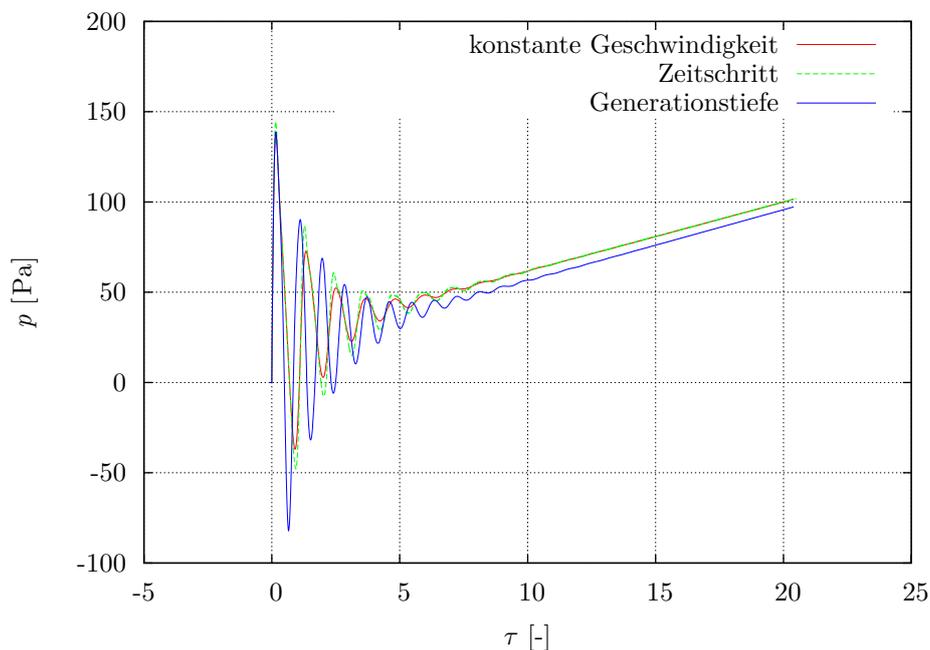


Abbildung 4.11: Zeitlicher Druckverlauf für $Re = 500$ bei zwölf Generationen mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ s (konstante Geschwindigkeit), zwölf Generationen mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 4 \times 10^{-6}$ s (Zeitschritt) und vier Generationen mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 2 \times 10^{-5}$ s (Generationstiefe).

Strömungsverlusten zwischen Generation zehn und 18 begründet. Diese werden im Gegensatz zu dem Druck, der durch das elastische Verhalten entsteht, bei der kleineren Geometrie nicht mit berechnet. Aus diesen Erkenntnissen lässt sich schließen, dass die Zahl der simulierten Generationen die Eigenfrequenz des elastischen Modells bestimmt. Um einen auftretenden Einschwingvorgang so gering wie möglich zu halten, ist es von Vorteil eine größere Anzahl an Generationen auf Grund des dämpfenden Verhaltens zu simulieren.

4.2 Gitterstudie

Für die dreidimensionale Rohrströmung wird eine vernetzte Rohrgeometrie benötigt. Die Geometrie wurde in Abschnitt 3.1.1 beschrieben. Um sicher zu stellen, dass das gewählte Gitter eine ausreichend genaue Auflösung besitzt, werden verschiedene Simulationen mit sukzessive verfeinerten Gittern durchgeführt und die Abweichung der Ergebnisse zu der analytischen Lösung bewertet. Die Eigenschaften der vier getesteten Gitter sind in Tabelle 4.1 aufgelistet. Alle Gitter sind in Strömungsrichtung mit 30 Gitterpunkten gleich aufgelöst. Das größte Gitter besitzt 22 Gitterpunkten in radialer Richtung. Die drei anderen Gitter haben in radialer Richtung eine feinere Auflösung mit 26; 30; 40 Gitterpunkten.

Für den Test wurde eine Hagen-Posseuille-Strömung simuliert. Hierfür wurde am Einlass ein Druck von 0.035 Pa vorgegeben und am Auslass ein Druck von 0 Pa. Durch diese Druckvorgaben ist der Druckabfall über die gesamte Rohrlänge bekannt und die analytische Lösung für das Strömungsprofil lässt sich errechnen (s. Abschnitt 2.1.3). Aus der analytischen Lösung des Geschwindigkeitsprofils und dem durch die Simulation errechneten Geschwindigkeitsprofil lässt sich der Fehler

$$\epsilon_{H.-P.} = \max_{0 \leq r \leq R} \left| \frac{u^*(r) - u(r)}{u_{max}^*} \right| \quad (4.1)$$

bestimmen. Es wird also die maximale Abweichung zwischen der analytischen $u^*(r)$ und der simulierten $u(r)$ Geschwindigkeit normiert mit der maximalen analytischen Geschwindigkeit u_{max}^* berechnet.

Tabelle 4.1: Eigenschaften der verschiedenen getesteten Gitter der Rohrströmung.

	Gitter 1	Gitter 2	Gitter 3	Gitter 4
Gitterpunkte gesamt	27559	44671	63271	122791
Gitterpunkte Radius	22	26	30	40
Gitterpunkte Strömungsrichtung	30	30	30	30
Zeitschritt	5×10^{-5}	5×10^{-5}	5×10^{-5}	5×10^{-5}
Rechendauer pro Zeitschritt [s]	0,066	0,122	0,176	0,319
max. Abweichung des Profils [%]	1,087	0,735	0,594	0,445

In Abbildung 4.12 sind die verschiedenen Gitterauflösungen gegen die Rechenzeit und den Fehler aufgetragen. Hier ist zu erkennen, dass das Gitter 3 eine gute Wahl für die weiteren Berechnungen darstellt, da sich für dieses ein vernünftiger Kompromiss zwischen auftretendem Fehler und der Rechendauer ergibt. Die benötigte CPU Zeit für einen Zeitschritt steigt von diesem Gitter zum

4 Auswertung der numerischen Ergebnisse

feinsten zu stark an für die geringe Verbesserung des Fehlers. Somit wird im Folgenden nur noch dieses Gitter genutzt.

Zusätzlich wurde auch ein Vergleich zwischen der analytischen Sexl-Womersley-Lösung und der durch OpenFOAM berechneten Lösung für ein Geschwindigkeitsprofil in diesem Rohr mit einer oszillierenden Druckrandbedingung gemacht. Zum Vergleich werden vier Rechnungen mit verschiedenen Wo und Re Kombinationen herangezogen. Diese entsprechen den in Tabelle 2.1 angegebenen Fällen. Zur Fehlerberechnung wird der Term

$$\epsilon_{s.-w.} = \max_{0 < t \leq T} \left(\max_{0 \leq r \leq R} \left| \frac{u^*(r) - u(r)}{\hat{u}} \right| \right) \quad (4.2)$$

genutzt. Die Spitzengeschwindigkeit \hat{u} ist hier definiert als $\hat{u} = \max \bar{u}(t)$ im Zeitraum einer Periode $0 < t \leq T$, wobei \bar{u} die instantane mittlere Durchflussgeschwindigkeit der Strömung ist. Die größte Abweichung des berechneten Geschwindigkeitsprofils von der analytischen Lösung beträgt im Fall $Wo_{0,3}$ 1,035%. Bei $Wo_{1,4}$ sind es 0,819% und bei $Wo_{2,4}$ 0.663%. Der Fall $Wo_{14,5}$ führt zu einem Fehler von 2,618%.

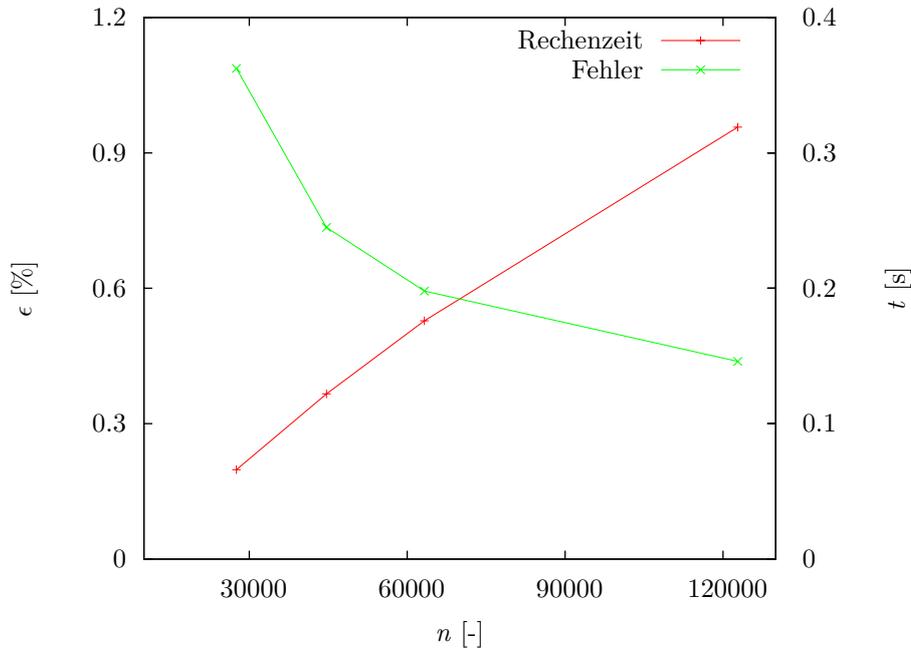


Abbildung 4.12: CPU Zeit t für einen Zeitschritt (rot) und Fehler ϵ zwischen der Simulation und der analytischen Lösung (grün) einer Hagen-Poiseuille Strömung für $Re = 500$ aufgetragen gegen die Gitterpunktzahl n der untersuchten Gitter. Die markierten Punkte entsprechen den untersuchten Gittern.

4.3 Gekoppelte Simulationen im Rohr

4.3.1 Konstante Strömung

Um das gekoppelte Modell zu testen, werden zunächst zwei einfache Fälle simuliert. Im ersten Fall mit einer Dirichlet Geschwindigkeitsrandbedingung am Einlass kann das Ergebnis mit dem Ergebnis aus Abschnitt 4.1.4 verglichen werden. Für den Fall der Dirichlet Druckrandbedingung am Einlass wird ein Druckausgleich über das Rohr erwartet. So lässt sich die Korrektheit der Implementierung überprüfen.

Dirichlet Geschwindigkeitsrandbedingung am Einlass

Der erste betrachtete Fall ist eine Hagen-Poiseuille Strömung. Als Randbedingung wurde am Anfang eine Dirichlet Geschwindigkeitsrandbedingung vorgegeben. Diese gab ein Hagen-Poiseuille Profil mit einer Reynoldszahl von $Re = 500$ vor. Um eine Anfangsbedingung für die Kopplung zu erhalten, wurde die Rohrströmung zunächst mit einer Dirichlet Druckrandbedingung von 0 Pa am Ende berechnet. Die auskonvergierte Lösung dieser Konfiguration wurde als Startwert für die gekoppelte Simulation genutzt. Hier wurde nun für die Dirichlet Randbedingung am Ende das eindimensionale Modell angesetzt. Dieses wurde für elf Generationen mit einer Gesamt-Compliance von $C = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{Pa}$ genutzt.

