

DOTTORATO DI RICERCA IN
MECCANICA DELLE STRUTTURE

Sede Amministrativa: Università degli Studi di Bologna

ICAR/09 – Tecnica delle Costruzioni

LORIS VINCENZI

IDENTIFICAZIONE DINAMICA DELLE
CARATTERISTICHE MODALI E DELLE
PROPRIETÀ MECCANICHE DI STRUTTURE
MEDIANTE ALGORITMI DI OTTIMIZZAZIONE

Dissertazione presentata per il conseguimento del titolo di
Dottore di Ricerca in Meccanica delle Strutture

XIX ciclo

Relatore: Prof. Marco Savoia

Correlatore: Prof. Claudio Mazzotti

Coordinatore del Dottorato: Prof. Erasmo Viola

Marzo 2007

Parole chiave:

- *identificazione dinamica*
- *test sperimentali*
- *ottimizzazione parametrica*
- *algoritmi genetici*

INDICE

Introduzione	15
Introduction	23
1. EQUAZIONE DEL MOTO DI UN SISTEMA VIBRANTE E ANALISI DEL SEGNALE	29
1.1 MODELLAZIONE DI UN SISTEMA MECCANICO	30
1.1.1 Equazioni del moto e caratteristiche dinamiche delle strutture	31
1.1.2 Equazione del moto in forma di stato	32
1.1.3 Equazione di osservabilità o trasformazione d'uscita	34
1.2 MODELLO DI STATO IN FORMA DISCRETA	36
1.3 ANALISI DEL SEGNALE	38
1.3.1 Caratteristiche dei fenomeni aleatori	38
1.3.2 Serie e trasformata di Fourier	39
1.3.3 Fuzione di Autocorrelazione, Cross-correlazione, Autospettro e Cross- spetro	40
1.3.4 Risposta di un sistema ad un input impulsivo	41
1.3.5 Funzioni di Risposta in Frequenza	42
1.3.6 Funzioni di risposta in frequenza in termini di spostamento, velocità e accelerazione.	45
1.4 LE FRF NEI SISTEMI A N GRADI DI LIBERTÀ	46

2.	IDENTIFICAZIONE DINAMICA NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE	49
2.1	INTRODUZIONE.....	49
2.2	MDOF CIRCLE FIT METHOD	50
2.3	UNA APPLICAZIONE: IDENTIFICAZIONE DELLE CARATTERISTICHE MODALI DI UN TELAIO	57
3.	IDENTIFICAZIONE DINAMICA NEL DOMINIO DEL TEMPO	63
3.1	INTRODUZIONE.....	63
3.2	MODELLI A RAPPRESENTAZIONE ESTERNA.....	65
3.2.1	Modelli a errore d'equazione	65
3.2.2	Modelli AR e ARX.....	67
3.2.3	Modelli ARMA e ARMAX	68
3.2.4	Modelli ARMAV	70
3.3	PREDIZIONE DEL SEGNALE.....	71
3.3.1	Predittori AR e predittori ARX	72
3.3.2	Predittori ARMA e ARMAX.....	72
3.4	PREDICTION ERROR METHOD (PEM)	73
3.4.1	Stima dei parametri per i processi AR e ARX.....	74
3.4.2	Stima dei parametri per i processi ARMA e ARMAX.....	76
3.5	MODELLI A RAPPRESENTAZIONE INTERNA O MODELLI DI STATO	78
3.6	STIMA DELLO STATO IN PRESENZA DI DISTURBI: IL FILTRO DI KALMAN	81
3.6.1	Stimatore di Bayes.....	81
3.6.2	Stimatore nel caso multivariabile	83

3.6.3	Formulazione della predizione alla Kalman	84
3.6.4	Espressione ricorsiva della predizione dello stato.	86
3.7	RISOLUZIONE DEL MODELLO DI STATO MEDIANTE METODI A SOTTOSPAZI	90
3.7.1	Risoluzione del problema di identificazione mediante metodi a sottospazi	92
3.7.2	Definizione delle principali variabili utilizzate nel processo di identificazione	93
3.7.3	Determinazione delle matrici del sistema	99
3.8	INDIVIDUAZIONE DEI MODI STRUTTURALI	103
3.8.1	Determinazione delle caratteristiche modali	103
3.8.2	Scelta dell'ordine del sistema.....	104
3.9	VALIDAZIONE DI UN MODELLO	106
3.10	UNA APPLICAZIONE: IDENTIFICAZIONE DI UN TELAIO AL VARIARE DELL'ENTITÀ DEL RUMORE NELLE MISURE.....	109
4.	ANALISI SPERIMENTALI DI STRUTTURE MEDIANTE METODI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE	115
4.1	INTRODUZIONE.....	115
4.1.1	Tipi di eccitazione nell'analisi modale sperimentale	116
4.1.2	Strumentazione usata nell'analisi modale sperimentale.....	119
4.2	APPLICAZIONE DEI METODI DI IDENTIFICAZIONE A STRUTTURE CIVILI	124
4.3	OSPEDALE S. MARIA NUOVA IN REGGIO EMILIA	127
4.4	SCAVALCO SU CORSO CASTELFIDARDO A TORINO.....	136
4.4.1	Descrizione della struttura oggetto di indagine	136

4.4.2	Prove dinamica con vibrodina.....	137
4.4.3	Identificazione dei modi propri dalle FRF sperimentali	141
4.4.4	Modello numerico agli elementi finiti	144
4.4.5	Correlazione tra dati sperimentali e risultati numerici.....	146
5.	APPLICAZIONI SPERIMENTALI DEI METODI DI IDENTIFICAZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO.....	147
5.1	VIADOTTO INCORONATA SULL’AUTOSTRADA SALERNO-REGGIO CALABRIA.....	148
5.1.1	Descrizione della struttura oggetto di indagine sperimentale.....	149
5.1.2	Descrizione delle prove dinamiche.....	151
5.1.3	Risultati ottenuti.....	153
5.1.4	Modello FEM e correlazione tra dati numerici e sperimentali	158
5.2	PASSERELLA PEDONALE SUL FIUME MARECCHIA - RIMINI	161
5.2.1	Descrizione della struttura	161
5.2.2	Confronto tra i risultati ottenuti	162
	Introduzione.....	169
	Introduction	175
6.	DIFFERENTIAL EVOLUTION ALGORITHM ED APPLICAZIONI A PROBLEMI DI IDENTIFICAZIONE	181
6.1	DIFFERENTIAL EVOLUTION ALGORITHM.....	181
6.1.1	Operazione di <i>Mutation</i>	184
6.1.2	Operazione di <i>Crossover</i>	186
6.1.3	Operazione di <i>Selection</i>	186
6.1.4	Bound constraint	187

6.1.5	Criteri di convergenza.....	189
6.2	DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO	190
6.3	APPLICAZIONI DELL'ALGORITMO DI OTTIMIZZAZIONE A PROBLEMI DI IDENTIFICAZIONE DINAMICA	193
6.3.1	Esempio 1: identificazione di un telaio a tre piani.	195
6.3.2	Definizione della funzione costo	195
6.3.3	Esempio 1: identificazione partendo da dati esatti.	199
6.3.4	Esempio 1: identificazione partendo da dati pseudo-sperimentali.....	202
6.3.5	Esempio 1: identificazione a 3 parametri.	206
6.3.6	Esempio 2: identificazione di una struttura da ponte in sistema misto acciaio-calcestruzzo.....	208
7.	CONFRONTO TRA IL DIFFERENTIAL EVOLUTION ALGORITHM ED IL COUPLED LOCAL MINIMIZER METHOD	215
7.1	COUPLED LOCAL MINIMIZERS (CLM) METHOD	216
7.1.1	Augmented Lagrangian method	218
7.1.2	Esempio: identificazione di un danno localizzato per una trave semplicemente appoggiata.	221
7.1.3	Identificazione del danno in una trave con due fessure	228
8.	INTRODUZIONE DI UNA APPROSSIMAZIONE QUADRATICA NELL'ALGORITMO DE	233
8.1	INTRODUZIONE.....	233
8.2	LA METODOLOGIA DELLA SUPERFICIE DI RISPOSTA	235
8.3	ALGORITMO DE CON APPROSSIMAZIONE QUADRATICA	239

8.4	1° ESEMPIO: IDENTIFICAZIONE DI UNA STRUTTURA DA PONTE ACCIAIO-CALCESTRUZZO	243
8.5	2° ESEMPIO: OTTIMIZZAZIONE DEI PARAMETRI MECCANICI DEL VIADOTTO INCORONATA SULL'AUTOSTRADA SA-RC .	246
8.5.1	Modello agli Elementi Finiti	247
	bibliografia.....	251

Le moderne metodologie di progettazione strutturale impongono, oramai, il ricorso sempre più massiccio a modelli matematici per la previsione del comportamento strutturale; fra questi, è ormai abituale l'uso degli elementi finiti. L'attendibilità dei risultati che si possono ottenere con queste modellazioni dipende, ovviamente, dalle ipotesi che sono poste alla base delle stesse in termini, ad esempio, di condizioni di vincolo, modalità di comportamento dei materiali, proprietà meccaniche, etc... D'altro canto, non è sempre possibile riscontrare se le ipotesi assunte nel calcolo siano poi, di fatto, verificate nella costruzione eseguita, in particolare per quel che riguarda le grandezze che caratterizzano il comportamento dinamico. In quest'ambito, assumono un'importanza significativa la sperimentazione delle strutture e le tecniche di rielaborazione dei risultati sperimentali che consentono la successiva identificazione dei parametri significativi.

In questo contesto, nella **PARTE I** della tesi sono descritte e utilizzate tecniche di identificazione dinamica per la determinazione delle caratteristiche modali delle strutture (in termini di frequenze proprie, deformate modali e smorzamenti) mediante algoritmi definiti sia nel dominio delle frequenze che nel dominio del tempo.

Nel **Capitolo 1** sono richiamate alcune nozioni di base della Dinamica delle Strutture ed è ricavata l'equazione del moto dei sistemi meccanici mediante rappresentazione di stato. La sezione successiva è dedicata a descrivere i fondamenti dell'Analisi del Segnale, necessaria per ricavare le Funzioni di Risposta in Frequenza (FRF), ampiamente utilizzate nelle tecniche di identificazione nel dominio delle frequenze.

Nel **Capitolo 2** si rivolge l'attenzione agli algoritmi di identificazione nel dominio delle frequenze. Essi prevedono l'acquisizione di accelerazioni, velocità e spostamenti, inducendo alla struttura eccitazioni forzate (ottenute, ad esempio, da una vibrodina meccanica), dalle quali è possibile ottenere le relative FRF. Il MDOF Circle-fit method è tra i metodi più diffusi operanti nel dominio delle frequenze e si basa sull'osservazione che, nell'intorno di una frequenza propria del sistema, i punti della funzione complessa inerzia, se rappresentati nel piano complesso di Nyquist, descrivono una circonferenza. Viene descritta la procedura e ricavate le equazioni che permettono di ottenere i parametri modali in termini di frequenze proprie, smorzamenti e deformate modali. Il MDOF Circle Fit Method è stato quindi utilizzato per caratterizzare la risposta dinamica di una struttura a telaio, sottoposta ad oscillazioni forzate, simulando numericamente lo svolgimento di una prova effettuata con eccitatore meccanico (vibrodina). Si è infine valutata l'accuratezza del metodo sommando una variabile aleatoria alla risposta numerica al fine di simulare la presenza di errore nelle misure; sono quindi presentati i risultati ottenuti al variare dell'intensità del rumore stesso.

Il **Capitolo 3** analizza nel dettaglio alcuni metodi operanti nel dominio del tempo, ponendo l'attenzione ai quei metodi che risultano più robusti sia dal punto di vista teorico che dal punto di vista applicativo. In particolare, vengono illustrati i modelli autoregressivi e a media mobile (modelli ARMAV) e i modelli a sottospazi. Le tecniche nel dominio del tempo utilizzano usualmente eccitazione di tipo ambientale, permettendo l'esecuzione delle prove sulla struttura in condizioni di esercizio avvalendosi delle registrazioni della sola

risposta strutturale (metodi output-only). Esse, basandosi sulla predizione del segnale ad un dato istante mediante l'utilizzo di espressioni ricorsive della stima Baiesiana, sono inoltre in grado di considerare le incertezze dovute agli errori di acquisizione del segnale.

Nei **Capitoli 4 e 5** vengono proposte applicazioni su strutture al vero dei metodi descritti. Vengono esaminate differenti tipologie di strutture: l'Ospedale S. Maria Nuova in Reggio Emilia, caratterizzato da una struttura a telaio e nuclei in c.a., soggetto a prove di vibrazione forzata. Una struttura metallica facente parte dell'ampliamento del Politecnico di Torino; si tratta di una struttura dalla geometria complessa con dimensioni di 96 metri in lunghezza e 15.60 metri in larghezza, rialzata rispetto al piano di campagna, ed in appoggio su otto pile in calcestruzzo armato.

La caratterizzazione dinamica del Viadotto Incoronata (Autostrada A3 Salerno-Reggio Calabria) è stata ottenuta grazie all'eccitazione indotta dal traffico veicolare. Il viadotto, costituito da due ponti gemelli a tre campate, è caratterizzata da una sezione a cassone in c.a.p. ad altezza variabile. Il processo di identificazione ha permesso di evidenziare 10 deformate modali e i relativi valori di smorzamento. Le deformate modali sono caratterizzate da spostamenti accoppiati tra i due viadotti, concordi o discordi. Infine, si propone un confronto tra diverse metodologie di identificazione per la determinazione di frequenze proprie, deformate modali e smorzamenti attraverso lo studio di una passerella pedonale ad arco a via inferiore realizzata in legno lamellare costruita a Rimini sul fiume Marecchia.

I risultati provenienti da una corretta sperimentazione e un'efficiente identificazione dinamica rappresentano la base di riferimento per la caratterizzazione del comportamento strutturale e per poter affinare i modelli numerici (ad esempio modelli a Elementi Finiti). Di conseguenza, i modelli possono essere corretti attraverso un processo di ottimizzazione, nel quale alcune incertezze riguardanti i parametri meccanici della struttura sono

ottimizzati fin quando le proprietà dinamiche del modello sono più simili possibili ai risultati ottenuti dalle elaborazioni sperimentali (Model Updating). Il problema di identificazione può quindi essere visto come un problema di ottimizzazione, dove la funzione costo è la distanza tra frequenze proprie e deformate modali sperimentali, ottenute mediante prove dinamiche, e le stesse ottenute dal modello numerico. Il successo del processo di ottimizzazione dipende da una appropriata definizione della funzione costo e dalla capacità dell'algoritmo di trovare il minimo globale del problema.

Nella **PARTE II** della tesi vengono quindi descritte le procedure che possono essere utilizzate nella determinazione di parametri meccanici delle strutture note le caratteristiche dinamiche del sistema.

Nel **Capitolo 6**, sono illustrati i risultati ottenuti dall'ottimizzazione di modelli agli Elementi Finiti di differenti strutture (telai, ponti) mediante un algoritmo evolutivo, il Differential Evolution (DE) Algorithm. Tale algoritmo utilizza diversi vettori contemporaneamente, ognuno contenente i parametri da ottimizzare. Selezionata la popolazione iniziale in modo aleatorio su tutto lo spazio dei possibili valori assunti dai parametri, l'algoritmo *DE* genera un nuovo vettore di parametri, sommando ad ogni vettore la differenza pesata della differenza di altri due vettori. Durante le analisi si sono ipotizzati incogniti valori di masse, rigidzze dei vincoli e caratteristiche dei materiali, considerando assegnati frequenze proprie e deformate modali.

Nel **Capitolo 7**, l'algoritmo è stato confrontato con altri algoritmi di ricerca globale quali il *Coupled Local minimizer*, che opera mediante minimizzatori locali accoppiati. Vengono confrontate velocità di convergenza e accuratezza dei risultati in termini statistici.

Invece di eseguire la procedura di ottimizzazione direttamente sulla funzione costo, metodologie quali la *Response Surface Methodology* (RSM) ottengono il minimo mediante successive approssimazioni della funzione stessa. Nella procedura classica, la superficie di risposta è ottenuta combinando termini polinomiali di primo e secondo ordine, che interpolano la funzione

errore originaria in determinati punti prefissati.

Partendo dall'architettura dell'algoritmo DE, nel **Capitolo 8** viene proposta una modifica all'algoritmo genetico introducendo nel processo di ottimizzazione l'approssimazione quadratica tipica della *Response Surface Methodology*. La velocità di convergenza risulta essere notevolmente aumentata, mantenendo però la peculiarità di trovare il minimo globale, caratteristica dei metodi quali algoritmi genetici ed evolutivi.



PARTE I

INTRODUZIONE

Nella progettazione strutturale è frequente l'adozione di modelli matematici, a volte complessi, per la determinazione dello stato di sollecitazione e di deformazione delle strutture; fra questi è ormai solito l'uso degli elementi finiti. Le risposte che si possono ottenere con queste modellazioni dipendono dalle ipotesi che sono poste alla base delle stesse. È tuttavia importante, ma non sempre possibile, riscontrare se le ipotesi assunte nel calcolo sono verificate. L'osservazione e il confronto tra i risultati del modello numerico e gli esiti sperimentali assume un'importanza ancora più rilevante nel caso di strutture sottoposte a carichi dinamici. In campo civile, infatti, l'affidabilità di alcuni tipi di strutture come ponti sospesi ed edifici in zone sismiche è affidata alla previsione e determinazione dei modi e periodi propri di vibrare.

Per tali ragioni, le tecniche di identificazione delle proprietà dinamiche e meccaniche delle strutture rivestono un'importanza significativa, in particolare nel caso di collaudo di strutture complesse. In questi casi, le prove consistono nell'applicazione di una forzante dinamica e nella misurazione delle accelerazioni conseguenti, in alcune posizioni, per definire periodi propri e la

deformata della struttura. Dall'analisi successiva delle acquisizioni accelerometriche è possibile, inoltre, determinare le caratteristiche dinamiche del sistema mediante elaborazioni nel dominio delle frequenze o nel dominio del tempo.

Gli algoritmi nel dominio delle frequenze prevedono l'acquisizione di accelerazioni dalle prove sperimentali solitamente fornendo alla struttura una eccitazione forzata (per mezzo, ad esempio, di una vibrodina meccanica). I metodi definiti nel dominio delle frequenze operano ricavando le *funzioni di risposta in frequenza (FRF)* dalle quali è possibile individuare i periodi propri, gli smorzamenti e le deformate modali della struttura. Le *FRF* sono tipicamente ottenute per mezzo di analisi mediante la *Fast Fourier Transform (FFT)*.

Il metodo più semplice per la determinazione delle caratteristiche modali delle strutture nel dominio delle frequenze è il metodo *Peak-Picking (PP)*. Il metodo prende nome dal fatto che la determinazione delle frequenze proprie è ottenuta dalla frequenza corrispondente ai picchi del modulo della *FRF*. Data la sua semplicità, nel passato è stato il metodo più diffuso per la determinazione delle caratteristiche modali di strutture civili [Bendat & Piersol, 1993]. Il metodo assume che lo smorzamento sia modesto e che i modi siano ben separati tra loro, in modo tale che le frequenze proprie non interagiscono. Nel caso in cui questo non accada, l'applicazione del metodo risulta essere affetto da errori importanti. Questo è dovuto al fatto che il metodo, in realtà, identifica gli *operating deflection shape* invece dei modi propri, ottenuti per somma di contributi di diversi modi propri. Un altro svantaggio dovuto all'applicazione di tale metodologia è dovuto alla "soggettività" necessaria nella scelta delle frequenze proprie quando la *FRF* è definita con scarsa risoluzione o quando nella *FRF* è presente un elevato livello di rumore nelle misure [Ewins, 2000].

Il metodo denominato *Complex Mode Indication Function (CMIF)* è considerato un'estensione del metodo *PP*, nel quale è stata introdotta una scomposizione ai valori singolari (*Singular Value Decomposition, SVD*) allo

scopo di separare il contributo dei singoli modi. Come suggerisce il nome, il *CMIF* è stato sviluppato originariamente per individuare ed enumerare il numero di modi presenti nelle misure effettuate [Peeters, 2000; Allemang & Brown, 1998]. Il metodo è caratterizzato da una procedura di diagonalizzazione della matrice di densità spettrale tramite la tecnica del *SVD*, in modo da separare i modi accoppiati e ottenere da un sistema a N gradi di libertà (*GDL*), N sistemi ognuno ad un singolo *GDL*. Il metodo consente di ottenere i parametri modali delle strutture soggette sia a vibrazioni forzate che per forzanti di tipo ambientale. Un'estensione del *CMIF* può essere ottenuta sostituendo al *PP method*, metodi più evoluti per la determinazione delle caratteristiche modali, una volta ottenuta la decomposizione della matrice spettrale in singoli gradi di libertà [Maia et al., 1997].

Il Circle-fit method [Ewins, 2000] è tra i metodi più diffusi operanti nel dominio delle frequenze. Esso si basa sull'osservazione che, nell'intorno di una frequenza propria del sistema, i punti della FRF, se rappresentati nel piano complesso di Nyquist, descrivono una circonferenza. Tale metodologia, semplice ma affidabile, è descritta ed utilizzata nei capitoli successivi per ottenere le caratteristiche dinamiche di strutture oggetto di sperimentazione.

I sistemi di eccitazione artificiale, in particolare i sistemi di tipo meccanico (es. vibrodina), hanno il vantaggio di poter imporre, misurare e controllare il moto della struttura, ma anche il grande svantaggio di richiedere l'interruzione dell'esercizio dell'opera per poter effettuare la prova.

L'utilizzo dell'eccitazione di tipo ambientale permette invece di eseguire le prove sulla struttura senza la necessità di interrompere il normale esercizio dell'opera durante le prove sperimentali. Tra le metodologie di identificazione strutturale esistenti rivestono particolare importanza quelle che utilizzano eccitazioni di tipo ambientale quali l'azione del vento o del traffico veicolare e necessitano l'acquisizione della sola risposta strutturale (metodi output-only). Il problema della stima delle caratteristiche modali disponendo

dalla sola risposta strutturale è una disciplina nota come *stochastic system identification*. Il termine stocastico sta ad indicare che la forzante incognita, sotto alcune ipotesi, può essere sostituita da un processo tipo rumore bianco, definito dalle sue caratteristiche statistiche.

Tra le metodologie output-only, un approccio molto diffuso per la stima di frequenze proprie, deformate modali e smorzamenti nel dominio del tempo è il modello Auto-Regressive Moving Average (*ARMA*). Esso è caratterizzato dal fatto che si descrive l'uscita del modello (ovvero il segnale acquisito) tramite la combinazione lineare dei suoi valori assunti in istanti precedenti (parte Auto-Regressiva) e la combinazione lineare dei valori assunti dalla forzante nei medesimi istanti (parte a Media Mobile). Se la forzante non è nota, essa viene assunta quale rumore bianco. È inoltre possibile dimostrare che i modelli *ARMA* descrivono il comportamento dinamico di un sistema vibrante. Il metodo richiede la selezione dell'ordine del modello e la distinzione tra modi strutturali e non strutturali. Tale operazione è usualmente effettuata tramite diagrammi di stabilizzazione. L'ordine ottimale del modello è determinato utilizzando parametri quali il criterio di Akaike (denominato *Final Prediction Error*) o il *Minimum Description Length (DML)*. Un'ampia e dettagliata esposizione dei criteri citati è presente in [Ljung, 1999]. La determinazione delle caratteristiche modali avviene ricercando i valori dei coefficienti autoregressivi e a media mobile. Il metodo di risoluzione denominato *Prediction Error Method*, ampiamente utilizzato nelle applicazioni pratiche, scaturisce in un problema di ottimizzazione altamente non lineare nei parametri incogniti, a causa della presenza della parte a media mobile.

Il metodo *instrumental variable (IV)* fa uso di matrici covarianza e, a differenza di altri metodi, non opera alcun tipo di scomposizione. Il metodo può essere visto come un caso particolare del modello *ARMA*, nel quale è identificata la sola parte autoregressiva del modello. In tal caso, la risoluzione non necessita di alcun processo di ottimizzazione in quanto è possibile ottenere

i parametri che governano il modello dalla risoluzione di un sistema lineare [Guidorzi, 2003].

La tecnica denominata *Polyreference Time Domain (PTD)* è una tecnica simile alla *IV* nella quale si pongono i dati noti in termini di *impulse response function* al posto delle relative matrici di covarianza. Il *PTD* è un metodo che generalizza il metodo *Least Square Complex Exponential (LSCE)* e il metodo di Ibrahim (*Ibrahim Time Domain, ITD*). Una ampia trattazione è presente in [Peters, 2000].

Il *metodo di Ibrahim* è stato sviluppato per estrarre i parametri modali da una serie di acquisizioni ottenuta in condizione di oscillazioni libere. Nella procedura si determina una matrice in modo ricorsivo, dalla quale è possibile estrarre i parametri modali e determinare frequenze proprie e smorzamenti. Anche la tecnica di Ibrahim fa uso di diagrammi per la determinazione dei modi propri della struttura e per distinguerli da quelli puramente numerici ottenuti a causa del rumore nelle misure [Ewins, 2000, Mohanty, 2003].

Il metodo di decremento logaritmico è uno dei più antichi per la determinazione del coefficiente di smorzamento, introdotto da Cole nel 1968 [Cole, 1968] e modificato successivamente da diversi autori [Ibrahim, 1977]; più recente, anche se sempre tra gli algoritmi classici, è il metodo noto come *ERA (Eigensystem Realization Algorithm)*; sviluppato da Juang [Juang & Pappa, 1985], è un'applicazione dell'analisi modale mediante algoritmi di realizzazione deterministici.

La realizzazione legata alla risoluzione di sistemi output-only è stata introdotta da Aoki (1987). Questo metodo consente di determinare i parametri modali di un sistema dinamico in base alla descrizione del suo comportamento posto nella rappresentazione di stato (o spazio delle fasi), ottenendone una forma basata sul principio della teoria della minima realizzazione introdotta da Kalman. Il principio generale è quello di legare la risposta teorica a quella effettivamente misurata in alcuni punti di acquisizione mediante una matrice di trasformazione. La procedura inizia con la definizione di una matrice che

contiene le risposte acquisite durante oscillazioni libere della struttura. Tale matrice è utilizzata per la costruzione delle matrici di Hankel generalizzate. Mediante l'utilizzo del *Singular Value Decomposition* è possibile determinare l'ordine minimo del sistema per ottenere matrici aventi ordine ridotto. Da queste possono essere stimate le frequenze proprie e deformate modali. Applicazioni dell'algoritmo ed il confronto con altre metodologie è riportato in [Sabia et al., 2004]. In [Benveniste & Fuchs, 1985], inoltre, si dimostra anche che l'algoritmo risulta essere robusto anche in caso di dati non stazionari (ad esempio, dovuti a rumori con matrici di covarianza variabili nel tempo).

Tra le tecniche di identificazione basate su algoritmi di ottimizzazione si ricorda il metodo di massima verosimiglianza (*Maximum Likelihood, ML*) nel quale i parametri sono ottenuti mediante un processo di ottimizzazione non lineare [Verboven, 1982]. A causa di tali non linearità, è necessaria una procedura iterativa di ottimizzazione nella quale la presenza di numerosi minimi locali, la scarsa sensitività della funzione obiettivo ai parametri incogniti possono determinare problemi di convergenza. Inoltre, tali metodi sono caratterizzati da un alto costo computazionale. Originariamente applicati direttamente alle FRF, essi possono essere utilizzati anche nel caso di identificazione output-only [Guillaume et al., 1999].

Recentemente, molti ricercatori hanno posto l'attenzione sugli algoritmi di identificazione a *sottospazi*. I metodi a sottospazi pongono l'equazione del moto in forma di stato dati i segnali di ingresso (forzante) e uscita (risposta strutturale) applicando tecniche algebriche semplici quali decomposizione *QR*, *SVD* e procedure ai minimi quadrati. La forzante può essere nota o essere posta pari ad un processo stocastico di proprietà note.

Il nome “metodi a sottospazi” riflette il fatto che le matrici contenenti il segnale misurato possono essere interpretate come uno spazio vettoriale dove le colonne di tale matrice rappresentano una base di vettori, mentre le righe permettono di ottenere una sequenza di stime valutate mediante una batteria di

filtri di Kalman [Van Overschee & De Moor, 1996]. Tali matrici, possono essere determinate direttamente dalla sola conoscenza dei segnali di uscita, senza la conoscenza a priori delle matrici caratterizzanti il modello [Peeters 2000]. A differenza dei più classici algoritmi di risoluzione quali il *Prediction Error Method* [Ljung 1999; Vincenzi e Savoia 2005], che richiede la soluzione di un processo di ottimizzazione non lineare, i metodi a sottospazi ottengono le matrici dinamiche caratterizzanti il sistema mediante la risoluzione di un problema lineare. In ultimo, essi non manifestano problemi di convergenza in quanto non sono metodi iterativi, risultando pertanto più affidabili e robusti.

Obiettivo della Parte I della tesi è la descrizione di metodi di identificazione definiti nel dominio delle frequenze e nel dominio del tempo e la loro applicazione a strutture in campo civile. Metodi nel dominio del tempo e nel dominio delle frequenze sono stati messi a confronto partendo da registrazioni sperimentali, ottenuti mediante test su strutture al vero.

Vengono esaminate differenti tipologie di strutture: l'Ospedale S. Maria Nuova in Reggio Emilia, caratterizzato da una struttura a telaio e nuclei in c.a., soggetta a prove di vibrazione forzata. Al momento della prova i muri esterni di tamponamento erano stati già completamente realizzati; dall'indagine sperimentale sono stati ottenuti smorzamenti significativamente elevati (con valori compresi tra il 4 e il 5%), a causa proprio della presenza della muratura di tamponamento tra i telai in c.a.

Si esamina successivamente una struttura metallica facente parte dell'ampliamento del Politecnico di Torino. Si tratta di una struttura dalla geometria complessa di dimensioni di 96 metri di lunghezza e 15.60 metri di larghezza, rialzata rispetto al piano di campagna, ed in appoggio su otto pile in calcestruzzo armato. Sono presentati i risultati sperimentali, ottenuti disponendo la vibrodina in diverse posizioni e a diverse quote della costruzione. Le diverse disposizioni della forzante sono state individuate in modo da eccitare il maggior numero possibile di modi propri della struttura.

Successivamente, si è confrontata la risposta con un modello agli elementi finiti correlando modi propri e frequenze.

Per quanto riguarda i risultati ottenuti applicando metodi nel dominio del tempo, si descrive il processo di caratterizzazione dinamica del Viadotto Incoronata (Autostrada A3 Salerno-Reggio Calabria). Le caratteristiche modali sono state ottenute grazie all'eccitazione indotta dal traffico veicolare. Il viadotto è costituito da due ponti gemelli a tre campate, con sezione a cassone in c.a.p. ad altezza variabile. Il processo di identificazione ha permesso di evidenziare 10 deformate modali e i relativi valori di smorzamento. Le deformate modali sono caratterizzate da spostamenti accoppiati tra i due viadotti, concordi o discordi.

Infine, si propone un confronto tra diverse metodologie di identificazione per la determinazione di frequenze proprie, deformate modali e smorzamenti attraverso lo studio di una passerella pedonale ad arco a via inferiore, realizzata in legno lamellare e costruita sul fiume Marecchia (Rimini). Il confronto mostra ampio accordo per quanto riguarda frequenze proprie e deformate modali, mentre si ottengono valori non sempre concordi per quanto riguarda i coefficienti di smorzamento.

INTRODUCTION

Modern design approach, in order to correctly predict the static and dynamic behavior of structures, requires complex mathematical models to be considered; among them, Finite Element Method (FEM) techniques are the most promising and effective methods. Reliability of obtained results strongly depends on hypothesis introduced, usually provided in terms of constraints, stiffness values, mechanical properties, etc. Moreover, correspondence between theoretical data, used in computation, and real parameters of structures cannot always be verified in practice; the problem is particularly important when dealing with parameters characterizing the dynamic behaviour of structures. For this reason, experimental modal tests can be used to investigate the dynamic behaviour of structures.

Modal parameter identification is a procedure to identify dynamic properties of a vibrating structure starting from modal tests. Modal parameters can be estimate from a variety of different measurements in different data domains (time and/or frequency domain). These measurements can include free-decays, forced responses, frequencies response functions or impulse

response functions. The measurements can be generated with no measured inputs, single measured input or multiple measured inputs.

Most current modal parameter estimation techniques are based on the frequency response function (FRF) or, equivalently, impulse response function (IRF) obtained from the measured data. FRFs are typically found by Fast Fourier Transform. Excitation of structure by dynamic forces is usually required in order to apply frequency domain methods. Forces may be imposed, for example, by means of a mechanical shaker. Acceleration records at different frequencies are used to calculate the corresponding FRFs. From these, frequency domain methods as MDOF Circle Fit Method can be used to identify frequencies, deformations and damping ratios of various modes.

The simplest approach to estimate the modal parameters of a structure is the so-called *Peak-Picking (PP)* method. The method is named due to identification of the eigenfrequencies is associated to peaks of a spectrum plot. Probably due to its simplicity, it is one of the most widely used method in civil engineering. Method details are, for instance, discussed in [Bendat & Piersol, 1993]. It assumes that the damping is low and that the modes are well-separated. A violation of these assumptions leads to erroneous results. In fact, the method identifies the *operational deflection shapes* instead of mode shapes and for closely-spaced modes such an operational deflection shape will be the superposition of multiple modes. Other disadvantages are that the selection of the eigenfrequencies can become a subjective task if the spectrum peaks are not very clear or if the frequency resolution is not fine enough.

The *Complex Mode Indication Function (CMIF)* method can be considered as an *singular value decomposition (SVD)* extension to the *peak-picking* method. The *SVD* is able to resolve mode multiplicity. The method can also be applied to the reduced spectrum matrix. This method is based on the diagonalization of the spectral density matrix and it was already used to obtain the modes of a vibrating system subjected to forced or natural excitation (*CMIF*) [Peeters, 2000]. As suggested by the name, the *CMIF* was originally

intended as a tool to count the number of modes that is present in measurement data. Extensions of the *CMIF* method are able to do estimate eigenfrequencies and damping ratios according to a different procedure respect to as in the *peak-picking* method. After applying the *SVD* to the spectrum matrix, it is in fact decomposed in single degree of freedom systems. To such a single degree of freedom system, modal parameter estimation methods could be applied [Maia et al., 1997].

The estimation of the modal parameters starting from output measurements only (e.g. accelerations) is known as *stochastic system identification*, where the structure is excited by an unmeasurable input force. In these methods, deterministic knowledge of inputs is replaced by the assumption that the input is a realization of a stochastic process (white noise).

Time domain methods are more flexible since any kind of dynamic excitation can be used, such as noise excitations or forces induced by impact of weights on the structure. Among them, autoregressive models and subspace methods are the most effective methods. Possibility of extracting modal parameters from recorded time signals, without the need of direct measurement of excitation force, is their main advantage. It can be shown, in fact, that a stochastic state-space model may represent a vibrating structure excited by a stationary white noise.

These methods can be divided according to the type of data that they require: raw time data, covariances or spectra.

One of main approaches to estimate modal characteristics from time domain input-output data is the Auto-Regressive Moving Average procedure. Auto-Regressive Moving Average Vector (ARMAV) models are based on a linear combination of time series obtained from the output signals of the system. ARMAV models may describe the dynamic behaviour of the structure subjected to a white noise excitation [Andersen, 1997]. The only restriction is that structure must behave linearly and be time-invariant. Moreover, the

unknown input force is modelled as a white noise. The method requires the selection of the model order and the distinction of structural and non-structural modes. This operation is performed by using stability diagrams. Further procedures estimate models of different order and compare these models according to a quality criterion such as Akaike's *Final Prediction Error (FPE)* or the *Minimum Description Length (MDL)* criterion [Ljung, 1999]. These criteria include a penalty for model complexity to avoid an over-fit. Unfortunately, the application of a classical *prediction error method* [Ljung, 1999] to an *ARMA* model results in a highly non-linear parameter estimation problem. Non-linearity being caused by the *MA* parameters.

The so-called *instrumental variable (IV)* method is formulated in terms of the covariance matrices and it does not use the factorization property. The advantage of the *IV* method [Guidorzi, 2003] is that it identifies only the *AR* parameters and this can be archived in a linear way. Hence, it can be shown that for the extraction of the modal parameters there is no need to identify the *MA* part, since they are obtained from the *AR* part.

The *Polyreference Time Domain (PTD)* method is similar to the *IV* method after substituting impulse responses by output covariances. The *PTD* method is one of the most widely-used modal parameter estimation method. It contains the *Least Squares Complex Exponential (LSCE)* and the *Ibrahim Time Domain (ITD)* methods as special cases. For an overview, relations between these methods and the original references, see [Peters, 2000].

The *Ibrahim Time Domain (ITD)* method [Ewins, 2000, Mohanty, 2003] is able to extract the modal parameters from damped complex exponential response information. Free decay response data are measured at various points on the structure. A recurrence matrix is created from the free decay data, and the eigenvalues of this matrix are exponential functions of the frequencies of the system, from which the frequencies are easily computed. The eigenvectors of the recurrence matrix are response residues, from which the mode shapes are determined.

The *Random Decrement technique (RD)* was introduced by Cole [Cole, 1968] and evolved by [Ibrahim, 1977]. The *RD* technique converts random responses due to unknown or unmeasured stationary random input to free decays.

The so-called *Eigensystem Realization Algorithm (ERA)*, developed by Juang [Juang & Pappa, 1985], is a modal analysis application of deterministic realization algorithms. The output-only realization problem is solved in [Aoki, 1987]. Since the ERA approach utilizes multiple reference data, repeated roots can be identified as well as the *Polyreference Time Domain* approach. The latter use accuracy indicators to estimate effects of noise and nonlinearities as well as rank information provided by singular value decomposition techniques.

The ERA approach is based on well-established realization (state-space) theory using the concepts of controllability and observability. The method determines a complete state-space model based on the principles of minimal realization theory attributed to Ho and Kalman. The ERA approach begins with a block data matrix formulated from damped complex exponential functions, such as free decay responses. This block data matrix is similar to a general Hankel matrix and includes information from several initial conditions. Based on the rank evaluation of the block data matrix, a state-space set of matrices can be formulated based on the reduced order. From these, eigenvalues and eigenvectors are then found. Application of stochastic realization to modal parameter estimation was reported by [Sabia et al., 2004]. Benveniste and Fuchs [1985] proved that their algorithm is robust against non-stationary inputs (i.e a white noise sequence with time-varying covariance).

Maximum Likelihood (ML) identification is an optimization-based method that estimates the parameters of a model by minimizing an error norm [Verboven, 1982]. Unfortunately, the *ML* method results in equations that are non-linear in the unknown parameters. This requires an iterative procedure with related convergence problem due to the presence of local minima, low sensitivity to unknown values and high computational effort. Originally

intended for application to *FRFs*, it could also be used in output-only cases [Guillaume et al., 1999].

Recently, a lot of research effort was spent to word subspace identification (see Van Overschee & De Moor 1996 and Ljung, 1999). Subspace methods identify state-space models from input and output data by applying robust numerical techniques such as *QR* factorization, *SVD* and *least squares*. They are based on projection of the row space of future outputs into the row space of past outputs and they do not need any optimization procedure. A general overview of subspace identification (both deterministic and stochastic) is provided in the book of Van Overschee and De Moor (1996).

The main purpose of this thesis is the characterization of dynamic behaviour of structure using both time domain and frequency domain methods. Identified parameters are modal frequencies, mode shapes and damping ratios. Both frequency domain techniques and time domain techniques have been applied and compared in order to verify reliability of different identification methodologies.

1. EQUAZIONE DEL MOTO DI UN SISTEMA VIBRANTE E ANALISI DEL SEGNALE

Le tecniche di analisi modale sperimentale permettono di ricavare informazioni sul comportamento dinamico di una struttura, in termini di frequenze proprie ω_i , smorzamenti modali ξ_i , e forme modali ϕ_i . Esse differiscono per tipologia di eccitazione della struttura o per metodi di estrazione dei parametri modali.

Per descrivere il comportamento dinamico di una struttura e per stabilire la risposta della stessa sotto l'azione di una eccitazione generica, occorre disporre di un modello matematico del sistema reale che consenta di descrivere il legame tra forzante e spostamenti, velocità, accelerazioni e deformazioni della struttura.

L'approccio classico per correlare la risposta $x(t)$ di un sistema alla forzante $f(t)$ è quello di risolvere l'equazione differenziale del moto con le opportune condizioni iniziali. Non tutti i problemi, però, sono facilmente risolvibili per semplice integrazione. È allora conveniente cercare la soluzione mediante la definizione delle funzioni di risposta in frequenza.

Dall'analisi della risposta della struttura ad una forzante sinusoidale con frequenza ω (variabile, ad esempio secondo passi prefissati), è possibile

ottenere una matrice complessa $\alpha(\omega)$ che rappresenta la funzione di risposta in frequenza (FRF). Le tecniche di identificazione nel dominio delle frequenze ricavano dalla funzione di risposta in frequenza i parametri caratterizzanti il comportamento dinamico della struttura. L'analisi mediante FRF può essere condotta sia per sistemi a comportamento lineare che per lo studio del comportamento non lineare delle strutture [Sabia, 1997]. La FRF può essere calcolata direttamente per eccitazioni puramente sinusoidali o, per altri tipi di eccitazione, dall'analisi del segnale mediante le funzioni di autocorrelazione e di correlazione incrociata applicate ai segnali di risposta (uscita) ed eccitazione (ingresso) della struttura.

Nel presente capitolo, quindi, sono richiamate alcune nozioni di base della Dinamica delle Strutture ed è ricavata una particolare rappresentazione matematica dei sistemi meccanici che si basa sull'utilizzo di variabili di stato. La sezione successiva è dedicata a descrivere i fondamenti dell'analisi del segnale, necessaria per ricavare le funzioni di risposta in frequenza che vengono utilizzate nelle tecniche di identificazione nel dominio delle frequenze.

1.1 MODELLAZIONE DI UN SISTEMA MECCANICO

Si analizza brevemente il comportamento delle strutture per oscillazioni libere con smorzamento classico e non classico. In quest'ultimo caso, è necessario scrivere l'equazione del moto mediante rappresentazione con le variabili di stato, riducendo l'equazione differenziale dal secondo al primo ordine.

1.1.1 Equazioni del moto e caratteristiche dinamiche delle strutture

Un sistema dinamico può essere sinteticamente schematizzato come un sistema per il quale la forzante fornisce l'input del sistema e produce un moto dipendente dalle caratteristiche della forzante e del sistema stesso, definito anche output del sistema (Figura 1.1).