In Abbildung 4.13 ist die Druckantwort des gekoppelten Modells in Rot abgebildet. Zum Vergleich wird das Modell alleine mit den gleichen Einstellungen und der gleichen Einströmgeschwindigkeit ausgewertet. Das Ergebnis dieser Rechnung ist in Grün aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass die Implementierung der Randbedingung exakt das Verhalten des eindimensionalen Modells aufweist. Dies entspricht der Erwartung für eine fehlerfreie Implementierung. Das Verhalten der Druckantwort wurde in Abschnitt 4.1.4 diskutiert.

Dirichlet Druckrandbedingung am Einlass

Der zweite Fall startet ebenfalls mit einer Hagen-Poiseuille Strömung. Die Randbedingung am Anfang ist eine Dirichlet Druckrandbedingung mit festem Druckwert p_A . Zum Erstellen einer Anfangsbedingung für die Kopplung wird zunächst am Ende eine Dirichlet Druckrandbedingung mit einem Druck von $p = 0 \text{ Pa}$ verwendet. Der Druckgradient über das Rohr wird so festgelegt, dass eine Reynoldszahl von $Re = 370$ erreicht wird. Nach der Konvergenz dieser Rechnung wird die Randbedingung am Ende durch das eindimensionale Modell ersetzt. Das Modell wird für elf Generationen gerechnet, wobei wieder eine Gesamt-Compliance von $C = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{Pa}$ angenommen wird.

In Abbildung 4.14 ist der Druckverlauf p_E des eindimensionalen Modells am Ende des Rohres zu sehen. Zu Beginn ist ein starker Ausschlag im Druckverlauf zu erkennen, der zu einem abklingenden oszillierenden Verhalten führt, welches in Abschnitt 4.1.4 diskutiert wurde. Im weiteren zeitlichen Verlauf nähert sich der Druck innerhalb von etwa $\tau = 15$ charakteristischen Zeiteinheiten dem am Anfang vorgegebenen Druckwert. Die charakteristische Zeit berechnet sich mit $\tau = l/u_{ref}$, wobei l die Rohrlänge und u_{ref} die Geschwindigkeit zu Beginn der Kopplung ist. Ab $\tau = 35$ charakteristischen Zeiteinheiten existieren nur noch Schwankungen $\Delta p < 1 \times 10^{-4} \text{ Pa}$. Somit stellt

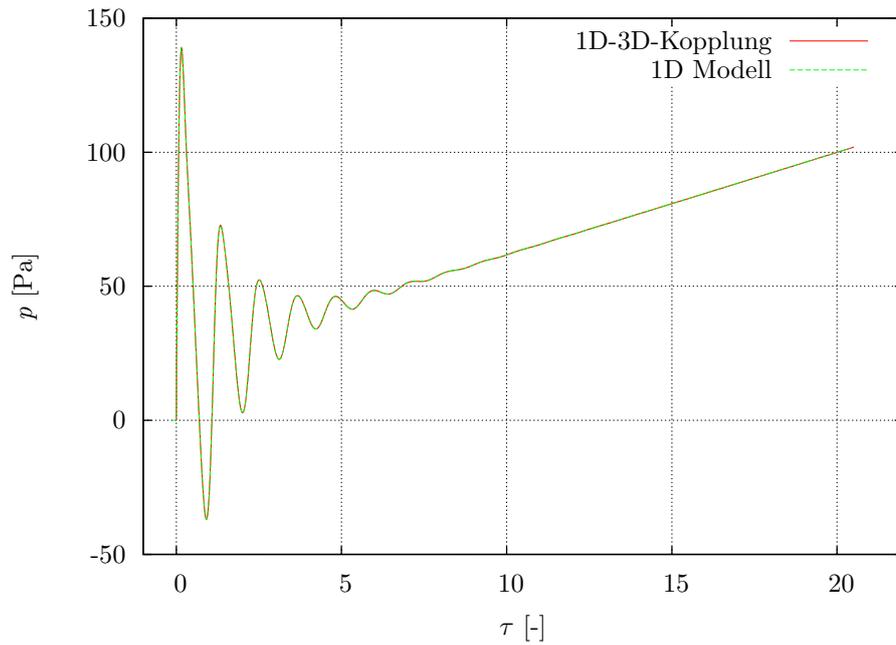


Abbildung 4.13: Druckantwort der 1D-Randbedingung bei Kopplung mit einer dreidimensionalen Hagen-Poiseuille Strömung (rot) im Vergleich zur Druckantwort des eindimensionalen elastischen Modells bei gleicher Einströmgeschwindigkeit.

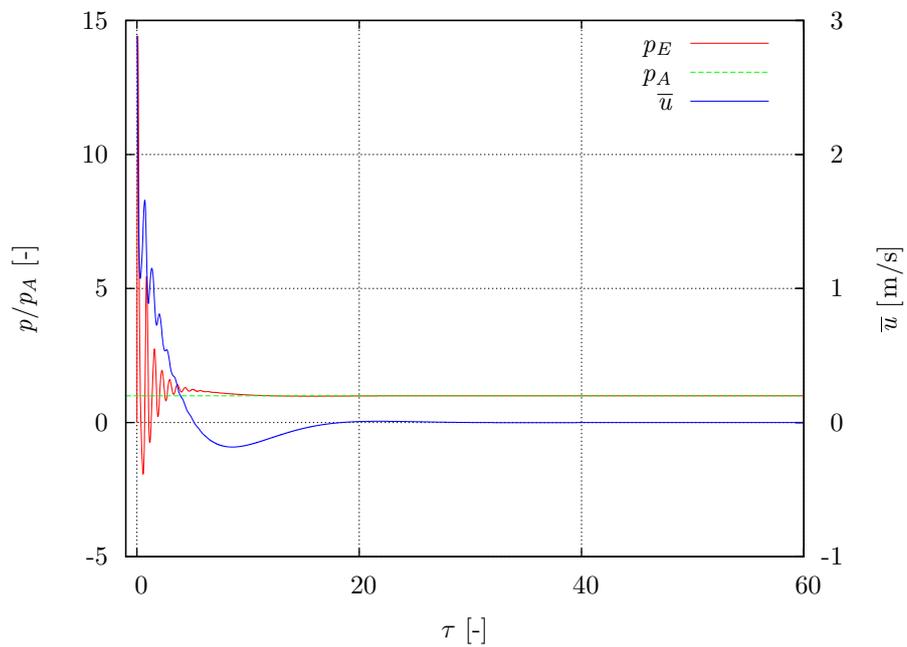


Abbildung 4.14: Konvergenz der Druckantwort der 1D-Randbedingung und der mittleren Durchflussgeschwindigkeit bei der Vorgabe eines konstanten Druckes am Anfang. Die Anfangsbedingung der CFD ist eine Hagen-Poiseuille Strömung für $Re = 370$.

sich das erwartete Verhalten ein, dass die Strömung zu einem Druckausgleich zwischen Anfang und Ende des Rohres führt. Anhand der mittleren Durchflussgeschwindigkeit \bar{u} ist zu erkennen, dass während des Einschwingvorgangs so viel Volumen in das eindimensionale Modell geströmt ist, dass die berechnete Druckantwort höher ist, als der vorgegebene Druck am Anfang. Also dreht sich die Strömung um, um einen Druckausgleich zu erreichen. Sobald dieser eingetreten ist, kommt die Strömung im Rohr zum Erliegen.

4.3.2 Oszillierende Strömung

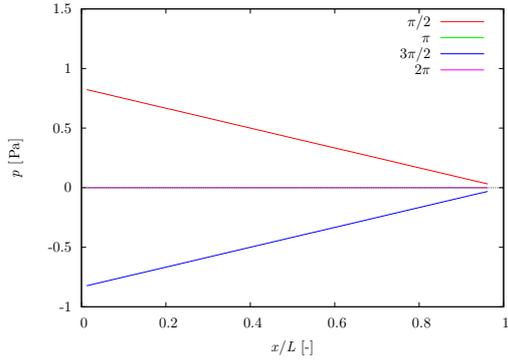
Bei den oszillierenden Strömungen werden Simulationen mit vier verschiedenen Parameterkombinationen vollzogen. Diese entsprechen annähernd den Fällen aus Tabelle 2.1. Alle Fälle werden zunächst ohne die 1D-Randbedingung gerechnet. Zum Berechnen einer geeigneten Anfangsbedingung wird in allen Fällen eine oszillierende Druckrandbedingung am Anfang und eine feste Druckrandbedingung von $p = 0$ Pa am Ende vorgegeben. Die eingestellten Amplituden der oszillierenden Druckrandbedingungen führen zu leichten Abweichungen in der Reynoldszahl im Vergleich zu den in Tabelle 2.1 genannten Werten. So gilt für die Parameterkombination $Wo_{0,3}$ im Folgenden $Wo = 0,3$ und $Re = 117,4$. Bei $Wo_{1,4}$ ist $Wo = 1,4$ und $Re = 719,3$. Für $Wo_{2,4}$ gilt $Wo = 2,4$ und $Re = 457,7$ und für $Wo_{14,5}$ $Wo = 14,5$ und $Re = 40,6$. Aus den eingeschwungenen Lösungen dieser Rechnungen wird als Startzeit für die gekoppelte Rechnung ein Zeitpunkt gewählt, an dem die mittlere Durchflussgeschwindigkeit nahe Null ist. Der Vorteil dieser Wahl wurde in Abschnitt 4.1.4 diskutiert. Bei der Kopplung wird anstelle der festen Druckrandbedingung am Ende das eindimensionale Modell angehängen, welches in allen Fällen für elf Generationen berechnet wird. Für das elastische Verhalten wird wie in den vorherigen Fällen eine Gesamt-Compliance von $C = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{Pa}$ vorgegeben.

Im Folgenden wird ausführlich auf die Ergebnisse der Simulation zu $Wo_{0,3}$ eingegangen. In den darauf folgenden Abschnitten werden die Unterschiede zwischen den dafür erhaltenen Ergebnissen und den Ergebnissen der weiteren Fälle herausgearbeitet.

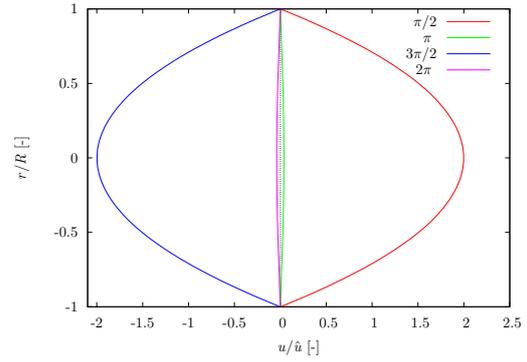
Spontane Atmung ($Wo_{0,3}$)

Der axiale Druckverlauf der eingeschwungenen Strömung ohne die Kopplung ist in Abbildung 4.15(a) zu den Zeitpunkten $t_1 = \pi/2$, $t_2 = \pi$, $t_3 = 3\pi/2$ und $t_4 = 2\pi$ dargestellt. Der Verlauf des Druckes ist linear, wie es für eine eingeschwungene oszillierende Rohrströmung erwartet wird. In Abbildung 4.15(b) sind die Geschwindigkeitsprofile der Strömung zu den genannten Zeitpunkten aufgetragen. Diese sind auf die Spitzengeschwindigkeit $\hat{u} = \max_{0 < t \leq T} (\bar{u}(t))$, die den Wert $\hat{u} = 0,9149 \text{ m/s}$ hat, normiert. Da es sich um eine einfache oszillierende Rohrströmung handelt, wird erwartet, dass die Geschwindigkeitsprofile die Eigenschaften aufweisen, die in Abschnitt 2.1.3 für kleine Wo diskutiert wurden. Dies ist auch der Fall. So weisen die Profile nur einen sehr geringen Phasenversatz zu dem treibenden Druckgradienten auf. Dies lässt sich an den Zeitpunkten t_2 und t_4 ausmachen, zu denen der Druckgradient $\Delta p = 0 \text{ Pa}$ ist. Die zugehörigen Geschwindigkeiten sind mit $u = \pm 0,036 \text{ m/s}$ sehr klein. An den Geschwindigkeitsprofilen bei t_1 und t_3 ist zu sehen, dass diese annähernd dem Parabelprofil einer Hagen-Poiseuille Strömung gleichen. Ein weiterer Hinweis auf die zu jedem Zeitpunkt fast noch bestehende Hagen-Poiseuille Strömung ist, dass die

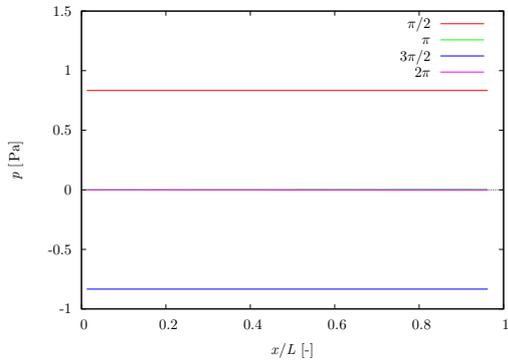
4 Auswertung der numerischen Ergebnisse



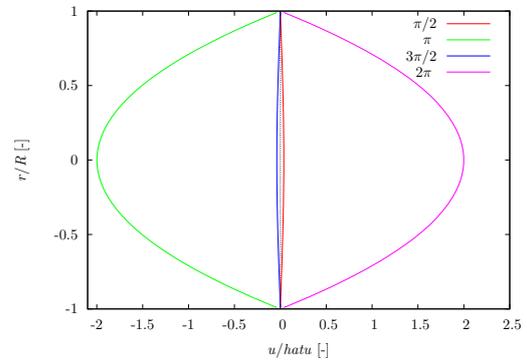
(a) Axialer Druckverlauf zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe ohne 1D-RB



(b) Geschwindigkeitsprofil zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe ohne 1D-RB



(c) Axialer Druckverlauf zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe mit 1D-RB



(d) Geschwindigkeitsprofil zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe mit 1D-RB

Abbildung 4.15: Simulierte axiale Druckverläufe und Geschwindigkeitsprofile zu verschiedenen Zeitpunkten der Druckvorgabe für $Wo = 0,3$. In Abbildung (a) und (b) ohne die 1D-Randbedingung für $Re = 117,4$. In Abbildung (c) und (d) mit der 1D-Randbedingung für $Re = 0,36$.

maximale Geschwindigkeit, die im Geschwindigkeitsprofil auftritt, mit $u_{max} = 1,827$ m/s ungefähr doppelt so groß ist, wie die Spitzengeschwindigkeit \hat{u} .

In Abbildung 4.16 sind die Druckvorgabe am Anfang p_A (rot), die Druckantwort am Ende p_E (grün) und die resultierende mittlere Durchflussgeschwindigkeit \bar{u} (blau) über eine Periode ab Beginn der Rechnung abgebildet. Die Druckantwort am Ende ist der vom eindimensionalen Modell berechnete Druck. Zwischen der Geschwindigkeit und dem Druckverlauf am Anfang tritt der erwartete Phasenversatz von $\Delta\phi_{Elast} = \pi/2$ auf, der in Abschnitt 4.1.1 diskutiert wurde. Dieser basiert auf der Abhängigkeit des Druckes vom eingeströmten Volumen. Somit ist der Druck um $\Delta\phi_{Elast}$ gegenüber dem Verlauf der Geschwindigkeit versetzt. Durch die Trägheit des Fluides entsteht, wie in Abschnitt 2.1.3 diskutiert wurde, ein weiterer Phasenversatz $\Delta\phi_{Ine}$ in entgegengesetzter Richtung. Dieser Phasenversatz ist für $Wo = 0,3$, wie oben genannt, klein. Der Versatz ist beim Nulldurchgang der Geschwindigkeit zu erkennen, da diese nicht genau um $\pi/2$ versetzt ist. Aus dem gezeigten Geschwindigkeitsverlauf folgt, dass zwischen der Druckvorgabe und der

4 Auswertung der numerischen Ergebnisse

Druckantwort ebenfalls ein Phasenversatz bestehen muss, damit es einen Druckgradienten gibt, der die Strömung antreibt. Auch dieser Phasenversatz ist mit etwa $\Delta\phi_p = 1 \times 10^{-3}\pi$ sehr gering. Bei der genauen quantitativen Betrachtung fällt auf, dass die Amplitude der Druckantwort um eine Größenordnung von etwa $1 \times 10^{-3} \%$ größer ist, als die Amplitude der Druckvorgabe. Dieser Unterschied in den Amplituden basiert auf den genannten Phasenversätzen. Der Druckgradient, welcher die Differenz zwischen der Druckvorgabe und der Druckantwort ist, wechselt das Vorzeichen bei $\Delta\phi_{Ine}$ vor dem Nulldurchgang der Strömungsgeschwindigkeit. Da $\Delta\phi_{Ine}$ und $\Delta\phi_p$ nicht gleich groß sind, entsteht der genannte Unterschied in den Amplituden.

In dem Verlauf der mittleren Durchflussgeschwindigkeit liegt zu Beginn der Rechnung auf Grund der Anfangsbedingung eine Geschwindigkeit nahe Null vor. In den ersten Zeitschritten steigt der Wert der Geschwindigkeit stark an und übersteigt den aus der Diskussion der Phasenversätze erwarteten Wert von etwa \hat{u} zunächst. Nach wenigen Zeitschritten schwingt sich diese anschließend auf die erwartete Kurve ein. Der schnelle Anstieg der Geschwindigkeit basiert auf der unpassenden Annahme der Anfangsbedingung, da diese ohne das Modell gerechnet wurde und somit den Phasenversatz $\Delta\phi_{Elast}$ nicht berücksichtigt, welches zu der genannten Diskrepanz zwischen der vorhandenen und der erwarteten Geschwindigkeit führt.

In Abbildung 4.15(c) sind die axialen Druckverläufe der gekoppelten Simulation zu den Zeitpunkten t_1 bis t_4 abgebildet. Die Druckgradienten der Strömung sind im Vergleich zu denen der Simulation ohne das Modell sehr klein. Dies zeigt sich auch an den zugehörigen Geschwindigkeiten, die mit \hat{u} normiert in Abbildung 4.15(d) dargestellt sind. Die Spitzengeschwindigkeit dieser Strömung liegt

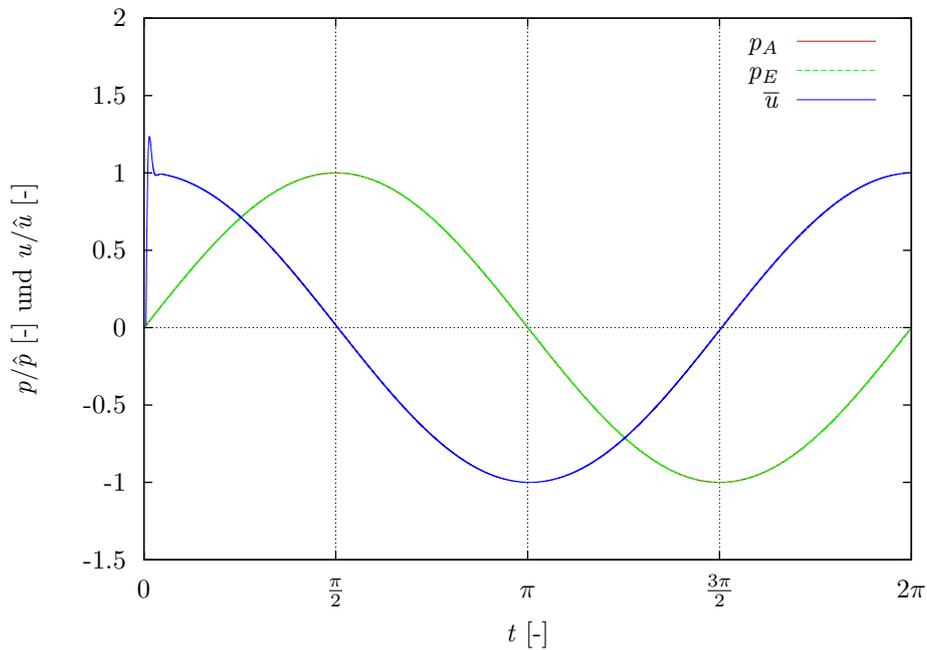


Abbildung 4.16: Druckvorgabe (rot), Druckantwort (grün) und resultierende mittlere Durchflussgeschwindigkeit (blau) aufgetragen gegen die erste Schwingung nach Start der gekoppelten Rechnung für $Wo = 0,3$ und $Re = 0,36$

4 Auswertung der numerischen Ergebnisse

bei $\hat{u} = 0,00284$ m/s, welche einer Reynoldszahl von $Re = 0,36$ entspricht. Die geringen Druckgradienten basieren offensichtlich auf der Druckantwort der 1D-Randbedingung. Der oben genannte Phasenversatz von $\pi/2$ ist auch in den Geschwindigkeitsprofilen zu sehen.

Der Einfluss der Kopplung mit dem Modell auf die Strömung ist sehr groß. Im Falle der hier untersuchten gleichen Druckvorgabe am Anfang führt die Kopplung neben den deutlich geringeren Druckgradienten und Geschwindigkeiten auch zu den anhand von Abbildung 4.16 diskutierten Phasenversätzen. Bei der Rechnung ohne das Modell sind die kleinsten Druckgradienten zu den Zeitpunkten t_2 und t_4 und die größten zu den Zeitpunkten t_1 und t_3 . Der mit dem angehängten Modell entstehende Phasenversatz von $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ führt dazu, dass zu den Zeitpunkten t_2 und t_4 in der gekoppelten Simulation die größten Druckgradienten auftreten und die geringsten zu den Zeitpunkten t_1 und t_3 vorhanden sind.