Come noto, il comportamento dinamico di un sistema meccanico lineare ad N gradi di libertà è governato dalle equazioni del moto:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1.1)$$

dove $\mathbf{v}(t)$, $\dot{\mathbf{v}}(t)$, $\ddot{\mathbf{v}}(t)$ sono, rispettivamente, il vettore degli spostamenti, delle velocità e delle accelerazioni corrispondenti ai vari gradi di libertà; \mathbf{K} , \mathbf{C} , \mathbf{M}

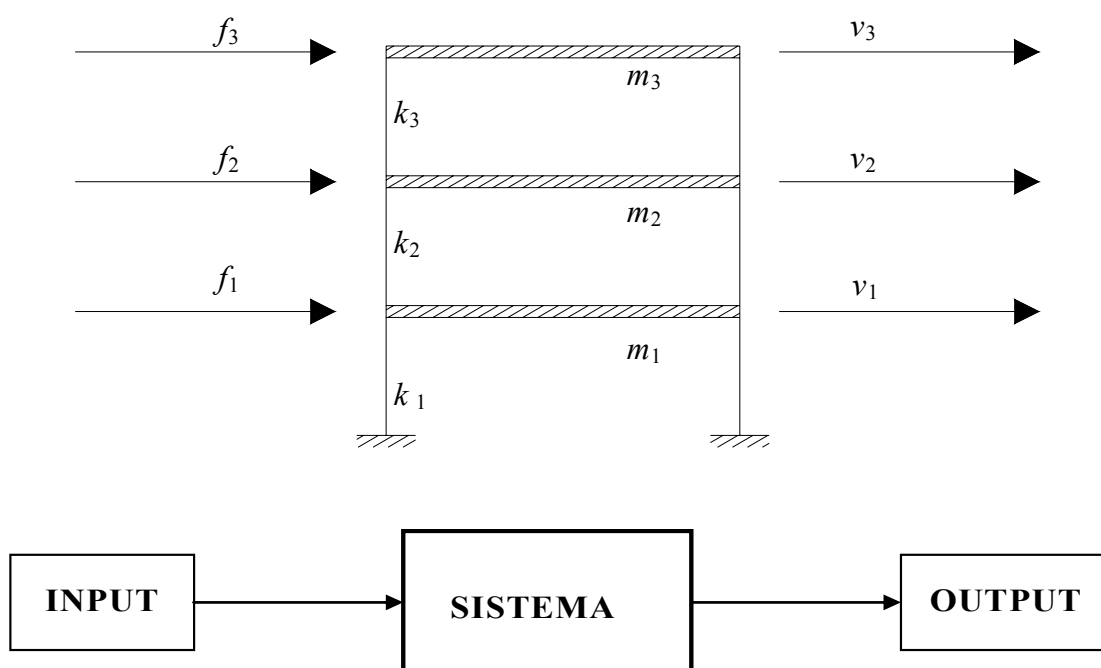


Figura 1.1. Sistema meccanico a tre gradi di libertà e corrispondente schematizzazione.

sono, rispettivamente, le matrici delle rigidità, degli smorzamenti e delle masse, ciascuna avente dimensione $N \times N$. Infine, $\mathbf{f}(t)$ è il vettore delle forze esterne applicate, di dimensione N .

Le frequenze proprie, gli smorzamenti e le deformate modali sono ricavate dall'equazione omogenea associata (moto libero):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \quad (1.2)$$

la cui soluzione è di tipo armonico:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi} e^{\lambda t} . \quad (1.3)$$

Sostituendo la (1.3) nell'equazione (1.2) si ottiene il problema agli autovalori associato alle matrici \mathbf{K} , \mathbf{C} e \mathbf{M} :

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{C}\lambda + \mathbf{K})\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

Risolvendo il problema (1.4) si ottengono N autovalori e i relativi N autovettori, che sono in generale grandezze complesse. Gli autovalori vengono solitamente scritti nella forma [Ewins, 2000]:

$$\lambda_j = -\omega_j \zeta_j + i\omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \quad (1.5)$$

in cui ω_j è j -esima pulsazione relativa al caso non smorzato e ζ_j è il relativo smorzamento modale.

1.1.2 Equazione del moto in forma di stato

Nel paragrafo precedente sono state presentate le equazioni del moto (1.2) con il modello matematico che governa la dinamica di un sistema meccanico ad N gradi di libertà e definite le caratteristiche dinamiche del sistema (frequenze, smorzamenti modali e forme modali).

L'equazione del moto può convenientemente anche essere espressa nella forma di stato [Ewins 2000]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (1.6)$$

ottenuta dalla classica equazione del moto del secondo ordine (1.1) introducendo il vettore degli stati $\mathbf{x}(t)$ e le matrici \mathbf{A}_c e \mathbf{B}_c così definite:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \dot{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(t) \end{bmatrix}$$

Il sistema (2.6) è un sistema di $2N$ equazioni differenziali del primo ordine. Le corrispondenti equazioni del moto libero si scrivono ponendo uguale a zero in ogni istante il vettore delle forze esterne $\mathbf{u}(t)$, da cui risulta:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) \quad (1.8)$$

Assumendo una soluzione di tipo armonico

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\psi} e^{\lambda t} \quad (1.9)$$

si ottiene il problema agli autovalori associato alla matrice \mathbf{A}_c :

$$\boldsymbol{\Psi} \mathbf{A}_c = \lambda \boldsymbol{\Psi} \quad (1.10)$$

dove $\boldsymbol{\Psi}$ è un vettore complesso di dimensioni $2N$, mentre λ è un parametro complesso.

Nel caso di sistemi sottosmorzati, in cui rientrano generalmente le strutture civili, i $2N$ autovalori che si ottengono dalla (1.10) si presentano in coppie coniugate secondo l'espressione:

$$\lambda_{2j-1}, \lambda_{2j} = -\omega_j \zeta_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2}, \quad (1.11)$$

dove ω è la pulsazione relativa al sistema non smorzato, ζ è lo smorzamento modale e j l'indice di modo. A coppie di autovalori coniugati corrispondono coppie coniugate di autovettori; il generico autovettore $\boldsymbol{\Psi}_j$ ha quindi una forma del tipo:

$$\boldsymbol{\Psi}_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_j \\ \lambda_j \boldsymbol{\Phi}_j \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

con $\boldsymbol{\Phi}_j$ autovettore associato all'equazione del moto nella forma del secondo ordine (vedi Equazione 1.3).

1.1.3 Equazione di osservabilità o trasformazione d'uscita

Quando si effettuano delle registrazioni sperimentali della risposta di una struttura, vengono eseguite misurazioni in corrispondenza di alcuni gradi di libertà. Se si assume che le rilevazioni $\mathbf{y}(t)$ siano acquisite tramite un numero di sensori pari a l fra trasduttori di accelerazioni, velocità e spostamenti, all'equazione del moto può essere associata l'equazione di osservabilità (o trasformazione d'uscita):

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C}_d \mathbf{v}(t) \quad (1.13)$$

Nella (1.13) le matrici \mathbf{C}_a , \mathbf{C}_v e \mathbf{C}_d servono a selezionare i gradi di libertà registrati durante l'acquisizione. Tali matrici hanno componenti tutte pari a zero ad eccezione degli elementi in corrispondenza dell' i -esimo grado di libertà in cui è posto lo strumento di misura.

Considerando l'equazione del moto (1.1) e l'equazione di osservabilità (1.13) si ottiene quindi la rappresentazione del sistema meccanico nella forma di secondo ordine:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{v}(t) &= \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_a\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C}_v\dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{C}_d\mathbf{v}(t).\end{aligned}\tag{1.14}$$

Introducendo le seguenti definizioni:

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= [\mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \quad \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}] \\ \mathbf{D} &= \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\end{aligned}\tag{1.15}$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(t) \end{bmatrix}$$

l'equazione (1.14) può essere scritta nella forma:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\tag{1.16}$$

Le matrici \mathbf{C} e \mathbf{D} sono matrici di coefficienti di dimensioni, rispettivamente, $l \times 2N$ e $l \times N$. Considerando l'equazione del moto in forma di stato (1.7) e l'equazione di osservabilità (1.16), si ottiene infine la rappresentazione di stato di un sistema meccanico ad N gradi di libertà nella forma:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{1.17}$$

1.2 MODELLO DI STATO IN FORMA DISCRETA

L'equazione (1.17) fornisce l'equazione del moto di un sistema vibrante soggetto ad una forzante $\mathbf{u}(t)$ secondo la notazione che utilizza le variabili di stato (o nello spazio delle fasi).

Durante l'acquisizione sperimentale, le grandezze fisiche come spostamenti, velocità e accelerazioni sono disponibili in tempi discreti, come sequenze di dati. E' necessario quindi riformulare il modello (1.18) da continuo a discreto [Peeters, 2000]. Detto t_0 l'istante generico, la soluzione della (1.18) al tempo t successivo è data dalla *formula di Lagrange*:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_L(t) + \mathbf{x}_F(t)\tag{1.18}$$

dove:

$$\mathbf{x}_L(t) = e^{\mathbf{A}_c(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0)\tag{1.19}$$

è la componente di $\mathbf{x}(t)$ dovuta al moto libero della struttura, mentre:

$$\mathbf{x}_F(t) = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_c(t-\tau)} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(\tau) d\tau\tag{1.20}$$

corrisponde al moto forzato. Introducendo le (1.19), (1.20) nella (1.17) e ponendo:

$$t_0 = k\Delta t \quad ; \quad t = (k+1)\Delta t$$

si ottiene la rappresentazione a tempo discreto delle equazioni:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k\end{aligned}\quad (1.21)$$

in cui la matrice dinamica a tempo discreto \mathbf{A} e la matrice \mathbf{B} sono così definiti:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} \quad (1.22)$$

$$\mathbf{B} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \tau} d\tau \mathbf{B}_c = [\mathbf{A} - \mathbf{I}] \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{B}_c \quad (1.23)$$

Nella (1.21) e seguenti si è utilizzata la nozione semplificata $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(k\Delta t)$ dove Δt è l'intervallo di tempo di acquisizione ed n è un intero che rappresenta l'istante di tempo di acquisizione del segnale.

A partire dalla matrice dinamica in forma discreta \mathbf{A} è possibile ottenere la matrice corrispondente al continuo \mathbf{A}_c e, di conseguenza, frequenze, smorzamenti e forme modali mediante le espressioni (1.22) e (1.23). Indicando con $\bar{\lambda}_j$ il generico autovalore della matrice \mathbf{A} , frequenze e smorzamenti del problema strutturale sono valutati secondo le espressioni:

$$f_j = \frac{|\ln(\bar{\lambda}_j)|}{2\pi \Delta t} \quad (1.24)$$

$$\xi_j = -\frac{\text{Re}(\ln(\bar{\lambda}_j))}{|\ln(\bar{\lambda}_j)|} \quad (1.25)$$

Inoltre, se \mathbf{L} è la matrice le cui colonne sono gli autovettori di \mathbf{A} , le deformate modali in forma complessa $\mathbf{\Psi}$ sono calcolate attraverso l'espressione:

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{C}\mathbf{L}. \quad (1.26)$$

1.3 ANALISI DEL SEGNALE

Si richiamano nel seguito alcune nozioni di analisi del segnale necessarie per la definizione della Funzione di Risposta in Frequenza, a partire dalla quale i metodi operanti nel dominio delle frequenze sono in grado di ottenere le caratteristiche dinamiche delle strutture.

1.3.1 Caratteristiche dei fenomeni aleatori

Un fenomeno fisico ed i dati che lo rappresentano vengono considerati casuali quando l'evoluzione futura del fenomeno non può essere predetta utilizzando unicamente i dati di un esperimento. In tali casi la storia registrata in un esperimento costituisce solo una delle realizzazioni fisiche che il fenomeno poteva avere. Concettualmente per poter studiare un tale fenomeno si dovrebbe considerare l'insieme $\{x(t)\}$ di tutte le possibili storie $x_i(t)$ che possono essere prodotte. Per un fenomeno è possibile calcolare un numero infinito di medie, a partire dal semplice valore medio, del valore quadratico medio fino a tutte le possibili medie di ordine superiore [Bendat & Piersol, 1980].

Nel caso in cui uno o più dei valori medi di interesse rimangono costanti nel tempo il fenomeno è detto stazionario. Col termine ergodico, invece, si indica un processo stazionario in cui le medie fatte su una singola funzione campione al variare del tempo sono indipendenti dalla funzione campione; in altre parole una funzione campione è completamente rappresentativa dell'insieme delle funzioni campione.

Per i fenomeni stazionari, il valore medio calcolato sull'insieme degli $x_i(t)$ coincide con il valore medio calcolato sul tempo, da una singola storia o realizzazione del fenomeno, che analiticamente si scrive:

$$\mu_x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dx \quad (1.27)$$

in cui $x(t)$ è un'arbitraria realizzazione del fenomeno. La giustificazione del precedente risultato deriva dal teorema ergodico il quale asserisce che, per dati stazionari, le proprietà calcolate dalle medie temporali su una singola storia del fenomeno sono indipendenti dalla realizzazione scelta per il calcolo.

1.3.2 Serie e trasformata di Fourier

I segnali periodici, cioè se $x(t) = x(t+T_0)$ per ogni istante di tempo t , essendo T_0 è il periodo, possono essere scritti come somma, in genere finita, di funzioni armoniche, attraverso le serie di Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k(\omega) e^{jk\omega t} \quad (1.28)$$

dove i coefficienti X_k sono ricavati dalla seguente espressione:

$$X_k(\omega) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t} dt \quad (1.29)$$

La trasformata di Fourier è una generalizzazione dello sviluppo in serie di Fourier al caso in cui la funzione $x(t)$ non sia periodica (ovvero sia di periodo infinito). La trasformata di Fourier di una funzione $x(t)$ è data da:

$$X_k(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (1.30)$$

Per calcolare il coefficiente di Fourier corrispondente alla k -esima armonica attraverso passi discreti Δt , occorre approssimare la formula (1.29) nel seguente modo:

$$X_k = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N\Delta t}n\Delta t} = \frac{1}{N} C_k, \quad (1.31)$$

dove:

$$C_k = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \cdot e^{-\frac{i2\pi k n}{N}} \quad (1.32)$$

è la trasformata veloce di Fourier (FFT) o trasformata discreta. Le trasformate discrete di Fourier producono spettri formati da valori in cui ogni ognuna può essere pensata come l'uscita di un filtro centrato alla frequenza ω . Si noti che la trasformata per $n=0$:

$$X_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \quad (1.33)$$

non è altro che il valor medio del segnale x .

1.3.3 Fusione di Autocorrelazione, Cross-correlazione, Autospettro e Cross-spettro

Dato un segnale $x(t)$ si definisce autocorrelazione la funzione:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (1.34)$$

ed indica quanto il segnale acquisito ad istanti diversi è correlato con se stesso. L'autocorrelazione di una funzione periodica è periodica, mentre l'autocorrelazione di un segnale casuale tende a zero per τ non nulli.

La trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione $R_{xx}(\tau)$ è detta densità di potenza spettrale (PSD), o autospettro:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau \quad (1.35)$$

La funzione $S_{xx}(\omega)$ è legata alla trasformata di Fourier $X(\omega)$ di $x(t)$ dalla relazione:

$$S_{xx}(\omega) = X(\omega)^* X(\omega) \quad (1.36)$$

dove con $X(\omega)^*$ si è indicato il complesso coniugato di $X(\omega)$. Essa è una funzione reale e contiene le informazioni sulle frequenze presenti in $x(t)$ ma non quelle sulle fasi, in quanto ottenuta dal solo modulo di $X(\omega)$.

Si definisce invece, correlazione incrociata (o cross-correlazione) di due segnali $x(t)$ e $y(t)$ la funzione $R_{xy}(\tau)$ definita come:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (1.37)$$

ed indica quanto i due segnali sono correlati tra loro. La trasformata di Fourier di della funzione di cross-correlazione R_{xy} è detta cross-spettro (CSD) ed è indicata usualmente con $S_{xy}(\omega)$:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi\omega\tau} d\tau \quad (1.38)$$

La funzione $S_{xy}(\omega)$ è legata alla trasformata di Fourier di $x(t)$ e $y(t)$ dalla relazione:

$$S_{xy}(\omega) = X(\omega)^* Y(\omega) \quad (1.39)$$

Essa è una funzione complessa contenente informazioni sia in frequenza che sulle fasi.

1.3.4 Risposta di un sistema ad un input impulsivo

Per un sistema a parametri costanti, lineare e stabile, la risposta ad un input impulsivo è definito mediante la *unit impulse response function*. Se si

indica con $f(t)$ l'input sottoposto al sistema e con $y(t)$ la risposta, la *unit impulse response function* è definita mediante la seguente espressione:

$$h(t) = y(t) \quad \text{quando } f(t) = \delta(t) \quad (1.40)$$

dove t è il tempo misurato dall'istante in cui la funzione δ è applicata.

Per un input arbitrario, $f(t)$, la risposta del sistema $y(t)$ è data dall'integrale di convoluzione:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) f(t - \tau) \cdot d\tau \quad (1.41)$$

che indica che la risposta $y(t)$ è data da una somma pesata sull'intera storia temporale dell'input $f(t)$.

Un sistema fisicamente realizzabile è un sistema che non fornisce risposta fino a quando l'input non viene applicato:

$$h(t) = 0 \quad \text{per } \tau < 0 \quad (1.42)$$

Un sistema si dice a parametri costanti se la *unit impulse response function* è indipendente dall'istante di tempo in cui l'impulso è applicato. Il sistema si dice stabile se, per ogni possibile input che sia limitato produce una risposta limitata. La condizione è verificata se accade che:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \cdot d\tau < \infty \quad (1.43)$$

1.3.5 Funzioni di Risposta in Frequenza

Assume una particolare importanza per le tecniche di identificazione nel dominio delle frequenze la definizione della funzione di risposta in

frequenza (FRF). Essa è definita dalla trasformata di Fourier della *unit impulse response function*:

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} h(t) \cdot e^{-j2\pi\omega t} dt \quad (1.44)$$

nella quale $h(t) = 0$ per $t < 0$

Indicando quindi con $f(t)$ l'eccitazione della struttura e con $y(t)$ la sua risposta, dalle definizioni (1.40) e (1.44) si ricava che la FRF è ottenibile per ogni coppia di registrazioni eccitazione-risposta mediante il rapporto tra la trasformata di Fourier della risposta $Y(\omega)$ e la trasformata di Fourier della forzante $F(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{F(\omega)}.$$

Per diminuire gli errori di misura si impiegano degli stimatori della FRF. Il prodotto tra la risposta $y(t)$ e la stessa prodotta all'istante $t+\tau$ (cioè $y(t+\tau)$) è data da:

$$y(t)y(t+\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\xi)h(\eta)x(t-\xi)x(t+\tau-\eta)d\xi d\eta. \quad (1.45)$$

La parte a destra del segno di uguaglianza non è altro che la definizione della funzione di autocorrelazione (vedi equazione 1.34):

$$R_{yy} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\xi)h(\eta)x(t-\xi)x(t+\tau-\eta)d\xi d\eta \quad (1.46)$$

Analogamente, il prodotto tra la risposta $y(t)$ e l'input valutato all'istante $t+\tau$ è dato da:

$$y(t)x(t+\tau) = \int_0^{\infty} h(\xi)x(t)x(t+\tau-\xi)d\xi \quad (1.47)$$

che, per la definizione (1.37), coincide con la funzione di cross-correlazione R_{xy} . Applicando la Trasformata di Fourier alle due espressioni appena trovate, e ricordando le definizioni delle funzioni di densità spettrale, è possibile ricavare espressioni alternative per la Funzione di Risposta in Frequenza.

Si ha quindi lo stimatore H_1 definito come:

$$H_1(\omega) = \frac{S_{fx}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} \quad (1.48)$$

che minimizza gli effetti dei disturbi sull'uscita. In alternativa si può utilizzare l'estimatore H_2 definito come:

$$H_2(\omega) = \frac{S_{xx}(\omega)}{S_{xf}(\omega)} \quad (1.49)$$

che invece riduce gli effetti dei disturbi all'ingresso. In assenza di errori di misura sarebbe verificata l'identità:

$$H_1(\omega) = H_2(\omega) = H(\omega) \quad (1.50)$$

Infine, per verificare l'attendibilità della misura effettuata e controllare la congruenza tra gli stimatori (1.50) si può usare la funzione di coerenza $\gamma^2(\omega)$ definita dalla seguente espressione:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{|S_{fx}(\omega)|^2}{S_{ff}(\omega)S_{xx}(\omega)} \quad (1.51)$$

che indica quanto la risposta è coerente con l'eccitazione. Se $\gamma^2(\omega) < 0.75$ i dati sperimentali tendono ad essere poco attendibili nel senso che il rapporto segnale/rumore è basso. Anche la presenza di eccitazioni non misurate o il

comportamento non lineare del sistema sono cause che possono dare luogo a bassi valori della coerenza.

1.3.6 Funzioni di risposta in frequenza in termini di spostamento, velocità e accelerazione.

Le funzioni di Risposta in Frequenza sono definite come rapporto tra la trasformata di Fourier della generica risposta (spostamento, accelerazione...) e la trasformata di Fourier del modulo della forzante applicata. Più precisamente, si definisce la funzione *recettanza* α come il rapporto tra la trasformata dello spostamento $y(t)$ di un punto del sistema e la trasformata di Fourier forzante $f(t)$ applicata:

$$\alpha(\omega) = \frac{Y(\omega)}{F(\omega)}. \quad (1.52)$$

Analogamente, si definisce *mobilità* il rapporto tra la trasformata di Fourier della velocità \dot{y} di un punto del sistema e la trasformata della forzante f . Infine, la funzione *inertanza* A è definita come il rapporto tra la trasformata dell'accelerazione \ddot{y} di un punto e la trasformata di Fourier della forzante $f(t)$.

$$A(\omega) = \frac{\ddot{Y}(\omega)}{F(\omega)}. \quad (1.53)$$

L'inertanza è legata alla recettanza mediante la seguente espressione:

$$A(\omega) = -\omega^2 \cdot \alpha(\omega). \quad (1.54)$$

Successivamente si farà riferimento in particolar modo all'inertanza, direttamente ottenibile dalle registrazioni sperimentali e utilizzata in questa tesi per le elaborazioni sperimentali.

1.4 LE FRF NEI SISTEMI A N GRADI DI LIBERTÀ

Per i sistemi a N gradi di libertà con smorzamento di tipo viscoso, l'equazione del moto assume la forma:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{f}. \quad (1.55)$$

Applicando la trasformata di Fourier (1.33) ad entrambi i membri si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\mathbf{v}) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f} \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (1.56)$$

da cui si ottiene:

$$(-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + i\omega \cdot \mathbf{C} + \mathbf{K}) \cdot \mathbf{V}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (1.57)$$

essendo $\mathbf{V}(\omega)$ e $\mathbf{F}(\omega)$ rispettivamente le trasformate di Fourier dello spostamento \mathbf{v} e della forzante \mathbf{f} .

La recettanza si scrive, quindi, nella forma:

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = \frac{1}{(-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + i\omega \cdot \mathbf{C} + \mathbf{K})}. \quad (1.58)$$

Facendo uso della matrice modale $\boldsymbol{\phi}$ le cui colonne sono gli autovettori, e utilizzando le note espressioni derivanti dall'ortogonalità dei modi di vibrare:

$$\boldsymbol{\phi}^t \mathbf{K} \boldsymbol{\phi} = \text{diag}(\omega_r^2), \quad (1.59)$$

$$\boldsymbol{\phi}^t \mathbf{M} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{I}, \quad (1.60)$$

$$\boldsymbol{\phi}^t \mathbf{C} \boldsymbol{\phi} = \text{diag}(2\zeta_r, \omega_r), \quad (1.61)$$

vale la seguente relazione:

$$\boldsymbol{\alpha}'(\omega)^{-1} \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}' (-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + i\omega \cdot \mathbf{C} + \mathbf{K}) \boldsymbol{\phi}, \quad (1.62)$$

$$= \text{diag}(\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega), \quad (1.63)$$

Pertanto, la recettanza può essere scritta come:

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = \boldsymbol{\phi}' \text{diag}(\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega)^{-1} \boldsymbol{\phi}. \quad (1.64)$$

o, in componenti:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{rj} \phi_{rk}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega)}. \quad (1.65)$$

L'inertanza viene ricavata tramite la relazione (1.53) nella forma:

$$A_{jk}(\omega) = -\sum_{r=1}^N \frac{\omega^2 \cdot \phi_{rj} \phi_{rk}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega)}, \quad (1.66)$$

La (1.65) può anche essere riscritta nel seguente modo:

$$A_{jk}(\omega) = -\sum_{r=1}^N \frac{\omega^2 \cdot (R_{jk})_r}{(\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega)} \quad (1.67)$$

dove si è introdotto il residuo R_{jk} , ottenuto dal prodotto degli autovettori.

Partendo dall'equazione del moto in forma di stato (equazione 1.6):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (1.68)$$

e considerando una forzante armonica e la conseguente risposta, anch'essa armonica, si ottiene la seguente espressione:

$$(i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)\mathbf{X}e^{i\omega t} = \mathbf{B}_c \mathbf{U}e^{i\omega t} \quad (1.69)$$

La FRF in termini di spostamento, è quindi data da:

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \quad (1.70)$$

Pre-moltiplicando e post-moltiplicando entrambi i membri per l'autovettore $\boldsymbol{\psi}$ ottenuto dalla risoluzione del moto libero (vedi equazione 1.10) si ottiene:

$$\boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\alpha}(\omega)^{-1} \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi} (i\omega\mathbf{I} - \mathbf{A}_c) \boldsymbol{\psi} \quad (1.71)$$

Utilizzando le proprietà di ortogonalità dei modi di vibrare e scrivendo la (1.71) in termini di componenti si ottiene:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\Psi_{jr} \Psi_{kr}}{(i\omega - \lambda_r)} \quad (1.72)$$

La sommatoria nella (1.72) è estesa a $2N$ in quanto l'equazione (1.68) ha $2N$ componenti. Essendo gli $2N$ autovalori complessi coniugati, la (1.72) è esprimibile come:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left[\frac{\Psi_{jr} \Psi_{kr}}{(i\omega - \lambda_r)} - \frac{\Psi_{jr}^* \Psi_{kr}^*}{(i\omega - \lambda_r^*)} \right], \quad (1.73)$$

avendo indicato con (*) il complesso coniugato.

Le funzioni di risposta in frequenza assumono una particolare importanza per le tecniche di identificazione nel dominio delle frequenze. Nel Capitolo 2 viene proposta una metodo di identificazione basato sull'analisi delle FRF.

2. IDENTIFICAZIONE DINAMICA NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

2.1 INTRODUZIONE

Gli algoritmi nel dominio delle frequenze prevedono l'acquisizione di accelerazioni dalle prove sperimentali e permettono di ricavare informazioni sul comportamento dinamico di una struttura, in termini di frequenze proprie ω_r , smorzamenti modali ξ_r , e le forme modali ϕ_r mediante le funzioni di risposta in frequenza (FRF) [Balmes, 1997].

Numerosi sono i metodi che consentono di identificare i modi propri dalle FRF, i quali, pur utilizzando procedure molto diverse, partono tutti dalla stessa ipotesi: in vicinanza della frequenza di risonanza il contributo del modo che provoca la risonanza stessa è quella assolutamente prevalente della definizione del valore della funzione di risposta in frequenza, ovvero, in altre parole, il contributo degli altri modi è trascurabile.

Con questa supposizione, un sistema a N gradi di libertà può essere trasformato in N sistemi a un singolo grado di libertà ed operare così su un ristretto range di frequenze nell'intorno della frequenza propria r -esima.

Il Circle-fit method è tra i metodi più diffusi operanti nel dominio delle frequenze. Esso si basa sull'osservazione che, nell'intorno di una frequenza propria del sistema, i punti della funzione complessa ineranza, se rappresentati nel piano complesso di Nyquist, descrivono una circonferenza.

In questo capitolo viene descritta la tecnica di fitting che consente di estrarre dalle FRF le caratteristiche modali della struttura. Si farà riferimento all'ineranza, in quanto utilizzate nelle applicazioni che verranno descritte nel Capitolo 4.

2.2 MDOF CIRCLE FIT METHOD

Il Circle-fit method è tra i metodi più diffusi operanti nel dominio delle frequenze. Esso si basa sull'osservazione che, nell'intorno di una frequenza propria del sistema, i punti della funzione complessa ineranza, se rappresentati nel piano complesso di Nyquist, descrivono una circonferenza (Figura 2.1a). Tale assunzione è esatta nel caso della funzione mobilità con smorzamento di tipo viscoso. Nel seguito si farà riferimento all'ineranza, per la quale risulta corretta solo localmente, nell'intorno della frequenza propria. La procedura consiste quindi nel cercare di interpolare con una circonferenza il circolo prodotto dall' r -esimo modo di vibrare, con maggior accuratezza possibile nella vicinanza della frequenza di risonanza.

Analiticamente, la procedura per ricavare i parametri caratterizzanti la risposta in termini di frequenze proprie ω_r , smorzamenti modali ζ_r , e le forme modali ϕ_r , è illustrata nel seguito.

Dalla definizione di ineranza per un sistema a N gradi di libertà:

$$A_j(\omega) = - \sum_{s=1}^N \frac{\omega^2 (R_j)_s}{\omega_s^2 - \omega^2 + 2i\zeta_s \omega \omega_s}, \quad (2.1)$$

si estrae dalla sommatoria il termine r -esimo, corrispondente ad un modo di vibrare avente frequenza propria ω_r :

$$A_j(\omega) = -\frac{\omega^2 (R_j)_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega \omega_r} - \sum_{s=1, s \neq r}^N \frac{\omega^2 (R_j)_s}{\omega_s^2 - \omega^2 + 2i\zeta_s \omega \omega_s} \quad (2.2)$$

dove j è l'indice corrispondente ad un grado di libertà dell' FRF misurata sperimentalmente.

In una prima fase si assume che, nell'intorno della frequenza propria, il singolo modo sia predominante su tutti gli altri. Algebricamente ciò si può esprimere trascurando il secondo termine e scrivendo:

$$A_j(\omega) \cong -\frac{\omega^2 (R_j)_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega \omega_r} \quad (2.3)$$

ovvero approssimando il problema di un sistema a N gradi di libertà con un numero N di FRF ognuna della quali corrispondente ad un singolo modo di

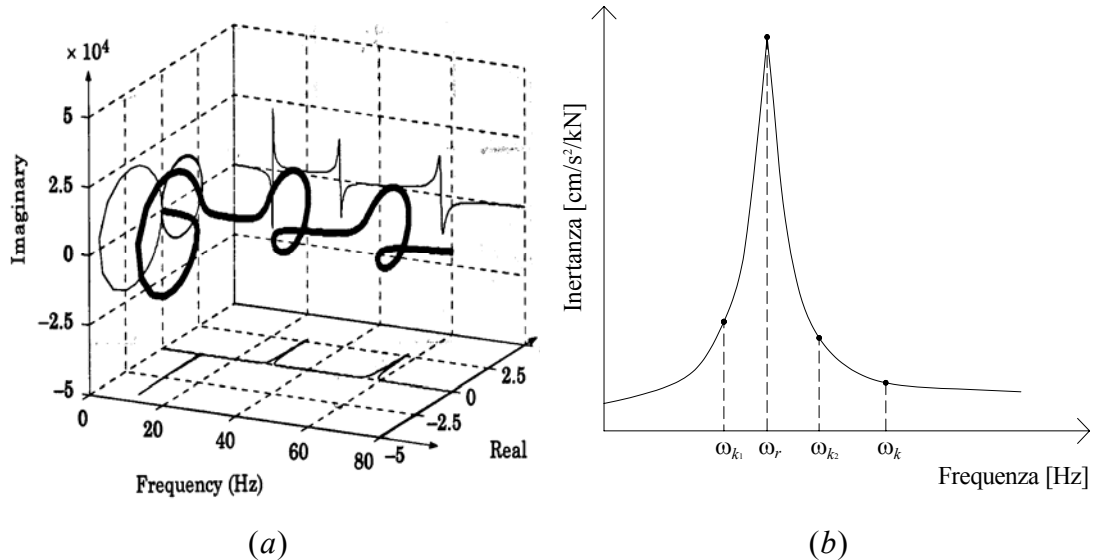


Figura 2.1. (a) Rappresentazione tridimensionale e (b) modulo della Funzione di Risposta in Frequenza (FRF).

vibrare.

L'algoritmo di fitting, per ogni singola frequenza propria ω_r , prevede la ricerca del cerchio che interpoli i punti della FRF sperimentale con il minimo errore. Per fare ciò si calcola lo scarto quadratico medio delle distanze tra il cerchio passante per tre punti scelti dalla FRF sperimentale e i rimanenti punti della FRF stessa. Tra tutti i cerchi possibili generati dalle terne di punti, il più significativo è quello che ha scarto minore (Figura 2.2a). L'algoritmo consente così di determinare la circonferenza approssimante nel diagramma di Nyquist (ed in particolare il valore del diametro D_j del cerchio approssimante) e stimare la bontà dell'interpolazione, fornito dallo scarto quadratico medio dei restanti dati rispetto alla circonferenza.

Il valore dello smorzamento può essere successivamente ricavato con considerazioni geometriche sul cerchio di Nyquist. Si consideri la seguente espressione:

$$A_j(\omega) \cong -\frac{\omega^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r\omega\omega_r}$$

Essa non è altro che la FRF espressa nella equazione (2.3) a meno di un fattore di scala (pari al modulo $|R_j|_r$) e ad una rotazione (pari alla fase di $(R_j)_r$). La funzione così determinata è rappresentata in Figura 2.2b. Con riferimento a tale figura, la tangente dell'angolo formato tra l'asse delle ascisse e la retta congiungente l'origine con il punto rappresentante la generica frequenza ω_k , è il rapporto tra la parte reale e la parte immaginaria della FRF con frequenza ω_k . Dalla formula (2.3), la parte reale e la parte immaginaria dell'inertanza sono esprimibili come:

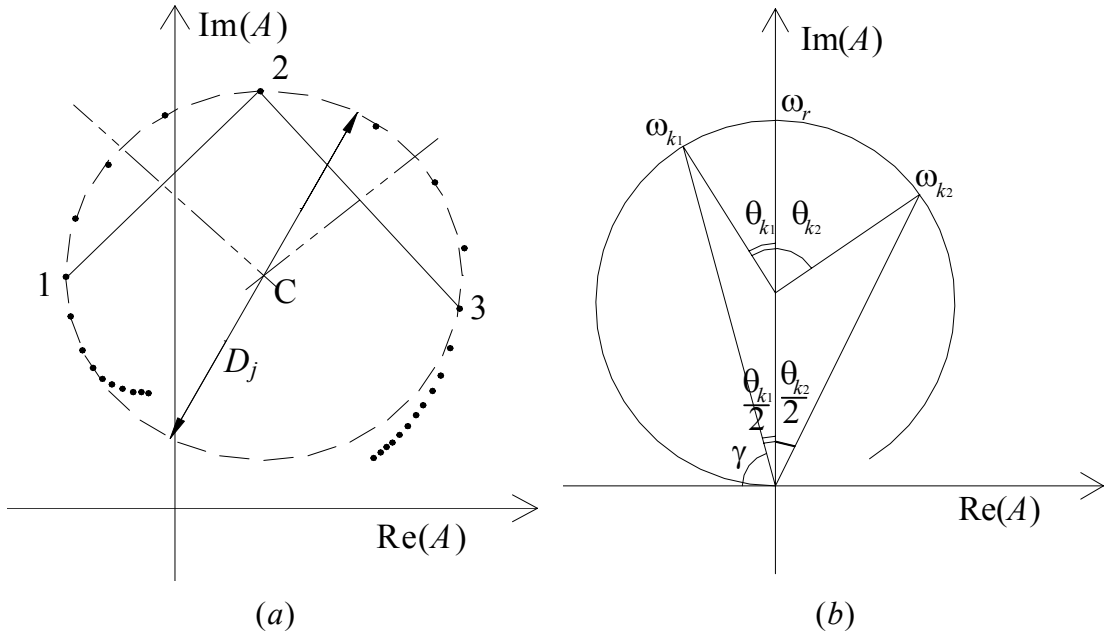


Figura 2.2. (a) Diagramma di Nyquist con il cerchio approssimante e (b) definizione degli angoli nel cerchio di Nyquist per la determinazione del coefficiente di smorzamento

$$\text{Re}(A) = \frac{-\frac{\omega_k^2}{\omega_r^2} \left[1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_r} \right)^2 \right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_r} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega_k}{\omega_r}} \quad (2.4)$$

$$\text{Im}(A) = \frac{2\zeta \frac{\omega_k^3}{\omega_r^3}}{\left[1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_r} \right)^2 \right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega_k}{\omega_r}} \quad (2.5)$$

da cui l'angolo γ , definito dal rapporto tra la (2.5) e la (2.4), è pari a:

$$\tan \gamma = \frac{2\zeta_r \left(\frac{\omega_k}{\omega_r} \right)}{\left[1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_r} \right)^2 \right]}. \quad (2.6)$$

Il complementare di γ è esprimibile attraverso:

$$\tan(90 - \gamma) = \tan \frac{\theta_k}{2} = \frac{1 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_r} \right)^2}{2\zeta_r \left(\frac{\omega_k}{\omega_r} \right)}. \quad (2.7)$$

Presi quindi due punti sul cerchio di Nyquist aventi frequenza ω_{k1} e ω_{k2} , le tangenti della metà degli angoli al centro sono rispettivamente esprimibili come:

$$\tan \frac{\theta_{k1}}{2} = \frac{1 - \left(\frac{\omega_{k1}}{\omega_r} \right)^2}{2\zeta_r \left(\frac{\omega_{k1}}{\omega_r} \right)} \quad (2.8)$$

$$\tan \frac{\theta_{k2}}{2} = \frac{\left(\frac{\omega_{k2}}{\omega_r} \right)^2 - 1}{2\zeta_r \left(\frac{\omega_{k2}}{\omega_r} \right)}. \quad (2.9)$$

Sommando i due termini e ricavando lo smorzamento si ottiene la seguente espressione:

$$\zeta_r = \frac{\omega_{k2}^2 - \omega_{k1}^2}{2\omega_r \left(\omega_{k1} \tan \frac{\theta_{k1}}{2} + \omega_{k2} \tan \frac{\theta_{k2}}{2} \right)} \quad (2.10)$$

Il valore di smorzamento più significativo può essere assunto quale la media tra i valori calcolati per differenti coppie $\omega_{k1} - \omega_{k2}$. Per i punti di mezza potenza (*Half-Power points*), caratterizzati da angoli di 90° e da frequenze ω_1 e ω_2 , la (2.10) può essere riscritta nel seguente modo:

$$\zeta_r = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\omega_r} \quad (2.11)$$

Determinato il diametro del cerchio D_j e il valore dello smorzamento, si determina, infine, il valore del modulo della FRF e la costante R , detta residuo, proporzionale agli autovettori.

Il modulo del j -esimo residuo $|R_r|$ può essere determinato dall'equazione (2.3) quando viene imposta la condizione di risonanza ($\omega = \omega_r$). In tal caso, l'inertanza assume la forma:

$$A_j(\omega) = \frac{(R_j)_r}{2i\zeta_r} \quad (2.12)$$

Da osservazioni geometriche sul cerchio (vedi Figura 2.2a), il modulo dell'inertanza in corrispondenza della condizione di risonanza è uguale al diametro del cerchio approssimante l'FRF sperimentale:

$$|A_j(\omega)| = D_j, \quad (2.13)$$

Sostituendo la (2.13) nella (2.12) si ottiene la stima del modulo dei residui $|R_r|$:

$$|R_j| = 2\zeta_r \cdot D_j, \quad (2.14)$$

dove j è l'indice della componente corrispondente ad un grado di libertà misurato sperimentalmente e ω_r è la frequenza dell' r -esimo modo.

Nella prima fase del metodo, ovvero supponendo di trascurare il contributo alla FRF di tutti gli altri modi non direttamente coinvolti, l'inertanza $A(\omega)$ può essere espressa analiticamente solo come termine r -esimo secondo l'espressione:

$$A_j(\omega) \Big|_{\omega=\omega_r} = -\frac{\omega^2 (R_j)_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r \omega_r^2}. \quad (2.15)$$

In una seconda fase è possibile ricalcolare i residui e lo smorzamento dell' r -esimo modo considerando anche il contributo di modi adiacenti. Questo è possibile sottraendo dal valore dell'inertanza sperimentale $\tilde{A}(\omega)$ la somma delle inertanze analitiche degli altri modi stimati nella prima fase. I valori corretti sono indicati nella formula (2.16) con il soprasegno:

$$\bar{A}_j(\omega) = \tilde{A}_j(\omega) - \left(\sum_{s=1, s \neq r}^N \frac{\omega^2 (R_j)_s}{\omega_s^2 - \omega^2 + i\eta_s \omega_s^2} \right). \quad (2.16)$$

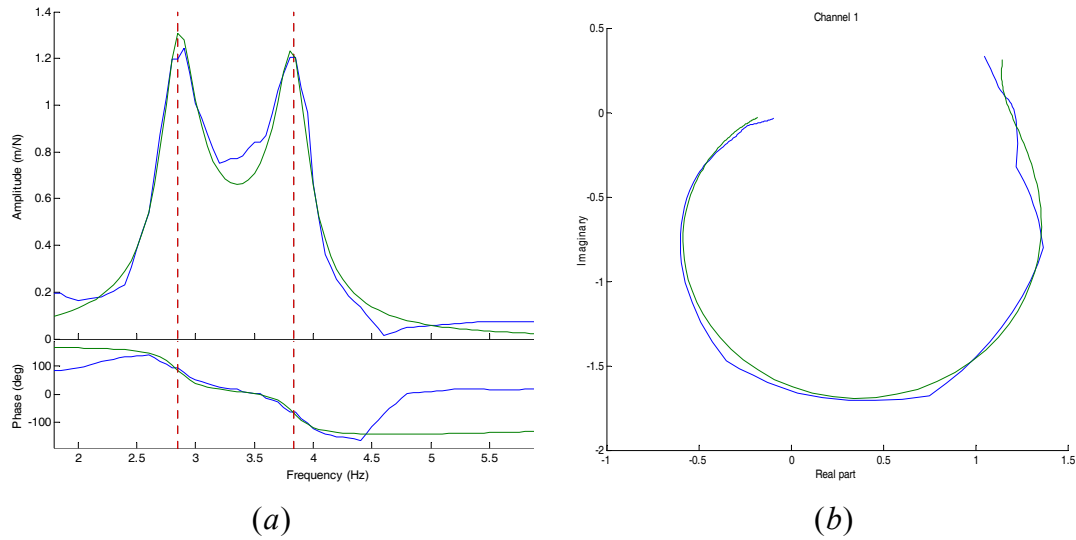


Figura 2.3. Esempio di FRF sperimentale e relativa approssimante numerica ottenuta mediante il MDOF Circle Fit Method (a) nella rappresentazione in modulo e fase e (b) nel diagramma di Nyquist per uno dei due modi identificati.

Si vuole sottolineare il fatto che la trattazione esposta è rigorosa sono nel caso in cui la funzione di risposta in frequenza utilizzata sia la mobilità (ottenuta cioè a partire dalle velocità misurate sulla struttura). Per tale motivo, durante la procedura, è possibile migliorare la stima dei parametri identificati operando un processo di ottimizzazione ai minimi quadrati nel quale la funzione obiettivo può essere posta pari alla differenza tra le FRF sperimentali e quelle determinate analiticamente.

È possibile inoltre ottenere una trattazione analoga a quella illustrata anche nel caso di smorzamento non viscoso. In tal caso, occorre esprimere la FRF partendo dall'equazione del moto nella forma di stato, in accordo con l'equazione (1.73).

2.3 UNA APPLICAZIONE: IDENTIFICAZIONE DELLE CARATTERISTICHE MODALI DI UN TELAIO

Il MDOF Curve Fit Method è stato utilizzato per caratterizzare la risposta dinamica di una struttura a telaio, sottoposta ad oscillazioni forzate, simulando numericamente lo svolgimento di una prova effettuata con eccitatore meccanico (vibrochina).

La struttura è un telaio shear-type a tre piani ed un'unica campata. Le aste hanno a comportamento elastico lineare con modulo elastico pari a $E = 30000$ MPa. I pilastri hanno sezioni 30x30 cm con altezza di interpiano pari a 300 cm. Per i tre piani della struttura, le travi hanno una sezione di 30x45 cm e luce di 500 cm. Il telaio è schematicamente rappresentato in Figura 2.4 e le proprietà di travi e pilastri sono riassunte in Tabella 2.1.

Le masse di piano (pesi propri dei solai e frazioni del carico variabile) sono state sommate alla massa della trave, calcolando una densità equivalente.

Sono stati considerati gli smorzamenti alla Rayleigh (smorzamento proporzionale), imponendo il coefficiente di smorzamento pari al 3% in corrispondenza della prima e della terza frequenza, così ottenendo per il secondo modo di vibrare un coefficiente pari a 2.51%. Frequenze proprie, smorzamenti e deformate modali del telaio sono mostrati in Figura 2.4b e in Tabella 2.2. Le componenti delle deformate modali sono normalizzate al valor massimo. I parametri modali di tale semplice modello sono state considerati la soluzione di riferimento per il processo di identificazione. Per ottenere la risposta della struttura ai vari piani, è stato imposta una eccitazione sinusoidale posta in sommità della struttura. Mediante integrazione dell'equazione del moto sono state ricavate le serie temporali corrispondenti alle accelerazioni per ogni piano.