In Abbildung 4.17 sind die Konturplots der axialen Geschwindigkeit während des Einschwingvorganges der gekoppelten Rechnung im Querschnitt am Ende des Rohres dargestellt. Zunächst kann festgestellt werden, dass die 1D-Randbedingung keine lokalen Auswirkungen auf das Geschwindigkeitsfeld besitzt. Alle dargestellten Profile sind der Erwartung entsprechend rotationssymmetrisch. Der Konturplot des ersten Zeitpunktes, nach $\tau = t/T = 0$ charakteristischen Zeiteinheiten, ist das aus der ungekoppelten Simulation als Anfangsbedingung vorgegebene Geschwindigkeitsfeld. Dieses zeigt negative Geschwindigkeiten in der Rohrmitte und positive Geschwindigkeiten in den äußeren Bereichen. In den folgenden Zeitschritten steigen die Geschwindigkeiten im Rohr an. Die Geschwindigkeiten in der Rohrmitte steigen deutlich schneller, so dass zum zweiten dargestellten Zeitpunkt $\tau = 7,5 \times 10^{-4}$ nur eine geringe Erhöhung der Geschwindigkeiten in den äußeren Bereichen zu erkennen ist, wobei die Geschwindigkeiten der Rohrmitte vollständig positiv sind. Im dritten abgebildeten Zeitpunkt $\tau = 1,3 \times 10^{-3}$ erreicht die Geschwindigkeit der Rohrmitte das Niveau der äußeren Geschwindigkeit. Der vierte Plot zeigt das nach dem Einschwingvorgang des Profils vorhandene parabelförmige Profil zum Zeitpunkt $\tau = 2,75 \times 10^{-3}$.

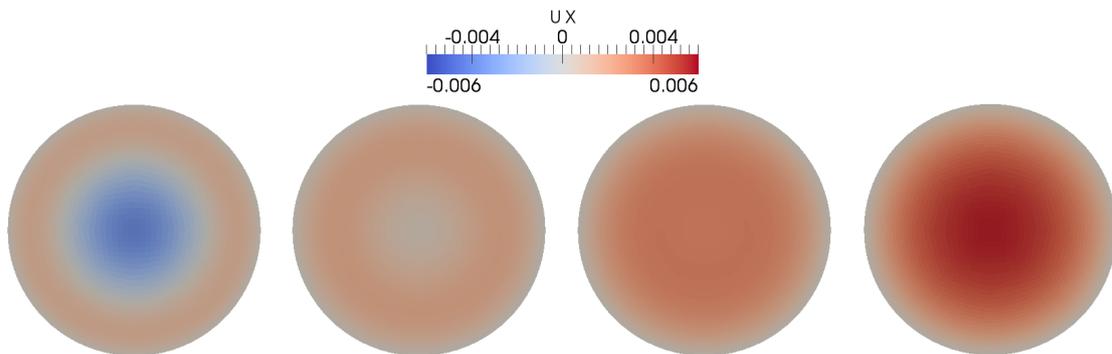
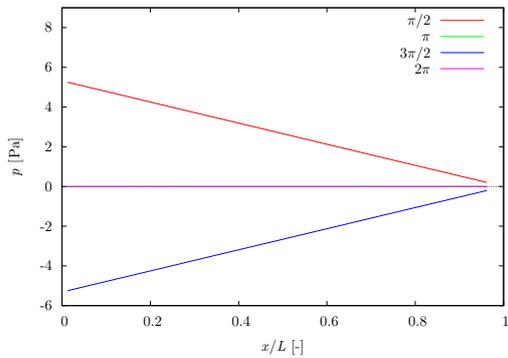


Abbildung 4.17: Axiale Geschwindigkeit am Ende $\tau = 0; 7,5 \times 10^{-4}; 1,3 \times 10^{-3}; 2,75 \times 10^{-3}$ charakteristische Zeiteinheiten nach dem Start der gekoppelten Simulation für $Wo = 0,3$ und $Re = 0,36$.

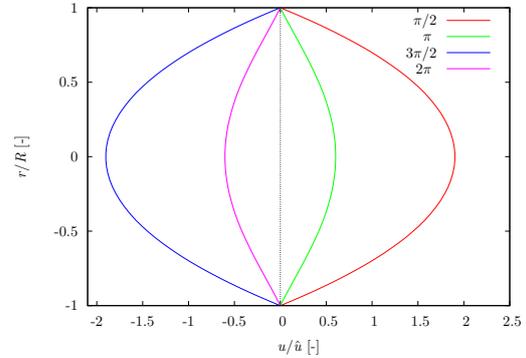
Hochfrequenzoszillationsventilation niedrige Wo ($Wo_{1,4}$)

Im Folgenden werden die Unterschiede der Ergebnisse der Simulation mit der Parameterkombination des $Wo_{1,4}$ Falles zu den Ergebnissen des $Wo_{0,3}$ herausgearbeitet. Anhand dieser Ergebnisse wird der Einfluss der eindimensionalen Randbedingung auf das Strömungsfeld der dreidimensionalen Simulation für eine Parameterkombination mit großem Tidalvolumen V_T aus dem Bereich der HFOV diskutiert.

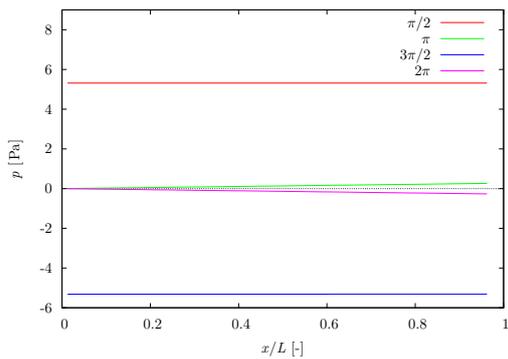
In Abbildung 4.18(a) sind die axialen Druckverläufe und in Abbildung 4.18(b) die dazugehörigen Geschwindigkeitsprofile zu den Zeitpunkten $t_1 = \pi/2$, $t_2 = \pi$, $t_3 = 3\pi/2$ und $t_4 = 2\pi$ abgebildet. Die Geschwindigkeitsprofile sind auf die Spitzengeschwindigkeit $\hat{u} = 5,60701$ normiert. Die in Abschnitt 2.1.3 diskutierten Eigenschaften einer oszillierenden Strömung mit $Wo \approx 1$ sind in den Abbildungen zu erkennen. Es gibt den Phasenversatz zwischen den Druckgradienten und den zugehörigen Geschwindigkeitsprofilen. Des Weiteren entsprechen die Profile den abgeflachten Parabelprofilen einer solchen Strömung.



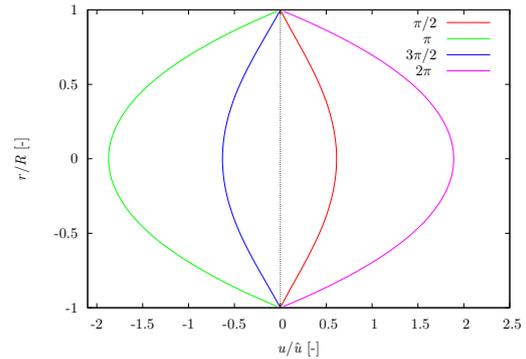
(a) Axialer Druckverlauf zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe ohne 1D-RB



(b) Geschwindigkeitsprofil zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe ohne 1D-RB



(c) Axialer Druckverlauf zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe mit 1D-RB



(d) Geschwindigkeitsprofil zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe mit 1D-RB

Abbildung 4.18: Simulierte axiale Druckverläufe und Geschwindigkeitsprofile zu verschiedenen Zeitpunkten der Druckvorgabe für $Wo = 1,4$. In Abbildung (a) und (b) ohne die 1D-Randbedingung für $Re = 719,3$. In Abbildung (c) und (d) mit der 1D-Randbedingung für $Re = 37,3$.

4 Auswertung der numerischen Ergebnisse

Bei der Betrachtung der Abbildung 4.19, in der die Druckvorgabe p_A , die Druckantwort p_E und die mittlere Durchflussgeschwindigkeit \bar{u} der gekoppelten Simulation aufgetragen sind, fällt auf, dass diese in der Grundstruktur den Verläufen der Ergebnisse von $Wo_{0,3}$ ähnelt. Im eingeschwungenen Zustand sind ebenfalls die genannten Phasenversätze $\Delta\phi_{Elast}$, $\Delta\phi_{Ine}$ und $\Delta\phi_p$ zu erkennen. Auf Grund der höheren Womersleyzahl ist $\Delta\phi_{Ine}$ größer als der entsprechende Versatz bei $Wo_{0,3}$. Der Versatz durch die elastische Modellierung bleibt aus den genannten Gründen bei $\Delta\phi_{Elast} = \pi/2$. Der Versatz zwischen den Drücken ist im Vergleich zu dem Fall $Wo_{0,3}$ auf Grund der höheren Reynoldszahl größer. Dieser beträgt jetzt $\Delta\phi_p = 1.66 \times 10^{-2}\pi$. Durch die verschiedenen großen Phasenversätze der Trägheit und der Drücke, ist die Amplitude der Druckantwort im Vergleich zu der Amplitude der Druckvorgabe um 0,13% erhöht.

Zu Beginn der Rechnung fällt auf, dass der Druck instantan von $p = 0$ Pa auf $p = 0,8317$ Pa springt. Anschließend existiert eine kurze Einschwingperiode. Der Drucksprung ist darin begründet, dass zu Beginn der gekoppelten Rechnung davon ausgegangen wurde, dass ein Druck von $p = 0$ Pa und eine Geschwindigkeit von $\bar{u} \approx 0$ m/s herrschen. Diese Annahme ist jedoch nicht realistisch, wodurch zu Beginn in der Simulation ein starker Druckgradient auftritt, der zum starken Anstieg der mittleren Durchflussgeschwindigkeit führt. Zu dem Zeitpunkt wo der Druck den Wert erreicht, der im eingeschwungenen Zustand herrschen würde, folgen sowohl die Druckantwort, als auch die mittlere Durchflussgeschwindigkeit den erwarteten sinusförmigen Kurven. Betrachtet man die axialen Druckverläufe zu den Zeitpunkten t_1 bis t_4 der gekoppelten Simulation in Abbildung 4.18(c) ist zu erkennen, dass die Druckgradienten auch in diesem Fall im Vergleich zu der nicht gekoppelten

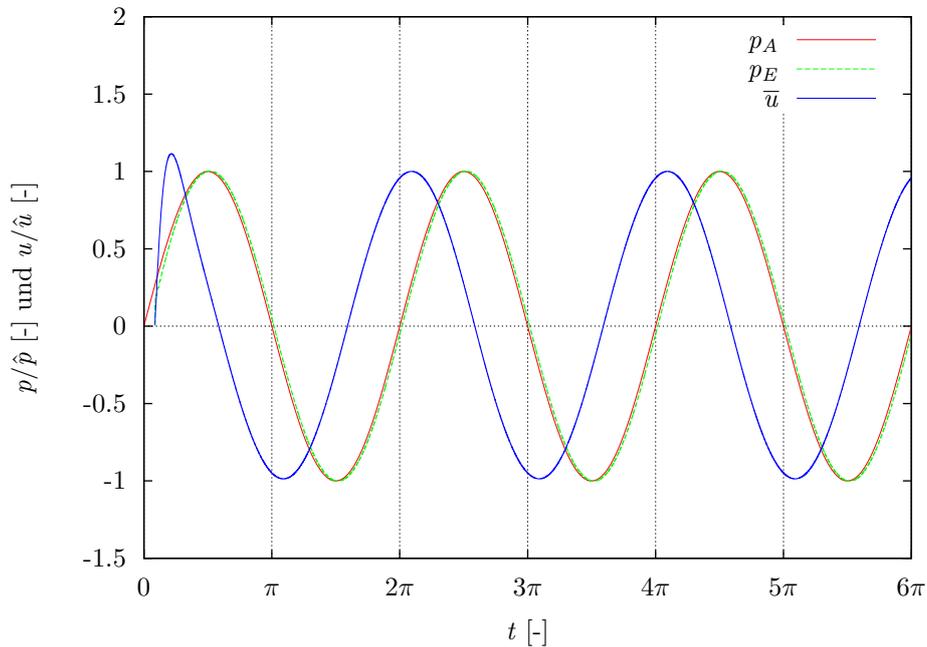


Abbildung 4.19: Druckvorgabe (rot), Druckantwort (grün) und resultierende mittlere Durchflussgeschwindigkeit (blau) aufgetragen gegen die ersten drei Schwingungen nach Start der gekoppelten Rechnung für $Wo = 1,4$ und $Re = 37,3$

Rechnung (Abbildung 4.18(a)) deutlich geringer sind. Aus den geringeren Druckgradienten resultieren auch kleinere Geschwindigkeiten. In der gekoppelten Simulation ist deswegen die Spitzengeschwindigkeit $\hat{u} = 0,291$ m/s, welche einer Reynoldszahl von $Re = 37,3$ entspricht. Die auf \hat{u} normierten Geschwindigkeitsprofile der genannten Zeitpunkte sind in Abbildung 4.18(d) dargestellt. Auch hier ist der Phasenversatz auf Grund des elastischen Verhaltens von $\Delta\phi = \pi/2$ an den Profilen zu sehen.