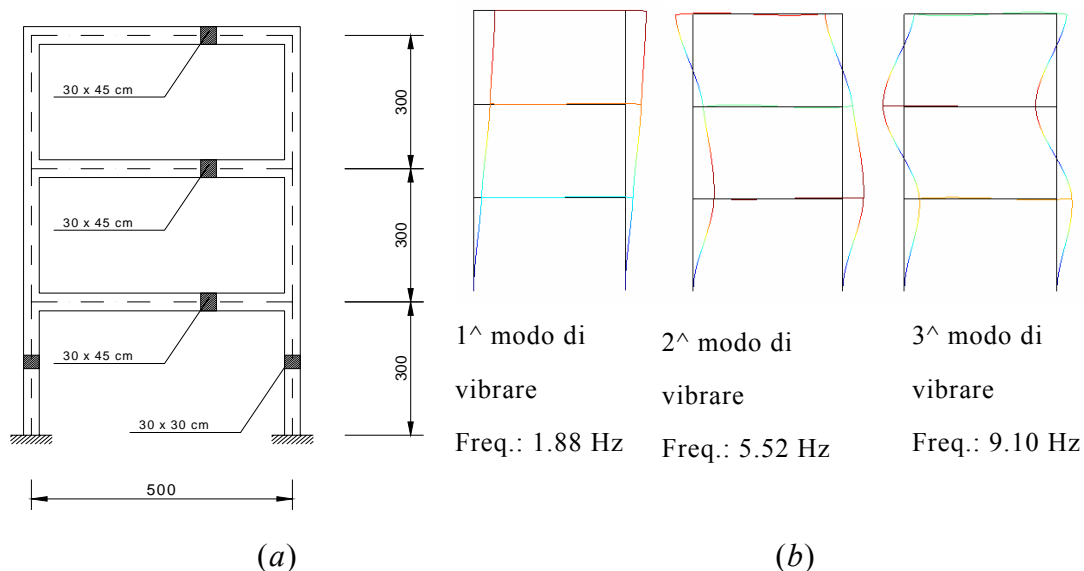


Figura 2.4. (a) Schema della struttura e (b) rappresentazione dei tre modi di vibrare.

	<i>h</i>	<i>b</i>	Modulo elastico	Massa di piano	Densità equivalente
	cm	cm	MPa	Kg	Kg/m ³
Trave (1° piano)	45	30	30000	17550	26000
Travi (2° e 3° piano)	45	30	30000	14175	21000
Pilastrini	30	30	30000	-	2500

Tabella 2.1. Caratteristiche geometriche e meccaniche di travi e pilastrini del telaio.

Modi di vibrare	Frequenza Smorzamento Deformate modali				
	Hz	%			
1° modo	2.44	3.00	+0.458	+0.814	+1.000
2° modo	6.50	2.51	+1.000	+0.310	-0.810
3° modo	9.69	3.00	-0.578	+1.000	-0.484

Tabella 2.2. Frequenze proprie, smorzamenti e deformate modali (spostamenti orizzontali dei tre piani) del telaio.

Innanzitutto, è stata valutata la capacità dell’algoritmo di ricavare correttamente i parametri modali della struttura; successivamente è stato aggiunto al segnale in input una incertezza, ottenuta sommando alle registrazioni accelerometriche ottenute per integrazione delle equazione del modo, una variabile aleatoria di intensità massima pari a una frazione del massimo valore della risposta della struttura, secondo l’espressione:

$$y_{ps} = y + w \cdot \max(y) \cdot \mathbf{WN}. \quad (2.17)$$

Il segnale così modificato, è detto segnale “pseudo-sperimentale”, in quanto intende descrivere gli errori di misura propri delle registrazioni sperimentali. Il coefficiente w , indicante il peso del disturbo è stato posto pari a valori via via crescenti, ed in particolare pari a 0.02, 0.05, e, infine, 0.10. Per

tutti i test, sono stati considerati tre punti di misura, corrispondenti ai tre piani dell'edificio ove sono registrati gli andamenti delle accelerazioni sulla struttura.

Le stime delle frequenze proprie f e dei coefficienti di smorzamento ξ sono riportate in Tabella 2.3. I valori di riferimento sono quelli della struttura originale. Il confronto è ottenuto effettuando 50 test per ogni livello di rumore ed il confronto è posto in termini di valore medio e di coefficiente di variazione dei parametri identificati. Vengono riportati inoltre i valori minimi e massimi identificati. Per valutare la correlazione tra le deformate modali esatte e derivanti dal processo di identificazione, invece, è stato utilizzato il MAC (Modal Assurance Criterion) [Mazzotti et al., 2004, Rivella et al., 2004]. Esso fornisce la deviazione standard tra gli autovettori di riferimento (ϕ_{rif}) e gli autovettori ottenuti dal processo di identificazione (ϕ_{circle}). Il criterio si può esprimere nella forma:

$$MAC_{jk} = \frac{\left| (\phi_{rif})_j (\phi_{circle})_k^T \right|^2}{\left| (\phi_{rif})_j (\phi_{rif})_j^T \right| \cdot \left| (\phi_{circle})_k (\phi_{circle})_k^T \right|}, \quad (2.18)$$

Tale valore è prossimo all'unità in caso di buona correlazione; valori modesti indicano scarsa similitudine.

I risultati, riportati nella Tabella 2.3 mostrano errori molto modesti in assenza di disturbo aggiunto alle registrazioni accelerometriche utilizzate come input per il processo di identificazione: sulle frequenze proprie l'errore è pari a 1/1000 della frequenza. Sugli smorzamenti l'errore è maggiore anche se contenuto, dell'ordine del 3-8%. I valori del MAC sono superiori al 98%.

In presenza di disturbo sul segnale in uscita (w pari al 2%, 5% e 10%), il processo di identificazione fornisce risultati via via più discosti dalla soluzione esatta. Gli errori sono tuttavia modesti sulla valutazione delle frequenze proprie: l'errore medio massimo compreso è circa pari all'1%, con coefficiente di variazione pari al 0.39%. Gli errori sugli smorzamenti, invece,

aumentano confermando la difficoltà di stima di tale parametro strutturale. La dispersione in presenza di rumore pari al 10% del segnale può essere elevata e il coefficiente di variazione dei risultati ottenuti da 50 differenti simulazioni numeriche risulta essere prossimo al 20%.

w	Valori riferimento		Parametri identificati						
	<i>Freq.</i>	<i>Smorz.</i>	<i>Frequenza</i>			<i>Smorzamento</i>			
			Media	Range	C.V	Media	Range	C.V	
	Hz	%	Hz	Hz	%	%	%	%	
0%	1° modo	2.436	3.00	2.436	2.436 ÷ 2.436	0.00	3.04	3.04 ÷ 3.04	0.00
	2° modo	6.508	2.51	6.509	6.509 ÷ 6.509	0.00	2.59	2.59 ÷ 2.59	0.00
	3° modo	9.688	3.00	9.698	9.698 ÷ 9.698	0.00	3.25	3.25 ÷ 3.25	0.00
2%	1° modo	2.436	3.00	2.435	2.433 ÷ 2.437	0.049	3.02	2.92 ÷ 3.12	1.93
	2° modo	6.508	2.51	6.509	6.507 ÷ 6.511	0.022	2.58	2.53 ÷ 2.65	1.57
	3° modo	9.688	3.00	9.699	9.688 ÷ 9.706	0.068	3.24	3.09 ÷ 3.44	3.95
5%	1° modo	2.436	3.00	2.436	2.400 ÷ 2.427	0.191	3.00	2.82 ÷ 3.33	4.75
	2° modo	6.508	2.51	6.509	6.506 ÷ 6.517	0.057	2.63	2.42 ÷ 2.76	3.53
	3° modo	9.688	3.00	9.699	9.668 ÷ 9.758	0.253	3.26	2.81 ÷ 3.75	9.49
10%	1° modo	2.436	3.00	2.436	2.426 ÷ 2.450	0.307	3.08	2.78 ÷ 3.64	8.67
	2° modo	6.508	2.51	6.509	6.496 ÷ 6.518	0.107	2.60	2.21 ÷ 2.95	7.86
	3° modo	9.688	3.00	9.699	9.646 ÷ 9.754	0.392	3.25	2.40 ÷ 4.22	19.6

Tabella 2.3. Confronto tra le frequenze proprie e gli smorzamenti identificati al variare dell'entità del rumore w .

3. IDENTIFICAZIONE DINAMICA NEL DOMINIO DEL TEMPO

3.1 INTRODUZIONE

I modelli nel dominio del tempo costituiscono un potente strumento analitico per la descrizione e l'interpretazione di processi stocastici derivante dall'osservazione di fenomeni dinamici. Essi sono stati inizialmente sviluppati in discipline quali l'ingegneria del controllo e la teoria dei sistemi. Le basi teoriche e le caratteristiche fondamentali sono descritte da Ljung (1999), Soderstrom & Stoica (1989) e da Van Overschee & De Moor (1993). Negli ultimi anni tali modelli sono stati utilizzati da numerosi autori per la descrizione e l'identificazione di sistemi strutturali di strutture ad uso civile (ponti, edifici...) soggetti a eccitazione ambientale. Le risposte dinamiche, acquisite durante le prove sperimentali effettuate su strutture, possono essere considerate come serie temporali discrete (ovvero i valori della risposta dinamica sono rilevati ad intervalli di tempo costante) e possono essere considerate in modo statistico mediante processi stocastici descrittivi del fenomeno fisico in esame.

Il trattamento delle risposte dinamiche delle strutture e la determinazione delle caratteristiche modali mediante algoritmi nel dominio del

tempo sono alla base di numerosi riferimenti scientifici [Alaggio et al, 2003, Bodeux & Golinvar, 2001; Bonato et al., 1998; Garibaldi et al. 2003, Diotallevi et al, 2003].

I modelli matematici utilizzati sono costituiti da equazioni alle differenze nella variabile tempo al discreto, cui corrispondono equazioni differenziali che governano il moto dei sistemi vibranti a tempo continuo. Tali modelli possono essere suddivisi in due grandi famiglie: i modelli *a rappresentazione esterna* (o modelli ingresso-uscita) ed i modelli *a rappresentazione interna* (o modelli di stato).

I modelli a rappresentazione esterna sono modelli che considerano solo le variabili osservate, solitamente suddivise in variabili di ingresso e variabili di uscita. I modelli a rappresentazione interna (detti anche modelli di stato) ricorrono a variabili ausiliarie, dette appunto variabili di stato.

Per valutare le proprietà modali della struttura occorre risolvere i modelli ricercando i coefficienti propri del modello. Il metodo di identificazione parametrica conosciuto come Prediction Error Method (PEM) [Andersen, 1997] consente di stimare tali parametri, individuando una funzione “predittore” che fornisca, nota la storia temporale fino al tempo t , una valutazione il più possibile accurata del valore del segnale al tempo $t+1$. È possibile quindi risalire ai coefficienti attraverso una procedura iterativa di ottimizzazione non lineare. La funzione “errore di predizione” è definita come la differenza tra il valore del segnale in uscita (ad esempio le accelerazioni misurate sulla struttura) rispetto al valore del segnale predetto attraverso il modello.

I modelli di stato, invece, possono essere convenientemente risolti mediante algoritmi a sottospazi. L'identificazione con metodi a sottospazi [Van Overschee & De Moor, 1996] è usualmente basata sulla manipolazione di matrici mediante operazioni di algebra lineare. Il nome “metodi a sottospazi” riflette il fatto che le matrici contenenti il segnale misurato possono essere interpretate come uno spazio vettoriale dove le colonne di tale matrice

rappresentano una base di vettori. Tali matrici possono essere determinate direttamente dalla sola conoscenza dei segnali di uscita, senza la conoscenza a priori delle matrici caratterizzanti il modello [Peeters, 2000]. La predizione del segnale, necessaria per la determinazione delle matrici del sistema, è accompagnata dalla costruzione dell'associato filtro di Kalman [Bittanti, 2000, Grewal & Andrews, 2001].

Le ipotesi che si formulano alla base di tali metodi sono solamente la linearità del comportamento dinamico della struttura, l'invarianza del comportamento della struttura nel tempo e la schematizzazione delle forze eccitanti incognite nella forma di un rumore bianco. Tali metodologie permettono inoltre la stima delle incertezze dei parametri modali attraverso la matrice di covarianza, fornendo un intervallo di confidenza dei parametri ricercati.

L'ultima fase del processo identificativo è la validazione del modello identificato: si valuta cioè se il modello trovato abbia un'accuratezza sufficiente e soddisfacente o meno.

3.2 MODELLI A RAPPRESENTAZIONE ESTERNA

I modelli a *rappresentazione esterna* o modelli *ingresso-uscita* sono quelli nelle cui equazioni intervengono solo le variabili di ingresso e di uscita, senza ricorso a variabili ausiliarie. Verranno esaminati qui in questo paragrafo modelli a rappresentazione esterna appartenenti ad una famiglia dei modelli *a errore d'equazione* [Bittanti, 2002].

3.2.1 Modelli a errore d'equazione

La più semplice espressione che lega l'ingresso e l'uscita di un sistema lineare e tempo invariante, è dato dall'equazione alle differenze [Guidorzi, 2003]:

$$y(t) = \alpha_1 y(k-1) + \dots + \alpha_n y(k-n) + \beta_1 u(k-1) + \dots + \beta_n u(k-n) \quad (3.1)$$

Con la (3.1) si descrive l'uscita $y(k)$ del modello al tempo $t = k \cdot \Delta t$ tramite la combinazione lineare dei suoi valori assunti in istanti precedenti $y(k-1), \dots, y(k-n)$ e la combinazione lineare dei valori assunti dalla forzante (o ingresso del modello) negli istanti $u(k), \dots, u(k-n)$. Poiché a causa dell'inaccuratezza del modello rispetto al sistema reale e dagli inevitabili errori nell'acquisizione delle misure, i valori osservati non saranno in pieno accordo con la modellazione analitica, viene introdotto il termine $e(k)$, detto *errore d'equazione*, che serve a eguagliare il primo membro al secondo (chiusura dell'equazione):

$$y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \dots + \alpha_n y(k-n) + \beta_1 u(k-1) + \dots + \beta_n u(k-n) + e(k) \quad (3.2)$$

Se il modello rappresenta bene il sistema meccanico vibrante, il termine $e(k)$ è schematizzabile statisticamente attraverso un rumore bianco.

Dall'equazione generale (5.2) è possibile ottenere modelli più o meno semplici in base alla definizione del termine $e(k)$ alla presenza o meno del termine rappresentante la forzante $u(k)$. La complessità del modello specifico, che ne definisce la "memoria", dipende infine dal parametro n , detto ordine del modello, che indica quanti valori del segnale acquisito in istanti precedenti a quello considerato sono tenuti in considerazione per definire la risposta del sistema all'uscita attuale $y(k)$.

In base alla dimensione dei vettori $y(k)$ e $u(k)$, il modello è *single-input single-output* (SISO) se possiede un unico ingresso $u(k)$ ed un'unica uscita $y(k)$, *multi input-single output* (MISO) se ha più ingressi ed unica uscita oppure *multi input-multi output* (MIMO) se ha più uscite e più ingressi [Bendat & Piersol, 1980]. E' evidente che nel primo caso l'espressione (5.2) è data da una sola equazione e i parametri α_i e β_i che caratterizzano il modello sono grandezze scalari; nel caso invece di sistemi multivariabile l'espressione è di tipo matriciale e α_i e β_i sono matrici di parametri.

Vengono brevemente analizzati alcuni modelli derivanti dalla (3.2), in particolare i modelli denominati **AR** e **ARMA** per le serie temporali ed i modelli **ARX** e **ARMAX** per i sistemi in cui è presente anche la variabile esogena.

Per semplicità vengono presi in considerazione nel seguito solo modelli ad un unico ingresso e un'unica uscita; la generalizzazione al caso multivariabile è riportata solo per il modello ARMA, particolarmente significativo nell'analisi dinamica delle strutture.

3.2.2 Modelli AR e ARX

I modelli autoregressivi (**AR**-AutoRegressive) e i modelli autoregressivi con variabile esogena (**ARX**) sono descritti dall'equazione alle differenze:

$$y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \dots + \alpha_n y(k-n) + \beta_1 u(k-1) + \dots + \beta_n u(k-n) + e(k) \quad (3.3)$$

dove $e(k)$ è un rumore bianco a valore atteso $E[e(k)]$ nullo e il numero naturale n definisce l'ordine (o memoria) del modello. I modelli **ARX** si distinguono dai modelli **AR** per la presenza della variabile di ingresso $u(k)$.

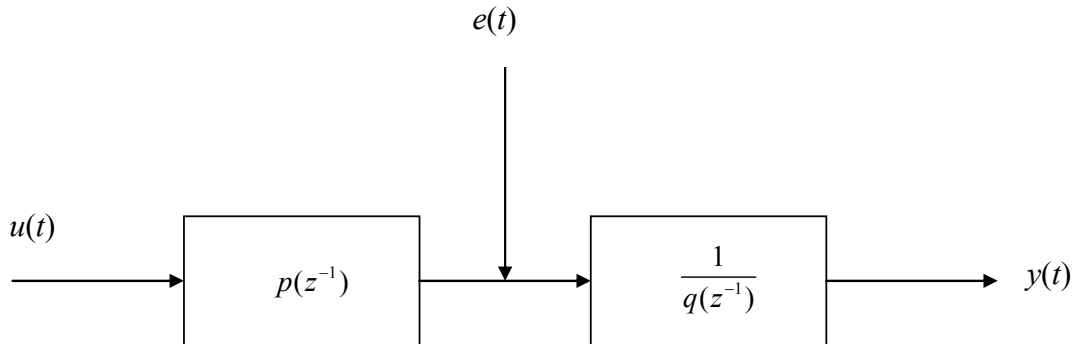
Si indichi con z^{-1} l'operatore di ritardo unitario, (si veda l'Appendice A) in accordo con le espressioni:

$$\begin{aligned} z^{-1}y(k) &= y(k-1) \\ z^{-2}y(k) &= y(k-2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Introducendo le forme polinomiali:

$$\begin{aligned} q(z^{-1}) &= 1 - \alpha_1 z^{-1} - \dots - \alpha_n z^{-n} \\ p(z^{-1}) &= \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_n z^{-n} \end{aligned} \quad (3.5)$$

è possibile riscrivere la (3.4) nella forma seguente:

Figura 3.1. Modello **ARX**.

$$q(z^{-1})y(k) = p(z^{-1})u(k) + e(k) \quad (3.6)$$

o in quella più comune:

$$y(k) = \frac{p(z^{-1})}{q(z^{-1})}u(k) + \frac{1}{q(z^{-1})}e(k) \quad (3.7)$$

La struttura di un processo **ARX** viene mostrata in Figura 3.1, nella quale è presente l'ingresso nel modello della variabile esogena attraverso il polinomio $p(z^{-1})$ e il rumore bianco $e(k)$.

3.2.3 Modelli ARMA e ARMAX

I modelli **ARMA** (**AR**-AutoRegressive, **MA**-Moving Average) descrivono l'errore d'equazione per mezzo di un processo **MA**:

$$e(k) = w(k) + \gamma_1 w(k-1) + \dots + \gamma_n w(k-n) \quad (3.8)$$

dove $w(k)$ rappresenta un processo stocastico tipo rumore bianco con valore atteso nullo $E[w(k)]=0$. La (3.8) denota quindi la media mobile (**MA**-Moving

Average) di un rumore bianco. Un modello **ARMA** di ordine n ha dunque la seguente struttura:

$$y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \dots + \alpha_n y(k-n) + w(k) + \gamma_1 w(k-1) + \dots + \gamma_n w(k-n). \quad (3.9)$$

Analogamente ai modelli **AR**, i modelli **ARMA** non considerano la variabile di ingresso e vengono di conseguenza usati per modellare le serie temporali.

Introducendo anche la variabile $u(t)$, si ottengono i modelli denominati **ARMAX**:

$$y(k) = \alpha_1 y(k-1) + \dots + \alpha_n y(k-n) + \beta_1 u(k-1) + \dots + \beta_n u(k-n) + w(k) + \gamma_1 w(k-1) + \dots + \gamma_n w(k-n). \quad (3.10)$$

Introducendo le forme polinomiali:

$$\begin{aligned} q(z^{-1}) &= 1 - \alpha_1 z^{-1} - \dots - \alpha_n z^{-n} \\ p(z^{-1}) &= \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_n z^{-n} \\ r(z^{-1}) &= 1 + \gamma_1 z^{-1} + \dots + \gamma_n z^{-n} \end{aligned} \quad (3.11)$$

è possibile riscrivere la (3.10) nella forma compatta:

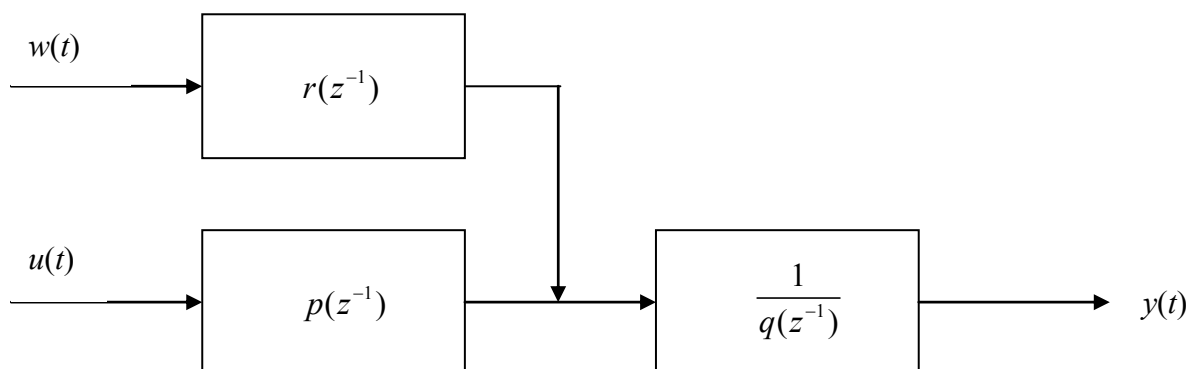


Figura 3.2 Modello **ARMAX**.

$$y(k) = \frac{p(z^{-1})}{q(z^{-1})}y(k) + \frac{r(z^{-1})}{q(z^{-1})}w(k) \quad (3.12)$$

ed interpretare un processo **ARMA** come uscita di un filtro alimentato da un rumore bianco remoto come mostrato in Figura 3.2.

3.2.4 Modelli ARMAV

I modelli ARMAV (Auto Regressive Moving Average Vector) sono modelli per l'analisi di sistemi strutturali a più gradi di libertà. Questi modelli utilizzano esclusivamente segnali (serie temporali) misurati sulla struttura. È possibile mostrare come un modello ARMAV interpreti e descriva il comportamento dinamico di strutture soggette a forzanti assimilabili a rumori bianchi [Andersen, 1997, Larbi & Lardies, 2000] anche se, in alcuni casi, l'applicazione dei modelli ARMAV può essere estesa a differenti tipi di eccitazioni introducendo la variabile esogena (modelli ARMAX-Vettoriali).

Il modello ARMAV è descritto dall'equazione:

$$\mathbf{y}(k) = \sum_{n=1}^p \boldsymbol{\alpha}_n \mathbf{y}(k-n) + \mathbf{w}(k) + \sum_{n=1}^q \boldsymbol{\beta}_n \mathbf{w}(k-n) \quad (3.13)$$

nella quale $\mathbf{w}(k)$ è un rumore bianco a media nulla e $\boldsymbol{\alpha}_k$ e $\boldsymbol{\beta}_k$ sono matrici di parametri di dimensioni $m \times m$, rispettivamente, autoregressivi e a media mobile [Guidorzi, 2003]. Inoltre, p e q indicano l'ordine del modello per la parte autoregressiva e la parte a media mobile. Solitamente l'ordine viene scelto uguale per entrambi i termini. I coefficienti autoregressivi descrivono le oscillazioni libere della struttura mentre la parte a media mobile è correlata al moto dovuto alle oscillazioni forzate, dovute alla presenza del rumore bianco. Attraverso tale approccio è possibile analizzare il comportamento dinamico della struttura senza conoscere l'eccitazione in ingresso [Rivella, 2004].

In tale modello, la risposta del sistema $\mathbf{y}(k)$ al tempo $t = k \cdot \Delta t$ è quindi ottenuta combinando linearmente il segnale acquisito agli istanti precedenti $\mathbf{y}(k-$

n) attraverso i parametri contenuti nelle matrici α_k e i valori assunti dai campioni estratti da un rumore bianco $w(k)$ agli istanti precedenti a t mediante le matrici β_k .

In Appendice A è mostrata l'equivalenza tra un modello ARMAV e un modello a rappresentazione interna, trattato nel seguito.

3.3 PREDIZIONE DEL SEGNALE

Strettamente collegato all'identificazione è il problema della predizione, vale a dire il problema di individuare una legge che, a partire dalla elaborazione dei valori precedenti (valori passati) di una determinata variabile, consenta di formulare una ragionevole predizione del valore futuro.

I procedimenti di identificazione sono spesso di tipo predittivo: la bontà di un modello viene valutata in base alle caratteristiche del suo errore sulla predizione.

Si definisce in primo luogo il vettore θ come il vettore che raggruppa i parametri del modello α_i , β_i e γ_i :

$$\theta = [\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n]. \quad (3.14)$$

Si definisce inoltre $\hat{y}(k | k-1, \theta)$ il valore atteso di y all'istante k data la conoscenza del valore di y stesso fino all'istante $k-1$, attraverso i parametri contenuti nel vettore θ . Tale valore atteso è definito:

$$\hat{y}(k | k-1, \theta) = E[y(k) | y(k-1)] \quad (3.15)$$

Il problema consiste nell'individuare un buon *predittore* $\hat{y}(k | k-1, \theta)$, cioè una funzione dei valori della variabile disponibili fino al tempo $t = (k-1)\Delta t$ che fornisca una valutazione il più possibile accurata del valore futuro $y(k)$. In termini analitici, questa relazione può essere espressa da:

$$\hat{y}(k | k-1) = f[y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-1), \dots, u(k-n)] \quad (3.16)$$

3.3.1 Predittori AR e predittori ARX

Dal momento che nei modelli **AR** e **ARX** l'errore d'equazione $e(k)$ viene assunto quale rumore bianco non correlato con la sequenza di ingresso $y(k)$, il predittore ottimo di un modello **ARX** è dato da:

$$\hat{y}(k | k-1) = \alpha_1 y(k-1) + \dots + \alpha_n y(k-n) + \beta_1 u(k-1) + \dots + \beta_n u(k-n) \quad (3.17)$$

E' importante sottolineare che il predittore (3.17), ad un certo istante di tempo, non dipende dalle predizioni effettuate in precedenza, ma è funzione dei valori precedenti osservati (misurati) della variabile d'uscita.

Come si deduce dalle equazioni precedenti, i modelli **AR** costituiscono un caso particolare di modelli **ARX**, in cui l'ingresso $u(k)$ è assente.

3.3.2 Predittori ARMA e ARMAX.

L'espressione del predittore ottimale per i processi **ARMA** e **ARMAX** può essere dedotto osservando che l'unico termine che non può essere predetto al tempo $k-1$ è il rumore bianco $w(k)$, in quanto variabile aleatoria.

Considerando che al generico istante l'errore di predizione, ovvero la differenza tra il segnale acquisito e quello predetto per lo stesso istante è pari al rumore $w(k)$:

$$y(k) - \hat{y}(k | k-1) = w(k) \quad (3.18)$$

e sostituendo la (3.18) nella (3.10), si ottiene il predittore del modello **ARMAX**:

$$y(k) = (\alpha_1 - \gamma_1)y(k-1) + \dots + (\alpha_n - \gamma_n)y(k-n) + \beta_1 u(k-1) + \dots + \beta_n u(k-n) + \gamma_1 \hat{y}(k-1 | k-2) + \dots + \gamma_n \hat{y}(k-n | k-n-1) \quad (3.19)$$

Si noti che, differentemente dai predittori **ARX**, il predittore ottimale **ARMAX** fa uso delle predizioni ottenute agli istanti precedenti.

Analogamente, il predittore **ARMA** è dato dall'espressione (3.19) ponendo nulli i termini contenenti la forzante in ingresso $u(k)$:

$$y(k) = (\alpha_1 - \gamma_1)y(k-1) + \dots + (\alpha_n - \gamma_n)y(k-n) + \gamma_1 \hat{y}(k-1|k-2) + \dots + \gamma_n \hat{y}(k-n|k-n-1) \quad (3.20)$$

3.4 PREDICTION ERROR METHOD (PEM)

Un buon predittore è individuato dal vettore di parametri θ , che, sostituiti nelle (3.17-3.20) devono restituire un valore accurato della funzione $y(k)$ al passo temporale k -esimo.

Definito l'ordine e la struttura del rumore $e(k)$, devono essere determinati i valori dei parametri α_i , γ_i ed eventualmente dei parametri β_i nel caso di forzante nota. L'elaborazione dei dati sperimentali consente di stimare tali parametri necessari per descrivere compiutamente il modello e di conseguenza, il sistema vibrante.

Il problema di predizione è ricondotto quindi ad un problema di identificazione, cioè alla individuazione di un vettore θ di parametri ottimali. Se ad ogni istante k è possibile calcolare $\hat{y}(k|k-1)$ utilizzando gli $k-1$ dati precedenti, e confrontando la predizione ottenuta con $y(k)$, la stima dei parametri θ è ottenuta imponendo minimo l'errore di predizione definito come segue:

$$\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k|k-1, \theta) \quad (3.21)$$

dove $y(k)$ è il valore effettivamente registrato sperimentalmente.

Secondo la tecnica nota come *Prediction Error Method*, i parametri θ ricercati vengono scelti imponendo, mediante i minimi quadrati, minimo

l'errore di predizione su tutto l'arco temporale formato da N rilevazioni effettuate [Bittanti, 2002, Ljung, 1999]:

$$H(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon(k, \boldsymbol{\theta})^2. \quad (3.22)$$

Per un problema multivariabile, il vettore l'errore di predizione $\boldsymbol{\varepsilon}(k, \boldsymbol{\theta})$ è definito secondo l'espressione:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{y}}(k | k-1) \quad (3.23)$$

Essendo, in un modello vettoriale, l'errore $\boldsymbol{\varepsilon}$ esso stesso un vettore, per impostare un problema nella forma di un problema di ottimizzazione si definisce quale funzione costo la funzione $H(\boldsymbol{\theta})$, basata sull'acquisizione di N punti, definita come:

$$H(\boldsymbol{\theta}) = \det \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}(k, \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\varepsilon}(k, \boldsymbol{\theta})^T \right). \quad (3.24)$$

Secondo la (3.22) o la (3.24), il problema di identificazione è stato così trasformato in un problema di ottimizzazione.

3.4.1 Stima dei parametri per i processi AR e ARX

Il procedimento di stima dei parametri viene esposto in primo luogo per il caso dei modelli **AR** e **ARX**.

Essendo il predittore **AR** non dipendente dalla predizione ottenute ad istanti di tempo precedenti, la (5.15) può essere posta nella forma:

$$y(k | k-1) = \boldsymbol{\varphi}(k)^T \boldsymbol{\theta}$$

dove si è definito con $\boldsymbol{\varphi}(k)$ il vettore delle osservazioni già effettuate, le cui componenti sono le registrazioni acquisite fino all'istante $k-1$:

$$\boldsymbol{\varphi}^T(k) = [y(k-1), y(k-2), \dots, y(k-n), u(k-1), \dots, u(k-n)] \quad (3.25)$$

e con $\boldsymbol{\theta}$ si è definito il vettore dei parametri incogniti:

$$\boldsymbol{\theta}^T = [\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n]. \quad (3.26)$$

L'errore di predizione è fornito dalla differenza tra il segnale acquisito all'istante k e il segnale predetto, in accordo con la (5.19):

$$\varepsilon(k) = y(k) - \boldsymbol{\varphi}(k)^T \boldsymbol{\theta} \quad (3.27)$$

I parametri $\boldsymbol{\theta}$ ricercati vengono scelti imponendo minimo l'errore di predizione su tutto l'arco temporale formato da N rilevazioni mediante i minimi quadrati (equazione 5.20). Con semplici passaggi algebrici si perviene alla soluzione nella forma:

$$\left(\sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}(k) \boldsymbol{\varphi}(k)^T \right) \boldsymbol{\theta} = \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}(k) y(k) \quad (3.28)$$

Se la matrice:

$$\mathbf{S}(N) = \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}(k) \boldsymbol{\varphi}(k)^T \quad (3.29)$$

è invertibile, l'unica soluzione della () è data da:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \mathbf{S}(N)^{-1} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}(k) y(k) \quad (3.30)$$

3.4.2 Stima dei parametri per i processi ARMA e ARMAX

Il criterio di calibrazione dei modelli **ARMAX** (e quindi dei modelli **ARMA**, che ne sono un caso particolare) si basa sulla funzione di costo (3.22), con la quale si impone minimo l'errore globale di predizione.

A differenza di quanto esposto per il modello **AR**, il predittore espresso nella (3.17) non è lineare nei parametri, ma dipende dalla predizione ottenuta agli istanti precedenti. Per questo motivo non è possibile dare un'espressione esplicita del punto di minimo. Per determinare i valori ottimali dei parametri occorre quindi ricorrere ad algoritmi di ottimizzazione. In [Vincenzi & Savoia, 2005] il vettore dei parametri $\boldsymbol{\theta}$ è stato ottenuto mediante un algoritmo genetico; nel seguito si descrive invece un classico metodo di risoluzione secondo quanto suggerito in [Ljung, 1999].

L'idea fondamentale è quella di applicare il procedimento ad approssimazioni successive basato sul metodo di ottimizzazione di Newton; il punto di partenza del processo è la soluzione di un modello **AR**, i cui parametri sono determinati in forma chiusa. Il modello **AR**, in quanto più semplice, risulta essere anche meno accurato. L'algoritmo di ottimizzazione di Newton richiede la definizione di una funzione quadratica $V(\boldsymbol{\theta})$ che approssimi la (3.22). Si esprime quindi in serie la funzione obiettivo $H(\boldsymbol{\theta})$ nell'intorno del punto di partenza $\boldsymbol{\theta}^r$:

$$V(\boldsymbol{\theta}) = H(\boldsymbol{\theta}^r) + \frac{dH(\boldsymbol{\theta}^r)}{d\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^r) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^r)^T \frac{d^2H(\boldsymbol{\theta}^r)}{d\boldsymbol{\theta}^2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^r) \quad (3.31)$$

Il punto di stazionarietà di tale funzione è funzione del punto di minimo dell'iterazione precedente, secondo la relazione:

$$\boldsymbol{\theta}^{(r+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(r)} - \left(\frac{d^2H(\boldsymbol{\theta}^{(r)})}{d\boldsymbol{\theta}^2} \right)^{-1} \left(\frac{dH(\boldsymbol{\theta}^{(r)})}{d\boldsymbol{\theta}} \right) \quad (3.32)$$

Nella (3.32) compaiono il vettore gradiente e la matrice Hessiana della funzione obiettivo. Tali quantità sono fornite dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}\frac{dH(\boldsymbol{\theta}^{(r)})}{d\boldsymbol{\theta}} &= -\frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon(k) \boldsymbol{\psi}(k)^T \\ \frac{d^2 H(\boldsymbol{\theta}^{(r)})}{d\boldsymbol{\theta}^2} &= \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\psi}(k) \boldsymbol{\psi}(k)^T + \sum_1^N \varepsilon(k) \frac{d^2 \varepsilon(k)}{d\boldsymbol{\theta}^2}\end{aligned}\quad (3.33)$$

dove si è posto:

$$\boldsymbol{\psi}(k) = -\frac{d\varepsilon(k, \boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}} \quad (3.34)$$

Si noti che $\boldsymbol{\psi}(k)$ è un vettore colonna con un numero di elementi pari al numero dei parametri del modello:

$$\boldsymbol{\psi}^T(k) = \left[-\frac{d\varepsilon(k)}{d\alpha_1}, \dots, -\frac{d\varepsilon(k)}{d\alpha_n}, \dots, -\frac{d\varepsilon(k)}{d\beta_1}, \dots, -\frac{d\varepsilon(k)}{d\beta_n}, \dots, -\frac{d\varepsilon(k)}{d\gamma_1}, \dots, -\frac{d\varepsilon(k)}{d\gamma_n} \right] \quad (3.35)$$

dove:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon(k, \boldsymbol{\theta})}{d\alpha_i} &= -\frac{1}{r(z^{-1})} y(k-i-n-1) \\ \frac{d\varepsilon(k, \boldsymbol{\theta})}{d\beta_i} &= -\frac{1}{r(z^{-1})} u(k-i-n-1) \\ \frac{d\varepsilon(k, \boldsymbol{\theta})}{d\gamma_i} &= -\frac{1}{r(z^{-1})} \varepsilon(k-i-n-1, \boldsymbol{\theta})\end{aligned}\quad (3.36)$$

Nel punto di minimo, l'errore di predizione $\varepsilon(k, \boldsymbol{\theta})$ tende asintoticamente al rumore bianco $w(k)$; nell'intorno del minimo è quindi possibile introdurre l'approssimazione:

$$\frac{d^2 H(\boldsymbol{\theta}^{(r)})}{d\boldsymbol{\theta}^2} \cong \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\psi}(k) \boldsymbol{\psi}(k)^T \quad (3.37)$$

Sostituendo la (3.37) nella (3.32) si giunge alla formulazione dell'algoritmo iterativo di Gauss-Newton:

$$\boldsymbol{\theta}^{(r+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(r)} + \left(\sum_1^N \boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)^T \right)^{-1} \left(\sum_1^N \varepsilon(t)\boldsymbol{\Psi}(t)^T \right) \quad (3.38)$$

Lo svantaggio principale di questa tecnica deriva dalla necessità di un processo di ottimizzazione la cui convergenza non è garantita [Peters, 2000] in quanto la funzione obiettivo ottenuta per un problema di complessità elevata (ovvero con un elevato numero di parametri) risulta spesso essere poco sensibile a variazioni dei parametri o mal condizionamento delle matrici Gradiente e Hessiana. Per tale ragione i modelli a rappresentazione esterna (o modelli di stato), oggetto del prossimo paragrafo, risultano essere più affidabili ed efficienti. Quest'ultimi, infatti, non necessitano di alcun algoritmo di ottimizzazione calcolando i parametri incogniti attraverso la risoluzione di un sistema lineare.

3.5 MODELLI A RAPPRESENTAZIONE INTERNA O MODELLI DI STATO

I modelli a rappresentazione interna o modelli di stato si differenziano dai modelli a rappresentazione esterna perché oltre a considerare la variabile di ingresso e quella di uscita, sono presenti variabili ausiliarie o variabili di stato [Bittanti, 2002]. Indicando come di consueto con $\mathbf{u}(t)$ l'ingresso del modello, rappresentante la forzante che agisce sulla struttura, di dimensioni $p \times 1$, e con $\mathbf{y}(t)$ l'uscita, rappresentante la risposta alla sollecitazione fornita, di dimensioni $q \times 1$, il modello mediante rappresentazione di stato è data dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3.39)$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è la variabile di stato, di dimensione $n \times 1$ mentre \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} sono matrici di parametri di dimensione $n \times n$, $n \times p$, $q \times n$, $q \times p$ rispettivamente.

Il numero intero n , che definisce il numero delle variabili ausiliarie, è l'ordine del sistema. La matrice quadrata \mathbf{A} , la cui dimensione rimane definita da n , prende il nome di *matrice dinamica*. La prima equazione delle (3.39) è denominata equazione di stato e descrive l'evoluzione del vettore degli stati $\mathbf{x}(t)$ in base ai suoi valori passati e all'azione esercitata dall'input $\mathbf{u}(t)$; la seconda equazione è detta *trasformazione d'uscita* e descrive l'influenza esercitata dalla variabile di stato $\mathbf{x}(t)$ e dall'ingresso $\mathbf{u}(t)$ sull'uscita del modello $\mathbf{y}(t)$.

E' stato mostrato nel Capitolo 2 che l'equazione del moto di un sistema vibrante può essere posta in forma differenziale del primo ordine; successivamente, attraverso la scomposizione di Lagrange, si sono ottenute le equazioni al discreto, nelle quali le derivate presenti nella forma del primo ordine sono state espresse in funzione del segnale acquisito agli istanti precedenti (equazione 2.21). Se si confronta la formulazione (2.21) con la (5.37) si nota che algebricamente sono identiche. Per tale ragione, è possibile utilizzare i modelli con variabili di stato per descrivere il comportamento dinamico di un sistema vibrante e quindi ottenere, mediante le tecniche di risoluzione tipiche della disciplina della teoria dei sistemi, i parametri nelle matrici dinamiche caratterizzanti il sistema meccanico.

Il problema di identificazione del modello consiste nella stima dei parametri contenuti in \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} adattando il modello alle registrazioni sperimentali degli andamenti delle variabili di ingresso e di uscita misurate durante un certo periodo di osservazione. Ottenute le matrici, è poi possibile risalire a frequenze proprie, smorzamenti e forme modali tramite le (2.24 – 2.26).

Per utilizzare le (3.39) in sede di identificazione, occorre introdurre i termini d'errore in ciascuna delle due equazioni:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)\end{aligned}\tag{3.40}$$

dove $\mathbf{w}(t)$ è un vettore contenente processi bianchi di dimensioni $2n \times 1$ e $\mathbf{v}(t)$ è un rumore bianco di dimensioni $q \times 1$. L'introduzione del rumore bianco $\mathbf{w}(t)$ consente di tenere in conto l'inaccuratezza del modello mentre $\mathbf{v}(t)$ rappresenta gli errori degli strumenti di misura.

Per quanto riguarda la descrizione delle oscillazioni in assenza di forzante, la rappresentazione di stato assume la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)\end{aligned}\tag{3.41}$$

La (3.41) può essere interpretata anche come un modello la cui forzante è data dal rumore bianco. Nel caso in cui la forzante esterna non sia nota a priori, ma possa essere assimilata ad un rumore bianco (tale supposizione risulta essere attendibile per forzanti tipo vento o traffico, le quali non presentano solitamente frequenze portanti definite), i secondi addendi della (3.40) possono essere inclusi nei terzi ottenendo la formulazione (3.41). In tal caso, i rumori \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k modellano quindi sia l'azione della forzante che il contributo delle incertezze sulle misure.

Per la risoluzione del modello e la determinazione delle matrici del sistema occorre uno strumento che consenta di stimare il segnale $\hat{\mathbf{y}}$ e lo stato $\hat{\mathbf{x}}$. Nel seguito si espone la trattazione della stima secondo il Filtro di Kalman, che risulta avere una posizione centrale per quanto riguarda la risoluzione del problema mediante algoritmi a sottospazi.

3.6 STIMA DELLO STATO IN PRESENZA DI DISTURBI: IL FILTRO DI KALMAN

Nell'ambito dell'ingegneria si deve spesso affrontare il problema della valutazione di una grandezza incerta, come un parametro ignoto o di un segnale remoto. Tale valutazione viene effettuata sulla base di osservazioni e misure sperimentali sul fenomeno. Lo scopo di questo paragrafo è di presentare uno strumento basato sulla stima Bayesiana in grado di fornire un predittore ottimo per fenomeni la cui descrizione matematica richieda modelli dinamici.

3.6.1 Stimatore di Bayes

In tal contesto, si determina in primo luogo l'espressione della stima Bayesiana nel caso in dati e l'incognita siano congiuntamente gaussiane [Bittanti, 2000]. Per semplicità verrà fatto riferimento a dati e incognita scalari (denominati rispettivamente con d e ϑ) con valor medio nullo e varianza data da:

$$\text{var} \begin{bmatrix} d \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{dd} & \Lambda_{d\vartheta} \\ \Lambda_{\vartheta d} & \Lambda_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

La loro densità di probabilità congiunta è data da:

$$p(d, \vartheta) = C_1 \exp \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d & \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{dd} & \Lambda_{d\vartheta} \\ \Lambda_{\vartheta d} & \Lambda_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d \\ \vartheta \end{bmatrix} \right\} \quad (3.43)$$

dove C_1 è un'opportuna costante.

Sviluppando il prodotto si ottiene:

$$p(d, \vartheta) = C_1 \exp \left\{ -\frac{1}{2\Lambda} \left[\frac{\Lambda_{\vartheta\vartheta}}{\Lambda_{dd}} d^2 - 2 \frac{\Lambda_{\vartheta d}}{\Lambda_{dd}} d\vartheta + \vartheta^2 \right] \right\} \quad (3.44)$$

dove si è fatta la seguente apposizione:

$$\Lambda = \Lambda_{\vartheta\vartheta} - \frac{\Lambda_{\vartheta d}^2}{\Lambda_{dd}}. \quad (3.45)$$

La densità di probabilità della sola variabile d è invece data da:

$$p(d) = C_2 \exp\left\{-\frac{d^2}{2\Lambda_{dd}}\right\}. \quad (3.46)$$

Se d e ϑ non sono indipendenti, la probabilità congiunta $p(d, \vartheta)$ è data da:

$$p(d, \vartheta) = p(\vartheta | d) \cdot p(d). \quad (3.47)$$

La probabilità condizionata è quindi data da:

$$p(\vartheta | d) = \frac{p(d, \vartheta)}{p(d)} = \frac{C_1}{C_2} \exp\left\{-\frac{1}{2\Lambda} \left(\vartheta - \frac{\Lambda_{\vartheta d}}{\Lambda_{dd}} d\right)^2\right\} \quad (3.48)$$

Dalla forma della (3.48) si vede che la probabilità condizionata $p(\vartheta | d)$ è ancora una distribuzione Gaussiana, con valore atteso pari a $d \Lambda_{\vartheta d} / \Lambda_{dd}$ e varianza Λ .

Lo stimatore della grandezza incognita ϑ è quindi è dato da:

$$\hat{\vartheta} = \frac{\Lambda_{\vartheta d}}{\Lambda_{dd}} d \quad (3.49)$$

È possibile dimostrare, mediante una stima lineare, che l'espressione dell'estimatore è corretta anche se la variabile non sono gaussiane. Si ricava inoltre che, nel caso particolare di variabili gaussiane, la stima lineare coincide

con la (3.49) ed è inoltre la stima ottima, nel senso che non esiste alcun altro stimatore che produca una varianza inferiore dell'errore di stima.

Nel caso in cui dati e incognita sono vettori, con valor atteso generico ($E[\mathbf{d}] = \mathbf{d}_m$, $E[\boldsymbol{\theta}] = \boldsymbol{\theta}_m$) e varianza data dalla matrice:

$$\text{var} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{dd} & \boldsymbol{\Lambda}_{d\theta} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\theta d} & \boldsymbol{\Lambda}_{\theta\theta} \end{bmatrix}, \quad \text{con } \boldsymbol{\Lambda}_{\theta d} = \boldsymbol{\Lambda}_{d\theta}^T$$

lo stimatore Bayesiano è dato da:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_m + \boldsymbol{\Lambda}_{\theta d} (\boldsymbol{\Lambda}_{dd})^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{d}_m)$$

con varianza pari a:

$$\text{var}[\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}] = \boldsymbol{\Lambda}_{\theta\theta} - \boldsymbol{\Lambda}_{\theta d} (\boldsymbol{\Lambda}_{dd})^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_{d\theta}$$

3.6.2 Stimatore nel caso multivariabile

Si presenta brevemente la formulazione della stima nel caso multivariabile. Si indichi con:

$$\mathbf{d}_1 = [\mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-2}, \mathbf{y}_{k-3}, \dots, \mathbf{y}_1]$$

l'insieme delle variabili acquisite prima dell'istante k e con \mathbf{d}_k le variabili acquisite all'istante k -esimo. Si suppone inoltre che le variabili $\boldsymbol{\theta}$, \mathbf{d}_1 , \mathbf{d}_k siano a valor medio nullo e varianza data da:

$$\text{var} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{\theta\theta} & \boldsymbol{\Lambda}_{\theta d_1} & \boldsymbol{\Lambda}_{\theta d_k} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\theta d_1}^T & \boldsymbol{\Lambda}_{d_1 d_1} & \boldsymbol{\Lambda}_{d_1 d_k} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{\theta d_k}^T & \boldsymbol{\Lambda}_{d_1 d_k}^T & \boldsymbol{\Lambda}_{d_k d_k} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

La stima ottima di $\boldsymbol{\theta}$ a partire dalla conoscenza dei dati \mathbf{d}_1 è data da:

$$E[\boldsymbol{\theta} | \mathbf{d}_1] = \boldsymbol{\Lambda}_{\theta d_1} (\boldsymbol{\Lambda}_{d_1 d_1})^{-1} \mathbf{d}_1 \quad (3.51)$$

mentre la stima basata anche sui dati \mathbf{d}_k ottenibile mediante la seguente espressione:

$$E[\boldsymbol{\theta} | \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_k] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{\theta d_1} & \boldsymbol{\Lambda}_{\theta d_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{d_1 d_1} & \boldsymbol{\Lambda}_{d_1 d_k} \\ \boldsymbol{\Lambda}_{d_1 d_k}^T & \boldsymbol{\Lambda}_{d_k d_k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_k \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Si definisce l'innovazione di \mathbf{d}_k rispetto a \mathbf{d}_1 il vettore:

$$\mathbf{e} = \mathbf{d}_k - \mathbf{E}[\mathbf{d}_k | \mathbf{d}_1] = \mathbf{d}_k - (\boldsymbol{\Lambda}_{d_1 d_k})^T (\boldsymbol{\Lambda}_{d_1 d_1})^{-1} \mathbf{d}_1 \quad (3.53)$$

L'innovazione rappresenta la “parte” di \mathbf{d}_k che non può essere predetta noto \mathbf{d}_1 . In altre parole, è il reale contenuto informativo innovativo di \mathbf{d}_k rispetto a \mathbf{d}_1 . Sviluppando il prodotto all'interno della (3.52) ed introducendo la (3.53), è possibile ottenere l'espressione della stima della variabile $\boldsymbol{\theta}$ dalla conoscenza dei dati \mathbf{d}_k e \mathbf{d}_1 :

$$\mathbf{E}[\boldsymbol{\theta} | \mathbf{d}_k, \mathbf{d}_1] = \boldsymbol{\Lambda}_{\theta d_1} (\boldsymbol{\Lambda}_{d_1 d_1})^{-1} \mathbf{d}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_{\theta e} (\boldsymbol{\Lambda}_{ee})^{-1} \mathbf{e} = \mathbf{E}[\boldsymbol{\theta} | \mathbf{d}_1] + \mathbf{E}[\boldsymbol{\theta} | \mathbf{e}]. \quad (3.54)$$

3.6.3 Formulazione della predizione alla Kalman

Nella sua formulazione essenziale, il problema del filtraggio alla Kalman può essere così impostato. Si consideri un fenomeno descritto dal sistema dinamico:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (3.55)$$

dove lo stato \mathbf{x}_k è un vettore a n componenti, e l'uscita $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(k\Delta t)$ è un vettore a p componenti. Le matrici \mathbf{A} e \mathbf{C} sono deterministiche, e si suppone che siano

note. Inoltre, \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k sono processi di tipo Rumore Bianco con media nulla e covarianza data da:

$$\mathbf{E} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_i \\ \mathbf{v}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j^T & \mathbf{v}_j^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \delta_{ij} \quad (3.56)$$

Il rumore \mathbf{w}_k è un vettore di dimensione $n \times 1$ mentre \mathbf{v}_k ha p componenti; le matrici \mathbf{Q} , \mathbf{R} e \mathbf{S} , sono quindi matrici rispettivamente di dimensioni $n \times n$, $p \times p$, $n \times p$. Inoltre si è indicata con δ_{ij} la funzione delta di Dirac. Il problema può quindi essere così posto: stimare lo stato al tempo $k+r$ disponendo delle osservazioni del segnale di uscita \mathbf{y} fino all'istante k . Di particolare interesse è il caso in cui $r=1$, ovvero della predizione "ad un passo" (cioè del passo successivo). Nel caso invece di $r=0$, il problema è detto problema di filtraggio.

Nel problema della predizione ad un passo dello stato \mathbf{x} al tempo $k+1$, i dati a disposizione sono costituiti dalle osservazioni dell'uscita \mathbf{y} dall'istante 1 all'istante k , che possono essere così raccolti:

$$\bar{\mathbf{y}}_k = [\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-2}, \dots, \mathbf{y}_1] \quad (3.57)$$

Nello spazio delle variabili aleatorie, le componenti di $\bar{\mathbf{y}}_k$ generano un sottospazio che è denominato *sottospazio passato*. L'innovazione apportata dal dato $k+1$ -esimo rispetto a $\bar{\mathbf{y}}_k$ è data da:

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{E}[\mathbf{y}_{k+1} | \bar{\mathbf{y}}_k]. \quad (3.58)$$

Come visto in precedenza, l'innovazione è la parte di segnale che non può essere predetta dalla sola conoscenza del segnale fino all'istante k , ovvero, si suol dire che l'innovazione è ortogonale al passato.

Una variabile di notevole importanza nella teoria di Kalman è l'errore di predizione dello stato, indicato nel seguito con \mathbf{v}_{k+1} . Esso è un vettore a n componenti, definito come segue:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1} | \bar{\mathbf{y}}_k] \quad (3.59)$$

La predizione ad un passo dell'uscita è data da:

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{E}[\mathbf{y}_{k+1} | \bar{\mathbf{y}}_k] \quad (3.60)$$

Per la (3.55b), si avrà:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_{k+1} &= \mathbf{E}[\mathbf{C}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} | \bar{\mathbf{y}}_k] \\ &= \mathbf{C}\mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1} | \bar{\mathbf{y}}_k] + \mathbf{E}[\mathbf{v}_{k+1} | \bar{\mathbf{y}}_k] \end{aligned} \quad (3.61)$$

Il secondo termine della (3.61) è nullo in quanto \mathbf{v}_{k+1} è indipendente da $\bar{\mathbf{y}}_k$, da cui si ricava:

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}. \quad (3.62)$$

La predizione ottima dell'uscita $\hat{\mathbf{y}}_{k+1}$ è di calcolo immediato una volta determinata la stima dello stato $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$.

3.6.4 Espressione ricorsiva della predizione dello stato.

La stima dello stato al tempo $k+1$ basata sui dati fino all'istante k è data da:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1} | \bar{\mathbf{y}}_k]. \quad (3.63)$$

Per ottenere un'espressione ricorsiva è utile considerare il vettore $\bar{\mathbf{y}}_k$ come l'insieme dei dati fino all'istante $k-1$ più l'ultimo dato \mathbf{y}_k :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1} | \bar{\mathbf{y}}_{k-1}, \mathbf{y}_k] \quad (3.64)$$

Applicando la formula ricorsiva di Bayes (3.54), si ottiene:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1} | \bar{\mathbf{y}}_{k-1}] + \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{e}_k] \quad (3.65)$$

dove \mathbf{e}_k è l'innovazione di \mathbf{y}_k rispetto a $\bar{\mathbf{y}}_{k-1}$. Per giungere ad un'espressione utile per l'implementazione, i due termini che compaiono nell'espressione (3.65) vengono analizzati separatamente.

Per quanto riguarda il primo termine, è possibile utilizzare la (3.55a), ottenendo:

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1} | \bar{\mathbf{y}}_{k-1}] = \mathbf{E}[\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k | \bar{\mathbf{y}}_{k-1}] = \mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{x}_k | \bar{\mathbf{y}}_{k-1}] + \mathbf{E}[\mathbf{w}_k | \bar{\mathbf{y}}_{k-1}] \quad (3.66)$$

Il secondo termine della (3.66) è nullo in quanto il rumore \mathbf{w} è indipendente dal segnale \mathbf{y} . Si ottiene, quindi:

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1} | \bar{\mathbf{y}}_{k-1}] = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k. \quad (3.67)$$

Inoltre, il secondo termine della (3.65) è dato da:

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{e}_k] = \Lambda_{x_{k+1}e_k} (\Lambda_{e_k e_k})^{-1} \mathbf{e}_k \quad (3.68)$$

Dopo alcuni passaggi algebrici, considerando che i rumori e le innovazioni sono ortogonali rispetto ai segnali, è possibile ottenere le seguenti espressioni per le matrici di covarianza $\Lambda_{x_{k+1}e_k}$:

$$\Lambda_{x_{k+1}e_k} = \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T + \mathbf{S} \quad (3.69)$$

dove con \mathbf{P}_k si indica la matrice di covarianza dell'errore di predizione dello stato, e:

$$\Lambda_{e_k e_k} = \mathbf{C}\mathbf{P}_k\mathbf{C} + \mathbf{R}. \quad (3.70)$$

dove \mathbf{R} è la matrice di covarianza del rumore \mathbf{v} :

$$\mathbf{E}[\mathbf{v}_i(\mathbf{v}_i)^T] = \mathbf{R} \quad (3.71)$$

Dalle (3.64 – 3.70), si ottiene un'espressione ricorsiva per la predizione ad un passo dello stato. Posto:

$$\mathbf{K}_k = [\mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T + \mathbf{S}][\mathbf{C}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T + \mathbf{R}] \quad (3.72)$$

si ha:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k\mathbf{e}_k \quad (3.73)$$

La matrice \mathbf{K} è la matrice di guadagno di Kalman. La differenza tra la misura dell'uscita del sistema e la sua stima (innovazone) è un errore utilizzato per la correzione della stima. In ambiente stocastico, l'innovazone deve essere usata anche per correggere gli effetti dell'errore di previsione; inoltre, a causa degli errori modellati tramite il processo \mathbf{v}_k , l'innovazone può essere non nulla anche quando la stima del vettore di stato è esatta.

La matrice dei guadagni, \mathbf{K}_k , costituisce un compromesso tra due esigenze distinte: l'opportunità di utilizzare le misure disponibili per correggere la stima dello stato e la necessità di non peggiorare la stima corrente a causa degli errori sulla misura dell'uscita [Grewal & Andrews, 2001].

Essa infatti dipende dalla matrice di covarianza \mathbf{R} del rumore sulle misure (rappresentante la variabilità statistica dei disturbi sul segnale di misura \mathbf{y}_k) e dalla matrice di varianza dell'errore sullo stato \mathbf{P}_k .

La proporzionalità tra la matrice \mathbf{K}_k e la matrice di covarianza dell'errore di stima \mathbf{P}_k renda i guadagni tanto più elevati quanto più elevato è, a parità di altre condizioni, l'errore sulla stima corrente. La proporzionalità tra la \mathbf{K}_k ed il prodotto $\mathbf{C}_k \mathbf{R}_k$ può essere interpretata come proporzionalità tra i guadagni e l'affidabilità delle misure sull'uscita.

In altre parole, il guadagno \mathbf{K}_k risulterà maggiore o minore a seconda se prevale l'incertezza dello stato o l'incertezza sulla misura. Se \mathbf{K}_k è pari alla matrice identità, l'algoritmo darà piena fiducia alla misura effettuata. Per \mathbf{K}_k tendente a zero, l'algoritmo tenderà al contrario a confermare il valore predetto dalla stima.

Nell'espressione (3.72) si è fatto uso della matrice di varianza dell'errore sullo stato \mathbf{P}_k . E' possibile calcolare tale matrice in modo ricorsivo mediante la risoluzione dell'equazione di Riccati. Poiché l'errore di predizione sullo stato è pari a:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1} \quad (3.74)$$

utilizzando la (3.73) e la (3.55a), si può ottenere la seguente espressione:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k - \mathbf{K}_k\mathbf{e}_k \quad (3.75)$$

Introducendo l'espressione dell'innovazione, si ha:

$$\mathbf{v}_{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})\mathbf{v}_k + \mathbf{w}_k - \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k \quad (3.76)$$

Dalla (3.76) si può ricavare l'espressione cercata per la matrice di varianza dell'errore di predizione sullo stato:

$$\mathbf{P}_{k+1} = E[\mathbf{v}_{k+1}(\mathbf{v}_{k+1})^T] = E\left[\left((\mathbf{A} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})\mathbf{v}_k + \mathbf{w}_k - \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k\right)\left((\mathbf{A} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})\mathbf{v}_k + \mathbf{w}_k - \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k\right)^T\right]$$

Sviluppando il prodotto si ottiene l'equazione di Riccati (*DRE - Differential Riccati Equation*), descritta dalla formula:

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} - (\mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T + \mathbf{S})(\mathbf{C}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T + \mathbf{S})^T \quad (3.77)$$

Mediante tale equazione matriciale, è possibile aggiornare la matrice di varianza dell'errore di predizione dello stato. La matrice \mathbf{P}_{k+1} deve essere

simmetrica e semidefinita positiva. Dalla (3.77) si evince che se \mathbf{P}_k è simmetrica e semidefinita positiva, anche \mathbf{P}_{k+1} lo è. Pertanto, al primo passo della procedura, tale matrice deve essere inizializzata con tali proprietà. Al primo passo, la matrice di varianza dell'errore dello stato è posta pari a:

$$\mathbf{P}_1 = E[\mathbf{x}_1(\mathbf{x}_1)^T].$$

3.7 RISOLUZIONE DEL MODELLO DI STATO MEDIANTE METODI A SOTTOSPAZI

Il nome “metodi a sottospazi” riflette il fatto che le matrici contenenti il segnale misurato possono essere interpretate come uno spazio vettoriale dove le colonne di tale matrice rappresentano una base di vettori, mentre le righe permettono di ottenere una sequenza di stime valutate mediante una batteria di filtri di Kalman. Tali matrici possono essere determinate direttamente dalla sola conoscenza dei segnali di uscita, senza la conoscenza a priori delle matrici caratterizzanti il modello [Peeters 2000].

Queste metodologie non necessitano di un'esplicita parametrizzazione del modello, che, per sistemi multi-uscita, spesso si traduce in complicazioni computazionale notevoli. Ciò implica una maggiore efficienza computazionale e una semplicità dell'algoritmo dal punto di vista operativo. Le caratteristiche fondamentali sono ottenute mediante operazioni di algebra lineare, quali *decomposizione QR* e *singular value decomposition (SVD)*. Infatti, a differenza dei più classici algoritmi di risoluzione quali il *Prediction Error Method* [Ljung 1987; Vincenzi e Savoia 2005], che richiede la soluzione di un processo di ottimizzazione non lineare, i metodi a sottospazi ottengono le matrici dinamiche caratterizzanti il sistema mediante la risoluzione di un problema lineare. In ultimo, essi non risentono problemi di convergenza in quanto non sono metodi iterativi, risultando pertanto più affidabili e robusti.

In un problema di ottimizzazione, appare chiaro che occorre definire alcuni parametri mediante il processo di parametrizzazione del modello. Nei metodi a sottospazi, l'unico parametro da determinare è l'ordine del modello. Per gli algoritmi classici, è presente in letteratura una estesa serie di studi volti a determinare il cosiddetto modello in forma canonica, ovvero il modello che rende minimo il numero di parametri da determinare. Tale parametrizzazione può presentare problemi numericamente mal condizionati, intendendo con ciò che i risultati possono essere estremamente sensibili a piccole perturbazioni dei dati. Per ciò che concerne la convergenza del metodo, gli algoritmi a sottospazi sono veloci, in quanto non sono metodi iterativi, come, ad esempio, per il Prediction Error Method. Per questo motivo, non si hanno problemi legati alla convergenza del metodo, e risultano quindi metodi più robusti dal punto di vista numerico.

Il problema di identificazione in assenza di forzante nota (*stochastic subspace identification*) è quindi definito nel modo seguente.

Siano date s misure del segnale di uscita $\mathbf{y}_k \in \mathcal{R}^l$, generate da un sistema stocastico, non noto, esprimibile secondo la relazione:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{3.78}$$

essendo \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k processi di tipo Rumore Bianco aventi media nulla e covarianza data da:

$$\mathbf{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_i \\ \mathbf{v}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_j^T & \mathbf{v}_j^T \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \delta_{ij}\tag{3.79}$$

L'obiettivo del processo di identificazione è di determinare le matrici del sistema \mathbf{A} e \mathbf{C} (incognite, in quanto dalle registrazioni sperimentali sono note solo i segnali \mathbf{y}) nonché le matrici di covarianza \mathbf{Q} , \mathbf{R} e \mathbf{S} che forniscono i

momenti del secondo ordine dei processi riportate nella (3.79) partendo dalla sola conoscenza dei valori dei segnali di uscita.

A tal scopo, si assume che il processo sia stazionario, ovvero:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{x}_k] &= \mathbf{0} \\ \mathbf{E}[\mathbf{x}_k (\mathbf{x}_k)^T] &= \Sigma \end{aligned} \quad (3.80)$$

dove Σ è definita come la matrice di covarianza dello stato \mathbf{x} ed è assunta indipendente dall'istante di tempo k .

3.7.1 Risoluzione del problema di identificazione mediante metodi a sottospazi

L'identificazione con metodi a sottospazi [Van Overschee e De Moor 1996] è usualmente basata sulla manipolazione di matrici mediante operazioni di algebra lineare. In questo contesto, gli elementi appartenenti ad una riga di ogni matrice possono essere considerati come le coordinate di vettori di uno spazio j -dimensionale. Le righe delle matrici definiscono quindi una base per ogni vettore lineare appartenente a tale spazio vettoriale. Per tale ragione, si indicherà nel seguito “spazio-riga” il vettore ottenuto dagli elementi presenti in riga di una determinata matrice, con le quali sarà possibile ottenere un'interpretazione geometrica delle operazioni.

Nella trattazione si utilizzeranno anche i termini “blocchi-riga” e “blocchi-colonna” al posto di, rispettivamente, righe e colonne, considerando il fatto che ogni blocco contiene più elementi in quanto le variabili sono anch'esse vettori.

L'identificazione a sottospazi utilizza in modo estensivo l'uso di matrici che legano le matrici del sistema; verranno quindi definite le principali matrici che derivano da elaborazioni algebriche delle matrici del sistema \mathbf{A} e \mathbf{C} . Verrà inoltre definita una matrice, denominata matrice di Hankel, contenente il segnale \mathbf{y} acquisito. Successivamente, si introdurrà il Filtro di Kalman

necessario per ottenere la stima dello stato \mathbf{x} . Infine verrà mostrato come è possibile ottenere le matrici \mathbf{A} e \mathbf{C} , mediante una proiezioni dello “spazio-riga” della matrice contenente il segnale, e la stima dello stato \mathbf{x} prodotta con il filtro di Kalman.

3.7.2 Definizione delle principali variabili utilizzate nel processo di identificazione

Si riportano innanzitutto alcune definizioni riguardanti i processi tempo-invariante presenti nella formulazione del problema. Siccome \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k sono rumori bianchi a media nulla:

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}[\mathbf{x}_k \mathbf{w}_k^T] = \mathbf{0}. \quad (3.81)$$

essi sono non correlati con lo stato \mathbf{x} . Di conseguenza, sostituendo la (3.78a) nella (3.80b) la matrice di covarianza dello stato \mathbf{x} può essere valutata in relazione alla matrice \mathbf{A} , mediante l’espressione:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})^T] = \\ &= \mathbf{E}[(\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k)(\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k)^T] = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{x}_k(\mathbf{x}_k)^T]\mathbf{A}^T + \mathbf{E}[\mathbf{w}_k(\mathbf{w}_k)^T] = \\ &= \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (3.82)$$

Si definisce inoltre la matrice \mathbf{G} secondo l’espressione:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1}\mathbf{v}_k^T] \\ &= \mathbf{E}[(\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k)(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k)^T] = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{E}[\mathbf{x}_k\mathbf{x}_k^T]\mathbf{C}^T + \mathbf{E}[\mathbf{w}_k\mathbf{v}_k^T] = \\ &= \mathbf{A}\Sigma\mathbf{C}^T + \mathbf{S} \end{aligned} \quad (3.83)$$

dove si è fatto uso della (3.76a) e della (3.78c), e la matrice di covarianza degli output:

$$\Lambda_i = \mathbf{E}[\mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T] \quad (3.84)$$

dove con i si è indicato una generica “traslazione nel tempo” (*time delay*) dall’istante $k \Delta t$ all’istante $(k+i) \Delta t$.

Nel caso particolare in cui tale traslazione sia nulla ($i=0$), la (3.84) può essere riscritta nel seguente modo:

$$\Lambda_0 = \mathbf{E}[\mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^T] = \mathbf{C} \Sigma \mathbf{C}^T + \mathbf{R} \quad (3.85)$$

nella quale si è fatto uso della seconda delle (3.76) e della definizione di matrice di covarianza del processo bianco \mathbf{v}_k (vedi equazione (3.79)).

Se si considera *time delay* unitario, ovvero si pone $i=1$, la matrice di covarianza degli output è data da:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \mathbf{E}[\mathbf{y}_{k+1} \mathbf{y}_k^T] \\ &= \mathbf{E}[(\mathbf{C} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}) \mathbf{y}_k^T] = \\ &= \mathbf{C} \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1} \mathbf{y}_k^T] + \mathbf{E}[\mathbf{v}_{k+1} \mathbf{y}_k^T] = \\ &= \mathbf{C} \mathbf{G} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Se si considera, invece, $i=2$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \mathbf{E}[\mathbf{y}_{k+2} \mathbf{y}_k^T] \\ &= \mathbf{E}[(\mathbf{C} \mathbf{x}_{k+2} + \mathbf{v}_{k+2}) \mathbf{y}_k^T] = \\ &= \mathbf{C} \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+2} \mathbf{y}_k^T] + \mathbf{E}[\mathbf{v}_{k+2} \mathbf{y}_k^T] = \\ &= \mathbf{C} \mathbf{E}[(\mathbf{A} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{w}_{k+1}) \mathbf{y}_k^T] = \\ &= \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+1} \mathbf{y}_k^T] + \mathbf{E}[\mathbf{w}_{k+1} \mathbf{y}_k^T] = \\ &= \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{G} \end{aligned} \quad (3.87)$$

In generale, considerando una differenza di tempo non nulla, si ottiene l’espressione generale:

$$\begin{aligned}
 \Lambda_i &= \mathbf{E}[\mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T] \\
 &= \mathbf{E}[(\mathbf{C} \mathbf{x}_{k+i} + \mathbf{v}_{k+i}) \mathbf{y}_k^T] = \\
 &= \mathbf{C} \mathbf{E}[\mathbf{x}_{k+i} \mathbf{y}_k^T] + \mathbf{E}[\mathbf{v}_{k+i} \mathbf{y}_k^T] = \\
 &= \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G}
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Analogamente, se la differenza di tempo è negativa (indicata nel seguito con $-i$), la (3.84) diventa:

$$\Lambda_{-i} = \mathbf{G}^T (\mathbf{A}^{i-1})^T \mathbf{C}^T. \tag{3.89}$$

Se si considera quindi un *time delay* generico, la matrice di covarianza degli output è data da:

$$\Lambda_i = \mathbf{E}[\mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T] = \begin{cases} \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G} & i > 0 \\ \Lambda_0 & i = 0 \\ \mathbf{G}^T (\mathbf{A}^{i-1})^T \mathbf{C}^T & i < 0 \end{cases} \tag{3.90}$$

La matrice di Hankel dell'output è definita come segue:

$$\mathbf{Y}_{0:2i-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \dots & \mathbf{y}_{j-1} \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \dots & \mathbf{y}_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{y}_{i-1} & \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \dots & \mathbf{y}_{i+j-2} \\ \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \dots & \mathbf{y}_{i+j-1} \\ \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \mathbf{y}_{i+3} & \dots & \mathbf{y}_{i+j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{y}_{2i-1} & \mathbf{y}_{2i} & \mathbf{y}_{2i+1} & \dots & \mathbf{y}_{2i+j-2} \end{pmatrix}, \tag{3.91}$$

nella quale è possibile distinguere una parte superiore, delimitata dal valore \mathbf{y}_{i-1} nella prima colonna, e la rimanente parte inferiore. Pertanto la (3.91) è riscritta nella forma:

$$\mathbf{Y}_{0:2i-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{0:i-1} \\ \mathbf{Y}_{i:2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

dove il pedice p è utilizzato per indicare i valori di segnali acquisiti nel passato (*past*), mentre il pedice f indica quelli acquisiti in tempi successivi (*future*).

Poiché ogni blocco riga contiene l righe (con l numero degli output, ovvero il numero degli strumenti), la matrice \mathbf{Y} è formata da $2li$ righe. Il numero di colonne j è tipicamente uguale a $s-2i+1$, essendo s numero complessivo delle misure effettuate, il che implica che tutti i punti dati sono utilizzati.

Analogamente alla (3.92), è possibile anche suddividere la (3.91) seguente modo:

$$\mathbf{Y}_{0:2i-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{0:i} \\ \mathbf{Y}_{i+1:2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_p^+ \\ \mathbf{Y}_f^- \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

nella quale la riga con indice i è stata aggiunta al blocco dei segnali acquisiti nel passato (denominata \mathbf{Y}_p^+) e è stata eliminata dal blocco rappresentante i segnali futuri (\mathbf{Y}_f^-).

L'identificazione a sottospazi utilizza in modo esteso l'uso di matrici che legano le matrici del sistema; si definisce l'*extended observability matrix* $\mathbf{\Gamma}_i$ come:

$$\mathbf{\Gamma}_i = (\mathbf{C} \quad \mathbf{CA} \quad \mathbf{CA}^2 \quad \dots \quad \mathbf{CA}^{i-1})^T. \quad (3.94)$$

dove l'indice i indica il numero di blocchi-riga. Si assume inoltre che la matrice $\mathbf{\Gamma}_i$ sia osservabile, ovvero che il rango di $\mathbf{\Gamma}_i$ sia pari a n .

La *reverse controllability matrix* $\mathbf{\Delta}_i$ (dove l'indice i indica il numero di blocchi-colonna) è definita secondo l'espressione:

$$\mathbf{\Delta}_i = (\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} \quad \mathbf{A}^{i-2}\mathbf{G} \quad \dots \quad \mathbf{AG} \quad \mathbf{G}) \quad (3.95)$$

Le matrici di Toeplitz \mathbf{H}_i e \mathbf{L}_i sono costruite partendo dalle matrici di covarianza degli output a diversi *time delay*, coerentemente con le seguenti definizioni:

$$\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} \Lambda_i & \Lambda_{i-1} & \dots & \Lambda_2 & \Lambda_1 \\ \Lambda_{i+1} & \Lambda_i & \dots & \Lambda_3 & \Lambda_2 \\ \Lambda_{i+2} & \Lambda_{i+1} & \dots & \Lambda_4 & \Lambda_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{2i-1} & \Lambda_{2i-2} & \dots & \Lambda_{i+1} & \Lambda_i \end{pmatrix}, \quad (3.96)$$

$$\mathbf{L}_i = \begin{pmatrix} \Lambda_0 & \Lambda_{-1} & \Lambda_{-2} & \dots & \Lambda_{1-i} \\ \Lambda_1 & \Lambda_0 & \Lambda_{-1} & \dots & \Lambda_{2-i} \\ \Lambda_2 & \Lambda_1 & \Lambda_0 & \dots & \Lambda_{3-i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{i-1} & \Lambda_{i-2} & \Lambda_{i-3} & \dots & \Lambda_0 \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

Ricordando la definizione (3.91), si ricava che:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i &= \mathbf{E}[\mathbf{Y}_f, \mathbf{Y}_p] \\ \mathbf{L}_i &= \mathbf{E}[\mathbf{Y}_p, \mathbf{Y}_p] \end{aligned} \quad (3.98)$$

Nella derivazione dell'algoritmo di identificazione per sistemi puramente stocastici, il filtro di Kalman ha un ruolo fondamentale. Si introduce quindi un banco di filtri di Kalman a tempo discreto [Grewal e Andrews 2001], generando una sequenza di stime degli stati, il quale permetterà di collegare la stima dello stato direttamente con il segnale in output.

Il filtro di Kalman a tempo discreto fornisce una stima $\hat{\mathbf{x}}_k$ dello stato \mathbf{x}_k , definita dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_{k-1}\mathbf{e}_{k-1} \\ \mathbf{y}_{k-1} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{e}_{k-1} \end{aligned} \quad (3.99)$$

Ovvero, sostituendo:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_{k-1}(\mathbf{y}_{k-1} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (3.100)$$

dove \mathbf{e}_k è l'innovazione e \mathbf{K}_{k-1} è la matrice di guadagno di Kalman che racchiude la descrizione del disturbo sul sistema causato dall'eccitazione rumore bianco.

Il guadagno \mathbf{K}_{k-1} è ottenuto secondo l'espressione:

$$\mathbf{K}_{k-1} = (\mathbf{G} - \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{C}^T)(\Lambda_0 - \mathbf{C}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{C}^T)^{-1} \quad (3.101)$$

e dipende dalla matrice Λ_0 e, di conseguenza, dalla matrice di covarianza \mathbf{R} che rappresenta la variabilità statistica dei disturbi sul segnale di misura, e dalla matrice di varianza dell'errore sullo stato \mathbf{P}_k . Quest'ultima matrice è ricavabile mediante la risoluzione dell'Equazione di Riccati. La (3.101) è equivalente alla (3.72) nella quale si è introdotte le definizioni (3.83) e (3.84).

Dalla (3.100) è possibile porre la stima dello stato $\hat{\mathbf{x}}_k$ secondo una forma alternativa facendo uso delle definizioni (3.83) e (3.85) [Van Overschee e De Moor 1996]:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \Delta_c \mathbf{L}_k^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \dots \\ \mathbf{y}_{k-1} \end{pmatrix} \quad (3.102)$$

La dimostrazione della (3.102) può essere ottenuta per induzione ed è riportata in appendice A.

Si definisce quindi il banco di filtri di Kalman come la matrice:

$$\hat{\mathbf{X}}_i = [\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{x}}_{i+1}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{i+j-1}] \quad (3.103)$$

le cui righe rappresentano l'evoluzione della stima dello stato \mathbf{x} nel tempo.

Dalla definizione (3.103) e attraverso la (3.102) è possibile ricavare che:

$$\hat{\mathbf{X}}_i = [\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{x}}_{i+1}, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{i+j-1}] = \Delta_c \mathbf{L}_k^{-1} \mathbf{Y}_p \quad (3.104)$$

Quest'ultima relazione indica che la matrice $\hat{\mathbf{X}}_i$ è generata da un banco di filtri di Kalman discreti, che lavorano in parallelo su ogni colonna della matrice di Hankel degli output passati \mathbf{Y}_p . È importante notare come ogni filtro di Kalman usa solo un'informazione parziale dagli output, in quanto utilizza solo i misure.

3.7.3 Determinazione delle matrici del sistema

Si presenta ora il teorema principale dell'identificazione a sottospazi in assenza di forzante nota. Il teorema si basa innanzitutto sulla determinazione delle righe-spazio dello stato $\hat{\mathbf{X}}_i$ e delle colonne-spazio dell'*extended observability matrix* Γ_i , direttamente dal segnale di uscita \mathbf{Y} , senza alcuna conoscenza delle matrici del sistema \mathbf{A} e \mathbf{C} . Successivamente le matrici del sistema possono essere estratte da Γ_i o da $\hat{\mathbf{X}}_i$, così risolvendo il problema di identificazione.

A tale scopo, occorre definire la proiezione ortogonale Θ “spazio-riga” della matrice degli output “futuri” \mathbf{Y}_f sullo “spazio-riga” della matrice degli output “passati” \mathbf{Y}_p , che si scrive:

$$\Theta = \mathbf{Y}_f / \mathbf{Y}_p \quad (3.105)$$

Dall'analisi matriciale, la proiezione è ottenuta dalla seguente formula:

$$\mathbf{Y}_f / \mathbf{Y}_p = \mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_p^T (\mathbf{Y}_p \mathbf{Y}_p^T)^* \mathbf{Y}_p \quad (3.106)$$

dove con $(^*)$ si indica la matrice pseudo-inversa secondo Moore-Penrose. Introdurre una *decomposizione RQ* delle matrici è computazionalmente

efficiente in quanto è possibile dimostrare che solo la matrice triangolare bassa è necessaria nel calcolo della proiezione (3.106).

Tenendo conto che la covarianza tra due matrici ottenuta su j osservazioni può essere approssimata nel modo seguente:

$$\mathbf{E}_j[\mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_p^T] \cong \frac{1}{j} \mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_p^T, \quad (3.107)$$

la (3.106) può essere posta nella forma:

$$\mathbf{Y}_f / \mathbf{Y}_p = \mathbf{E}_j[\mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_p^T] (\mathbf{E}_j[\mathbf{Y}_p \mathbf{Y}_p^T])^* \mathbf{Y}_p \quad (3.108)$$

Tenuto conto della definizione (3.96) e (3.97) delle matrici di Toeplitz \mathbf{H}_i e \mathbf{L}_i e della matrice di covarianza degli output $\mathbf{\Lambda}_i$, la proiezione $\mathbf{\Theta}$ può essere posta nella forma:

$$\mathbf{\Theta} = \mathbf{Y}_f / \mathbf{Y}_p = \mathbf{H}_i (\mathbf{L}_i)^{-1} \mathbf{Y}_p \quad (3.109)$$

Inoltre, è possibile ottenere la matrice di Toeplitz \mathbf{H} , definita nella (3.96), nella forma seguente:

$$\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_i & \mathbf{\Lambda}_{i-1} & \dots & \mathbf{\Lambda}_2 & \mathbf{\Lambda}_1 \\ \mathbf{\Lambda}_{i+1} & \mathbf{\Lambda}_i & \dots & \mathbf{\Lambda}_3 & \mathbf{\Lambda}_2 \\ \mathbf{\Lambda}_{i+2} & \mathbf{\Lambda}_{i+1} & \dots & \mathbf{\Lambda}_4 & \mathbf{\Lambda}_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{\Lambda}_{2i-1} & \mathbf{\Lambda}_{2i-2} & \dots & \mathbf{\Lambda}_{i+1} & \mathbf{\Lambda}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G} & \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-2} \mathbf{G} & \dots & \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{G} & \mathbf{C} \mathbf{G} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^i \mathbf{G} & \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G} & \dots & \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \mathbf{G} & \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{G} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{i+1} \mathbf{G} & \mathbf{C} \mathbf{A}^i \mathbf{G} & \dots & \mathbf{C} \mathbf{A}^3 \mathbf{G} & \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \mathbf{G} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{2i-2} \mathbf{G} & \mathbf{C} \mathbf{A}^{2i-3} \mathbf{G} & \dots & \mathbf{C} \mathbf{A}^i \mathbf{G} & \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{G} \end{pmatrix}$$

Introducendo le relazioni (3.94) e (3.95) nella equazione ricavata in precedenza, si ottiene:

$$\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{pmatrix} (\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} \quad \mathbf{A}^{i-2}\mathbf{G} \quad \dots \quad \mathbf{G}) = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{\Delta}_i \quad (3.110)$$

Introducendo inoltre la (3.110) nella (3.109), si ottiene:

$$\mathbf{\Theta}_i = \mathbf{H}_i (\mathbf{L}_i)^{-1} \mathbf{Y}_p = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{\Delta}_i (\mathbf{L}_i)^{-1} \mathbf{Y}_p \quad (3.111)$$

Infine, sostituendo la (3.104) nella relazione precedente, la proiezione $\mathbf{\Theta}_i$ diventa pari al prodotto tra l'*extended observability matrix* $\mathbf{\Gamma}_i$ e la stima dello stato ottenuto mediante una sequenza di filtri di Kalman $\hat{\mathbf{X}}_i$:

$$\mathbf{\Theta}_i = \mathbf{\Gamma}_i \hat{\mathbf{X}}_i. \quad (3.112)$$

La (3.112) indica quindi che le righe-spazio della stima dello stato $\hat{\mathbf{X}}_i$ possono essere trovate da una proiezione ortogonale dello spazio-riga degli output futuri \mathbf{Y}_f nello spazio riga degli input passati \mathbf{Y}_p .

La proiezione $\mathbf{\Theta} = \mathbf{Y}_f / \mathbf{Y}_p$ si presta alla scomposizione in valori singolari (**SVD**) secondo la formula:

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{\Theta}_i \mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1 \mathbf{\Gamma}_i \hat{\mathbf{X}}_i \mathbf{W}_2 = (\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{pmatrix} \quad (3.113)$$

dove $\mathbf{W}_1 \in \mathfrak{R}^{l \times l_i}$ e $\mathbf{W}_2 \in \mathfrak{R}^{j \times j}$ sono due matrici peso aventi rango pieno.

L'espressione (3.113) può essere decomposta in due parti, sfruttando alcune proprietà della **SVD**. La prima parte è funzione della sola matrice $\mathbf{\Gamma}_i$:

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{U}_1 (\mathbf{S}_1)^{1/2} \mathbf{T} \quad (3.114)$$

ove \mathbf{T} è una matrice arbitraria non singolare che rappresenta una trasformazione (può essere posta pari alla matrice identità); la seconda parte, invece, fornisce un'espressione dove compare solo il banco di filtri di Kalman:

$$\hat{\mathbf{X}}_i \mathbf{W}_2 = (\mathbf{T})^{-1} (\mathbf{S}_1)^{1/2} \mathbf{U}_2 \quad (3.115)$$

Con considerazioni simili a quanto già esposto, è possibile determinare la proiezione:

$$\Theta_{i-1} = \mathbf{Y}_f^- / \mathbf{Y}_p^+ = \mathbf{\Gamma}_{i-1} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \quad (3.116)$$

la quale indica che anche Θ_{i-1} , analogamente a Θ_i , può essere determinata dato il solo segnale in uscita.

Calcolate le stime degli stati $\hat{\mathbf{X}}_i$ e $\hat{\mathbf{X}}_{i+1}$ a partire dalla sola conoscenza del segnale in output \mathbf{y} , è ora possibile ottenere le matrici del sistema \mathbf{A} e \mathbf{C} . Il sistema originario ha assunto la seguente forma:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}}_i + \boldsymbol{\rho}_w, \\ \mathbf{Y}_{i,i} &= \mathbf{C} \hat{\mathbf{X}}_i + \boldsymbol{\rho}_v \end{aligned} \quad (3.117)$$

ovvero, in forma compatta:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{i,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_w \\ \boldsymbol{\rho}_v \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

dove con $\boldsymbol{\rho}_w, \boldsymbol{\rho}_v$ si sono indicati i residui (ovvero le innovazioni dei filtri di Kalman) che, per definizione, sono non correlati con la stima dello stato $\hat{\mathbf{X}}_i$.

È quindi possibile risolvere il problema (3.118) con il metodo dei minimi quadrati, dove risultano incogniti i valori dei coefficienti nelle matrici \mathbf{A} e \mathbf{C} . In [Van Overschee e De Moor, 1993] è mostrato che la soluzione ai minimi quadrati fornisce una stima delle matrici \mathbf{A} e \mathbf{C} asintoticamente esente da errore nella forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{ii} \end{pmatrix} (\hat{\mathbf{X}}_i)^* \quad (3.119)$$

3.8 INDIVIDUAZIONE DEI MODI STRUTTURALI

3.8.1 Determinazione delle caratteristiche modali

Determinate le matrici \mathbf{A} e \mathbf{C} che governano il sistema (si vedano l'equazione (3.119), è possibile ricavare le caratteristiche dinamiche del sistema vibrante mediante le in base alle definizioni commentate nel Capitolo 1.

In particolare, a partire dalla matrice dinamica in forma discreta \mathbf{A} è possibile ottenere la matrice corrispondente al continuo \mathbf{A}_c e, di conseguenza, frequenze, smorzamenti e forme modali mediante le espressioni (2.22) e (2.23). Indicando con $\bar{\lambda}_j$ il generico autovalore della matrice \mathbf{A} , frequenze e smorzamenti del problema strutturale sono valutati secondo le espressioni:

$$f_j = \frac{|\ln(\bar{\lambda}_j)|}{2\pi\Delta t} \quad (3.120)$$

$$\xi_j = -\frac{\text{Re}(\ln(\bar{\lambda}_j))}{|\ln(\bar{\lambda}_j)|} \quad (3.121)$$

Inoltre, se \mathbf{L} è la matrice le cui colonne sono gli autovettori di \mathbf{A} , le deformate modali in forma complessa Ψ sono calcolate attraverso l'espressione:

$$\Psi = \mathbf{CL} \quad (3.122)$$

3.8.2 Scelta dell'ordine del sistema

La complessità del modello dipende dall'ordine n , che rappresenta il numero delle variabili ausiliarie utilizzate nel vettore $\mathbf{x}(t)$.