Hochfrequenzoszillationsventilation hohe Wo (Wo_2,4)

In diesem Abschnitt werden die Unterschiede in den Ergebnissen der Simulation mit der Parameterkombination des Wo_2,4 Falles und des Wo_0,3 Falles herausgearbeitet. Anhand dieser Ergebnisse wird der Einfluss der eindimensionalen Randbedingung auf das Strömungsfeld der dreidimensionalen Simulation für eine Parameterkombination mit großer Wo aus dem Bereich der HFOV diskutiert.

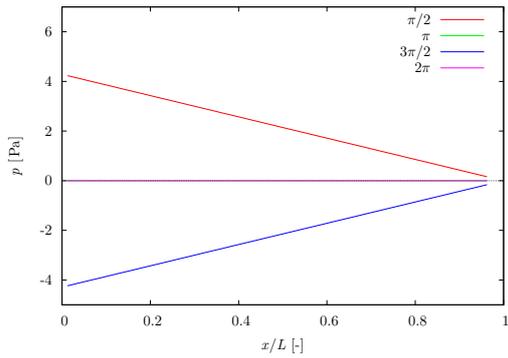
In Abbildung 4.20(a) sind die axialen Druckverläufe der Simulation ohne Kopplung zu den Zeitpunkten $t_1 = \pi/2$, $t_2 = \pi$, $t_3 = 3\pi/2$ und $t_4 = 2\pi$ abgebildet. Die zugehörigen Geschwindigkeitsprofile normiert auf $\hat{u} = 3,567$ m/s zeigt Abbildung 4.20(b). Diese entsprechen den erwarteten Profilen einer Strömung mit $Wo = 2,4$. Es gibt einen Phasenversatz von etwa $\Delta\phi = \pi/4$. Zu den Zeitpunkten t_2 und t_4 sind wandnah geringere Geschwindigkeitsgradienten zu sehen, da die wandnahen Fluidschichten weniger von den Trägheitskräften beeinflusst werden, und so schneller abgebremst werden können, als die Fluidschichten in der Mitte des Rohres. Genauso werden die äußeren Bereiche des Fluides im Rohr zu den Zeitpunkten t_1 und t_3 nach dem Nulldurchgang schneller wieder beschleunigt. Daher treten die verschiedenen Formen des Geschwindigkeitsprofils beim Beschleunigen und Abbremsen auf.

Abbildung 4.21 zeigt die zeitlichen Verläufe der Druckvorgabe p_A , der Druckantwort p_E und der mittlere Durchflussgeschwindigkeit \bar{u} . Es fallen zwei Unterschiede zwischen dieser Abbildung und den Abbildungen der vorher diskutierten Fälle auf. Die Druckantwort der 1D-Randbedingung hat eine geringere Amplitude, als die Druckvorgabe und die mittlere Durchflussgeschwindigkeit übersteigt zu Beginn nicht die Spitzengeschwindigkeit \hat{u} . Abgesehen von diesen Unterschieden wurden alle auftretenden Phänomene bereits in den vorherigen Fällen diskutiert.

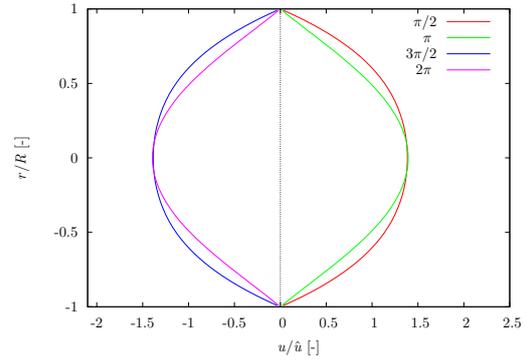
Das gegenüber den bisherigen Fällen abweichende Verhalten ist auf die deutlich anderen Phasenversätze zurückzuführen, welche sich bei der hier gewählten Parameterkombination ergeben. Die Amplitude der Druckantwort ist 3,03% geringer als die Amplitude der Druckvorgabe, da der Zeitpunkt des Druckgradientenwechsels nach dem Erreichen der Amplitude in der Druckvorgabe liegt. Der Zeitpunkt dieses Wechsels liegt, wie in den vorherigen Fällen beschrieben, um den Phasenversatz $\Delta\phi_{Ine}$ vor dem Richtungswechsel der Geschwindigkeit. Dass die Geschwindigkeitsamplitude in der Einschwingphase nicht die Spitzengeschwindigkeit übersteigt, liegt daran, dass sich der Druck am Ende sehr schnell dem Wert nähert, der im eingeschwungenen Zustand erwartet wird. Somit muss zu Beginn nicht so viel Volumen in das elastische Modell einströmen, um die der Druckvorgabe entsprechenden Druckantwort zu erreichen.

Ein weiterer Unterschied, der nur quantitativ zu erkennen ist, liegt im Phasenversatz zwischen der Druckvorgabe und der Druckantwort $\Delta\phi_p = 0.01464\pi$. Dieser Versatz ist trotz der mit $Re = 83,7$ höheren Reynoldszahl etwas geringer als der Versatz beim Fall Wo_1,4. Dies begründet sich in den

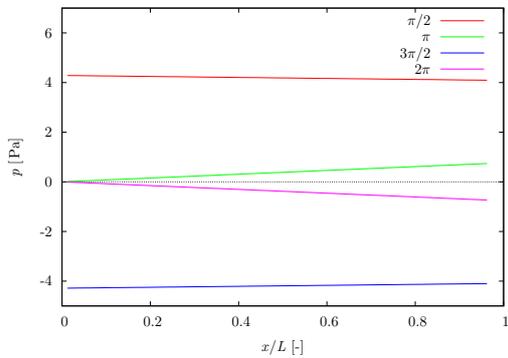
4 Auswertung der numerischen Ergebnisse



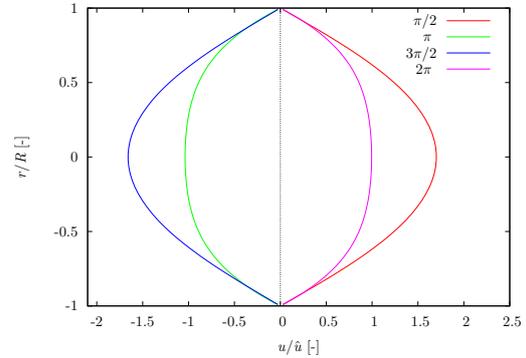
(a) Axialer Druckverlauf zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe ohne 1D-RB



(b) Geschwindigkeitsprofil zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe ohne 1D-RB



(c) Axialer Druckverlauf zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe mit 1D-RB



(d) Geschwindigkeitsprofil zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe mit 1D-RB

Abbildung 4.20: Simulierte axiale Druckverläufe und Geschwindigkeitsprofile zu verschiedenen Zeitpunkten der Druckvorgabe für $Wo = 2,4$. In Abbildung (a) und (b) ohne die 1D-Randbedingung für $Re = 457,7$. In Abbildung (c) und (d) mit der 1D-Randbedingung für $Re = 83,7$.

unterschiedlichen maximalen Amplituden der Druckantworten in den beiden Fällen. Obwohl im $Wo_{2,4}$ Fall ein geringerer Phasenversatz vorhanden ist, ist die absolute Druckdifferenz über das Rohr zum Zeitpunkt $t = 2\pi$ mit $\Delta p = 0,887$ Pa deutlich größer als die entsprechende Differenz von $\Delta p = 0,320$ Pa im $Wo_{1,4}$ Fall. Der Phasenversatz $\Delta\phi_p$ ist also nicht direkt von der Reynoldszahl abhängig, wenngleich diese, wie im Falle der $Wo_{1,4}$ beschrieben, einen Einfluss hat.

Abbildung 4.20(c) zeigt die axialen Druckverläufe der gekoppelten Simulation zu den Zeitpunkten t_1 bis t_4 . Im Vergleich zu den Druckgradienten der Simulation ohne das eindimensionale Modell ist zu erkennen, dass die Druckgradienten kleiner sind. Außerdem fällt auf, dass bei der gekoppelten Simulation zu jedem der gewählten Zeitpunkte ein Druckgradient vorhanden ist. Dies liegt an den oben diskutierten Phasenversätzen. Im jetzigen Fall findet der Wechsel der Druckgradienten auf Grund der erhöhten Womersleyzahl nicht mehr an den Zeitpunkten t_2 und t_4 statt, sondern ist in positiver Zeitrichtung versetzt. Dieser zusätzliche Phasenversatz verglichen mit der Rechnung ohne Kopplung ist auch anhand der Geschwindigkeitsprofile in Abbildung 4.20(d) zu erkennen.