Attribuito un ordine al modello, si otterranno n autovettori della matrice \mathbf{A} , non tutti i quali corrispondono a modi propri della struttura. Dovendo i modi propri essere funzioni delle caratteristiche della struttura e indipendenti dal processo numerico, i modi propri non devono variare al variare dell'ordine del modello. Per questo motivo è possibile distinguere i modi strutturali da quelli puramente numerici aumentando via via l'ordine del modello e controllando la stabilità dei risultati ottenuti. Questa procedura è ottenuta mediante il diagramma di stabilizzazione (Figura 3.3). [Rivella et al., 2004, Garibaldi et al., 2003, Bodeux & Golinvar, 2001].

La stabilità di un modo al variare dell'ordine del problema è così definita:

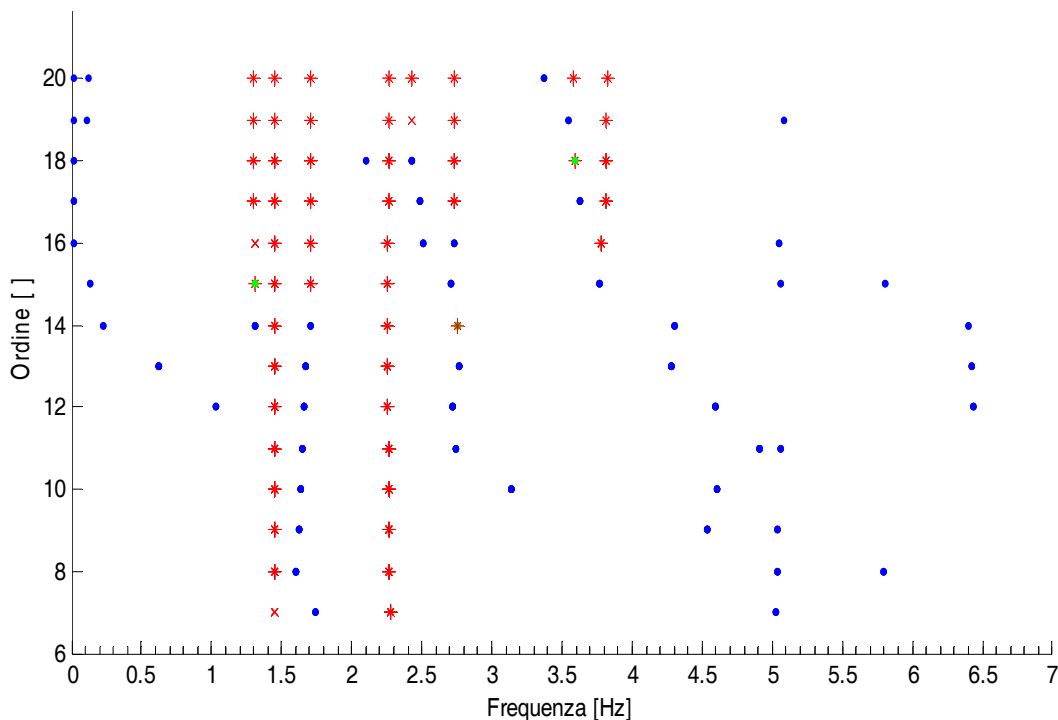


Figura 3.3. Esempio di diagramma di stabilizzazione.

- La stima della frequenza propria è considerata stabile se essa non ha variazione maggiore dell'1%.
- L'indice di smorzamento non deve essere discosto dallo stesso calcolato con un modello avente ordine diverso non più del 15%.
- La forma modale con un certo ordine viene confrontata con la stessa ottenuta con un ordine minore tramite il *Modal Assurance Criterion*, (MAC) [Ewins, 2000], che deve essere almeno pari al 90% .

Accanto al criterio di stabilità dei parametri dinamici, nella individuazione dei modi strutturali possono essere fatte alcune valutazioni di tipo fisico. Per quanto riguarda gli indici di smorzamento modale, valori superiori al 5% non saranno presi in considerazione tra i modi fisici. Inoltre, le strutture civili sono di regola strutture sottosmorzate. Le frequenze che ne regolano il comportamento si dovranno presentare di conseguenza a coppie coniugate; le frequenze che non presentano la relativa coniugata saranno quindi sicuramente relative a modi puramente numerici. I criteri utilizzati per individuare i modi strutturali sono riassunti nella

Tabella 3.1.

		Criterio
1	Frequenze	A coppie coniugate
2	Frequenze	Stabilità: 1%
3	Smorzamenti	Valore < 5%
4	Forme modali	MAC > 0.9
5	Smorzamenti	Stabilità: 15%

Tabella 3.1 Criteri di individuazione dei modi strutturali.

3.9 VALIDAZIONE DI UN MODELLO

Nei paragrafi precedenti sono stati presentati alcuni modelli matematici che vengono utilizzati nell'identificazione dei sistemi; come esposto, essi sono raggruppabili in due grandi famiglie: i modelli a rappresentazione esterna (modelli input-output) ed i modelli a rappresentazione interna (modelli di stato). Per entrambi i modelli è necessario fissare l'ordine, che nel primo caso costituisce la memoria del modello mentre, nel secondo caso, costituisce il numero delle variabili ausiliarie utilizzate.

In un problema di identificazione classico, e cioè di messa a punto di un modello matematico che descriva un sistema a partire da dati sperimentali, il problema della definizione dell'ordine è connesso con quello della validazione del modello.

L'ordine non è in genere noto a priori e sono stati proposti diversi criteri di selezione. L'idea alla base di tali criteri è identificare più modelli con ordini differenti, per poi costruire una funzione che consenta di valutarne la bontà al variare dell'ordine.

Uno dei criteri più utilizzati è il FPE (*Final Prediction Error*), il quale si basa sulla quantità [Guidorzi, 2003]:

$$FPE = H(\hat{\theta}) \frac{N+n}{N-n} \quad (3.123)$$

dove $H(\hat{\theta})$ è la funzione obiettivo definita dalla (3.22) o dalla (3.24), N è il numero dei campioni e n è l'ordine del modello. Dato che l' FPE è costruito come un criterio di aderenza del modello alle sequenze di dati, la complessità ottima è quella che porta alla sua minimizzazione.

Un altro criterio molto utilizzato per la scelta dell'ordine del modello è il criterio di Akaike o AIC (*Akaike Information Criterion*), che si basa sulla definizione della quantità:

$$AIC = 2 \frac{n}{N} + \ln[H(\hat{\theta})] \quad (3.124)$$

In questo caso, l'ordine ottimo viene determinato come quel valore di n cui corrisponde il minimo della funzione AIC . Si dimostra che minimizzare la quantità FPE è equivalente a minimizzare la quantità AIC , nel caso di un numero elevato di campioni N e per bassi valori dell'ordine.

I criteri appena citati sono solo alcuni dei criteri utilizzati allo scopo di fissare l'ordine del modello e sono solo grossolanamente indicativi della bontà del modello identificato. Essi non possono essere utilizzati per stabilire se il modello identificato è accettabile o meno e cioè al fine della *validazione* del modello.

In fase di validazione ci si chiede se il modello trovato descriva i dati in modo soddisfacente o se non sia il caso di riconsiderare il processo di identificazione. È necessario cioè valutare se il modello è in grado di descrivere adeguatamente il sistema in esame, a fronte di dati sperimentali differenti da quelli già utilizzati nell'identificazione. Un modello è infatti buono quando è in grado di descrivere un fenomeno nelle diverse condizioni operative che lo interessano. Ci sono differenti modi di provare la validità di un modello.

La valutazione della validità del modello può essere condotta attraverso procedure differenti. Un metodo affidabile si basa sull'analisi delle caratteristiche statistiche degli errori di predizione $e(t)$, detti anche residui.

Un predittore è buono nella misura in cui l'errore commesso non contiene alcun "elemento di regolarità", quando cioè l'errore è un rumore bianco. La validazione di un modello si traduce quindi nella verifica che il suo errore di predizione sia un rumore bianco e quindi in un test di bianchezza sui residui [Bittanti, 2002].

La bianchezza dei residui è di solito valutata computando la covarianza campionaria, definita dalla operazione:

$$R_{\varepsilon}^N(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e(t)e(t+\tau) \quad (\tau = 1, \dots, M) \quad (3.125)$$

Se $e(t)$ è un rumore bianco, allora la quantità:

$$\zeta_{N,M} = \frac{N}{R_{\varepsilon}^N(0)^2} \sum_{\tau=1}^M \left(R_{\varepsilon}^N(\tau) \right)^2 \quad (3.126)$$

è, asintoticamente, una distribuzione $\chi^2(M)$.

Il test di bianchezza consiste a questo punto nel verificare che il valore $\zeta_{N,M}$ sia minore di un valore di riferimento $\chi_{\alpha}^2(m)$ per un fissato valore del parametro m .

Gli α -percentili $\chi_{\alpha}^2(m)$ di una variabile random $\chi^2(m)$ sono riportati in tabella Tabella 3.2.

Il test di bianchezza sui residui è il criterio di validazione standard nell'ambito dell'identificazione dei sistemi; una valutazione di tipo qualitativo sulla bontà del modello identificato può essere però eseguita anche costruendo il diagramma della funzione di autocorrelazione (definita dall'equazione 2.34):

$$R(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N e(t)e(t+\tau) \quad (3.127)$$

La funzione di autocorrelazione fornisce una stima della dipendenza lineare del valore di un segnale ad un certo istante di tempo dai valori precedenti e successivi. Se tale funzione è sufficientemente bassa per valori di τ diversi da zero, il segnale può essere considerato non correlato, non prevedibile, e quindi assimilabile ad un rumore bianco.

m	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.01}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
1	0.00	0.00	0.001	0.004	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.020	0.051	0.103	5.99	7.83	9.21	10.6
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	18.3	20.5	23.2	25.2
20	7.43	8.26	9.58	10.9	31.4	34.2	37.6	40.0
30	13.8	15.0	16.8	18.5	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.1	24.4	26.5	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28	29.7	32.3	34.8	67.5	71.4	76.2	79.5

Tabella 3.2 α -percentili $\chi^2_\alpha(m)$ di una distribuzione $\chi^2(m)$.

3.10 UNA APPLICAZIONE: IDENTIFICAZIONE DI UN TELAIO AL VARIARE DELL'ENTITÀ DEL RUMORE NELLE MISURE

Per verificare la capacità dei modelli nel dominio del tempo di ottenere le caratteristiche modali ricercate (frequenze proprie, deformate modali e smorzamenti), i processi di identificazione descritti in questo capitolo sono stati utilizzati con applicazione ad un telaio a tre piani.

Il telaio, il medesimo descritto nel Capitolo 3 sul quale sono state applicate le tecniche di identificazione nel dominio del tempo, presenta

caratteristiche brevemente riassunte nel seguito. La struttura è un telaio shear-type a tre piani ed un'unica campata. Le aste hanno a comportamento elastico lineare con modulo elastico con proprietà di travi e pilastri indicati in Tabella 3.3. Le masse di piano sono state sommate alla massa della trave, calcolando una densità equivalente. Gli smorzamenti sono stati considerati di tipo viscoso e, successivamente anche smorzamento non classico non proporzionale. Nel primo caso si è imposto il coefficiente di smorzamento pari al 3% in corrispondenza della prima e della terza frequenza e ricavando per il secondo modo di vibrare un coefficiente pari a 2.51%. Le frequenze proprie, gli smorzamenti e le deformate modali ricavate dal telaio sono mostrati in Tabella 3.4. Nel secondo caso, si sono imposti quindi i parametri contenuti nella matrice di smorzamento e ricavati i rispettivi gli indici di smorzamento tramite le equazioni (1.6-1.11).

	<i>h</i>	<i>b</i>	Modulo elastico	Massa di piano	Densità equivalente
	cm	cm	MPa	Kg	Kg/m ³
Trave (1° piano)	45	30	30000	17550	26000
Travi (2° and 3° piano)	45	30	30000	14175	21000
Pilastri	30	30	30000	-	2500

Tabella 3.3. Caratteristiche geometriche e meccaniche di travi e pilastri del telaio.

Modi di vibrare	Frequenza	Smorzamento	Deformate modali		
	Hz	%			
1° modo	2.44	3.00	+0.458	+0.814	+1.000
2° modo	6.50	2.51	+1.000	+0.310	-0.810
3° modo	9.69	3.00	-0.578	+1.000	-0.484

Tabella 3.4. Frequenze proprie, smorzamenti e deformate modali del telaio.

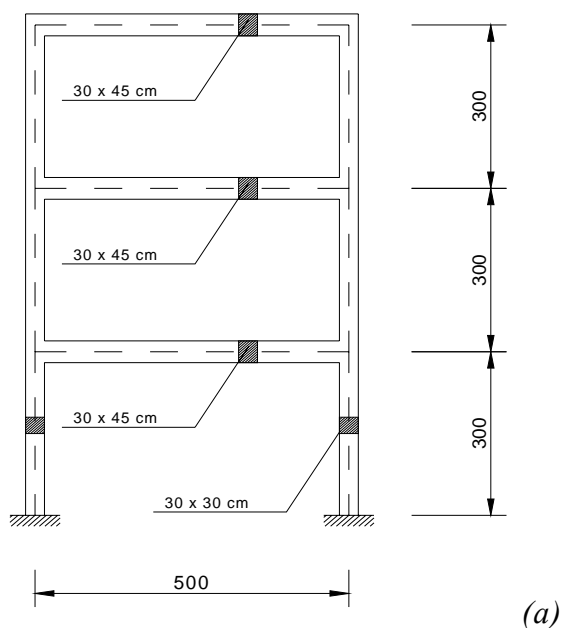


Figura 3.4 Schema della struttura

Per ottenere la risposta della struttura ai vari piani, è stata imposta una forzante tipo rumore bianco. Mediante integrazione dell'equazione del moto sono state ricavate le serie temporali corrispondenti alle accelerazioni per ogni piano. Le analisi sono state condotte utilizzando il metodo a sottospazi.

Le analisi sono state effettuate aggiunto al segnale una incertezza, ottenuta sommando al segnale in uscita una variabile aleatoria di intensità massima pari a una frazione del massimo valore della risposta della struttura, secondo l'espressione:

$$y_{PS} = y + w \cdot \max(y) \cdot WN. \tag{3.128}$$

Tale disturbo intende descrivere un'ulteriore incertezza del segnale sperimentale. Il coefficiente w , indicante il peso del disturbo è stato posto pari 0.01, 0.03, e, 0.05 infine, 0.10. Per tutti i test, sono stati considerati tre punti di misura, corrispondenti ai tre piani dell'edificio ove sono registrati gli

andamenti delle accelerazioni sulla struttura. La frequenza di campionamento adottata è pari a 50 Hz, acquisendo 2000 punti per canale.

Le stime delle frequenze proprie f e dei coefficienti di smorzamento ξ sono riportati nelle Tabelle 3.5-3.6. Sono riportati i valori medi, l'intervallo e il coefficiente di variazione dei parametri identificati. Per ottenere una correlazione tra le deformate modali, invece, è stato utilizzato il MAC.

I risultati, riportati in Tabella 3.5 e Tabella 3.6 mostrano errori molto modesti sulle frequenze proprie, con errore massimo del valor medio rispetto al valore esatto pari allo 0.2% (equivalente a 0.02 Hz).

w	Valori riferimento		Parametri identificati						
	<i>Freq.</i>	<i>Smorz.</i>	<i>Frequenza</i>			<i>Smorzamento</i>			
	Hz	%	Media	Range	C.V	Media	Range	C.V	
	Hz	%	Hz	Hz	%	%	%	%	
0%	1° modo	2.436	3.00	2.431	2.410÷2.442	0.43	3.17	2.72÷4.37	15.9
	2° modo	6.508	2.51	6.596	6.502÷6.594	0.47	2.38	1.63÷3.31	18.3
	3° modo	9.688	3.00	9.687	9.653÷9.867	0.62	2.98	2.23÷3.48	13.9
2%	1° modo	2.436	3.00	2.436	2.411÷2.464	0.48	3.28	2.66÷4.65	19.3
	2° modo	6.508	2.51	6.520	6.446÷6.594	0.51	2.59	1.63÷3.58	16.0
	3° modo	9.688	3.00	9.70	9.537÷9.822	0.66	2.88	1.87÷4.10	17.4
5%	1° modo	2.436	3.00	2.441	2.395÷2.502	0.89	3.19	1.55÷5.64	17.8
	2° modo	6.508	2.51	6.528	6.402÷6.660	0.76	2.81	1.63÷5.28	25.4
	3° modo	9.688	3.00	9.697	9.478÷9.822	0.77	2.92	1.55÷4.85	26.9
10%	1° modo	2.436	3.00	2.449	2.430÷2.474	0.55	3.30	2.53÷3.93	20.1
	2° modo	6.508	2.51	6.500	6.387÷6.666	1.06	2.40	1.63÷5.28	24.9
	3° modo	9.688	3.00	9.635	9.262÷9.870	1.09	2.36	1.55÷4.85	27.5

Tabella 3.5. Confronto tra frequenze e deformate modali identificati a partire da dati pseudo-sperimentali- smorzamento viscoso.

La dispersione dei risultati si mantiene pressoché costante anche nel caso in cui si consideri rumore nelle misure, con valori al più pari all'1%. Sugli smorzamenti, al contrario, la dispersione è decisamente superiore, dell'ordine del 20-25%, e i risultati si discostano dal valore esatto anche in assenza di rumore (con errore maggiore del 5%). I valori del MAC sono prossimi al 90%. Dai risultati è quindi evidente che il processo di identificazione nel dominio del tempo risulta essere marginalmente influenzato dalla presenza di errori nel segnale. D'altra parte, l'algoritmo, più complesso rispetto a quello nel dominio delle frequenze, produce errori anche in assenza di rumore nel segnale in input, con particolare significatività sullo smorzamento. In ultima analisi, i risultati confermano la difficoltà di stima di tale parametro strutturale.

w	Valori riferimento		Parametri identificati						
	Freq.	Smorz.	Frequenza			Smorzamento			
	Hz	%	Media	Range	C.V	Media	Range	C.V	
	Hz	%	Hz	Hz	%	%	%	%	
0%	1° modo	2.436	3.00	2.436	2.410÷2.442	0.38	4.59	3.58÷6.33	8.30
	2° modo	6.508	2.51	6.510	6.502÷6.594	0.35	3.17	2.17÷4.41	20.2
	3° modo	9.688	3.00	9.694	9.653÷9.867	0.82	2.49	1.86÷2.91	9.86
2%	1° modo	2.436	3.00	2.438	2.411÷2.464	0.43	4.26	3.45÷6.04	11.7
	2° modo	6.508	2.51	6.520	6.446÷6.594	0.82	3.64	2.29÷5.03	21.0
	3° modo	9.688	3.00	9.711	9.537÷9,822	0.44	4.38	2.84÷5.24	19.0
5%	1° modo	2.436	3.00	2.438	2.395÷2.502	0.55	4.80	2.33÷5.49	14.1
	2° modo	6.508	2.51	6.521	6.402÷6.660	0.91	3.69	1.43÷4.48	22.1
	3° modo	9.688	3.00	9.691	9.478÷9.822	0.64	2.70	2.84÷5.24	23.7
10%	1° modo	2.436	4.70	2.438	2.430÷2.474	0.69	4.80	3.69÷5.72	15.3
	2° modo	6.508	3.30	6.526	6.387÷6.666	1.08	3.67	2.49÷5.72	24.9
	3° modo	9.688	2.50	9.688	9.262÷9.870	0.76	2.67	1.75÷5.49	26.2

Tabella 3.6. Confronto tra frequenze e deformate modali identificati a partire da dati pseudo-sperimentali- matrici di smorzamento non classica.

4. ANALISI SPERIMENTALI DI STRUTTURE MEDIANTE METODI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

4.1 INTRODUZIONE

L'obiettivo della sperimentazione dinamica è l'individuazione delle caratteristiche dinamiche della struttura in termini di frequenze proprie, deformate modali e smorzamenti mediante l'acquisizione delle risposte strutturali. Le modalità di esecuzione delle prove sperimentali e le conseguenti metodologie di analisi delle misure sono definite in base alla tipologia della struttura in esame e al tipo di eccitazione.

Vengono brevemente descritti nel seguito i tipi di eccitazione più comunemente usati nell'analisi modale sperimentale e, successivamente, vengono proposte alcune applicazioni del metodo nel dominio delle frequenze, illustrato nel Capitolo 2, per le quali è stata utilizzata quale forzante una vibrodina meccanica, in dotazione al Laboratorio Prove Strutture del DISTART – Università di Bologna.

4.1.1 Tipi di eccitazione nell'analisi modale sperimentale

I segnali d'eccitazione più comunemente usati nell'analisi modale sperimentale possono essere divisi in due principali categorie: segnali contenenti uno spettro di frequenze e segnali contenenti una singola frequenza. I segnali appartenenti alla prima categoria possono essere divisi in tre sottogruppi: segnali periodici, non periodici e transitori (impatto); i segnali appartenenti alla seconda categoria sono invece di tipo sinusoidale (*swept sine*, *stepped sine*). Si riporta di seguito una breve descrizione di tali tipologie di eccitazione.

Pure random.

L'eccitazione *pure random* è un segnale aleatorio non periodico con una distribuzione di probabilità gaussiana. Il suo spettro presenta tutte le frequenze contenute in una specifica banda, ed essendo definito in maniera aleatoria è importante utilizzare tecniche di identificazione che consentano di tenere in conto della aleatorietà del segnale nella struttura (utilizzando ad esempio metodi nel dominio del tempo quali ARMAV e metodi a sottospazi – vedi Capitolo 5).

Il principale problema di questo tipo d'eccitazione è costituito dal *leakage*. Esso è una distorsione dello spettro dovuta all'applicazione di tecniche FFT a segnali non periodici nel tempo di campionamento. Essendo il segnale non periodico nel tempo di osservazione tale errore non può essere evitato. Un ulteriore inconveniente è costituito dal tempo di prova che deve essere sufficientemente lungo per effetto delle operazioni richieste per una buona stima della FRF.

Periodic chirp.

Il *periodic chirp* è costituito da un segnale sinusoidale la cui frequenza viene variata durante il periodo d'eccitazione; tale variazione è ripetuta in maniera tale da ottenere un segnale periodico. Una volta estinto il

contributo transitorio, la risposta della struttura a questo tipo di segnale sarà anch'essa periodica. Inoltre questo tipo di segnale presenta un buon rapporto segnale-rumore.

Burst chirp.

Il *burst chirp* è un segnale sinusoidale, con frequenza variabile, che viene troncato a zero nell'ultima parte del periodo d'eccitazione. Questo permette alla struttura di completare le sue oscillazioni e minimizzare gli errori di *leakage*. L'uso di un'eccitazione sinusoidale fornisce buoni rapporti tra il valore di picco e il valore di scarto quadratico medio (RMS) e quindi un buon rapporto segnale-rumore; inoltre, il controllo dell'ampiezza del segnale ad ogni frequenza lo rende adatto per la caratterizzazione di sistemi non lineari.

Impatto.

L'eccitazione d'impatto è un segnale transitorio, consistente in un impulso di durata molto limitata rispetto al tempo di acquisizione. La forma e l'ampiezza dell'impulso controllano principalmente il livello dello spettro; la durata, invece, influenza la larghezza di banda. La massima frequenza nello spettro è inversamente proporzionale alla durata dell'impulso. L'impatto è il metodo più veloce per l'eccitazione di strutture a comportamento lineare, inoltre, richiede un'attrezzatura minima e dei tempi di set-up limitati. Tali caratteristiche lo rendono adatto per misure "sul campo" e test rapidi. Nonostante i vari vantaggi, quali velocità e semplicità, tale metodo d'eccitazione comporta alcune complicazioni. Innanzi tutto, la difficoltà nel riprodurre eccitazioni regolari con lo stesso livello di intensità; inoltre il basso rapporto picco-RMS comporta un'elevata sensibilità a problemi di sovraccarico dei canali d'acquisizione, con la tendenza ad avere un basso rapporto segnale-rumore. Infatti, il segnale d'eccitazione è diverso da zero per un breve periodo del tempo di acquisizione e uguale a zero per il restante; ciò significa che il rumore di misurazione, sparso su tutto il periodo d'acquisizione, diviene della

stessa entità del segnale d'eccitazione. Per evitare ciò si possono usare dei particolari filtri, nel dominio tempo, quali il Force window, che intervenendo dopo la durata dell'impulso, riduce il rumore di misurazione. Problemi analoghi si rilevano nell'acquisizione della risposta di strutture estremamente smorzate e periodi elevati d'acquisizione.

Swept sine.

Lo *swept sine* è una eccitazione costituita da un segnale sinusoidale, con una lenta e continua variazione di frequenza. Esso è uno dei più antichi metodi d'eccitazione e ad esso sono stati applicati per la prima volta le tecniche di analisi dei segnali, quali i filtri passa banda. In questo tipo d'eccitazione la struttura è virtualmente eccitata ad una sola frequenza e, dato la lenta variazione si può assumere che la risposta sia stazionaria. Tipico di questo tipo d'eccitazione è il buon rapporto picco-RMS e segnale-rumore; il limite principale di questo tipo d'eccitazione è costituito dalla lenta variazione di frequenza che comporta un tempo di prova elevato.

Stepped sine.

L'eccitazione *stepped sine* può essere considerata un caso particolare dello *swept sine*. Invece di una variazione continua di frequenza, lo *stepped sine* prevede un incremento discreto di frequenza.

Definita la banda di frequenza d'interesse, attraverso frequenza iniziale, frequenza finale, ed incremento di frequenza, si attende l'estinzione del termine transitorio della risposta della struttura e si effettua quindi la registrazione dei dati. Tale procedura è ripetuta per ogni incremento di frequenza.

Paragonato allo *swept sine*, questo metodo presenta gli stessi vantaggi in termini di qualità e controllabilità del segnale; inoltre fornisce un buon controllo contro errori quali l'*aliasing* e il *leakage*. Rimane comunque un metodo lento dovuto al modo di scandire la banda di frequenza interessata, ed

al periodo d'attesa richiesta per l'estinzione del termine transitorio della risposta.

4.1.2 Strumentazione usata nell'analisi modale sperimentale.

L'utilizzo di un adeguata strumentazione riveste un ruolo fondamentale per il buon esito dell'analisi modale di una struttura. Sostanzialmente la strumentazione è costituita da

- Sistema d'eccitazione.
- Sensori per l'acquisizione di accelerazioni e spostamenti
- Sistema di analisi e misura dei segnali.

Il sistema d'eccitazione ha il compito di trasmettere una forza alla struttura; i trasduttori misurano l'entità della forza applicata alla struttura, lo spostamento e le accelerazioni che essa subisce, convertendoli in segnali elettrici; tali segnali sono poi registrati dal sistema di analisi che in genere ne analizza il contenuto in frequenza.

I sistemi d'eccitazione sono comunemente classificati in due categorie: sistemi d'eccitazione fissi, cioè che sono collegati alla struttura da eccitare, e sistemi d'eccitazione non fissi che non presentano alcun contatto con la struttura. I sistemi d'eccitazione fissi più comuni sono gli shaker. Le loro principali caratteristiche sono l'entità di forza e spostamento che possono generare e il range di frequenza che possono coprire. Essi vengono utilizzati in prove condotte a bassa frequenza (0-20 Hz) in cui si richiedono elevati livelli di forza o spostamento. Essi sono costituiti da un sistema di controllo elettronico che permette di generare e regolare facilmente il segnale di vibrazione,

Gli shaker elettrodinamici sono caratterizzati da una maggiore versatilità; sono costituiti sostanzialmente da una bobina mobile, connessa al supporto di collegamento, posizionata all'interno di un campo magnetico; un

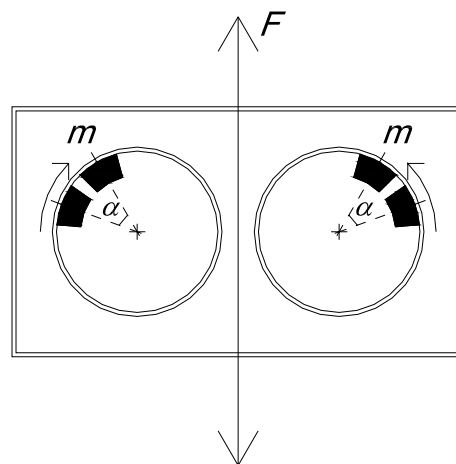
sistema elettronico genera un segnale che, opportunamente amplificato, alimenta la bobina mobile, generando così una forza ed un moto che vengono trasmesse, tramite il supporto di collegamento, alla struttura.

Un altro tipo d'eccitatore, rappresentato in Figura 4.1, è costituito dallo shaker meccanico, o vibrodina. La vibrodina è una macchina che, saldamente ancorata alla struttura, consente l'applicazione di forze variabili nel tempo con legge sinusoidale. Essa è sostanzialmente costituita da due dischi controrotanti attorno a due assi di rotazione paralleli; ad ogni disco sono vincolate due masse la cui posizione relativa è individuata dall'angolo α formato dalle congiungenti il loro baricentro con l'asse di rotazione. L'intensità della forza applicata $F(t)$ è correlata all'angolo di sfasamento α fra le due masse eccentriche solidali a ciascuno dei due dischi controrotanti e alla frequenza di rotazione f_v [Diotallevi et al. 2001a, Diotallevi et al. 2001b].

Il suo limite principale è costituito dalla dipendenza tra forza generata e velocità di rotazione, nonché dalla potenza del motore elettrico. Inoltre, il suo peso può gravare sulla struttura, influenzandone così il comportamento nel caso di strutture molto leggere.



(a)



(b)

Figura 4.1. (a) immagine e (b) schema di funzionamento della vibrodina meccanica del Laboratorio Prove Strutture dell'Università di Bologna

Per quanto riguarda i sistemi d'eccitazione non fissi, quello più comunemente utilizzato è il martello strumentato, costituito da un semplice martello su cui è montato un trasduttore di forza. Il livello di energia e il contenuto in frequenza trasmesso alla struttura dipendono dalla forza dell'impatto, dal peso del martello e dalla deformabilità del punto di contatto. In campo civile vengono utilizzati principalmente martelli pesanti con punte tenere, in modo da generare un maggiore tempo di contatto, quindi un'eccitazione con basse frequenze. Il limite principale di questo tipo di eccitatore è costituito dalla non facile ripetibilità dell'impulso trasmesso.

Nelle applicazioni a strutture reali descritte nel seguito, è stato utilizzato uno shaker meccanico (vibroдина). L'intensità della forza applicata $F(t)$ è correlata, in dipendenza anche dei parametri meccanici indicati dal costruttore della vibrodina (ISMES di Bergamo), all'angolo di sfasamento α fra le due masse eccentriche solidali a ciascuno dei due dischi controrotanti, alla frequenza di rotazione f_v (espressa in Hz) ed alla fase γ del segnale prodotto dal fasometro, secondo la relazione (espressa in kN):

$$\begin{aligned} F(t) &= 1.026 f_v^2 \cos(\alpha/2) \sin(2\pi f_v t + \alpha/2 - 86.9^\circ + \gamma) = \\ &= 1.026 f_v^2 \cos(\alpha/2) \sin(2\pi f_v t + \varphi) \end{aligned}$$

e può raggiungere il valore massimo di 20 kN. Rispetto all'asse passante per i centri dei dischi controrotanti, per il quale si assume positivo il verso che esce dalla vibrodina dal lato del disco su cui è montato il fasometro, l'angolo di fase della forzante $\varphi = \alpha/2 - 86.9^\circ + \gamma$ è misurato in senso antiorario osservando la vibrodina dall'alto. La velocità di rotazione delle masse è controllata da una unità di comando pilotata elettronicamente e può essere variata con continuità.

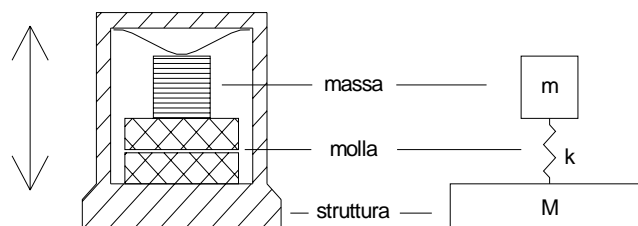
Sensori per l'acquisizione di accelerazioni e spostamenti.

I trasduttori di accelerazione più utilizzati nell'analisi modale sono i trasduttori piezoelettrici, il cui schema è mostrato nella Figura 4.2. Essi sono costituiti da un elemento piezoelettrico, generalmente delle ceramiche policristalline o dei cristalli di quarzo, che subendo una deformazione genera una differenza di carica tra le sue facce. Questa differenza di carica viene convertita in un segnale, in termini di tensione, solitamente da un amplificatore di carica. Il principale svantaggio è che i cavi che collegano l'amplificatore al trasduttore sono molto sensibili ad influenze esterne.

L'accelerometro non è altro che un piccolo sistema vibrante massa-molla che, subendo uno spostamento del suo involucro, collegato alla struttura, inizia ad oscillare. L'accelerometro restituisce un segnale proporzionale all'accelerazione. Gli accelerometri sono apparecchiature piuttosto rigide e molto leggere il cui posizionamento non modifica il comportamento della struttura. Il meccanismo massa-molla interno può essere realizzato in diversi modi. In alcuni casi, l'elemento elastico è costituito da una mensola al quale è collegata la massa vibrante, il cui moto eccita un estensimetro. In altri l'elemento elastico è costituito da un materiale piezoelettrico che sollecitato dalla massa con azioni di compressione o di taglio, genera una tensione tra le



(a)



(b)

Figura 4.2. (a) immagine e (b) schema di funzionamento degli accelerometri piezoelettrici del Laboratorio Prove Strutture dell'Università di Bologna.

sue facce. Il range di utilizzo dell'accelerometro comprende frequenze fino ad un decimo della propria frequenza di risonanza.

La strumentazione utilizzata per la misura della risposta dinamica delle strutture descritte nel seguito sono principalmente accelerometri piezoelettrici PCB/393B12 con sensibilità pari a 10 Volt/g.

Sistema di analisi e misura dei segnali.

Il compito del sistema di analisi e di misura è quello di acquisire i dati di una prova sperimentale e successivamente di analizzarli, al fine di estrarre i parametri modali della struttura.

In ordine di complessità, la prima configurazione del sistema di analisi è costituita da un PC su cui sono installate una o più schede di acquisizione dati, affiancate normalmente da un software che permette di trattare i segnali. Nell'installazione hardware è possibile individuare un'unità di acquisizione dati contenente eventualmente un convertitore analogico-digitale, ed un'unità di condizionamento, con filtri programmabili e amplificatori. L'installazione software permette di registrare i dati ed effettuare una prima analisi FFT. La versione più complessa del sistema di analisi fa uso invece di periferiche separate, sia per effettuare la conversione dei segnali da analogico a digitale e viceversa, sia per l'analisi in frequenza, lasciando al PC il solo compito di registrare i dati ed eventualmente di controllare l'analizzatore FFT.

4.2 APPLICAZIONE DEI METODI DI IDENTIFICAZIONE A STRUTTURE CIVILI

Le procedure di identificazione descritte nei capitoli precedenti sono state utilizzate per la determinazione delle caratteristiche modali di strutture in ambito civile. Vengono nel seguito elencare e sinteticamente descritte le strutture sulle quali sono state condotte campagne sperimentali e successivamente analizzate le risposte. Per alcune di esse, ritenute significative o rappresentative del tipo di attività e dell'elaborazione svolta, è invece riportata una descrizione più estesa ed una illustrazione dei risultati ottenuti.

Una immagine della torre eliporto del padiglione 16-18 della Fiera di Bologna, sulla quale sono state effettuate prove di caratterizzazione dinamica, è riportata in Figura 4.3(a). La torre ha una altezza complessiva di circa 36 m, ha un nucleo centrale in calcestruzzo armato di diametro 10.50 m circa a sostegno di una doppia rampa carrabile elicoidale che sale fino a quota +25.78 m; la torre è completata superiormente da una soletta circolare di diametro 29.60 m che costituisce la pista di atterraggio degli elicotteri. Il solettone è sostenuto da una serie di travi metalliche disposte a raggiera ed appoggiate al nucleo centrale di calcestruzzo armato. Sono state condotte prove dinamiche mediante vibrodina, con misurazione di accelerazioni; nell'ambito di tali prove, la vibrodina è stata collocata secondo due diverse direzioni di applicazione della forzante dinamica tra loro ortogonali ma sempre orizzontali. La determinazione delle FRF e le successive analisi hanno evidenziato 5 forme modali, alcune delle quali dell'intera struttura, altre con spostamenti che riguardano prevalentemente la piastra di atterraggio.

In Figura 4.3b è presente la nuova torre di sicurezza dell'Ospedale Maggiore in Bologna. La torre ha una altezza complessiva di circa 60 m, ha una base quadrangolare di circa 15x32 m ed è organizzata su 14 livelli. L'edificio

ha struttura portante in acciaio con impalcati in lamiera grecata e getto di completamento. Le prove sperimentali e le successive elaborazioni hanno consentito di individuare, in maniera attendibile, 4 modi di vibrare, di cui tre flessionali (due modi flessionali in una direzione ed uno nella direzione ortogonale) ed uno torsionale.



Figura 4.3. Strutture oggetto di caratterizzazione dinamica: (a) Eliporto nel quartiere fieristico a Bologna; (b) Torre di sicurezza dell'Ospedale Maggiore a Bologna.

Sono state condotte, inoltre, alcune prove su ponti della linea Alta Velocità Ferroviaria nella tratta tra Bologna e Milano nei pressi di Modena, Piacenza e Bologna. I diversi viadotti considerati sono formati da travi in c.a.p. isostatiche con sezioni differenti. Il viadotto posto nei pressi di Modena è composto da travi a C a via inferiore (Figura 4.4), con spessori della soletta variabili tra 0.7 m e 0.6 m e spessore delle ali tra 0.6 m e 0.8 m. Esse hanno ciascuna lunghezza totale di 31.50 m e sezione di larghezza 9.00 m. Sezioni a doppio cassone sono invece state realizzate per i viadotti in prossimità di

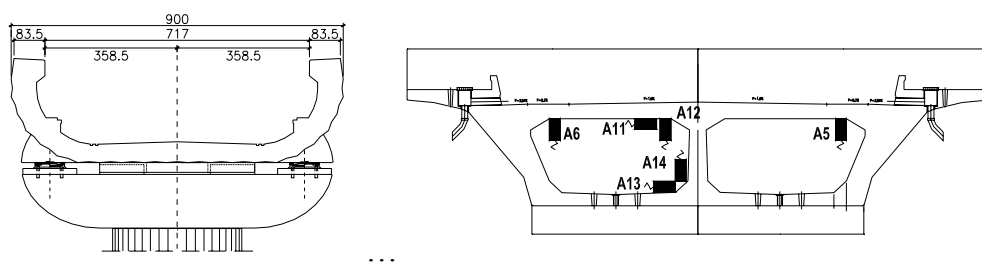
Piacenza, la cui sezione è riportata in Figura 4.4. Le prove dinamiche sono state effettuate mediante impatti ottenuti dal rilascio di masse sulla struttura. Le elaborazioni hanno permesso di ottenere forme modali flessionali e torsionali dell'impalcato.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.4. Viadotti dell'Alta Velocità Ferroviaria oggetto di caratterizzazione dinamica: viadotto nei pressi di (a) Modena e (b) Piacenza e (c) relative sezioni.

Infine, sono stati effettuati test dinamici su opere di minore importanza quali una passerella pedonale a più campate in legno lamellare sita a Cesena e una torre campanaria in muratura in località Bagnolo di Reggio Emilia.

Vengono nel seguito descritte più estesamente le prove e la successiva elaborazione dei test dinamici effettuati sull'Ospedale S. Maria Nuova in Reggio Emilia e su una porzione dell'ampliamento del Politecnico di Torino.

4.3 OSPEDALE S. MARIA NUOVA IN REGGIO EMILIA

Nel presente paragrafo si riporta un primo esempio applicativo di una metodologia di identificazione operante nel dominio delle frequenze che fa uso come fonte di eccitazione vibrazione forzata. L'oggetto dell'identificazione è la nuova ala dell'ospedale Santa Maria Nuova di Reggio Emilia (Figura 4.5). La struttura dell'edificio è costituita da telai in c.a. e da due nuclei ascensori,



Figura 4.5. Vista complessiva della nuova ala Nord dell'Ospedale S.M. Nuova in Reggio Emilia.

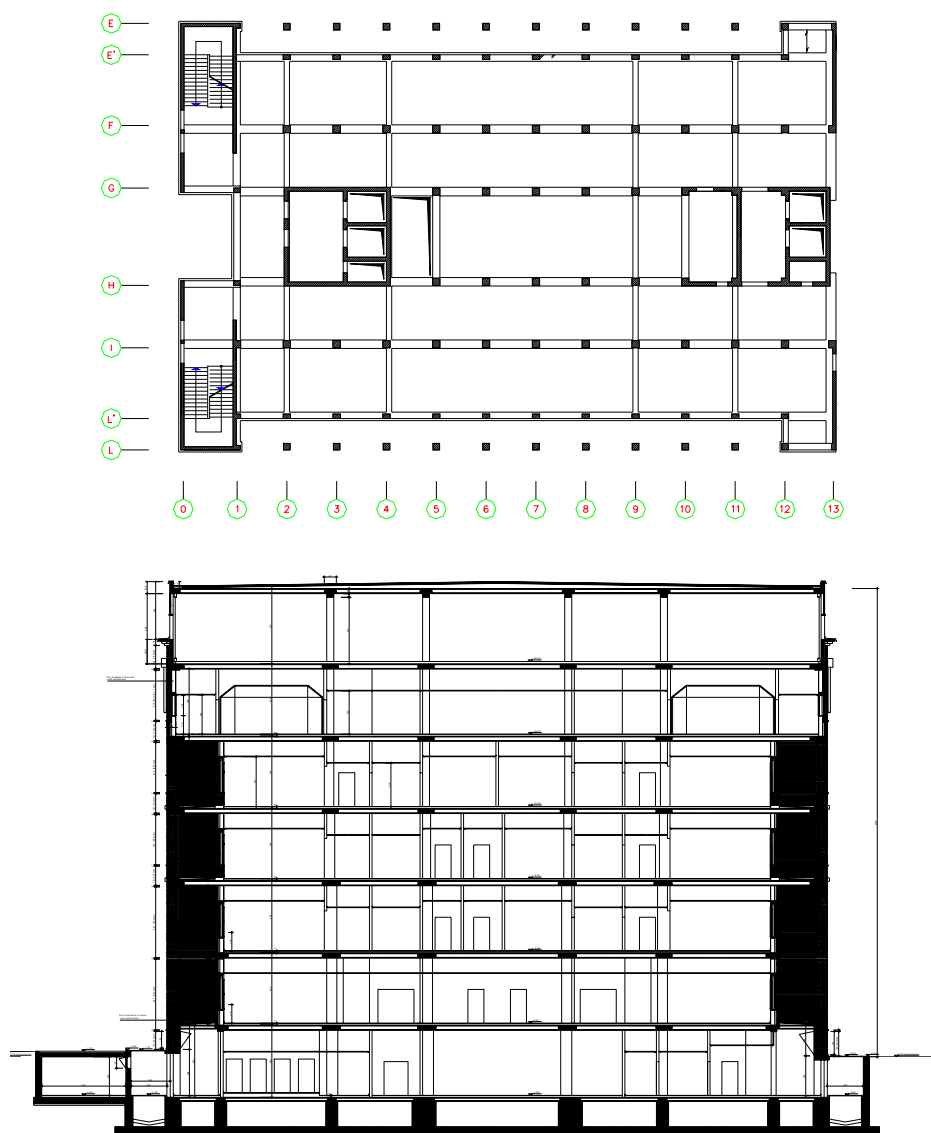


Figura 4.6. Pianta e Sezione dell'ospedale S. M. Nuova oggetto della sperimentazione dinamica.

anch'essi in c.a., di grandi dimensioni. L'edificio ha lunghezza complessiva di circa 50 m, larghezza di circa 33 m ed altezza di 29.18 m per un totale di cinque piani fuori terra oltre ad un piano seminterrato (vedi Figura 4.6a,b). Al momento della prova i muri esterni di tamponamento erano stati già completamente realizzati; inoltre, ai piani inferiori erano presenti anche i tamponamenti interni.

Sono state condotte prove dinamiche mediante vibrodina, con misurazione di accelerazioni, per la valutazione delle frequenze proprie e dei modi di vibrazione dell'edificio; nell'ambito di tali prove, la vibrodina è stata collocata secondo due diverse direzioni di applicazione della forzante dinamica. In particolare, la vibrodina è stata posizionata in prossimità del nucleo ascensori più prossimo all'edificio esistente (lato sud) ed orientata in senso trasversale e longitudinale alla nuova costruzione; in entrambe le configurazioni la vibrodina ha esercitato una forzante nel piano orizzontale.

La vibrodina è stata collocata sul penultimo orizzontamento a quota +22.50 m (secondo i disegni di progetto) nelle due prove, la forza è stata applicata in due direzioni tra loro ortogonali: dapprima in direzione trasversale

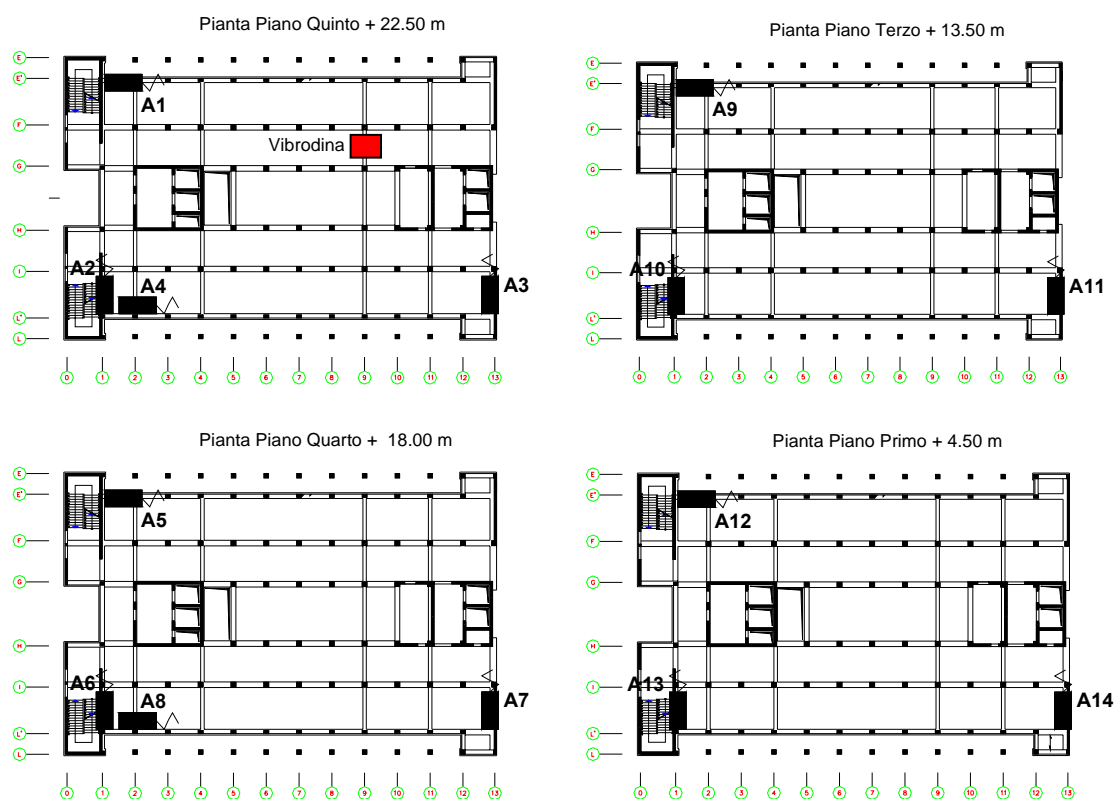


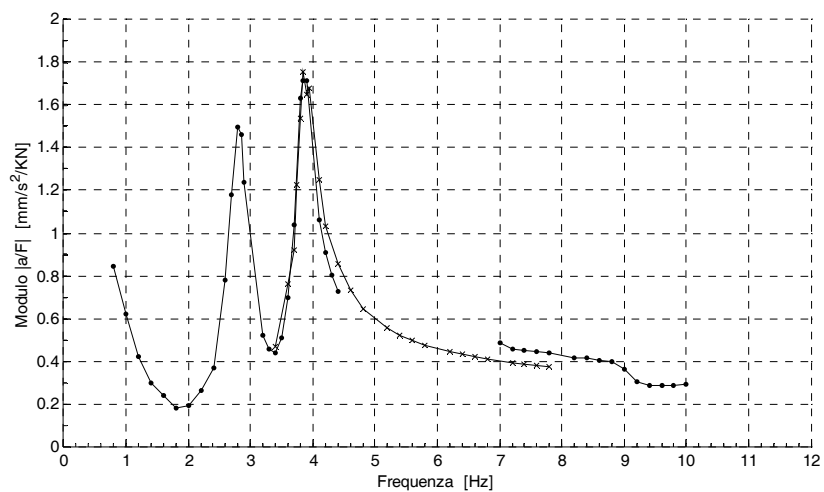
Figura 4.7. Disposizioni degli accelerometri e direzioni di applicazione della forzante.

all'asse principale dell'edificio e successivamente in direzione longitudinale. Nelle due Posizioni la disposizione degli strumenti è rimasta invariata. Il campo di frequenze esplorato è compreso tra 0.8 e 10.80 Hz. In corrispondenza di ogni frequenza di interesse, è stata applicata una forzante dinamica con andamento sinusoidale nel tempo e sono state registrate le corrispondenti accelerazioni. Per ogni posizione di prova sono state condotte diverse serie di prove dinamiche, con differenti angoli di sfasamento delle masse della vibrodina ed un diverso intervallo di variazione delle frequenze di eccitazione. Ciò ha consentito di applicare alla struttura, alle varie frequenze di sollecitazione, una forzante dinamica sufficientemente intensa ma senza mai superare i limiti meccanici della attrezzatura.

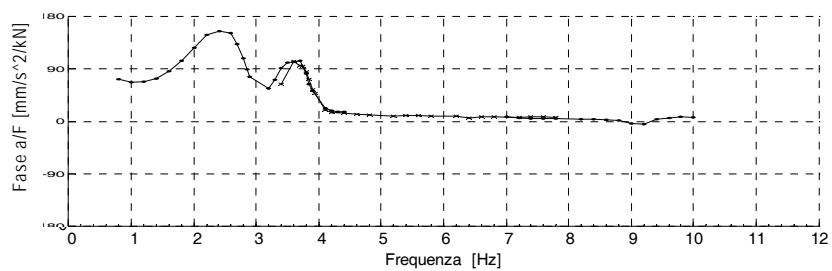
Sono state quindi calcolate le relative Funzioni di Risposta in Frequenza, secondo quanto riportato nel Capitolo 2. A titolo di esempio, in Figura 4.8 e Figura 4.9 sono riportate due FRF riferite all'accelerometro A2 posto al piano 5, per i due setup di prove (Posizione 1 e 2), rappresentati in modulo e fase.

A partire dalle FRF è stato possibile risalire alla forma delle deformate modali associate ai vari modi di vibrare della struttura mediante il MDOF Circle Fit method. In Figura 4.10 è riportato graficamente il risultato dell'operazione di identificazione della FRF un accelerometro per le prime due frequenze proprie.

Le prove sperimentali e le successive elaborazioni hanno consentito di individuare 4 modi di vibrare: il primo ed il secondo modo flessionale dell'edificio in direzione x (con frequenze $f_{1x}=2.75$ Hz, $f_{2x}=9.41$ Hz), il primo modo flessionale in direzione y ($f_{1y}=2.87$ Hz) ed il primo modo torsionale ($f_t=3.88$ Hz). Le frequenze e gli smorzamenti identificati (indicati con ξ) sono riportati in Tabella 4.1. Sono anche indicati le componenti degli autovettori identificati, normalizzati rispetto all'unità.



(a)



(b)

Figura 4.8. (a) Modulo e (b) fase dell'FRF ottenuta per l'accelerometro A2 con la vibrodina nella Posizione 1.

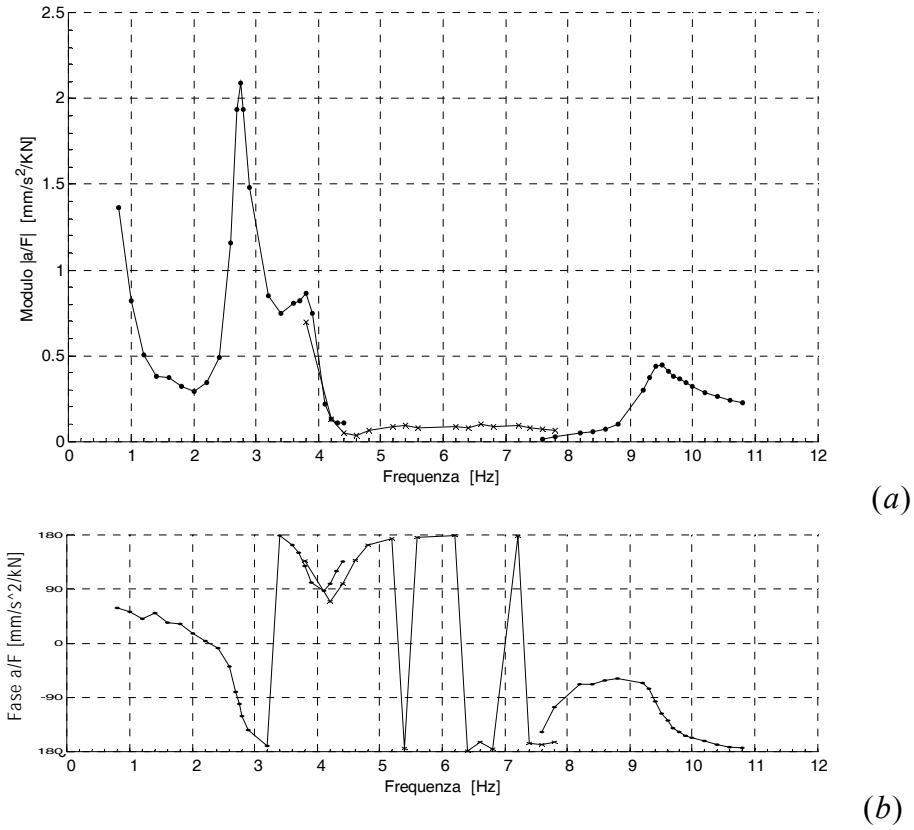


Figura 4.9. (a) Modulo e (b) fase dell'FRF ottenuta per l'accelerometro A2 con la vibrodina nella Posizione 2.

Nelle Figura 4.11 e Figura 4.12, in ordine crescente di frequenza, sono riportati gli schemi relativi a tali modi fondamentali della struttura.

Dalla Tabella 4.1 è possibile notare come gli smorzamenti ottenuti siano molto elevati, con valori compresi tra il 4 e il 5%, ad eccezione del modo torsionale che presenta uno smorzamento pari a circa il 2.5%. Tali valori peraltro in linea con quanto previsto dalle attuali normative, sono da attribuire alla presenza della muratura di tamponamento tra i telai in c.a.

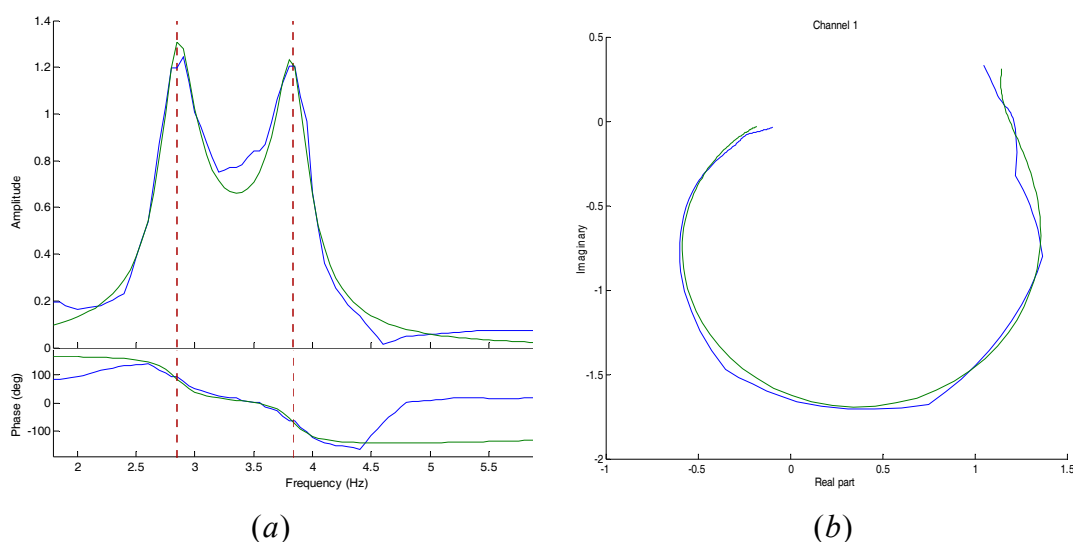


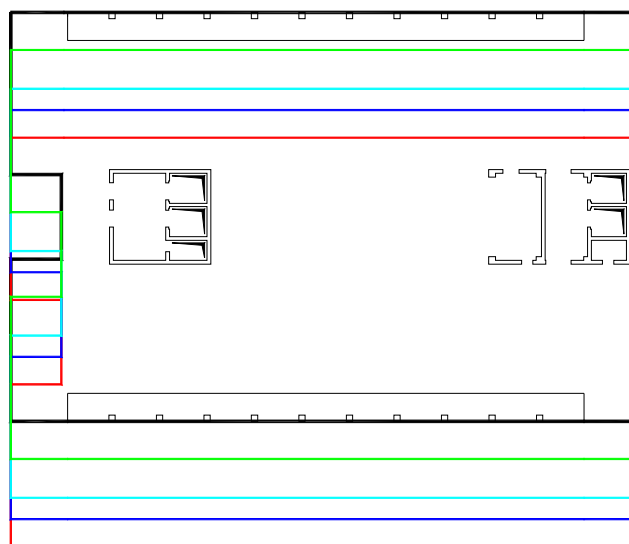
Figura 4.10. Esempio di FRF sperimentale e relativa approssimante numerica ottenuta mediante il MDOF Circle Fit Method (a) nella rappresentazione in modulo e fase e (b) nel diagramma di Nyquist per uno dei due modi identificati.

	f	ξ														
	[Hz]	[%]	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14
1	2.75	4.13	0.79	-0.02	0.01	1.00	0.58	0.66	-0.01	-0.03	0.71	-0.05	0.07	0.06	-0.02	0.03
2	2.87	5.07	-0.06	1.00	0.94	0.03	-0.03	0.04	0.62	0.61	0.05	0.73	0.82	0.08	0.29	0.31
3	3.88	4.46	0.50	1.00	-0.67	-0.70	0.25	-0.40	-0.58	0.50	0.53	0.62	-0.82	-0.14	0.23	-0.32
4	9.41	2.54	-0.43	-0.08	-0.02	-0.51	0.83	0.84	-0.08	-0.04	0.16	-0.01	-0.03	1.00	-0.05	0.09

Tabella 4.1. Frequenze, smorzamenti e autovettori identificati per i primi quattro modi della struttura.



(a)



(b)



Figura 4.11. Deformata modale corrispondente a: (a) primo modo di vibrare (2.75Hz) e (b) secondo modo di vibrare (2.87 Hz).

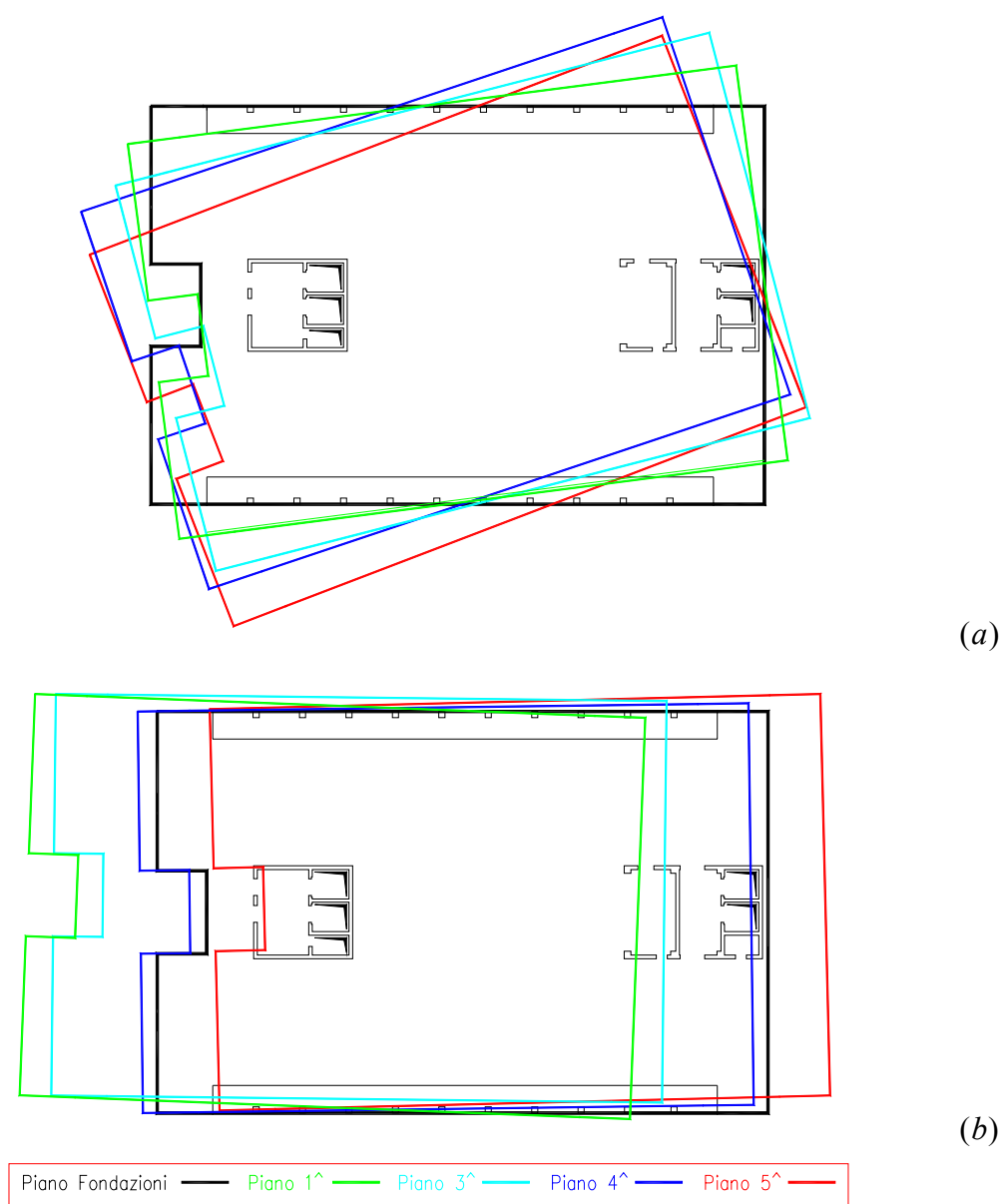


Figura 4.12. Deformata modale corrispondente a: (a) terzo modo di vibrare (3.88Hz) e (b) quarto modo di vibrare (9.41 Hz).

4.4 SCAVALCO SU CORSO CASTELFIDARDO A TORINO

Nel presente paragrafo vengono descritti i risultati di una prova dinamica mediante vibrazione forzata con vibrodina effettuata su una porzione dell'ampliamento del Politecnico di Torino a struttura metallica: dai dati sperimentali sono state calcolate le funzioni di risposta in frequenza che hanno fornito frequenze proprie e deformate modali. Successivamente si è confrontata la risposta con un modello agli elementi finiti correlando modi propri e frequenze.

4.4.1 Descrizione della struttura oggetto di indagine

Le prove dinamiche sono state effettuate su uno dei due scavalchi dell'asse di Corso Castelfidardo e costituenti la nuova ala del Politecnico di Torino. Si tratta di una struttura dalla geometria complessa di dimensioni di 96 metri di lunghezza e 15.60 metri di larghezza, rialzata rispetto al piano di campagna, ed in appoggio su otto pile in calcestruzzo armato che dividono la



Figura 4.13. Prospetto della struttura oggetto di prove di identificazione dinamica con vibrodina.

struttura in tre campate rispettivamente di metri 21.98, 48.00 e 21.74.

La struttura portante è costituita da due travate longitudinali reticolari affiancate realizzate con profili composti saldati a doppio T e poste ad interasse di 15.60 metri e di altezza costante pari a 6.78 metri che sorreggono cinque impalcati.

I primi tre piani sono direttamente collegati alle briglie ed ai montanti della travatura reticolare mentre i livelli superiori sono sostenuti da colonne pendolari integrate da controventi verticali longitudinali (Figura 4.13).

In senso trasversale la stabilità è garantita da quattro coppie di controventi verticali situati in corrispondenza degli appoggi; tali elementi, risultando in falso rispetto alle maglie del traliccio longitudinale, sono a loro volta sostenuti da travature reticolari trasversali tra i piani a quota +7.15 e +9.20. L'impalcato in struttura mista è formato da una lamiera grecata con funzione di cassero a perdere e armatura e un getto integrativo per uno spessore complessivo 11,5 cm. Il solaio a quota inferiore è invece costituito da pannelli tipo Predalles aventi spessore pari a 28 cm, e appesi alle reticolari secondarie trasversali.

La struttura metallica è retta da appoggi costituiti da neoprene armato posizionati su otto pile in cemento armato alle quali vengono trasmesse tutte le azioni verticali e orizzontali longitudinali. Durante le prove dinamiche erano presenti inoltre due strutture laterali a sbalzo di servizio, costituite da strutture leggere reticolari portante con una soletta in c.a. di spessore pari a 11,5 cm, utilizzate durante la costruzione per permettere la riapertura del traffico nella via sottostante.

4.4.2 Prove dinamica con vibrodina

Per la caratterizzazione dinamica della struttura oggetto della prova, sono state applicate alla stessa, tramite vibrodina, forze verticali ed orizzontali variabili nel tempo con legge sinusoidale e frequenza variabile ma prefissata.

Durante l'applicazione delle forzanti sono state effettuate misure di accelerazione in corrispondenza di più punti della struttura.

Più precisamente i setup sperimentali in cui è stata posizionata la vibrodina e la direzione di applicazione della forzante sono le seguenti:

Posizione 1. vibrodina in prossimità della mezzeria della campata centrale alla quota 9.28 m con forzante orizzontale trasversale;

Posizione 2. vibrodina in prossimità della mezzeria della campata centrale alla quota 9.28 m con forzante verticale;

Posizione 3. vibrodina in prossimità della mezzeria della campata centrale alla quota 22.15 m con forzante orizzontale longitudinale;

Posizione 4. vibrodina in prossimità della mezzeria della campata centrale alla quota 22.15 m con forzante orizzontale trasversale;

La disposizione della vibrodina e degli strumenti (accelerometri) è riportata nelle Figure 4.11-4.12.

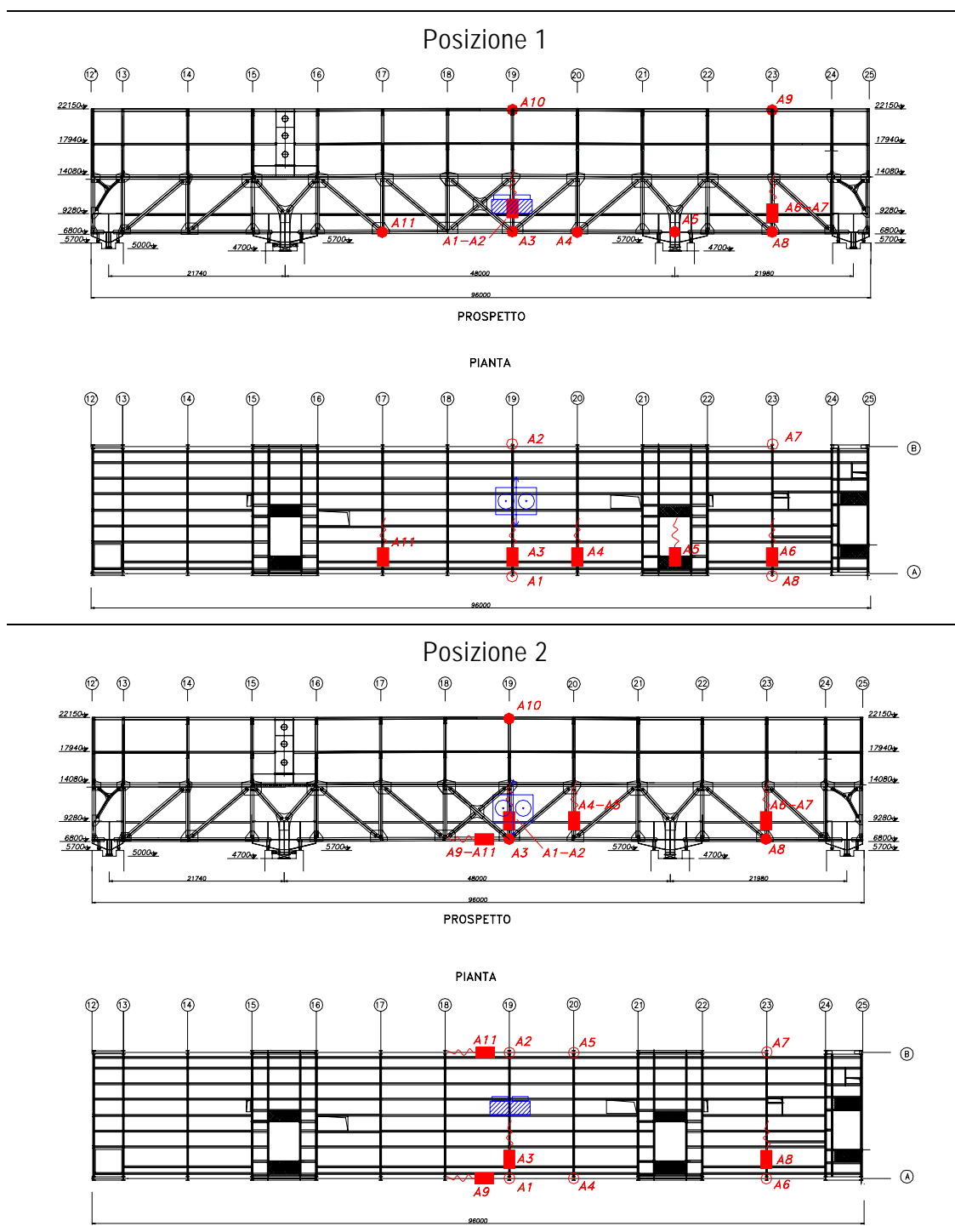


Figura 4.14 Schema dello scavalco e disposizione degli strumenti nelle Posizioni 1 e 2.

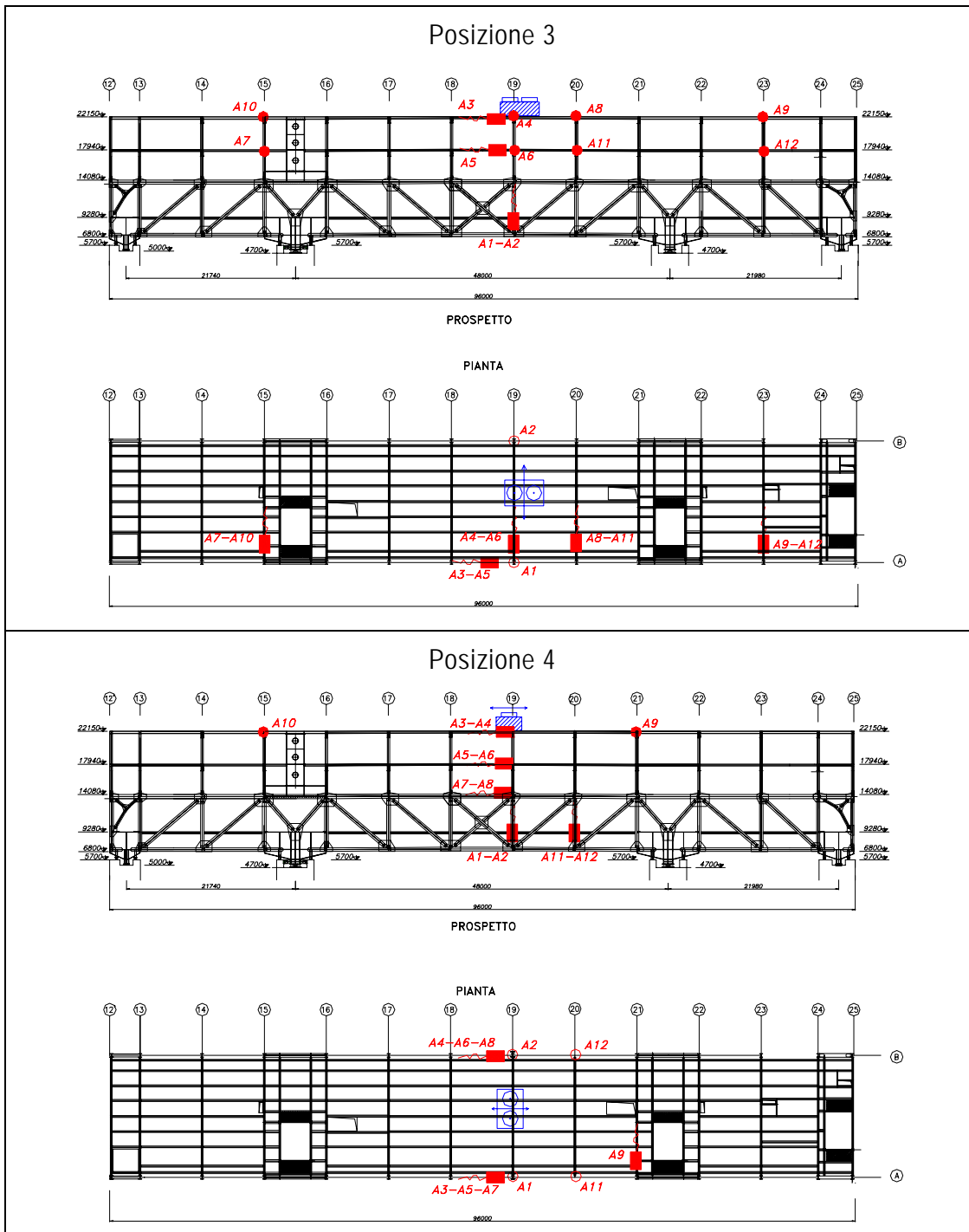


Figura 4.15 Schema dello scavalco e disposizione degli strumenti nelle Posizioni 3 e 4.

4.4.3 Identificazione dei modi propri dalle FRF sperimentali

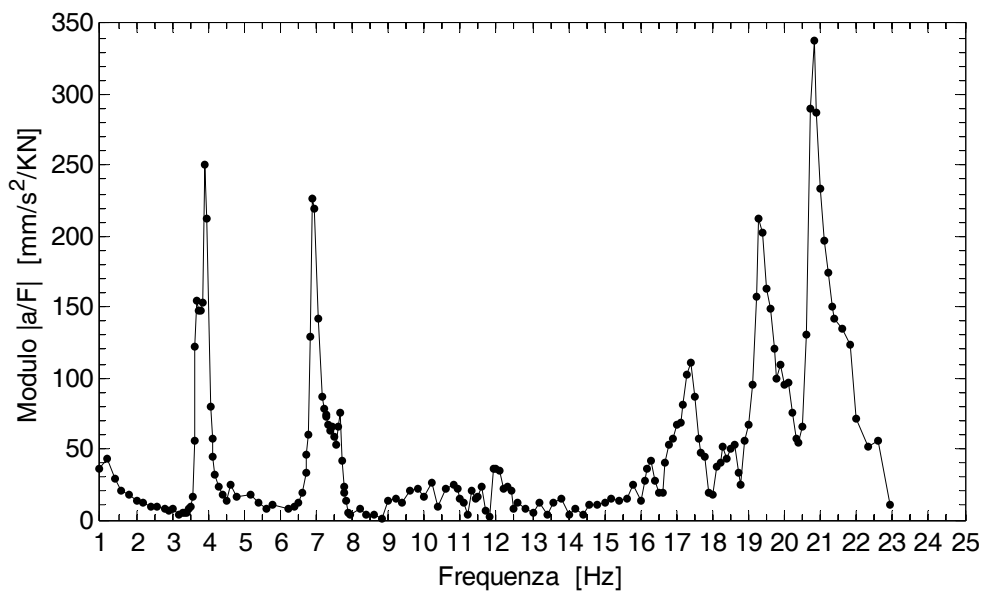
A partire dall'inertanza ottenuta sperimentalmente, attraverso il MDOF Circle-Fit method sono state identificate le frequenze proprie e i modi propri del sistema. Le frequenze proprie e smorzamenti sono riportati in Tabella 4.2 per ognuna delle quattro prove caratterizzate da differenti posizioni della vibrodina. Ad ogni riga della tabella corrisponde un modo di vibrare. Le associazioni tra risultati ottenuti da differenti prove sono stati fatti quando le relative frequenze erano significativamente vicine. Chiaramente una certa posizione di vibrodina e di strumenti consente di determinare solo alcuni modi di vibrare.

Gli smorzamenti modali ottenuti sono dell'ordine del 0.50÷1.60%. Si noti come gli smorzamenti corrispondenti a modi individuati in prove differenti siano significativamente simili a conferma dell'affidabilità dei risultati ottenuti. Ad esempio, nelle Figura 4.16 e 4.17 sono riportate le inertanze sperimentali ottenute per le quattro prove eseguite.

MODALITÀ DI PROVA								
	Posizione 1 - Trasversale		Posizione 2 – Verticale		Posizione 3 - Longitudinale		Posizione 4 - Trasversale	
	Freq. [Hz]	Smorz. [%]	Freq. [Hz]	Smorz. [%]	Freq. [Hz]	Smorz. [%]	Freq. [Hz]	Smorz. [%]
1° Modo	-	-	-	-	1.42	1.61	-	-
2° Modo	-	-	2.65	0.79	2.60	1.34	-	-
3° Modo	-	-	2.99	0.63	3.00	1.03	2.98	0.80
4° Modo	3.68	0.74	-	-	-	-	3.69	0.88
5° Modo	3.90	0.65	-	-	-	-	3.99	1.02
6° Modo	6.90	0.56	6.78	0.62	6.86	1.02	6.99	0.79

Tabella 4.2. Frequenze proprie e smorzamenti identificati dalle prove sperimentali con vibrodina.

Posizione 1 - trasversale



Posizione 2 - verticale

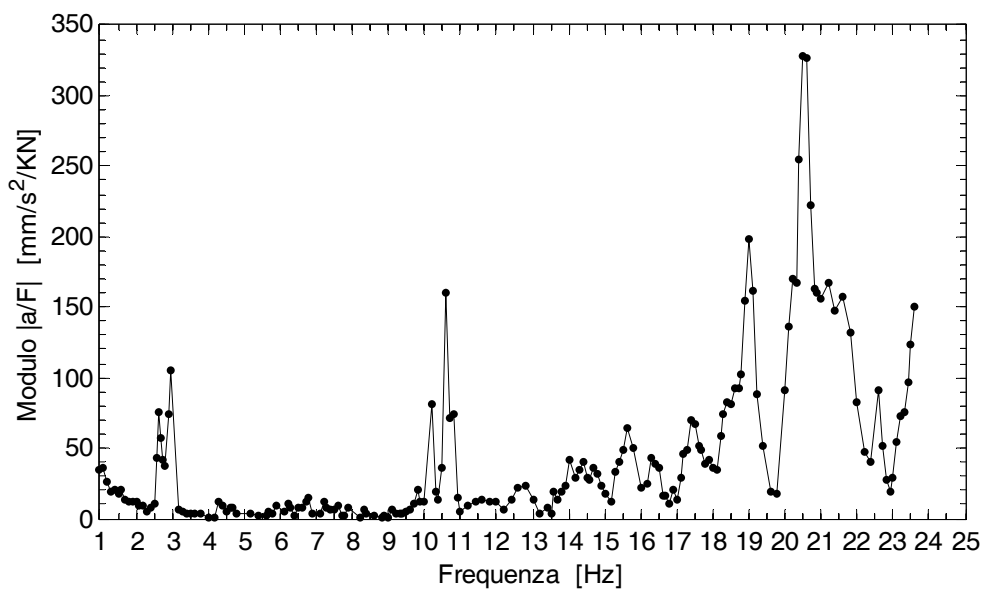


Figura 4.16. Inertanza sperimentale ottenuta per l'accelerometro A2 durante la prove con vibrodina (Posizioni 1 e 2).

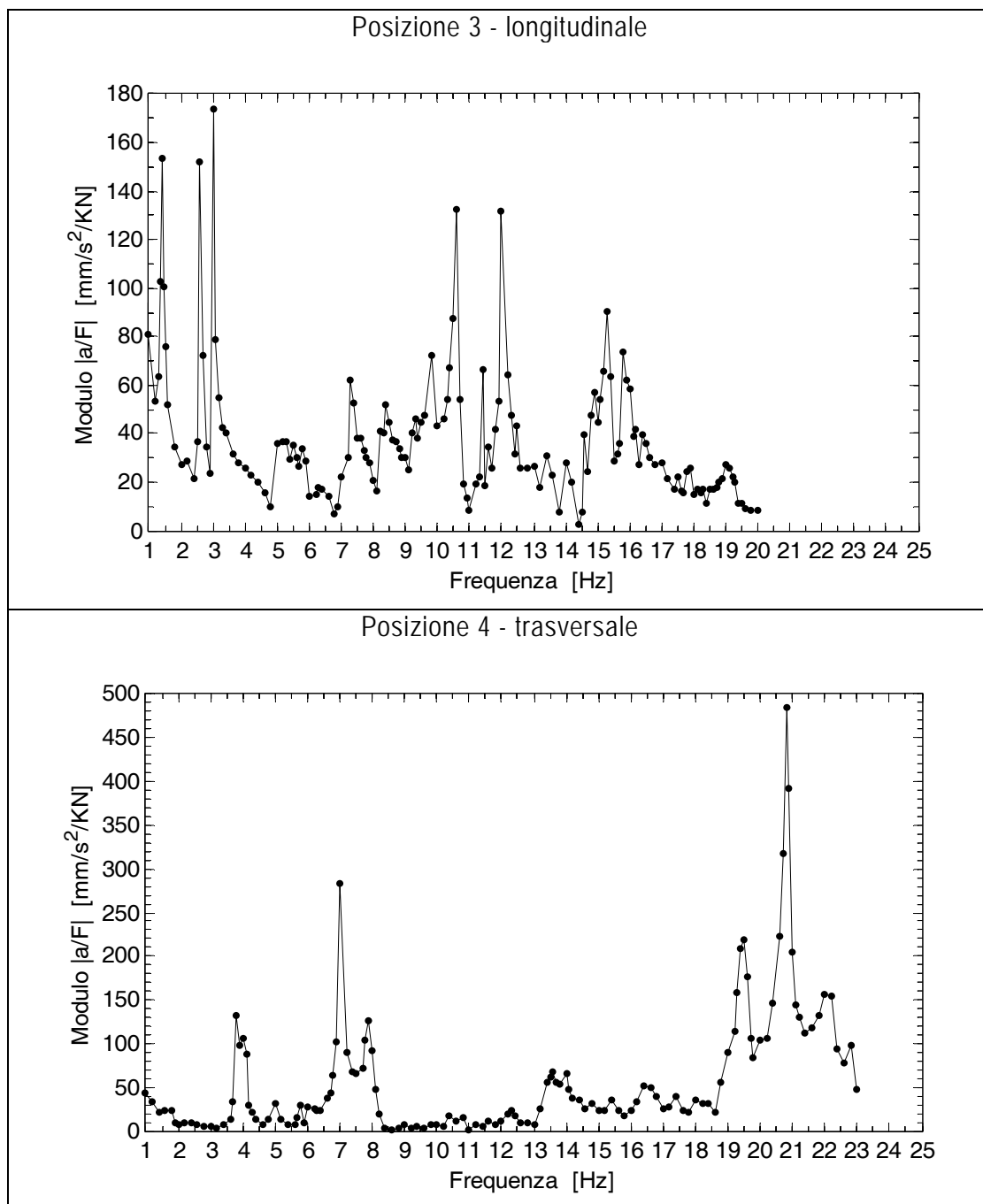


Figura 4.17. Inertanza sperimentale ottenuta per l'accelerometro A2 durante la prove con vibrodina (Posizioni 3 e 4).

4.4.4 Modello numerico agli elementi finiti

Il comportamento dinamico della struttura è stato studiato realizzando un modello agli elementi finiti costituito da elementi tipo “beam” a comportamento elastico lineare per le aste delle reticolari in acciaio ed elementi tipo “shell” per le solette in calcestruzzo.

Gli appoggi sono stati modellati considerando impediti gli spostamenti verticali e utilizzando molle di rigidezza nota per gli spostamenti in direzione orizzontale. Sono quindi stati calcolati i modi propri del modello; le deformate modali e le relative frequenze proprie sono riportate nella Figura 4.18.

Il primo modo, associato ad una frequenza di 1.55 Hz (Figura 4.18a), è un modo caratterizzato dal prevalente spostamento concorde dei due impalcati superiori in direzione longitudinale; la deformata del secondo modo (2.69 Hz) è caratterizzata da una inflessione nel piano verticale della campata centrale mentre quelle laterali risultano marginalmente coinvolte. Il terzo modo (Figura 4.18c), con frequenza di 3.09 Hz, presenta lo spostamento dei due impalcati superiore sempre in direzione longitudinale ma opposti in fase. Il quarto modo, (Figura 4.18d) con frequenza pari a 3.88 Hz, evidenzia una inflessione globale dell'intera struttura nel piano orizzontale, coinvolgendo quindi prevalentemente gli spostamenti trasversali e in misura minore quelli verticali. Il quinto modo (Figura 4.18e) ha frequenza di 4.00 Hz ed è un modo prevalentemente torsionale della campata centrale. Il sesto modo, infine, con frequenza pari a 7.01 Hz, è un modo torsionale con rotazione prevalente attorno all'asse verticale (Figura 4.18f).

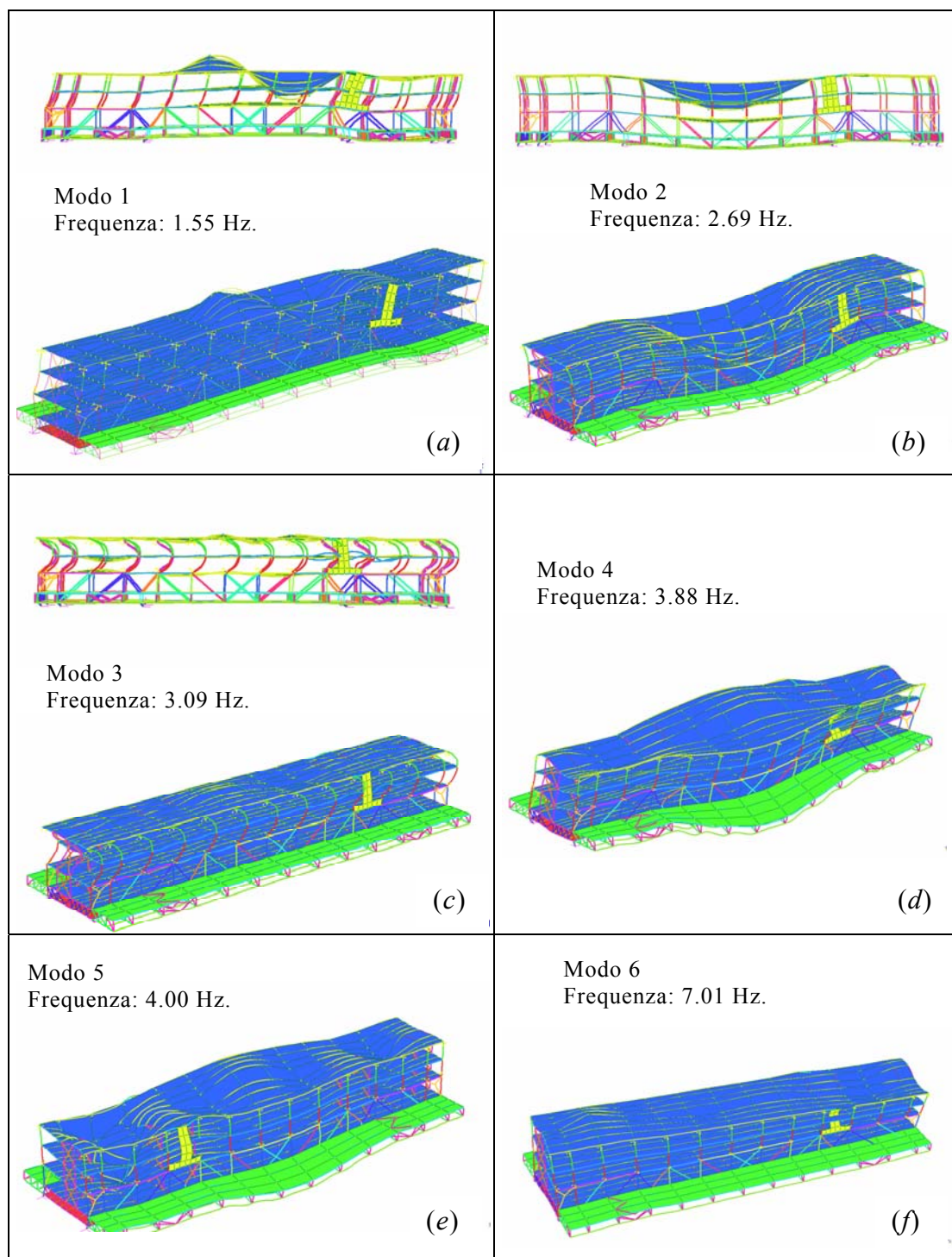


Figura 4.18. Primi 6 modi di vibrare del modello agli elementi finiti.