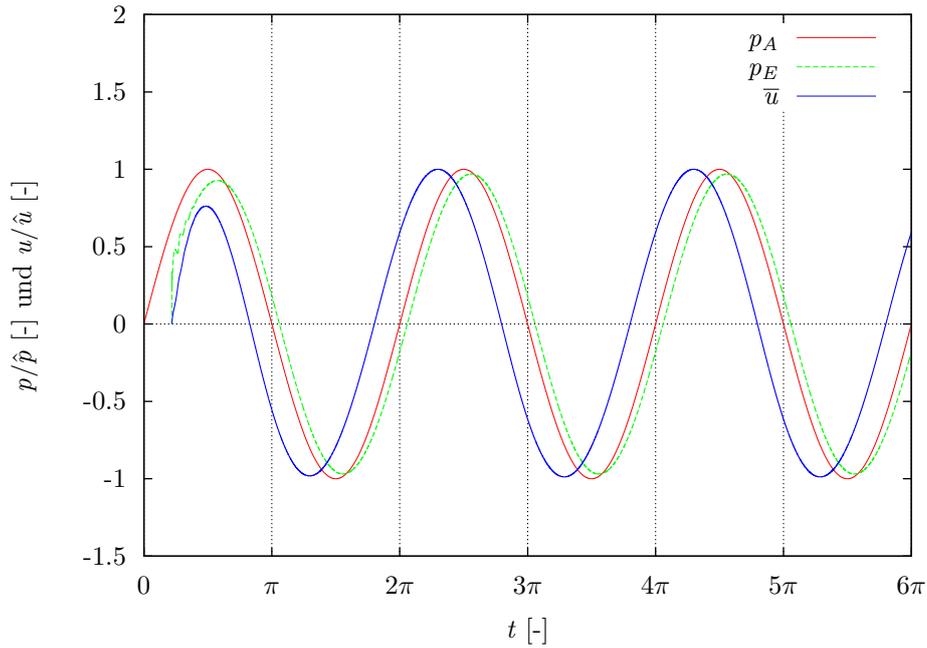


Abbildung 4.21: Druckvorgabe (rot), Druckantwort (grün) und resultierende mittlere Durchflussgeschwindigkeit (blau) aufgetragen gegen die ersten drei Schwingungen nach Start der gekoppelten Rechnung für $Wo = 2,4$ und $Re = 83,7$

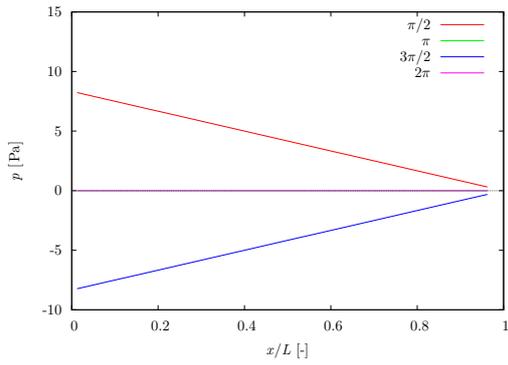
Die auf die Spitzengeschwindigkeit $\hat{u} = 0,6524$ m/s normierten Profile entsprechen nicht mehr den normierten Profilen aus Abbildung 4.20(b) unter Berücksichtigung des Phasenversatzes $\Delta\phi_{Elast.}$. Stattdessen gleichen sie den Profilen der Strömung ohne die 1D-Randbedingung zu einem früheren Zeitpunkt.

Testfall für sehr hohe Wo (**Wo_14,5**)

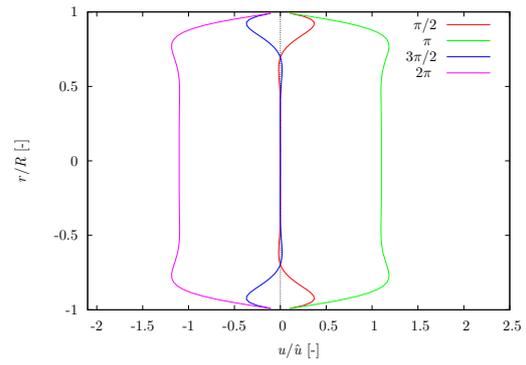
Im Folgenden werden die Unterschiede der Ergebnisse der Simulation mit der Parameterkombination des $Wo_{14,5}$ Falles zu den Ergebnissen der vorherigen Fälle herausgearbeitet. Anhand dieser Ergebnisse wird der Einfluss einer großen Wo auf das Strömungsfeld der dreidimensionalen Simulation mit der eindimensionalen Randbedingung diskutiert.

In Abbildung 4.22(a) sind die axialen Druckverläufe der Simulation ohne die Kopplung zu den Zeitpunkten $t_1 = \pi/2$, $t_2 = \pi$, $t_3 = 3\pi/2$ und $t_4 = 2\pi$ dargestellt. Die zugehörigen Geschwindigkeitsprofile sind in Abbildung 4.22(b) abgebildet. Der Phasenversatz von annähernd $\pi/2$ zwischen den treibenden Druckgradienten und den resultierenden Geschwindigkeiten ist gut zu erkennen. Zu den Zeitpunkten t_1 und t_3 , in denen ein starker Druckgradient vorliegt, ist das Geschwindigkeitsprofil sehr nahe an null. Während der Strömungsumkehr treten gleichzeitig Geschwindigkeiten in positive und negative axiale Richtung auf. Alle Geschwindigkeitsprofile weisen ein Plateau im Rohrzentrum auf. An den Wänden sind hohe Geschwindigkeitsgradienten zu erkennen. Die maximale Geschwindigkeit findet sich am Rand des Plateaus. Sowohl der genannte Phasenversatz,

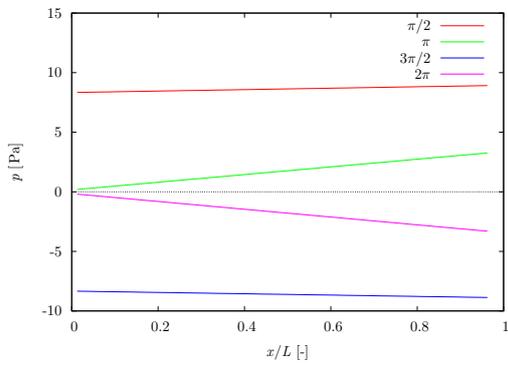
4 Auswertung der numerischen Ergebnisse



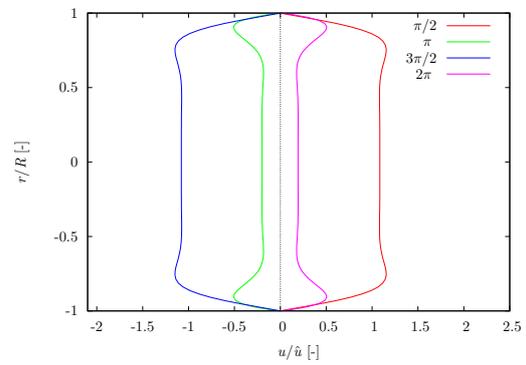
(a) Axialer Druckverlauf zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe ohne 1D-RB



(b) Geschwindigkeitsprofil zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe ohne 1D-RB



(c) Axialer Druckverlauf zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe mit 1D-RB



(d) Geschwindigkeitsprofil zu den verschiedenen Zeitpunkten einer Periode der Druckvorgabe mit 1D-RB

Abbildung 4.22: Simulierte axiale Druckverläufe und Geschwindigkeitsprofile zu verschiedenen Zeitpunkten der Druckvorgabe für $Wo = 14,5$. In Abbildung (a) und (b) ohne die 1D-Randbedingung für $Re = 40,6$. In Abbildung (c) und (d) mit der 1D-Randbedingung für $Re = 16,1$.

als auch die Ausprägung der Geschwindigkeitsprofile wird bei einer Womersleyzahl von $Wo = 14,5$ erwartet. Diskutiert wurde dies in Abschnitt 2.1.3.

In Abbildung 4.23 sind die zeitlichen Verläufe der Druckvorgabe p_A , der Druckantwort p_E und der mittleren Durchflussgeschwindigkeit \bar{u} vom Beginn der Rechnung an für zwölf Perioden abgebildet. In diesem sind verschiedene Einschwingvorgänge zu erkennen. Die Druckantwort springt zunächst vom Ausgangsdruck von $p = 0$ Pa auf einen Druck von $p = 7,816$ Pa. In den folgenden 20 Zeitschritten existiert ein kurzer Einschwingvorgang, bis der Druck annähernd einer sinusförmigen Kurve folgt. Diese Kurve zeigt allerdings über die ersten neun Perioden noch einen Anstieg in der Amplitude. Die Amplitude der mittleren Durchflussgeschwindigkeit schwingt zunächst über, bis sie nach neun Perioden den Gleichgewichtswert einnimmt. Dies liegt daran, dass die Kopplung zwischen der Druckantwort, die den Druckgradienten bestimmt, und der Geschwindigkeit auf Grund der hohen Frequenz der Druckvorgabe mehrere Perioden benötigt, um in ein Gleichgewicht zu kommen.

4 Auswertung der numerischen Ergebnisse

Zu dem Zeitpunkt $t = 20\pi$ ist ebenfalls eine kurzzeitige Abweichung vom Sinusverlauf zu sehen. Diese ist ein numerisches Artefakt und entstand, da die Rechnung ab diesem Zeitpunkt neu gestartet wurde. Trotz der Vorgabe der alten Lösung und Geschwindigkeit durch die im Zeitordner gespeicherten Werte gibt es in der Folgerechnung einen Einschwingvorgang.

Im eingeschwungenen Zustand ist wieder die Kombination der im ersten Fall aufgelisteten Phasenversätze zu erkennen. Der Phasenversatz $\Delta\phi_{Elast}$ wird durch den Versatz durch die Trägheit $\Delta\phi_{Ine}$ fast ausgeglichen, so dass zwischen der Druckvorgabe und der mittleren Durchflussgeschwindigkeit nur ein kleiner Phasenversatz existiert. Der Phasenversatz zwischen den Drücken hat den Wert $\Delta\phi_p = 0,111\pi$. Bei $Wo_{14,5}$ liegt der Druckgradientenwechsel vor der Amplitude der Druckvorgabe. Daher ist die Amplitude der Druckantwort 14,8% größer als die der Druckvorgabe.

Die axialen Druckverläufe und die Geschwindigkeitsprofile zu den Zeitpunkten t_1 bis t_4 sind in den Abbildungen 4.22(c) und 4.22(d) dargestellt. Es fällt auf, dass ebenso wie im Falle $Wo_{2,4}$ neben dem Phasenversatz von $\Delta\phi_{Elast} = \pi/2$ durch die elastische Modellierung ein weiterer Phasenversatz auftritt. Bei $Wo_{14,5}$ ist die Phase jedoch in die andere Richtung versetzt. Somit treten die den aus der Simulation mit Kopplung entsprechenden Geschwindigkeitsprofile in der Simulation ohne Kopplung zu einem früheren Zeitpunkt auf. Der Versatz in diese Richtung entsteht, da in diesem Fall der Vorzeichenwechsel im Druckgradient vor den dargestellten Zeitpunkten auftritt. Abgesehen davon weisen die Profile weiterhin den Annulareffekt und den Phasenversatz auf Grund der Trägheit entsprechend einer oszillierenden Strömung mit hoher Wo auf.

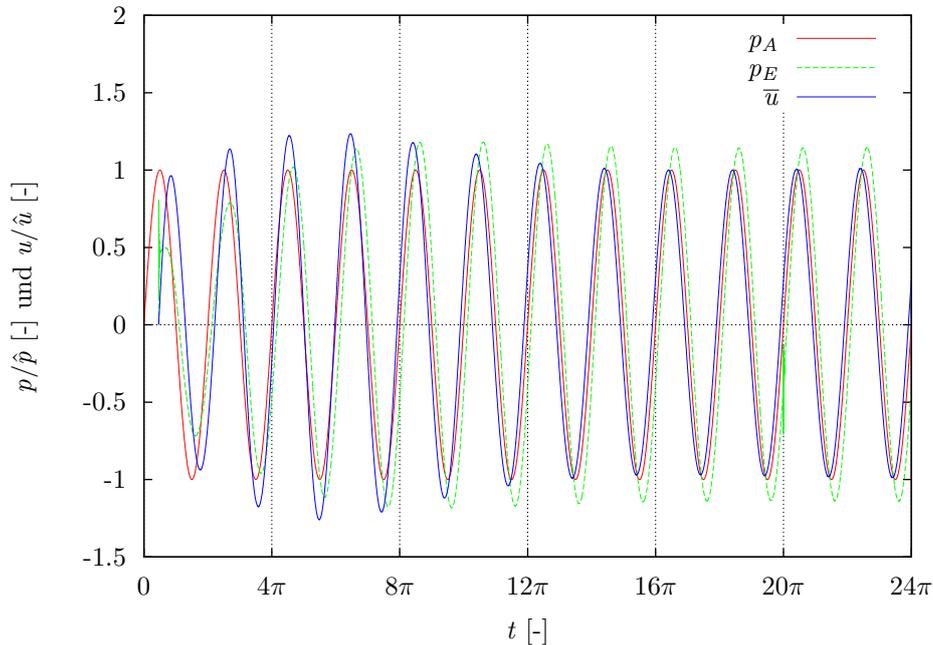


Abbildung 4.23: Druckvorgabe (rot), Druckantwort (grün) und resultierende mittleren Durchflussgeschwindigkeit (blau) aufgetragen gegen die ersten zwölf Schwingungen nach Start der gekoppelten Rechnung für $Wo = 14,5$ und $Re = 16,1$

4 Auswertung der numerischen Ergebnisse

In Abbildung 4.24 sind die Konturplots der axialen Geschwindigkeiten während der Einschwingphase der Simulation mit der eindimensionalen Randbedingung im Querschnitt am Ende des Rohres abgebildet. Auch in dieser Abbildung ist zu erkennen, dass alle Geschwindigkeitsprofile rotations-symmetrisch sind. Ausgehend von der durch die Anfangsbedingung vorgegebenen Geschwindigkeit im ersten Plot ist zu erkennen, wie sich das Profil über die Zeit einschwingt. Durch die hohe Wo dauert der Einschwingvorgang länger als bei $Wo_{0,3}$. Im hier betrachteten Fall $Wo_{14,5}$ verschwindet der Einfluss des Profils der Startbedingung erst nach $\tau = t/T = 0,6$ charakteristischen Zeiteinheiten. Anschließend geht das Geschwindigkeitsprofil in das zu einer oszillierenden Strömung mit $Wo = 14,5$ gehörige Profil über. Bei $Wo_{0,3}$ verschwindet der Einfluss des Profils der Anfangsbedingung schon nach $\tau = 2,75 \times 10^{-3}$ charakteristischen Zeiteinheiten.

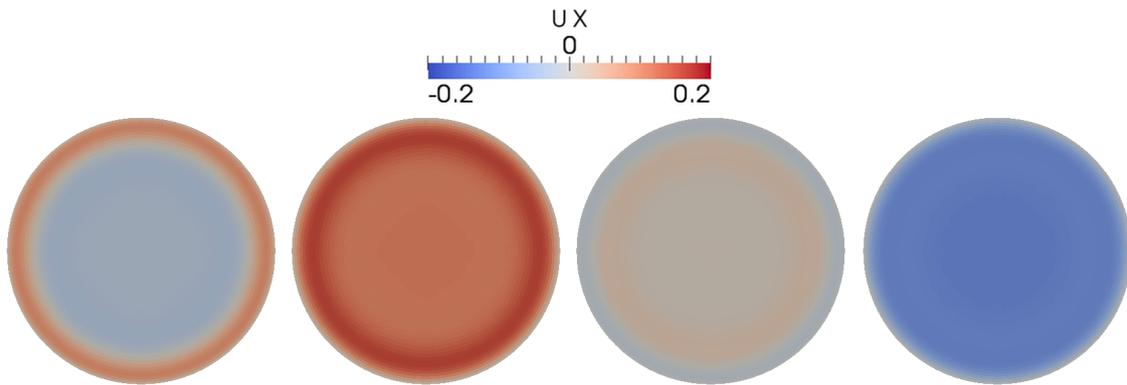


Abbildung 4.24: Axiale Geschwindigkeit am Ende $\tau = 0; 0,17; 0,41; 0,6$ charakteristische Zeiteinheiten nach dem Start der gekoppelten Simulation für $Wo = 14,5$ und $Re = 16,1$.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Bei der maschinellen Beatmung von Patienten können verschiedene Beatmungsmethoden verwendet werden. Auf Grund des guten Gasaustausches und der eventuell möglichen Verringerung von beatmungsbedingten Lungenschädigungen ist die Methode der Hochfrequenzoszillationsventilation (HFOV) in den Fokus der aktuellen Forschung gerückt, um diese Beatmungsmethode zu optimieren und zu etablieren. Hierfür wird ein verbessertes Verständnis der komplexen Gastransportvorgänge in der hochfrequent oszillierenden Lungendurchströmung benötigt. Um dieses zu erlangen, werden experimentelle und numerische Untersuchungen durchgeführt. Der durch die komplexe Geometrie der Lunge gegebene große Rechenaufwand führt dazu, dass bei den numerischen Untersuchungen nur die ersten sieben bis neun Verzweigungsgenerationen simuliert werden können. Um die folgenden Teile der Lunge nicht außer Acht zu lassen, werden einfache Modelle zur Beschreibung der Strömung in den tieferen Generationen als Randbedingungen an die dreidimensionalen Simulationen angefügt. Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, ein bestehendes Modell der Lungendurchströmung um die elastischen Eigenschaften der Bronchien zu erweitern und dieses als Randbedingung für den Löser OpenFOAM zur Verfügung zu stellen.

Um das elastische Verhalten der Bronchien modellieren zu können, wurde in Abschnitt 2.2.3 auf das elastische Verhalten der Lunge an sich eingegangen. Hierbei stellte sich heraus, dass in erster Näherung eine lineare Betrachtung der Druck-Volumen-Abhängigkeit möglich ist.

In Abschnitt 3.2.1 wurde das bisher bestehende Modell beschrieben. Das Modell basiert auf den Annahmen einer inkompressiblen laminaren voll ausgebildeten Strömung. Die Energieerhaltung zur Beschreibung der Strömung wird in der Form der Bernoulli Gleichung ausgedrückt. Mit Zusatztermen werden die Druckverluste durch Reibung, die Trägheit des oszillierenden Fluides und die Verzweigungen des Bronchialbaumes zu der Bernoulli Gleichung hinzugefügt. Mit volumenabhängigen Druckrandbedingungen an den Enden des modellierten Bronchialbaumes wird das elastische Verhalten des gesamten Bronchialbaumes berücksichtigt.

Die Erweiterung dieses Modells um das lokale elastische Verhalten in jeder Röhre (Bronchus) wurde in Abschnitt 3.2.2 entwickelt. Das elastische Verhalten führt zu einer Volumenvergrößerung jeder Röhre. Diese wird durch die Änderung des Querschnittes modelliert. Das zur Vergrößerung der Röhren genutzte Volumen wird in den Kontinuitätsgleichungen der Verzweigungsknoten berücksichtigt. Die von der Strömungsgeschwindigkeit abhängigen Verluste werden durch querschnittsabhängige Verlustbeiwerte dem elastischen Verhalten angepasst. Das hieraus resultierende Differentialgleichungssystem wurde mit Rückwärtsdifferenzen diskretisiert. Dies hat zu einem System von nichtlinearen Gleichungen geführt, das mit dem Newton-Raphson Verfahren gelöst wird. Die Implementierung des erweiterten Modells und der Kopplung dieses Modells mit dem Strömungslöser OpenFOAM wurde in Abschnitt 3.4 beschrieben.

Der Einfluss der neu eingefügten Elastizität auf das Modell der Lungendurchströmung wurde in Abschnitt 4.1.1 mittels oszillierender Strömungen untersucht. Hierbei stellte sich heraus, dass die Modellierung des elastischen Verhaltens bei bestimmten Parameterkombinationen die simulierten Strömungsverluste zwischen den Generationen sieben und neun um etwa 30% verringert. Gleichzeitig stieg die Druckantwort des simulierten Teilstückes um 3% gegenüber der des Modells ohne elastisches Verhalten. Im Vergleich zu einer Modellierung mit offenen Enden des Bronchialbaumes entstand durch die elastische Modellierung ein Phasenversatz zwischen der treibenden Druckkraft und der Strömungsgeschwindigkeit von $\pi/2$.

Bei der Betrachtung der Einflüsse der Kennzahlen auf die Strömung mit der elastischen Modellierung stellte sich heraus, dass hohe Womersleyzahlen zu einem Einschwingverhalten in der Druckantwort führen. Bei geringen Womersleyzahlen wurde der Gleichgewichtszustand fast instantan erreicht, so dass das Einschwingverhalten qualitativ nicht erkennbar war. Des Weiteren stieg der maximale Druck der Druckantwort mit erhöhter Womersleyzahl. Dies führte ab einer bestimmten Re-Wo-Kombination zum Versagen der Modellierung, da auf Grund der linearen Abhängigkeit zwischen dem Druck in der Röhre und dem Volumen der Röhre negative Querschnitte auftraten. Durch die Erhöhung der Reynoldszahl zeigten sich erhöhte Druckverluste über die Röhren, die auf Grund der elastischen Modellierung innerhalb eines Oszillationszyklus ein asymmetrisches Verhalten aufwiesen.

Anhand der Ergebnisse von den Simulationen mit konstanten Volumenströmen wurden in Abschnitt 4.1.4 die Einflüsse der Einströmgeschwindigkeit, des Zeitschrittes und der Anzahl der modellierten Generationen untersucht. Es zeigte sich, dass sich bei der Einströmung mit einem konstanten Volumenstrom ein starkes Einschwingverhalten in der Druckantwort einstellt. Der maximale Ausschlag dieses Einschwingverhaltens konnte durch einen kleineren Volumenstrom verringert werden. Durch eine feinere zeitliche Diskretisierung wurde das Einschwingverhalten weniger gedämpft, was zu einer größeren Amplitude führt. Die Phase des Einschwingverhaltens war abhängig von der Anzahl der modellierten Generationen. Daraus lässt sich schließen, dass die Anzahl der Generationen die Eigenfrequenz des Systems bestimmt.

Die implementierte Kopplung des elastischen Modells mit dem Strömungslöser OpenFOAM wurde in zwei Fällen mit einer konstanten Strömung getestet. Im ersten Fall wurde gezeigt, dass die Kopplung bei einer konstanten Hagen-Poiseuille Strömung in dem dreidimensionalen Rohr zu einer linear ansteigenden Druckantwort führt, wie sie auf Grund der Modellierung der Elastizität erwartet wurde. Beim zweiten Fall wurde auf der Einströmseite des dreidimensional berechneten Rohres ein fester Druckwert vorgegeben. Die Druckantwort des Modells konvergierte innerhalb kurzer Zeit auf diesen Wert, so dass die Strömung zum Erliegen kam.