4.4.5 Correlazione tra dati sperimentali e risultati numerici

Risultati sperimentali e modellazione numerica sono stati messi a confronto per verificarne l'attendibilità; è stata eseguita, in particolare, la correlazione tra modi sperimentali e modi calcolati con il modello numerico attraverso il MAC (*Modal Assurance Criterion*),

Sono stati confrontati separatamente modi ottenuti da prove con differente disposizione degli accelerometri; si evidenzia una buona correlazione dei primi 6 modi, con valori del MAC compresi tra 0.71 e 0.95

Verificata la correlazione tra le forme modali è stato possibile confrontare anche le frequenze. Modi analoghi ricavati da prove con vibrodina in posizione diverse hanno manifestato frequenze pressoché coincidenti; questo ha garantito l'attendibilità dei risultati sperimentali. Le frequenze sperimentali sono state raffrontate con quelle analitiche mostrando una buona correlazione. Le frequenze del modello FEM e gli errori commessi rispetto ai valori identificati sperimentalmente sono riportati nella Tabella 4.3.

	Frequenze identificate [Hz]	Frequenze del modello FEM	Errore [Hz]	Errore %
1° Modo	1.42	1.55	0.13	8.1
2° Modo	2.65	2.69	0.04	1.5
3° Modo	3.00	3.09	0.09	2.9
4° Modo	3.69	3.88	0.20	5.1
5° Modo	3.90	4.00	0.10	2.5
6° Modo	6.90	7.01	0.11	1.6

Tabella 4.3. Correlazione tra le frequenze: errore assoluto e percentuale.

5. APPLICAZIONI SPERIMENTALI DEI METODI DI IDENTIFICAZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO

In questo capitolo vengono proposte applicazioni su strutture al vero dei metodi nel dominio del tempo descritti nel Capitolo 3. La caratterizzazione dinamica del Viadotto Incoronata (Autostrada A3 Salerno-Reggio Calabria) è stata ottenuta grazie all'eccitazione indotta dal traffico veicolare. Il viadotto, costituito da due ponti gemelli a tre campate, è caratterizzata da una sezione a cassone in c.a.p. ad altezza variabile. Il processo di identificazione ha permesso di evidenziare 10 deformate modali e i relativi valori di smorzamento. Le deformate modali sono caratterizzate da spostamenti accoppiati tra i due viadotti, concordi o discordi. Si propone inoltre un confronto tra diverse metodologie di identificazione per la determinazione di frequenze proprie, deformate modali e smorzamenti attraverso lo studio di una passerella pedonale ad arco a via inferiore realizzata in legno lamellare costruita a Rimini sul fiume Marecchia.

5.1 VIADOTTO INCORONATA SULL'AUTOSTRADA SALERNO-REGGIO CALABRIA

A differenza dei metodi nel dominio delle frequenze [Ewins 2000; Mazzotti & Vincenzi 2005], che necessitano della valutazione dell'intensità della forzante, la peculiarità dei modelli nel dominio del tempo consiste nella capacità di estrarre i parametri modali della struttura (frequenze proprie, smorzamenti e deformate modali) direttamente dai segnali ottenuti dalle registrazioni sperimentali provenienti da sensori posti sulla struttura e senza la necessità di misurare l'entità della forza eccitante. La forzante viene, infatti, modellata attraverso un rumore bianco [Garibaldi et al. 2003; Vincenzi et al. 2006]. Tali metodi sono quindi appropriati quando è necessario utilizzare forzanti di tipo ambientale come, ad esempio, l'eccitazione dovuta al vento ed al traffico.



Figura 5.1. Viadotto Incoronata sull'Autostrada Salerno-Reggio Calabria.

Nel caso in esame, la struttura è stata eccitata mediante traffico veicolare ed il successivo processo di identificazione ha permesso di evidenziare 10 deformate modali e i relativi valori di smorzamento. Le deformate modali sono caratterizzate da spostamenti accoppiati tra i due viadotti, concordi o discordi. Inoltre, l'accentuata snellezza dell'impalcato produce uno smorzamento modesto, compreso tra il 1-2%, che spiega i significativi valori di amplificazione dinamica rilevati al passaggio di veicoli di peso elevato.

5.1.1 Descrizione della struttura oggetto di indagine sperimentale

Lo studio della caratterizzazione dinamica riportato nel seguito memoria riguarda il Viadotto Incoronata (Autostrada A3 Salerno-Reggio Calabria dal km 59+811 al km 61+025) attualmente in fase di ampliamento (Figura 5.1).

I due ponti oggetto di indagine, gemelli a tre campate, con sezione a cassone in c.a.p. ad altezza variabile, sono stati costruiti per conci successivi secondo lo schema a sbalzo dalle due pile centrali; le due metà della campata centrale di entrambe i ponti, originariamente collegate a cerniera, sono state solidarizzate in epoca successiva alla costruzione mediante un sistema di collegamento precompresso.

La campata centrale ha una lunghezza di 110 m mentre le due laterali sono lunghe circa 55 m (vedi Figura 5.2a). Queste ultime sono appoggiate a pile laterali secondo uno schema a carrello; attualmente, le estremità dei ponti sono state collegate mediante smorzatori alle campate adiacenti, di luce minore. L'altezza complessiva del cassone in corrispondenza delle pile centrali è di circa 5.50 m e diventa 2.20 m in corrispondenza della mezzera (Figura 5.2b,c); ha una larghezza di 5.50 m ed è coronato da un impalcato di larghezza complessiva di 9.30 m. Le pile affiancate dei due ponti (di sezione ognuna $5.50 \times 3.20 \text{ m}^2$) hanno fondazioni comuni.

Il ponte che originariamente costituiva la carreggiata Nord (nel seguito Ponte 1) è l'unico aperto al traffico, in entrambi i sensi di marcia; il ponte gemello, che originariamente costituiva la carreggiata Sud (nel seguito Ponte 2), è chiuso al traffico e viene utilizzato come area di cantiere e di lavoro per il nuovo ponte metallico che affiancherà i due esistenti nell'ambito del raddoppio dell'Autostrada A3.

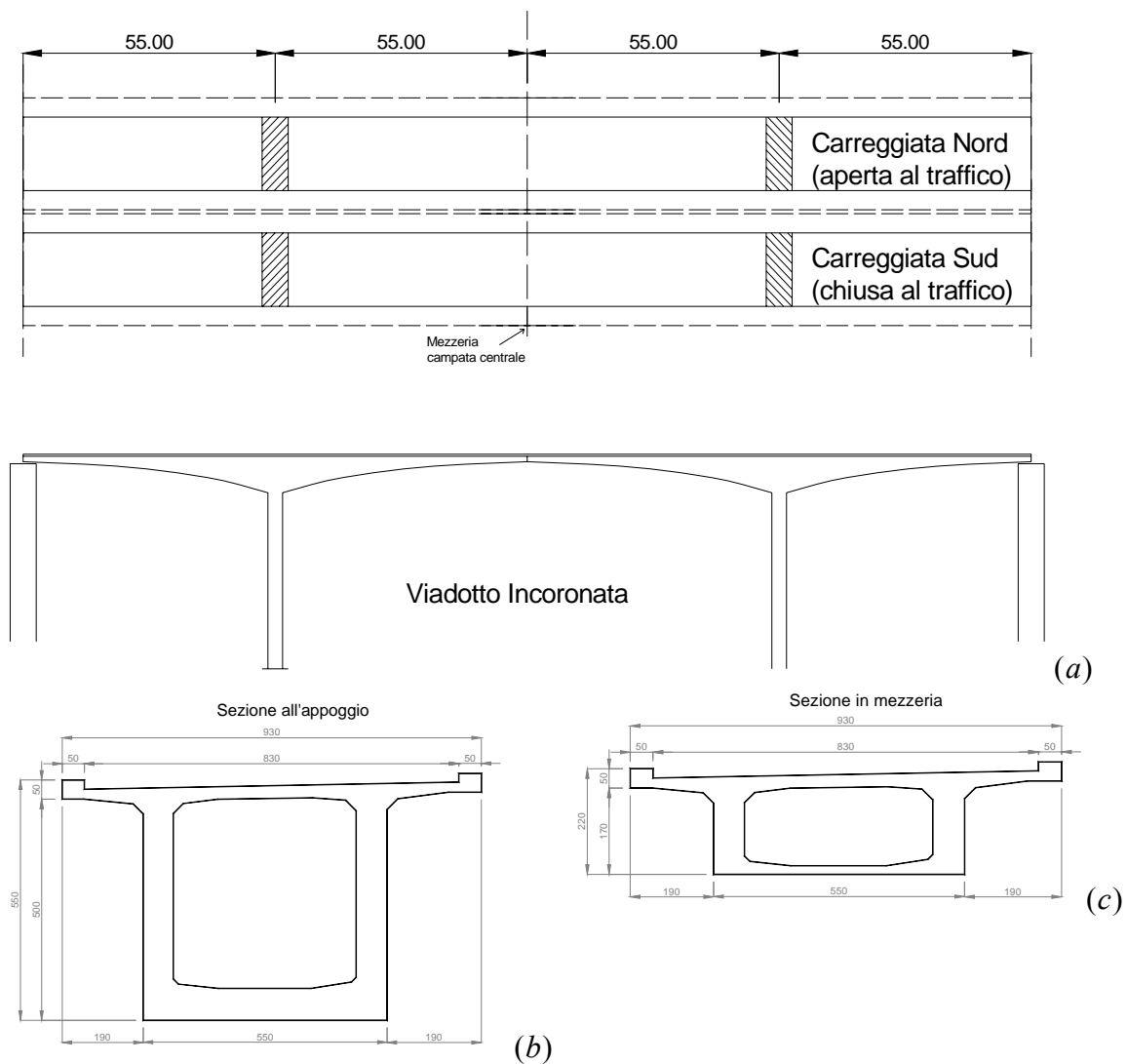
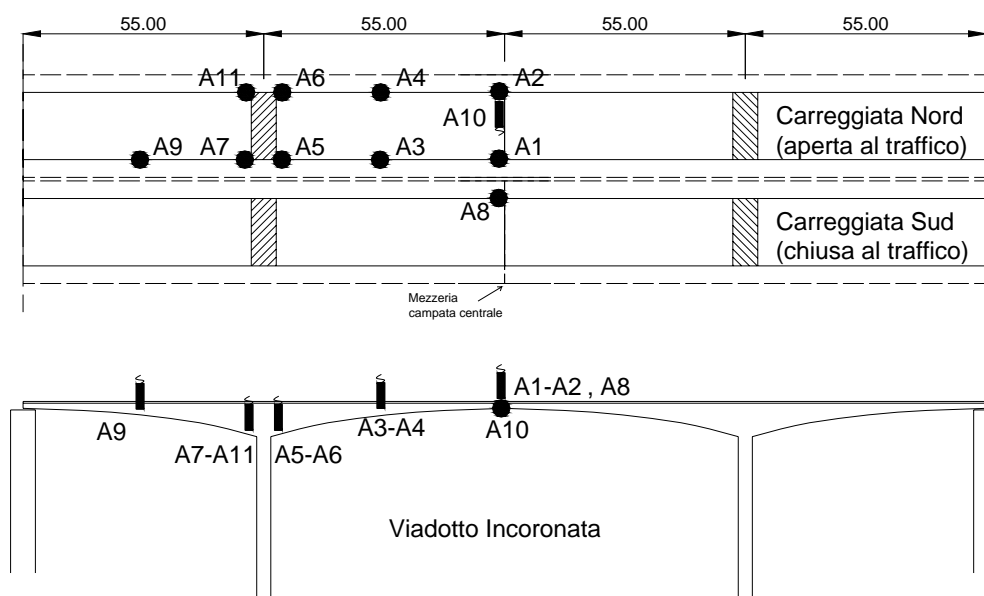


Figura 5.2. (a) schema statico del ponte e (b,c) sezioni sugli appoggio centrali ed in mezzeria.

5.1.2 Descrizione delle prove dinamiche

Durante le prove di caratterizzazione dinamica dei ponti del viadotto Incoronata, sono state considerate tre distinte disposizioni degli accelerometri (denominate nel seguito posizioni 1-3), riportate nelle Figura 5.3a-c. La forzante dinamica utilizzata per sollecitare gli impalcati è consistita nelle accelerazioni prodotte dal traffico veicolare, che transitava in entrambi i sensi di marcia sul ponte 1; come atteso, sono risultate particolarmente significative le accelerazioni prodotte dal passaggio di autocarri.

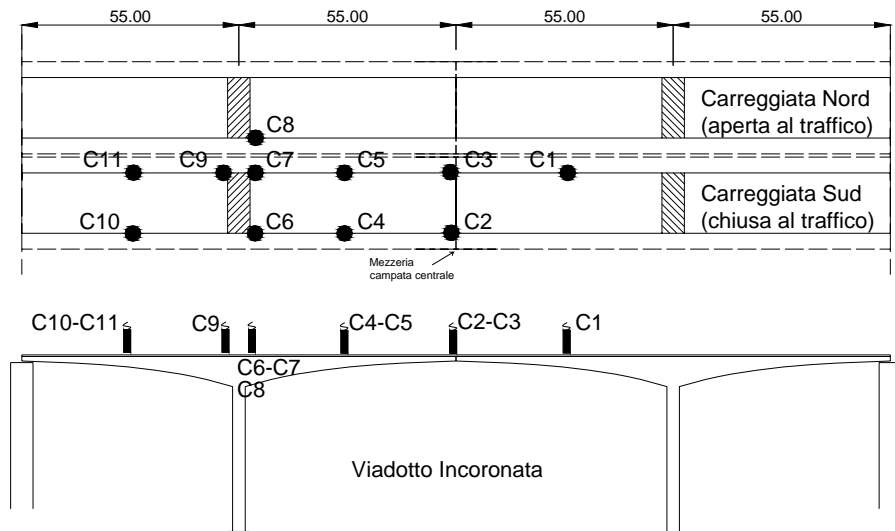
Relativamente alle prime due posizioni considerate, è stata sostanzialmente strumentata la carreggiata Nord (quella direttamente sollecitata); tuttavia, in entrambi i casi sono stati collocati anche accelerometri nella carreggiata Sud (ponte 2) in direzione verticale ed orizzontale. In questo modo, è stato possibile verificare le accelerazioni indotte dal traffico sulla struttura attualmente non transitabile.



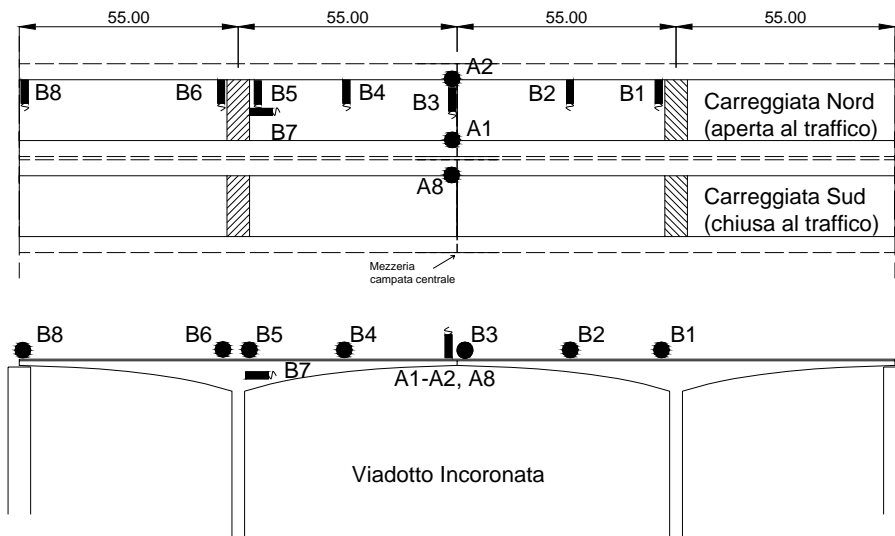
(a) - Posizione 1

Figura 5.3. Disposizione degli accelerometri sulle due carreggiate del viadotto per la posizione 1.

Nella terza posizione è stata strumentata prevalentemente la carreggiata Sud, mediante accelerometri disposti in direzione verticale (sono stati mantenuti alcuni accelerometri anche sulla carreggiata Nord in modo da fornire un



(c) - Posizione 3



(b) - Posizione 2

Figura 5.4. Disposizione degli accelerometri sulle due carreggiate del viadotto per le posizioni 2 e 3.

riferimento con le posizioni precedenti.

A titolo di esempio, nella Figura 5.5 sono riportate le accelerazioni registrate dallo strumento A1 nella posizione 3 durante il passaggio di alcuni veicoli. Dalle registrazioni si osserva che il transito produce accelerazioni verticali massime nella mezzeria della carreggiata Nord pari a circa 12-15 cm/s^2 ; allontanandosi dalla mezzeria, le accelerazioni si attenuano fino a valori di 1-2 cm/s^2 in corrispondenza delle pile. L'accelerometro nella mezzeria della carreggiata Sud ha registrato, in tale caso, accelerazioni verticali di 8-10 cm/s^2 , quindi paragonabili a quella sulla campata Nord in posizione analoga.

In Figura 5.6 è riportata la trasformata di Fourier delle accelerazioni misurate dallo strumento A1 nella posizione 1. Esso mostra due amplificazioni dinamiche importanti per frequenze comprese tra 1 e 2 Hz nonché diversi altri picchi della funzione per frequenze comprese tra 2 e 5 Hz.

5.1.3 Risultati ottenuti

Per la struttura in esame, nella Tabella 5.1 sono riportati i modi propri identificati del sistema, ottenuti mediante il metodo a sottospazi esposto nel Capitolo 5; per ogni modo, sono indicate le frequenze proprie (Hz) e il coefficiente di smorzamento (%) corrispondente. Nelle Figure 5.7-5.8, sono riportate inoltre le relative deformate.

Dalla Tabella 5.1, si osserva come attraverso l'elaborazione dei dati sperimentali siano stati individuati complessivamente 10 modi di vibrare dei due impalcati: il primo modo (individuato da una frequenza propria di 0.97 Hz) è un modo trasversale caratterizzato da spostamenti prevalentemente orizzontali di pile e impalcati in direzione ortogonale all'asse longitudinale dei ponti, con spostamenti concordi tra i due viadotti. La deformata modale identificata è schematicamente rappresentata in Figura 5.7a, dove i due viadotti sono stati riportati uno a fianco all'altro; In tali figure sono indicati i valori delle componenti dell'autovettore associato a ciascun modo; la posizione degli

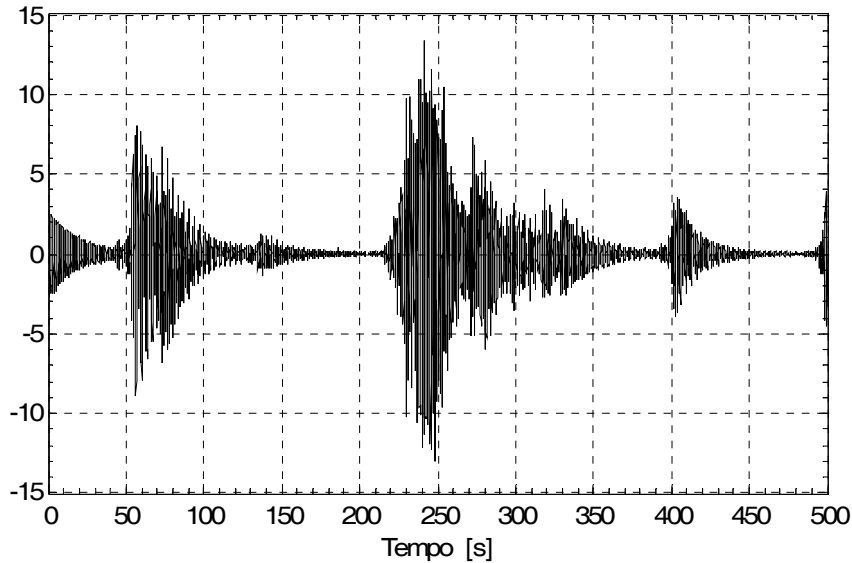


Figura 5.5. Accelerazioni registrate sulla carreggiata Nord dall'accelerometro A1 nella posizione 1, durante il passaggio di veicoli pesanti.

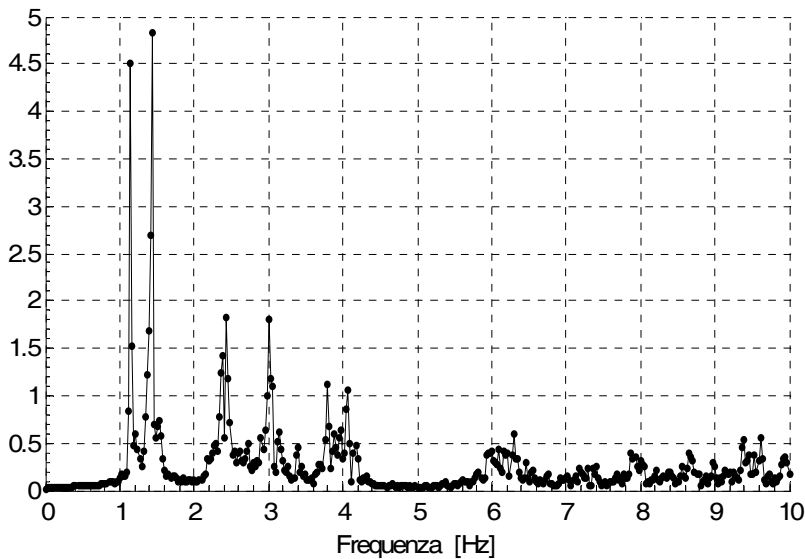


Figura 5.6. Modulo della trasformata di Fourier del segnale acquisito dall'accelerometro A1 nella posizione 1 (vedi Figura 4).

strumenti è individuata mediante un punto sulla deformata modale, pertanto il valore è riferito al punto rappresentante la posizione di misura. Graficamente, le deformate modali sono ottenute interpolando i valori puntuali ottenuti ed

estrapolando nelle parti di struttura dove non sono presenti strumenti. Per semplificare la comprensione delle figure, inoltre, sono stati riportati solamente gli spostamenti nella direzione prevalente: modi verticali – solo spostamenti verticali e modi orizzontali – solo spostamenti orizzontali.

Il secondo modo (individuato a 1.15 Hz) è prevalentemente verticale, presenta spostamenti delle campate centrali analoghi a quelli del primo modo di una trave in semplice appoggio e concordi tra gli impalcati (Figura 5.7*b*). Il terzo modo (1.44 Hz) ha la medesima deformata del secondo ma i due impalcati si inflettono verticalmente in opposizione di fase (Figura 5.7*c*). Il quarto modo (1.69 Hz) è prevalentemente orizzontale con le pile centrali che si spostano in direzioni tra loro opposte e spostamento nullo in mezzeria della campata centrale; i due impalcati hanno movimenti concordi (Figura 5.7*d*). Il quinto modo (2.07 Hz) è ancora orizzontale, presenta la deformazione degli impalcati analoga al primo modo di una trave appoggiata ma tra loro in opposizione di fase; le pile centrali sono sostanzialmente fisse (Figura 5.7*e*).

Modo	Frequenza		Smorzamento	
	valor medio	range	valor medio	range
	[Hz]	[Hz]	[%]	[%]
1	0.97	0.97÷0.98	2.27	1.93÷3.83
2	1.15	1.14÷1.16	1.82	1.44÷2.34
3	1.44	1.43÷1.45	1.63	1.81÷1.43
4	1.69	1.68÷1.70	1.77	1.63÷2.44
5	2.07	2.05÷2.08	1.93	1.27÷3.61
6	2.42	2.39÷2.46	1.45	1.59÷3.91
7	2.96	2.90÷3.03	2.72	2.30÷4.53
8	4.01	3.98÷4.08	1.81	1.22÷3.00
9	6.30	6.23÷6.34	1.85	1.21÷2.37
10	7.43	7.42÷7.44	0.95	0.72÷1.08

Tabella 5.1 Frequenze proprie e smorzamenti identificati.

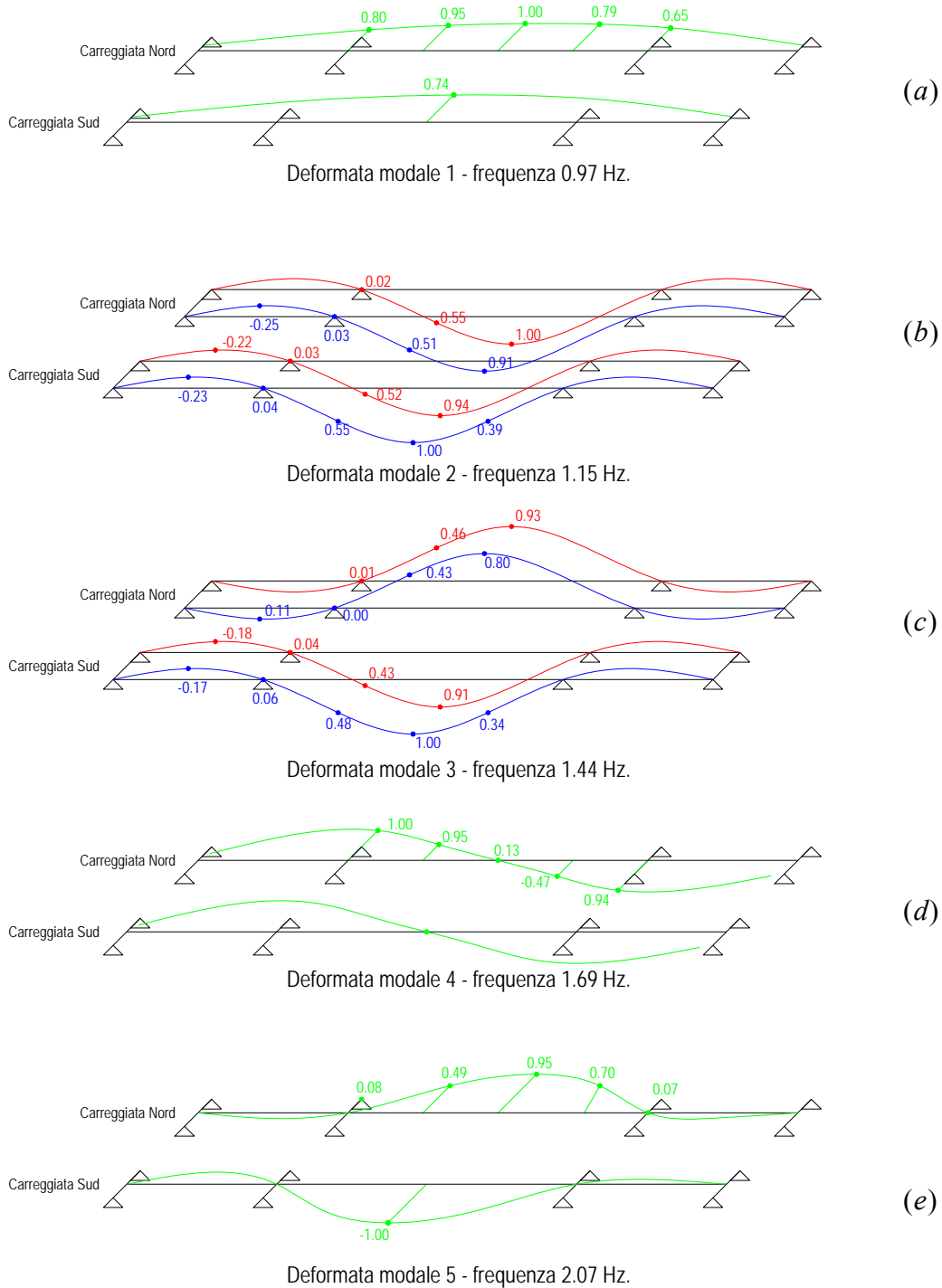


Figura 5.7. Forme modali identificate sperimentalmente.

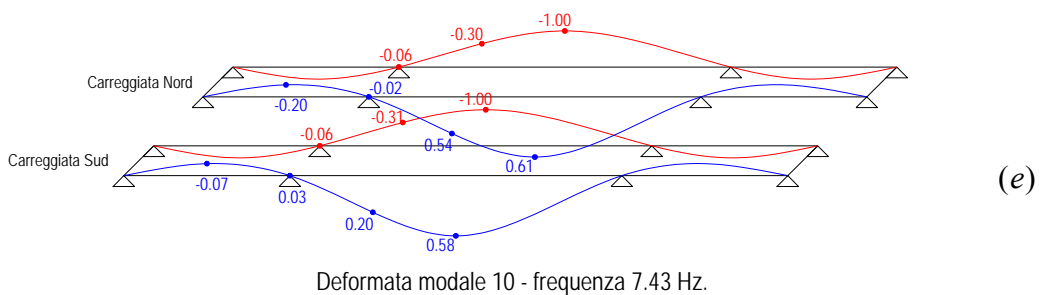
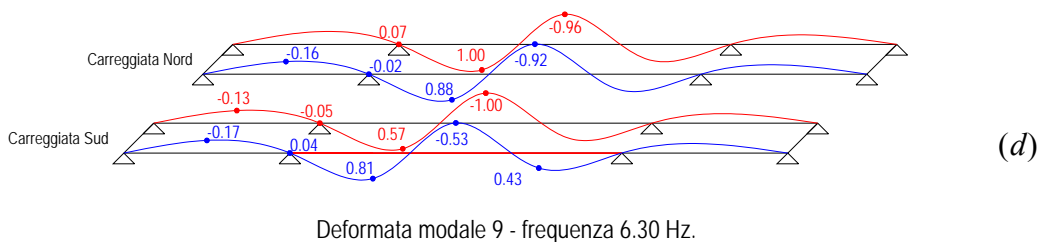
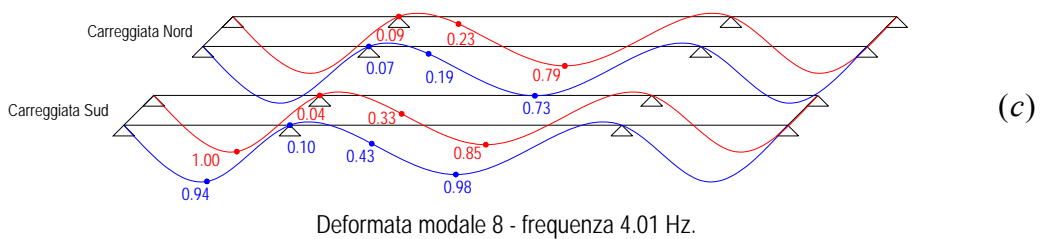
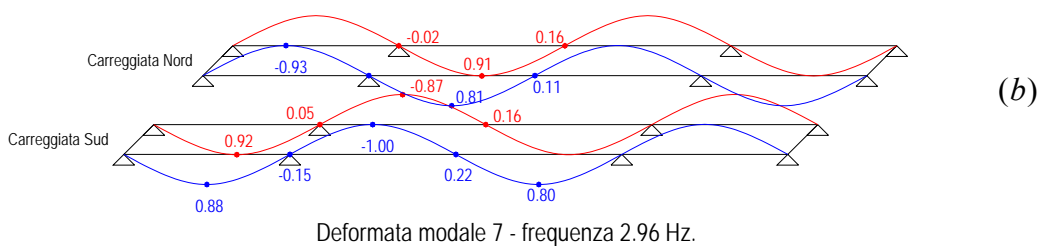
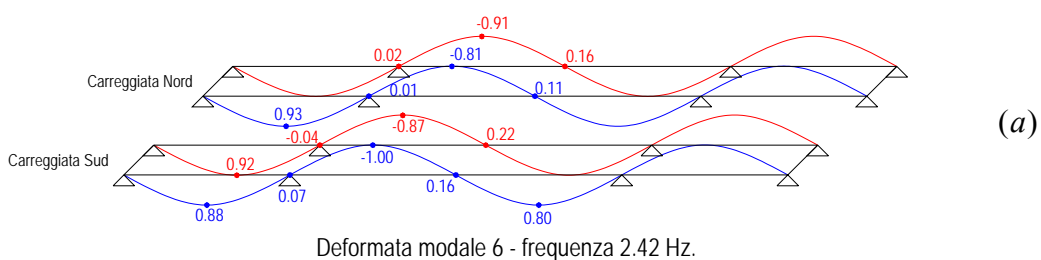


Figura 5.8. Forme modali identificate sperimentalmente.

Il sesto modo (2.42 Hz) rappresenta il secondo modo flessionale verticale della campata centrale (spostamento nullo in mezzeria) con spostamenti nelle campate laterali che generano rotazioni nelle pile (Figura 5.8a); i due impalcati si deformano in modo concorde. Il settimo modo (2.96 Hz) è analogo al precedente ma gli impalcati si deformano in opposizione di fase (Figura 5.8b). I modi successivi rappresentano deformate modali di ordine superiore, comunque riportate per completezza (Figura 5.8c-d). L'ultimo modo individuato (7.43 Hz) rappresenta il primo modo torsionale delle campate centrali (Figura 5.8e).

Per quanto riguarda gli smorzamenti, essi sono compresi tra il 2.72% e lo 0.95% ottenuto per il 10° modo, con una predominanza di valori al di sotto del 2%. Tali risultati concordano con quanto è possibile notare dalle registrazioni accelerometriche: dopo il passaggio di mezzi pesanti, gli impalcati continuano ad oscillare per alcune decine di secondi prima di ritornare allo stato di quiete (vedi Figura 5.5).

5.1.4 Modello FEM e correlazione tra dati numerici e sperimentali

Il comportamento dinamico del ponte è stato studiato utilizzando un semplice modello agli elementi finiti delle travi a cassone, costituito da elementi tipo “shell” a comportamento elastico lineare (Figura 5.9). Gli appoggi sono stati modellati considerando due diverse tipologie in corrispondenza delle pile centrali e laterali. Per entrambe sono stati vincolati rigidamente gli spostamenti verticali, data l'elevata rigidità assiale; sono state invece introdotte molle elastiche orizzontali trasversali in grado di simulare la deformabilità delle pile stesse e degli appoggi, con rigidità differente tra le pile centrali e quelle laterali in quanto quest'ultime sono sensibilmente più corte delle altre. Per quanto riguarda il materiale, è stato adottato un valore medio di riferimento per la classe di calcestruzzo del ponte (R_{ck} 30).

Risultati sperimentali e numerici sono posti a confronto per verificare la potenzialità del metodo illustrato.

È stata eseguita, in primo luogo la correlazione tra i modi sperimentali e i modi calcolati dal modello numerico attraverso il MAC (Modal Assurance Criterion). Il valore unitario del MAC indica coincidenza tra i valori sperimentali e numerici in corrispondenza dei punti di misura. Il confronto è riportato in Figura 5.10. Si evidenzia una forte correlazione per i primi 7 modi, con valori del MAC compresi tra 0.96 e 0.99. Valori compresi tra l'83 e l'88%, comunque elevati, sono invece ottenuti per i successivi 3 modi.

Verificata la correlazione tra le forme modali è possibile correlare anche le frequenze. Le frequenze e gli errori commessi rispetto ai valori identificati sono riportati nella Tabella 5.2 e graficamente riportati in Figura 5.11. Si può notare che i principali errori si manifestano in modi (terzo, quinto e sesto) in cui, secondo il modello FEM, i due impalcati hanno deformate simmetriche o antisimmetriche; questo è dovuto al fatto che nel modello le masse e la geometria dei due impalcati sono identici. Nella realtà la carreggiata Sud (Ponte 2) era gravata anche dal peso del nuovo impalcato metallico in costruzione con conseguente incremento di massa. Un processo di ottimizzazione può quindi essere necessario per calibrare valori di masse e rigidezze del modello agli Elementi Finiti ed ottenere quindi migliore riscontro. Tale processo è descritto nel Capitolo 8.

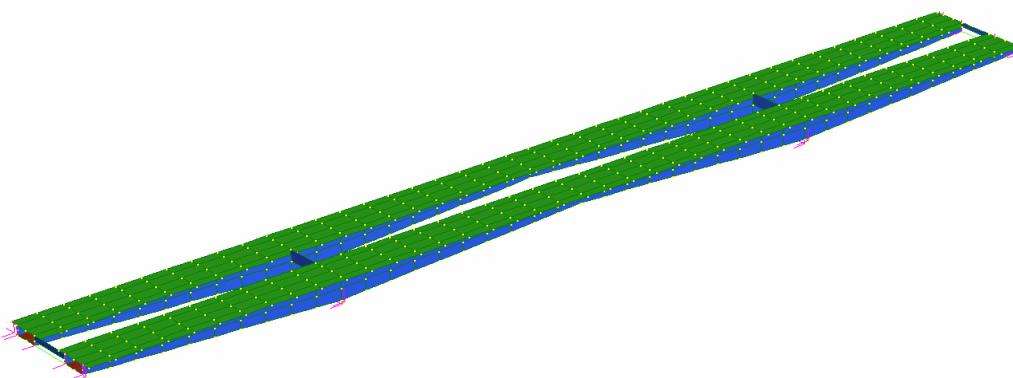


Figura 5.9. Modello agli Elementi Finiti del viadotto Incoronata.

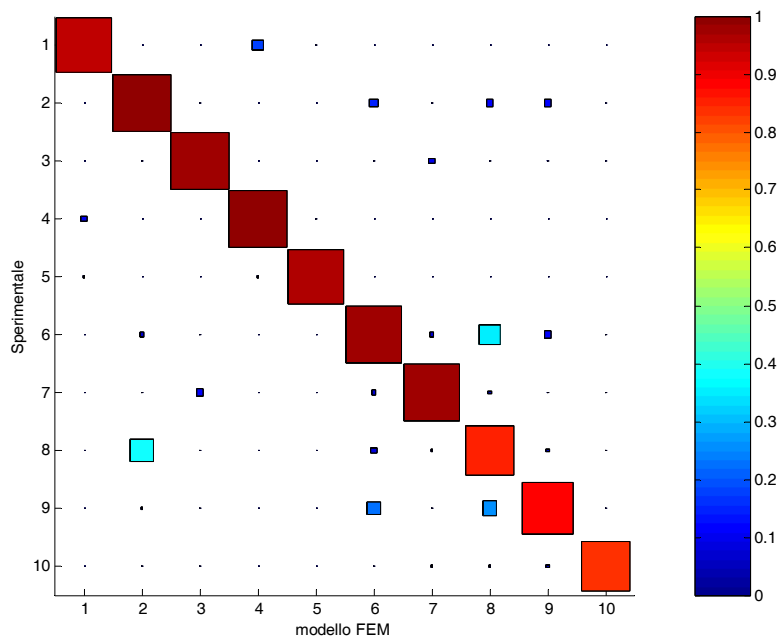


Figura 5.10. Correlazione tramite il MAC tra le forme modali trovate sperimentalmente e numericamente.

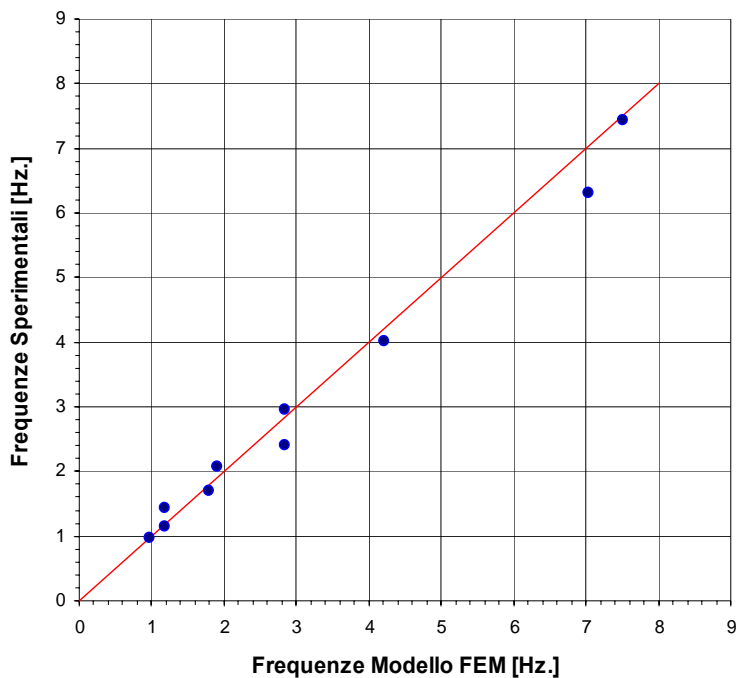


Figura 5.11. Correlazione tra le frequenze trovate sperimentalmente e numericamente con un modello FEM.

Modo	Frequenza sperimentale	Frequenza modello FEM	Errore
	[Hz]	[Hz]	[%]
1	0.97	0.98	-1.03
2	1.15	1.18	-2.78
3	1.44	1.18	17.92
4	1.69	1.79	-5.92
5	2.08	1.90	8.65
6	2.41	2.84	-17.84
7	2.96	2.84	4.05
8	4.01	3.81	4.99
9	6.30	7.04	-11.75
10	7.43	7.51	-1.08

Tabella 5.2. Confronto tra frequenze numeriche e sperimentali.

5.2 PASSERELLA PEDONALE SUL FIUME MARECCHIA - RIMINI

In questo paragrafo si propone un confronto tra diverse metodologie di identificazione per la determinazione di frequenze proprie, deformate modali e smorzamenti di una passerella pedonale costruita a Rimini. Vengono messi a confronto risultati provenienti dal MDOF Circle Fit Method (Figura 5.12), operante nel dominio delle frequenze e la risoluzione mediante metodi a sottospazi appartenente alle metodologie nel dominio del tempo.

5.2.1 Descrizione della struttura

La struttura oggetto della sperimentazione dinamica è una passerella pedonale ad arco a via inferiore costruita a Rimini sul fiume Parecchia [Diotallevi et al. 2002]. La passerella è realizzata in legno lamellare e ha una

luce di circa 90 m; la larghezza dell'impalcato è di circa 5 m. (vedi Figura 5.13). In una prima fase, sono state condotte prove dinamiche mediante vibrodina con misurazione di accelerazioni; nell'ambito di tali prove, la vibrodina è stata collocata secondo due diverse direzioni: orizzontale in senso trasversale all'asse del ponte e verticale. Successivamente, sono state acquisite accelerazioni in presenza di forzante ambientale dovuta al vento, in grado di eccitare significativamente la struttura.

5.2.2 Confronto tra i risultati ottenuti

Le accelerazioni acquisite sperimentalmente indotte da vibrodina sono state analizzate mediante il MDOF Circle Fit Method, mentre dalle oscillazioni ambientali si sono ottenuti i parametri modali della struttura mediante risoluzione dell'algoritmo a sottospazi descritto nel Capitolo 3.