Mit der Durchführung von gekoppelten Simulationen oszillierender Strömungen konnte gezeigt werden, dass das angehängte Modell einen großen Einfluss auf die Strömung in der dreidimensionalen Simulation besitzt. Bei einer vorgegebenen oszillierenden Druckrandbedingung führte die Kopplung zu deutlich geringeren Geschwindigkeiten. Des Weiteren wurde ein Phasenversatz zwischen der Druckvorgabe und der resultierenden Geschwindigkeit im Vergleich zu der Simulation ohne die Randbedingung beobachtet. Hieraus lässt sich schließen, dass das einfache Abschneiden der unteren Generationen, ohne das Modellieren dieser durch eine Randbedingung, nicht sinnvoll ist.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Das in dem erweiterten Modell betrachtete linear elastische Verhalten stellt die elastischen Eigenschaften der Lunge nur bedingt dar, wie in Abschnitt 2.2.3 erläutert wurde, gilt diese Annahme annähernd nur im Bereich der spontanen Atmung einer gesunden Lunge. Die Erweiterung der Modellierung zu einem nichtlinear elastischen Verhalten, welches lokal verschiedene elastische Eigenschaften betrachten kann, sollte Gegenstand einer zukünftigen Arbeit sein.

Zur weiteren Untersuchung der Effekte durch die Kopplung können Simulationen mit vorgegebenen Volumenströmen durchgeführt werden, um gleiche Reynoldszahlen beim Vergleich zwischen den Ergebnissen der gekoppelten Simulation und denen der Simulation ohne das als Randbedingung angehängte eindimensionale Modell zu haben.

In einer weiteren Arbeit sollte auch die Kopplung einer mehrfach verzweigten Lungengeometrie mit dem elastischen Modell als Randbedingung untersucht werden. Durch die Unterschiede in dem elastischen Verhalten der Randbedingungen zwischen den verschiedenen Auslässen der verzweigten Geometrie könnte zusätzlich die Auswirkung der auf diese Art einfach modellierten Erkrankung der Lunge untersucht werden.

Literaturverzeichnis

- [1] ADLER, K., AND BRÜCKER, C. Dynamic flow in a realistic model of the upper human lung airways. *Experiments in Fluids 2–3* (2007), 411–423.
- [2] AMESTOY, P. R., DAVIS, T. A., AND DUFF, I. S. An approximate minimum degree ordering algorithm. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 17*, 4 (1996), 886–905.
- [3] AMESTOY, P. R., DAVIS, T. A., AND DUFF, I. S. Algorithm 837: AMD, An approximate minimum degree ordering algorithm. *ACM Transactions on Mathematical Software 30*, 3 (2004), 381–388.
- [4] CHOI, J., XIA, G., TAWHAI, M., HOFFMAN, E., AND LIN, C.-L. Numerical Study of High-Frequency Oscillatory Air Flow and Convective Mixing in a CT-Based Human Airway Model. *Annals of Biomedical Engineering 38* (2010), 3550–3571.
- [5] COMERFORD, A., FÖRSTER, C., AND WALL, W. A. Structured Tree Impedance Outflow Boundary Conditions for 3D Lung Simulations. *Journal of Biomechanical Engineering 132* (2010), 081002.
- [6] DAVIS, T. A. Algorithm 832: UMFPACK, an unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Transactions on Mathematical Software 30*, 2 (2004), 196–199.
- [7] DAVIS, T. A. A column pre-ordering strategy for the unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Transactions on Mathematical Software 30*, 2 (2004), 165–195.
- [8] DAVIS, T. A. Direct Methods for Sparse Linear Systems. SIAM Book Series on the Fundamentals of Algorithms. SIAM, Philadelphia, 2006.
- [9] DAVIS, T. A. UMFPACK: unsymmetric multifrontal sparse LU factorization package. <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/umfpack/>, 2011. University of Florida [Online; besucht 20.03.2013].
- [10] DAVIS, T. A., AMESTOY, P. R., AND DUFF, I. S. AMD: approximate minimum degree ordering. <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/amd/>, 2012. University of Florida [Online; besucht 20.03.2013].
- [11] DAVIS, T. A., AND DUFF, I. S. An unsymmetric-pattern multifrontal method for sparse LU factorization. *ACM Transactions on Mathematical Software 18*, 1 (1997), 140–158.
- [12] DAVIS, T. A., AND DUFF, I. S. A combined unifrontal/multifrontal method for unsymmetric sparse matrices. *ACM Transactions on Mathematical Software 25*, 1 (1999), 1–19.

Literaturverzeichnis

- [13] ECKMANN, D. M., AND GROTBORG, J. B. Experiments on transition to turbulence in oscillatory pipe flow. *Journal of Fluid Mechanics* 222 (1991), 329–350.
- [14] ELAD, D., SHOCHAT, A., AND SHINER, R. J. Computational model of oscillatory airflow in a bronchial bifurcation. *Respiration Physiology* 112 (1997), 95–111.
- [15] FELDMANN, D., AND WAGNER, C. Numerical simulation of the oscillatory ventilation in simplified human lung models. In *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics VIII*, Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Springer Berlin Heidelberg, 2010. in print.
- [16] GLÜCK, B. *Hydrodynamische und Gasdynamische Rohrströmung, Druckverluste*. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1988.
- [17] GROTBORG, J. B. Pulmonary flow and transport phenomena. *Annual Review of Fluid Mechanics* 26 (1994), 529–571.
- [18] GROTBORG, J. B. Respiratory Fluid Mechanics and Transport Processes. *Annual Review of Biomedical Engineering* 3 (2001).
- [19] HAGEN, G. H. L. über die Bewegung des Wassers in engen cylindrischen Röhren. *Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie* 46 (1839), 423–442.
- [20] HAGER, D. N., FESSLER, H. E., KACZKA, D. W., SHANHOLTZ, C. B., FULD, M. K., SIMON, B. A., AND BROWER, R. G. Tidal volume delivery during high-frequency oscillatory ventilation in adults with acute respiratory distress syndrome. *Critical Care Medicine* 35 (2007), 1522–1529.
- [21] HORSFIELD, K., DART, G., OLSON, D. E., FILLEY, G. F., AND CUMMING, G. Models of the human bronchial tree. *Journal of Applied Physiology* 31, 2 (1971), 207–217.
- [22] KABILAN, S., KUPRAT, A., CORLEY, R. A., BASSINGTHWAIGHTE, J. B., AND EINSTEIN, D. R. Multiscale Modeling of the Human Respiratory System. *Pacific Northwest National Laboratory* (2008).
- [23] KANTOROVICH, L. V., AND AKILOV, G. P. *Functional Analysis in Normed Spaces*. Pergamon Press, Elmsford, New York, 1964.
- [24] KÖTHE, T. Entwicklung und Implementierung eines eindimensionalen Bernoulli-Modells der Ventilation in der menschlichen Lunge. Diploma thesis, Otto-von-Guericke-Universität, Magdeburg, Germany, 2011.
- [25] KRENKEL, L., FELDMANN, D., AND WAGNER, C. Optimierung der Hochfrequenz-oszillationsventilation mittels strömungsmechanischer Methoden und kontrastgasgestützter Magnetresonanztomographie. In *3. Dresdner Medizintechnik-Symposium mit DFG Forschungsschwerpunkt Protektive Beatmungskonzepte* (Dresden, 2011).
- [26] KRISHNAN, J. A., AND BROWER, R. G. High-Frequency Ventilation for Acute Lung Injury and ARDS*. *CHEST Journal* 118, 3 (2000), 795–807.

- [27] LANDAU, L., LIFŠIC, E., AND ZIESCHE, P. *Band 6: Hydrodynamik*. Lehrbuch der theoretischen Physik : in 10 Bänden / L.D. Landau; E.M. Lifschitz. In dt. Sprache hrsg. von Paul Ziesche. Akad.-Verlag, 1991.
- [28] MÜLLER, I., AND STRUCHTRUP, H. Inflating a Rubber Balloon. *Mathematics and Mechanics of Solids* 7 (2002), 569–577.
- [29] MÜLLER, T., BUDWEISER, S., MUDERS, F., SCHULZ, C., JERON, A., NEUHIERL, F., RIEGER, G., AND PFEIFER, M. Hochfrequenzoszillationsventilation beim akuten Lungenversagen des Erwachsenen. *Deutsches Ärzteblatt* 14 (2004), A928–A934.
- [30] OCZENSKI, W. *Atmen - Atemhilfen: Atemphysiologie and Beatmungstechnik*, 9. ed. Thieme, Stuttgart, 2012.
- [31] OLUFSEN, M. S. Structured tree outflow condition for blood flow in larger symmetric arteries. *American Journal Physiology Heart and Circulatory Physiology* 276 (1999), H257–H268.
- [32] OLUFSEN, M. S., PESKIN, C. S., KIM, W. Y., PEDERSEN, E. M., NADIM, A., AND LARSEN, J. Numerical Simulation and Experimental Validation of Blood Flow in Arteries with Structured-Tree Outflow Conditions. *Annals of Biomedical Engineering* 28 (2000), 1281–1299.
- [33] OPENCFD LTD (ESI GROUP). OpenFOAM v2.1.1: Open Source Field Operation and Manipulation. <http://www.openfoam.com>, 2013. [Online; besucht 20.03.2013].
- [34] PEDLEY, T. J. Pulmonary fluid dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics* 9 (1977), 229–274.
- [35] POISSEUILLE, J. L. M. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres: I. Influence de la pression sur la quantité de liquide qui traverse les tubes de très petits diamètres. *Comptes rendus Academy of Science* 11 (1840), 961–967.
- [36] RICHARDSON, E. G., AND TYLER, E. The Transverse Velocity Gradient Near the Mouth of Pipes in which an Alternating or Continuous Flow of Air is Established. *Proceedings of the Physical Society* 42 (1929).
- [37] SCHLICHTING, H., AND GERSTEN, K. *Grenzschicht-Theorie*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [38] SCHRÖDER, W. *Fluidodynamik*, 3 ed. Wissenschaftsverlag Mainz in Aachen, 2010.
- [39] SEXL, T. über den von E. G. Richardson entdeckten “Annulareffekt”. *Zeitschrift für Physik* 61 (1930), 349–362.
- [40] SOODT, T., HENZE, A., BOENKE, D., KLAAS, M., AND SCHRÖDER, W. *Fundamental Medical and Engineering Investigations on Protective Artificial Respiration*, vol. 116 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*. Springer, 2011, ch. Fluid Mechanical Equilibrium Processes in a Multi-bifurcation Model, pp. 81–95.

Literaturverzeichnis

- [41] TAWAHAI, M. H., HUNTER, P., TSCHIRREN, J., REINHARDT, J., MCLENNAN, G., AND HOFFMANN, E. A. CT-based geometry analysis and finite element models of the human and ovine bronchial tree. *Journal of Applied Physiology* 6, 97 (2004), 2310 – 2321.
- [42] TEICHMANN, R. *Alternierende Verzweigungsströmungen am Beispiel des bronchialen Systems*. PhD thesis, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, 1993.
- [43] TRUCKENBRODT, E. *Fluidmechanik Band 1*. Springer – Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.
- [44] TRUKENMÜLLER, K. E. *Stabilitätstheorie für die oszillierende Rohrströmung*. PhD thesis, Helmut–Schmidt–Universität, Hamburg, 2006.
- [45] WEIBEL, E. R. *Morphometry of the human lung*. Springer–Verlag and Academic Press, Berlin, New York, 1963.
- [46] WOMERSLEY, J. R. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure is known. *Journal of Physiology* 127 (1955), 553–563.
- [47] ZIELKE, W. *Frequency dependent friction in transient pipe flow*. PhD thesis, University of Michigan, 1966.