Le prove sperimentali e le successive elaborazioni hanno consentito di individuare 6 modi di vibrare: le frequenze e gli smorzamenti ottenuti con entrambi i metodi sono riportati in Tabella 5.3 e le corrispondenti forme modali



Figura 5.12. Vista della passerella pedonale sul fiume Marecchia.

sono riportati in Figura 5.14.

Il primo modo (1.30 Hz) è un modo che vede uno spostamento prevalente dell'impalcato in direzione ortogonale all'asse principale della passerella pedonale (Figura 5.14a); il secondo modo è un secondo modo flessionale che coinvolge l'intera struttura nel piano verticale, caratterizzato da spostamenti trascurabili in mezzeria e spostamenti aventi segno discorde ai quarti della campata; tale modo è stato ottenuto a 1.44 Hz (Figura 5.14b). Il terzo modo (Figura 5.14c) è un modo torsionale che vede spostamenti orizzontali discordi tra arco e impalcato inferiore. Il quarto modo è un modo prevalentemente verticale con spostamenti massimi in mezzeria. (1.70 Hz).

		Metodo nel dominio del Tempo		Metodo nel dominio delle Frequenze	
		Freq. [Hz.]	Damp. [%]	Freq. [Hz.]	Damp. [%]
Modo 1	Val. medio	1.30	2.49 %	-	-
	C.V.	0.0026	0.0833	-	-
Modo 2	Val. medio	1.44	2.30 %	1.43	1.00 %
	C.V.	0.0013	0.0731	0.0053	0.3439
Modo 3	Val. medio	1.70	1.14 %	1.67	1.66 %
	C.V.	0.0007	0.0470	0.0171	0.3393
Modo 4	Val. medio	2.26	2.12 %	2.23	1.08 %
	C.V.	0.0025	0.2711	0.0036	0.1298
Modo 5	Val. medio	2.42	3.24 %	-	-
	C.V.	0.0002	0.0996	-	-
Modo 6	Val. medio	3.73	1.01 %	3.78	1.87 %
	C.V.	0.0005	0.0542	0.0002	0.3675

Tabella 5.3. Vista della passerella pedonale sul fiume Marecchia. Tra parentesi è indicato il coefficiente di variazione dei risultati ottenuti.

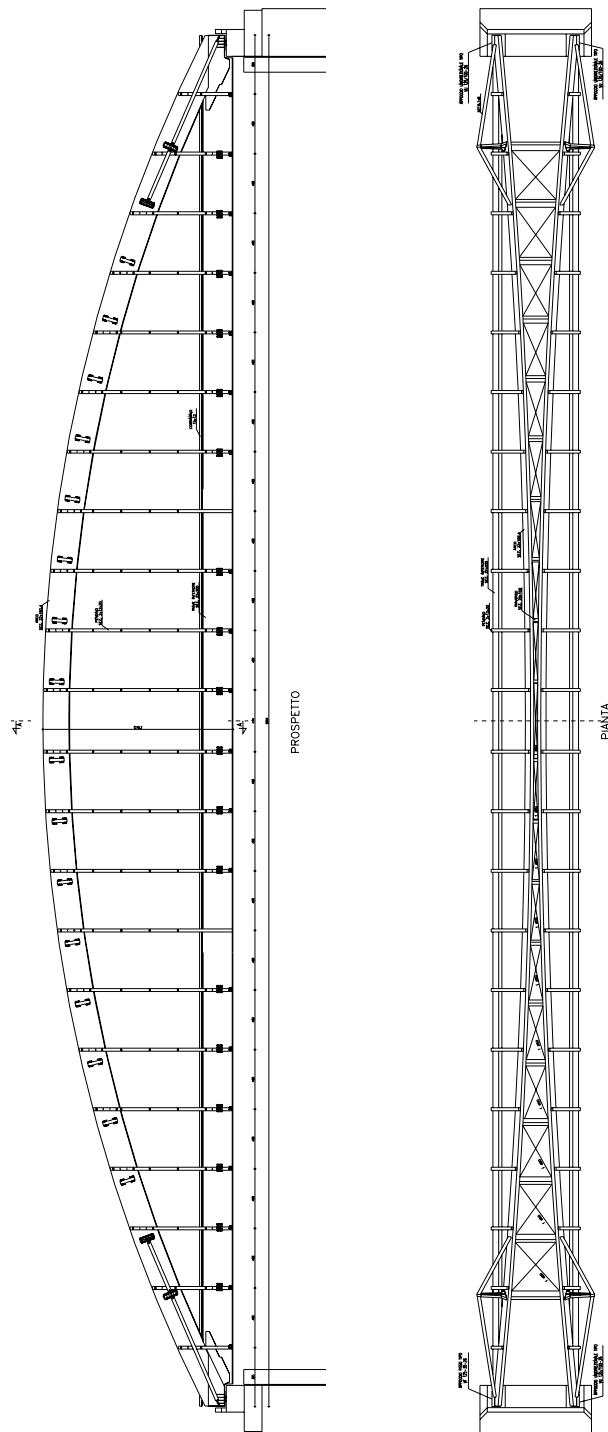


Figura 5.13. Prospetto e pianta del ponte ad arco con indicazione della posizione degli accelerometri e della vibrodina.

Quest'ultimo modo proprio è caratterizzato da una frequenza superiore rispetto al modo con spostamenti nulli nella mezzeria a causa della elevata rigidità assiale dell'arco.

Il quinto modo (2.26 Hz) è un secondo modo con spostamenti prevalentemente orizzontali con segni discordi degli spostamenti ai quarti della campata. Esso è rappresentato in Figura 5.14*d*. Infine, il sesto modo, presente a 2.42 Hz, è un modo verticale con spostamenti discordi tra la mezzeria e i quarti della campata. (Figura 5.14*e*).

In Tabella 5.3 sono riportate le frequenze proprie e smorzamenti ottenute mediante i due metodi. Sono riportati i valori medi identificati e il coefficiente di variazione di tali parametri. Per quanto riguarda i metodi nel dominio del tempo, frequenze e smorzamenti sono ottenuti considerando suddividendo i dati acquisiti in 12 finestre temporali ognuna delle quali di durata maggiore di 20 secondi.

Per quanto riguarda le analisi nel dominio delle frequenze, valor medio e varianza si sono ottenuti in quanto si sono analizzate FRF ottenute da differenti test.

Dai risultati riportati in Tabella 5.3 è possibile notare come le frequenze proprie ottenute siano prossime tra loro, con variazione massima inferiore al 2%. Valori molto modesti del coefficiente di variazione si sono ottenuti per tutte le frequenze proprie ottenute con entrambi gli algoritmi. Si noti però che due frequenze proprie ottenute con il metodo a sottospazi non sono state ottenute con il metodo nel dominio delle frequenze. Per la seconda di queste, il motivo è probabilmente da attribuire al fatto che la forzante era posta in prossimità del punto nodale della deformata modale.

Analizzando gli smorzamenti, si evidenzia, invece, una significativa differenza tra i due metodi (si veda, ad esempio, il secondo modo di vibrare). Inoltre, essi si presentano dispersi anche per diversi test analizzati con lo stessa metodologia, producendo coefficienti di variazione pari, rispettivamente, al 27% e 36% per metodi nel dominio del tempo e delle frequenze. Questi risultati

confermano la difficoltà dei metodi di identificazione di ottenere valori corretti di smorzamento.

Per quanto riguarda le forme modali, invece, si ottengono autovettori molto simili, con valori di MAC superiori a 0.90 per tutti i modi identificati.

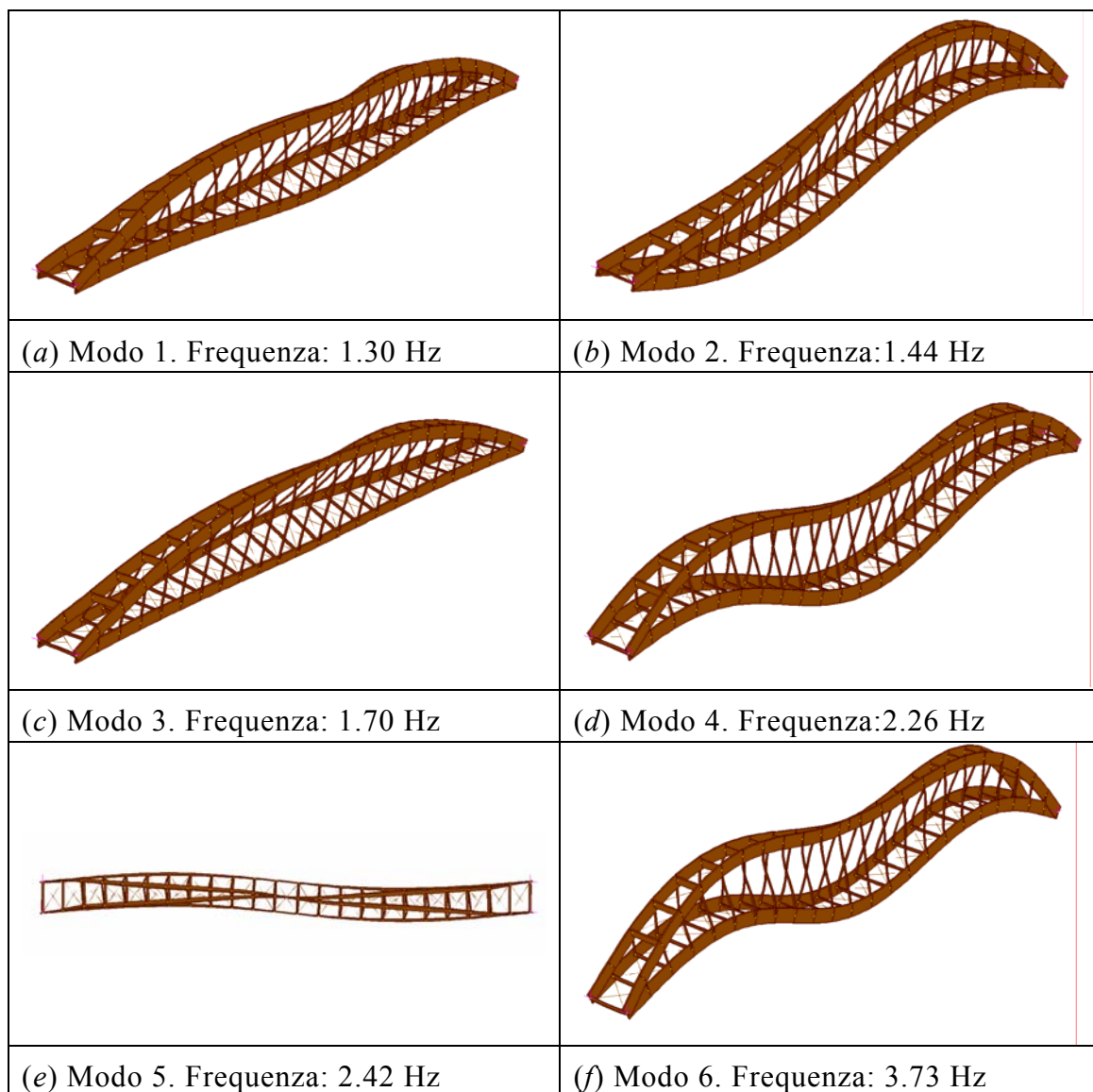


Figura 5.14. Deformate modali ottenute sperimentalmente.



PARTE II

INTRODUZIONE

L'analisi di strutture complesse è comunemente condotta attraverso modelli agli Elementi Finiti (FEM). Un modello di questo genere simula il comportamento della struttura e può essere utilizzato per predirne la risposta ai carichi di servizio o per garantirne l'integrità nel caso di sollecitazioni eccezionali quali gli eventi sismici. La modellazione, anche se raffinata, può essere una rappresentazione che differisce dalla struttura reale, in particolare nel caso di azioni di tipo dinamico. Le ipotesi su materiali, vincoli e masse strutturali e non strutturali presenti nelle strutture civili e la variabilità di essi possono produrre risultati anche molto differenti dal comportamento reale della struttura.

Frequenze proprie e deformate modali, valutate eseguendo test sperimentali dinamici, sono uno strumento essenziale per stimare i valori effettivi dei parametri meccanici [Peeters & De Roeck, 1999; Mazzotti et. al, 2004]. Di conseguenza, i modelli agli Elementi Finiti possono essere corretti attraverso un processo di ottimizzazione, nel quale i parametri meccanici della struttura sono ottimizzati fin quando le proprietà dinamiche del modello risultino più simili possibili ai risultati ottenuti dalle elaborazioni sperimentali.

[Teughels et. al, 2003]. Per ottenere tali parametri, è necessario risolvere il processo di ottimizzazione nel quale, ad esempio, la funzione costo è definita dalla differenza relativa tra i parametri modali sperimentali, in termini di frequenze proprie e deformate modali, e gli stessi provenienti dal modello FEM.

Il problema di identificazione può quindi essere visto come un problema di ottimizzazione [Savoia & Vincenzi, 2005, Faravelli et. al., 2005], dove la funzione costo è la distanza tra frequenze proprie e deformate modali sperimentali, ottenute mediante prove dinamiche, e le stesse ottenute dal modello numerico. La funzione costo così definita può presentare più minimi, di cui la soluzione è rappresentata solo dal minimo globale. Il successo del processo di ottimizzazione dipende, quindi, dalla definizione della funzione costo e dalla capacità dell' algoritmo di trovare il minimo globale.

Attualmente, i metodi di ottimizzazione basati sulla matrice di sensitività [Vanderplaats, 1984] e sul gradiente della funzione obiettivo sono tra i più utilizzati, ma con rilevanti limitazioni riguardanti il numero di parametri da ottimizzare e la scarsa precisione dei risultati in presenza di mal condizionamento della matrice di sensitività.

I metodi convenzionali basati sul gradiente dalla funzione errore (quali l'algoritmo di Newton o procedure Quasi-Newton), sono efficienti dal punto di vista computazionale, ma sono caratterizzati anche dalla possibilità di trovare soluzione in un minimo locale; infatti, il successo dipende dal punto di partenza della procedura, in base al fatto che esso sia prossimo o meno al minimo globale. I metodi classici presentano inoltre difficoltà di convergenza quando la funzione costo presenta una forma con modesti valori del gradiente.

Per ovviare a tali carenze, occorre utilizzare metodi di ricerca globali: tra questi risaltano per robustezza ed efficienza gli algoritmi genetici ed evolutivi. I metodi diretti quali algoritmi genetici [Goldberg 1989, Ingberg and Rosen 1992, Schwefel, 1995] ed evolutivi sono in grado di superare tali limiti e possono essere utilizzati anche per funzioni obiettivo non definibili a priori in

modo esplicito.

In questo capitolo sono illustrati i risultati ottenuti dall'ottimizzazione mediante il Differential Evolution Algorithm (DE) [Storn & Price, 1997] di modelli agli Elementi Finiti di strutture quali un telaio ed un ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo. Durante le analisi si sono ipotizzati incogniti valori di masse, rigidezze dei vincoli e caratteristiche dei materiali, considerando assegnati le corrispondenti frequenze proprie e deformate modali.

Il *Differential Evolution (DE) Algorithm* è un metodo stocastico di ricerca diretta, che utilizza N vettori contemporaneamente nei quali le singole componenti rappresentano i parametri da minimizzare nel processo di ottimizzazione. [Storn, 1996]. La procedura caratterizzante il *Differential Evolution Algorithm* è suddivisibile in una fase denominata “*mutation*”, nella quale un nuovo vettore è ottenuto come combinazione lineare di vettori appartenenti alla popolazione precedente, da una fase di *crossover*, nella quale le componenti dei vettori di una popolazione vengono mescolate con criteri random e in una fase di *selection* in cui viene deciso se il nuovo vettore definito precedentemente mediante le fasi di *mutation* e *crossover* è accettato nella nuova popolazione di vettori. Esso, infatti, sostituisce il vettore della popolazione precedente solo se riduce il valore della funzione costo.

L'algoritmo è utilizzato per l'identificazione di parametri meccanici (masse e rigidezze) di strutture quali un telaio a tre piani e un ponte in struttura mista acciaio calcestruzzo. Per entrambi i casi, la funzione costo adottata è la distanza tra le frequenze e gli autovettori di riferimento (determinati, ad esempio, sperimentalmente) e gli stessi ottenuti da un modello agli elementi finiti adottando una data combinazione di parametri meccanici.

Essendo un metodo stocastico, sono state effettuate numerose analisi, considerando diverse strategie di ottimizzazione e ottenendo le statistiche dei risultati. È stato inoltre investigata la forma della funzione costo in funzione della scelta del numero di frequenze proprie e dei modi propri utilizzati. Le

analisi effettuate hanno mostrato che adottando sia le frequenze proprie che gli autovettori nella funzione costo il numero di iterazioni diminuisce e l'accuratezza dei risultati aumenta in modo significativo.

Sono stati considerati, inoltre, dati pseudo-sperimentali, ottenuti cioè sommando ai dati esatti (frequenze e modi propri) una variabile aleatoria, rappresentante il rumore nelle misure e la non perfetta conoscenza delle caratteristiche modali della struttura. In questo caso, i parametri che minimizzano l'errore rispetto ai dati di riferimento sono anch'essi statisticamente distribuiti attorno alla soluzione esatta. I risultati mostrano che, utilizzando sia frequenze che autovettori, la varianza dei risultati è ridotta rispetto al caso in cui si scelga di considerare solo le frequenze proprie.

Per valutare le capacità dell'algoritmo DE di ottenere la corretta soluzione anche quando il numero di parametri diventa significativo, si è considerato un processo di identificazione di un ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo. Il ponte è stato studiato con un modello agli Elementi Finiti, nel quale si sono introdotte molle traslazionali per riprodurre la cedevolezza degli apparecchi d'appoggio e delle pile. Il numero di parametri considerato è pari a 4: si sono considerate incognite il modulo elastico del calcestruzzo, il peso proprio dei carichi permanenti portati e le rigidezze orizzontali e verticali dei vincoli.

Successivamente, sono presentati i risultati ottenuti e l'algoritmo è confrontato con un altro metodo di ricerca globale, il *Coupled Local Minimizers Method* [Suykens et al., 2002]. Quest'ultimo è un metodo che utilizza più punti di ricerca sul dominio dei parametri (analogamente ad un algoritmo genetico), ma la ricerca è guidata da un classico algoritmo di ottimizzazione basato sul gradiente della funzione obiettivo nel quale si introduce un vincolo che impone la convergenza dei punti nello stesso minimo. La convergenza è relativamente veloce, grazie al metodo di ottimizzazione basato sul gradiente; inoltre l'algoritmo è in grado di trovare il minimo globale in quanto la ricerca è

effettuata da più minimizzatori.

I due metodi sono stati utilizzati per l'identificazione del danno strutturale [Casciati et al., 2003]. La presenza di fessure in un elemento strutturale produce una flessibilità locale che modifica il comportamento dinamico dell'elemento stesso [Cerri & Vestroni, 2003, Fox & Kapoor, 1995]. Il cambiamento delle caratteristiche dinamiche può essere misurato ed utilizzato per l'identificazione del danno. Assumendo che la fessura rimanga aperta durante il moto, essa può essere modellata tramite una molla rotazionale [Chondros et al. 1998, Chondros et al. 2001]. Il problema di identificazione consiste nel determinare intensità e posizione della molla rotazionale rappresentante la fessura. Il confronto tra i due metodi è stato effettuato considerando in primo luogo una singola fessura e, successivamente, due fessure (processo di ottimizzazione a 4 parametri).

Gli algoritmi di ottimizzazione quali algoritmi genetici ed evolutivi hanno lo svantaggio di richiedere numerose valutazioni della funzione costo in quanto sono basati sulla ricerca statistica. Inoltre, trovato il minimo globale, spesso sono necessarie molte iterazioni per ottenere la precisione richiesta. Va sottolineato inoltre, che nelle procedure di identificazione, la funzione costo presenta spesso un solo minimo. In tal caso, algoritmi tradizionali risultano essere più efficienti.

La metodologia della Superficie di Risposta (*Response Surface Methodology, RSM*) si basa sull'approssimazione della funzione costo. Nella trattazione classica, la superficie di risposta è ottenuta combinando polinomi lineari e quadratici, che, interpolando la funzione costo originaria, producano una superficie risolvibile analiticamente. La Teoria degli Esperimenti (*DOE*) è uno strumento per la determinazione dei punti dai quali determinare la superficie approssimante [Khuri & Cornell, 1996]. Il costo computazionale è molto modesto, e la RSM risulta essere molto efficiente quando la funzione costo presenta un solo minimo. Al contrario, quando la funzione costo presenta

più minimi, difficilmente questa tecnica può essere utilizzata con successo. L'utilizzo della cosiddetta *General Response Surface Method (GRSM)* [Alotto et al., 1997] può solo parzialmente porre rimedio a questo inconveniente, in quanto la sua efficienza risulta essere limitata quando il numero di variabili cresce [Pahner, 1998].

Nei problemi di identificazione, raramente è nota la forma della funzione costo, e risulta quindi incognito se la funzione costo presenta più di un minimo. Per queste ragioni, è stata implementata una variante del metodo *DE*, ottenuta introducendo un'approssimazione quadratica della funzione costo tipica della metodologia *RSM*, per migliorarne accuratezza e velocità di convergenza. La peculiarità di trovare il minimo globale è mantenuta in quanto l'architettura dell'algoritmo *DE* è invariata; la velocità di convergenza risulta notevolmente aumentata grazie all'approssimazione quadratica introdotta. Infine, nel caso in cui la funzione costo presenti un solo minimo, la superficie di risposta riesce a determinare la corretta soluzione nel numero minimo di iterazioni.

INTRODUCTION

Reliable description of the dynamic behaviour of real structure is a very difficult task; both simplified models and very complex finite element (FE) models can be unable to correctly predict structural behaviour without a proper definition of main governing parameters. In civil structures, this problem is particularly important due to the large number of variables (elastic moduli, stiffnesses, external constraints, etc.), which have to be identified by experimental tests.

Consequently, the FE model is corrected in a FE model updating procedure, in which the uncertain model properties are adjusted such that the numerical predictions correspond as closely as possible to the measured data [Peeters & De Roeck, 1999; Mazzotti et. al, 2004]. To obtain unknown parameters, an optimization problem is solved where the objective function to be minimized (cost function) is defined by the distance between modal parameters obtained from experimental tests and those given by a numerical model of the structure. Unfortunately, the objective function is often non-smooth or even discontinuous and can also contain several local minima.

Success of the application of the updating method depends on the definition of the optimization problem and the mathematical capabilities of the

optimization algorithm.

Conventional gradient-based methods (as Newton and Quasi-Newton Algorithms) have an efficient convergence rate, but they may reach any local minimum. Furthermore, the success of procedure depends on the starting point. Local curvature of the original function is used to build an approximate quadratic model function. Hence, gradient-base methods often fail due to ill conditioning of optimisation problem [Vanderplaats 1984] or low accuracy is obtained when the objective function has a flat shape close to the solution.

Global optimization techniques must be employed. Among them, Genetic algorithms and Evolution approaches are considered very promising numerical methods [Goldberg 1989, Ingberg and Rosen 1992, Schwefel, 1995].

In this chapter, Differential Evolution algorithm is used to perform structural identification of mass and stiffness properties of civil structures from dynamic test results.

Dynamic structural identification can be viewed as an optimization problem, where the task is to obtain optimal values of system parameters. In modal identification problems, the objective function to be minimized (*cost function*) is the distance between modal parameters obtained from experimental tests and those given by a numerical model of the structure [Faravelli et. al., 2005].

Differential evolution (DE) algorithms are parallel direct search methods where N different vectors collecting the unknown parameters of the system are used in the minimization process [Storn 1996, Storn & Price 1997]. The vector population is chosen randomly or by adding weighted differences between vectors obtained from the old population.

DE algorithm is then used to perform dynamic structural identification of mass and stiffness properties of civil structures. A three – floor frame and a steel-concrete bridge structures are considered. Unknown parameters to be identified are masses, elastic moduli and stiffnesses of external constraints. The cost function is the distance between frequencies and mode shapes obtained

experimentally and given by a finite element modelization of the structure.

An extensive numerical investigation has been performed, considering different optimisation strategies and performing statistical analysis of results. Very efficient variants of the original DE algorithm are also adopted and compared.

For a given set of unknown structural parameters to be identified, the number of vectors of DE algorithm has been varied in order to obtain best accuracy of results with minimum computational effort. Choice of number of modal frequencies and mode shapes adopted for cost function is very important to obtain a robust identification procedure. Numerical results confirm that adopting both frequencies and mode shapes is more reliable than classical procedures based on vibration frequencies only. Comparison with analogous results obtained by classical gradient method is performed.

Pseudo-experimental input data are also considered, obtained by adding a statistic scattering to exact modal data (frequencies and mode shapes). Of course, in this case, the set of parameters minimizing the error with respect to experimental data depends on the set of data, and is statistically distributed around the exact solution. The effectiveness of the algorithm in finding the set of optimization parameters has been verified also in this case. Statistical analysis of results shows that, adopting both frequencies and mode shapes in the cost function, the variance of optimized parameters with respect to exact values is significantly reduced.

Identification of a steel-concrete bridge is then performed in order to verify capability of DE Algorithm to find the proper solution also when several unknown parameters must be determined. In this case, classical algorithms often fail due to ill conditioning of optimisation problem [Vanderplaats 1984]. Dynamic behaviour of the structure is studied with a Finite Element mode. Unknown parameters to be identified are non structural deck masses, elastic modulus and stiffnesses of external constraints.

Then, *Differential Evolution* is compared with *Coupled Local Minimizers (CLM)* method to perform a FE modal updating of a cracked beam.

CLM method is a gradient-based method which couples multiple local optimization runs in order to create interaction and information exchange between the search points [Suykens et al., 2002]. A relative fast convergence is maintained, due to the derivative information used in the local algorithms. Furthermore the global minimum is reached since multiple search points are used simultaneously [Teughels et al., 2003].

CLM method and *DE* algorithm are used to perform a FE modal updating for damage assessment. The presence of cracks in a structural member introduces a local flexibility that modified its dynamic behaviour. The changes in dynamic characteristic can be measured and used in damage detection. Assuming that cracks are open and remain open during the vibrations, they can be modeled by placing a rotational springs [Chondros et al. 1998, Chondros et al. 2001]. Parameters to be identified are the location and the spring stiffness. Comparison is performed first by considering only one crack and later results with two cracks are also obtained. The effectiveness of the algorithms in finding the set of optimization parameters has been verified performing statistical analysis of results. Results shows *CLM* performs better in term of speed rate and precision when number of identified parameters is limited. On the other hand, *DE* improves its efficiency when several design parameters are researched.

Success of optimization method depends on the definition of the optimization problem and the mathematical capabilities of the optimization algorithm. Unfortunately, Genetic and Evolutionary algorithm have the disadvantage to require a large number of cost function evaluations since they are based on probabilistic searching without any gradient information. Moreover, before detecting global minimum, several number of evaluation must be performed in order to obtain prescribed precision. In FE modal updating,

objective function can be often characterized by only one (global) minimum. In this case, sensitivity-based methods are preferred.

Instead of applying the optimization algorithm directly to the objective function, the *Response Surface Methodology (RSM)* applies it to an approximate surface of the real objective function. In classical *RSM*, the response surface is obtained by combining first or second-order polynomials fitting the “real” objective function in a set of sampling points. The theory of *Design of Experiments (DOE)* provides statistical tools to sample the search domain efficiently [Khuri & Cornell, 1996]. Computational effort is very cheap and *RSM* is a very powerful methodology when cost function present only one (global) minimum. The main disadvantage is the fact that due to the use of second-order polynomials, a local minimum is usually reached when the objective function presents several local minima. The use of the so-called *General Response Surface Method (GRSM)* [Alotto et al., 1997] can partially resolve this problem, but the approach is applicable to low dimensional problems only, since their practical efficiency deteriorates with a high number of design variables [Pahner, 1998].

In Structural identification problems, rarely the cost function shape is known because of it is not explicitly defined. So, the choice different algorithms is necessary.

For these reasons, the response surface methodology is introduced in *DE* algorithm to perform dynamic structural identification. A new parameter vector can also be defined as the minimum of a second-order polynomial surface, which approximate the real cost function. Performance in term of speed rate is improved and higher precision of results is obtained by introducing the second-order approximation in *DE*. Moreover, when objective function presents only one (global) minimum, second-order approximation provide to find the solution with the lowest number of iteration. On the other hand, the global minimum is reach since multiple search points are used simultaneously. *DE* algorithm shows its efficiency when several design parameters must be

researched and close to the solution, quadratic approximation gives higher accuracy.

6. DIFFERENTIAL EVOLUTION ALGORITHM ED APPLICAZIONI A PROBLEMI DI IDENTIFICAZIONE

In questo capitolo sono illustrati i risultati ottenuti dall'ottimizzazione mediante il Differential Evolution Algorithm (DE) di modelli agli Elementi Finiti di strutture quali un telaio ed un ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo. Il Differential Evolution (*DE*) Algorithm è un metodo stocastico di ricerca diretta, che utilizza N vettori contemporaneamente nei quali le componenti rappresentano i parametri da minimizzare nel processo di ottimizzazione. [Storn & Price, 1997]. Durante le analisi si sono ipotizzati incogniti valori di masse, rigidzze dei vincoli e caratteristiche dei materiali, considerando assegnati le corrispondenti frequenze proprie e deformate modali.

6.1 DIFFERENTIAL EVOLUTION ALGORITHM

Il *Differential Evolution (DE) Algorithm* è un metodo stocastico di ricerca diretta, che utilizza NP vettori contemporaneamente, indicati con:

$$\mathbf{x}_{i,G}, i = 1, 2, \dots, NP$$

dove con G si è indicata la G -esima generazione di parametri, chiamata *popolazione*.

L'utilizzo contemporaneo di numerosi vettori di parametri consente di evitare minimi locali. Ogni vettore $\mathbf{x}_{i,G}$ contiene D parametri da ottimizzare ed il numero dei vettori della popolazione NP è mantenuto costante durante l'intero processo di minimizzazione.

Le fasi salienti dell'algoritmo (riportate in Figura 6.1) sono descritte nel seguito. Innanzitutto, occorre scegliere la popolazione iniziale: essa è selezionata in modo aleatorio a partire da una distribuzione uniforme su tutto lo spazio dei possibili valori assunti dai parametri.

Al passo successivo, l'algoritmo *DE* genera un nuovo vettore di parametri, sommando ad ogni vettore la differenza pesata della differenza di altri due vettori. Tale operazione è definita *Mutation* ed il nuovo vettore è chiamato *mutant vector*.

Successivamente, durante l'operazione di *Crossover*, le componenti dei vettori generati vengono mescolate per ottenere una maggiore variabilità dei vettori, creando così il cosiddetto *trial vector*. Se tale vettore produce un valore minore della funzione costo rispetto al vettore della generazione precedente, esso verrà scelto per generare la nuova popolazione (operazione di *Selection*).

Tali operazioni sono descritti con maggior dettaglio nel seguito.

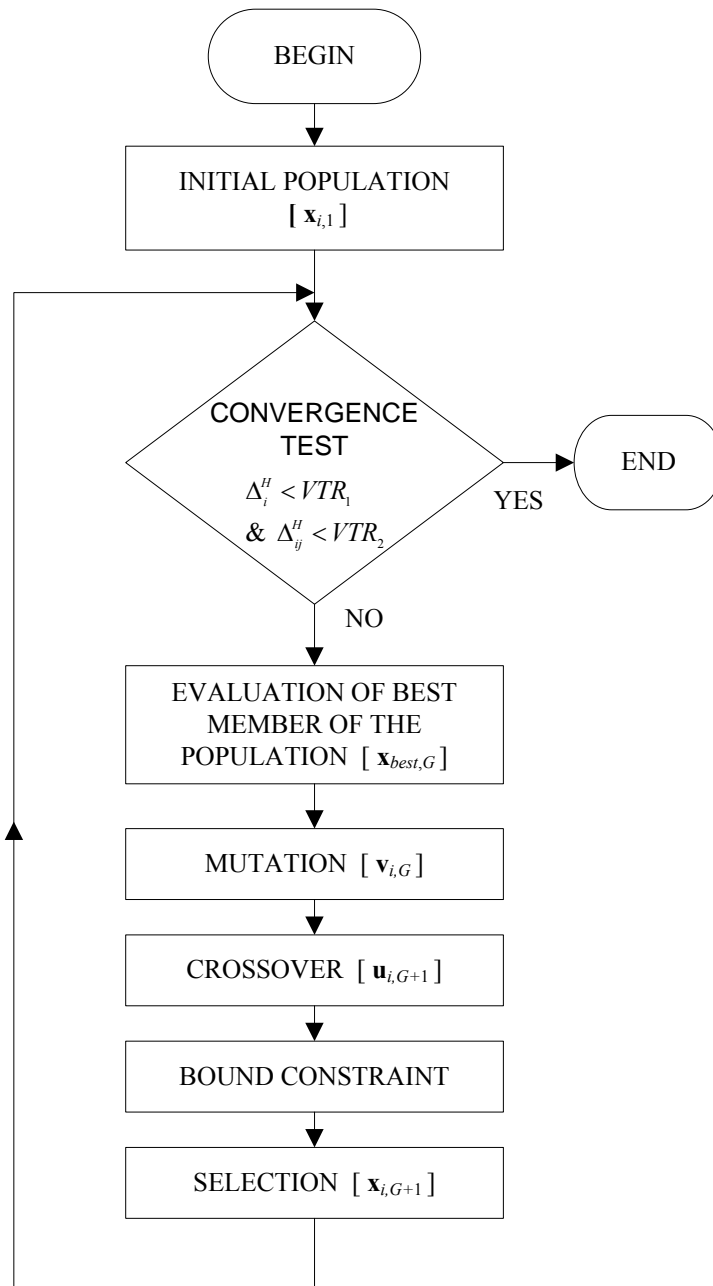


Figura 6.1. Diagramma delle operazioni principali del Differential Evolution Algorithm.

6.1.1 Operazione di *Mutation*

Per ogni vettore della popolazione G -esima:

$$\mathbf{x}_{i,G}, \quad i = 1, 2, \dots, NP,$$

il *mutant vector* $\mathbf{v}_{i,G}$ è ottenuto sommando a $\mathbf{x}_{i,G}$ il contributo ottenuto dalla differenza pesata tra altri due vettori appartenenti alla stessa popolazione.

Durante il processo di *mutation*, possono essere scelte tre differenti strategie: la strategia denominata “*random*”, la combinazione “*best*” o, in alternativa, una strategia intermedia chiamata “*best-to-rand*”. La strategia “*random*” genera il *mutant vector* $\mathbf{v}_{i,G}$ secondo l’espressione:

$$\mathbf{v}_{i,G+1} = \mathbf{x}_{r_1,G} + F \cdot (\mathbf{x}_{r_2,G} - \mathbf{x}_{r_3,G}), \quad (6.1)$$

dove gli indici:

$$r_1, r_2, r_3 \in \{1, 2, \dots, NP\}$$

sono selezionati in modo casuale e F è una costante positiva scelta in modo da controllare l’ampiezza della mutazione. La costante F è usualmente scelta pari a 0.8, come consigliato in [Storn 1996].

La strategia “*best*” è definita in modo analogo alla precedente ma si differenzia in quanto il *mutant vector* è generato sempre a partire dal miglior componente della popolazione precedente, denominato $\mathbf{x}_{best,G}$, in accordo con l’espressione:

$$\mathbf{v}_{i,G+1} = \mathbf{x}_{best,G} + F \cdot (\mathbf{x}_{r_1,G} - \mathbf{x}_{r_2,G}). \quad (6.2)$$

Infine, nella strategia “*best-to-rand*” il nuovo vettore è definito dall’espressione:

$$\mathbf{v}_{i,G+1} = \mathbf{x}_{i,G} + F \cdot (\mathbf{x}_{best,G} - \mathbf{x}_{i,G}) + F \cdot (\mathbf{x}_{r_1,G} - \mathbf{x}_{r_2,G}), \quad (6.3)$$

combinando quindi sia vettori scelti in modo random che attraverso il miglior componente della popolazione G -esima. Un esempio del processo di *Mutation* è riportato in Figura 6.2.

L'efficienza di una strategia dipende dal tipo di problema, in particolare dalla regolarità della funzione costo. Per funzioni regolari, nelle quali è presente un solo minimo, la strategia "best" converge molto più rapidamente rispetto alle altre, in quanto la popolazione successiva è derivata interamente dal punto avente minimo valore della funzione obiettivo. In presenza di minimi locali o di funzioni aventi una bassa sensitività rispetto alle variabili da identificare, i metodi "random" or "best-to-rand" sono da preferirsi, in quanto evita la convergenza verso minimi locali della funzione costo

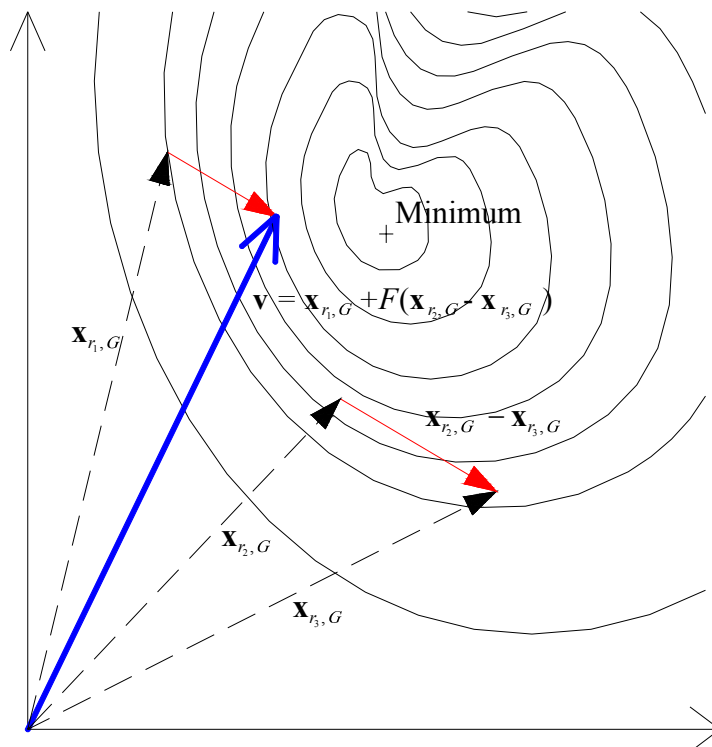


Figura 6.2. DE Algorithm: Operazione di Mutation.

6.1.2 Operazione di *Crossover*

La fase di *crossover* viene introdotta per aumentare la variabilità dei vettori costituenti la popolazione. Il *trial vector* $\mathbf{u}_{i,G+1}$ è ottenuto mescolando in modo random le componenti del vettore originario con le componenti del *mutant vector* $\mathbf{v}_{i,G+1}$, secondo la relazione:

$$\mathbf{u}_{i,G+1} = (u_{1i,G+1}, u_{2i,G+1}, \dots, u_{Di,G+1}), \quad (6.4)$$

dove:

$$u_{ji,G+1} = \begin{cases} v_{ji,G+1} & \text{if } \text{rand}(j) \leq CR \\ x_{ji,G} & \text{if } \text{rand}(j) > CR \end{cases} \quad (6.5)$$

L'operazione di *crossover* è schematicamente riportata in Figura 6.3. Nell'equazione (6.5), u_{ji} rappresenta la j -esima componente del vettore \mathbf{u}_i , con $j = 1, 2, \dots, D$ avendo indicato con D il numero di parametri per ogni vettore. Inoltre, $\text{rand}(j)$ è un numero random estratto da una distribuzione uniforme. Infine, CR , detta costante di crossover, indica la percentuale di mutazioni considerate nel *trial vector*. In Storn [1996], il valore della costante di crossover consigliato è pari a 0.8.

6.1.3 Operazione di *Selection*

Ogni elemento \mathbf{u}_i della generazione $G+1$ viene confrontato con il vettore $\mathbf{x}_{i,G}$ della popolazione precedente. Il vettore \mathbf{u}_i sarà scelto come elemento della nuova popolazione solo se il valore della funzione costo H ad esso corrispondente è inferiore a quello del vettore della popolazione precedente. In tal caso il vettore $\mathbf{u}_{i,G+1}$ sostituisce il vettore $\mathbf{x}_{i,G}$; In caso contrario, il vettore della popolazione precedente $\mathbf{x}_{i,G}$ rimane membro della popolazione successiva.

Analiticamente, l'operazione di *Selection* è definita dalla seguente

espressione:

$$\mathbf{x}_{i,G+1} = \begin{cases} \mathbf{u}_{i,G+1} & H(\mathbf{u}_{i,G+1}) < H(\mathbf{x}_{i,G}) \\ \mathbf{x}_{i,G} & H(\mathbf{u}_{i,G+1}) \geq H(\mathbf{x}_{i,G}) \end{cases} \quad (6.6)$$

con $i = 1, 2, \dots, NP$.

6.1.4 Bound constraint

Solitamente, nelle applicazioni ingegneristiche la ricerca dei parametri incogniti è significativa solo all'interno di intervalli che possono essere stabiliti con considerazioni di tipo fisico-meccanico:

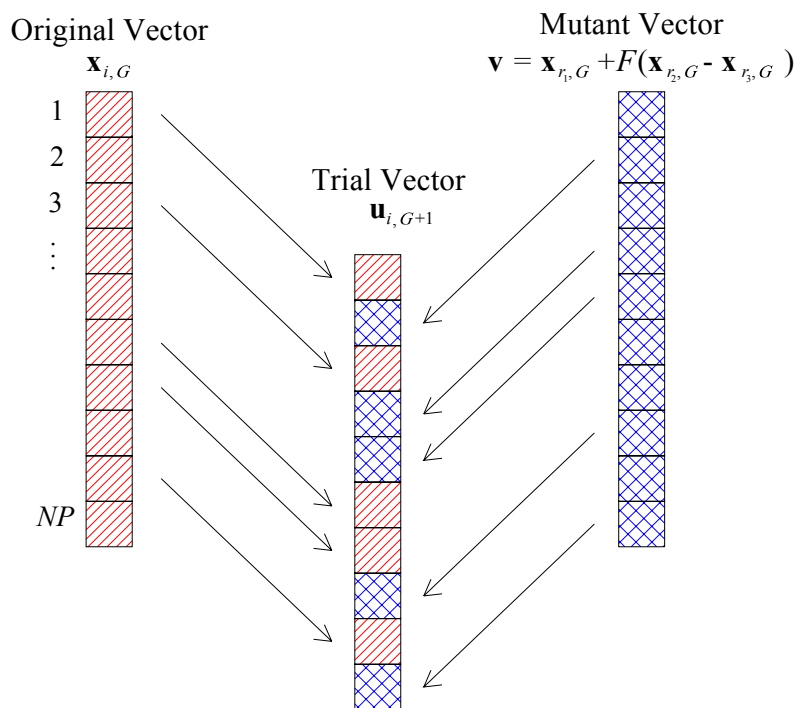


Figura 6.3. DE Algorithm: Operazione di Crossover.

$$x_{j,G} \in [x_{j,\min}, x_{j,\max}], \quad (6.7)$$

dove $j = 1, 2, \dots, D$ e D rappresenta il numero dei parametri incogniti.

L'introduzione dei vincoli sui parametri è indispensabile per poter limitare le analisi nei range dei parametri che hanno un significato fisico.

Possono essere utilizzati diversi metodi per introdurre nella procedura vincoli sui parametri. In [Teughels, 2003] è stato introdotto nella funzione costo un'ulteriore termine (denominato “*penalty factor*”) che aumenta sensibilmente il valore della funzione stessa qualora il vettore si trovi fuori dal dominio; tale metodologia, molto diffusa nei problemi di ottimizzazione, può essere applicata solo quando esista la soluzione del problema anche per valori di variabili che si trovino al di fuori del dominio. Per mantenere un carattere di generalità, nell'algoritmo si è ritenuto più efficace introdurre una proiezione sul contorno dei vettori che, a causa dell'operazione di *mutation*, si trovino al di fuori del dominio di esistenza dei parametri (vedi Figura 6.4).

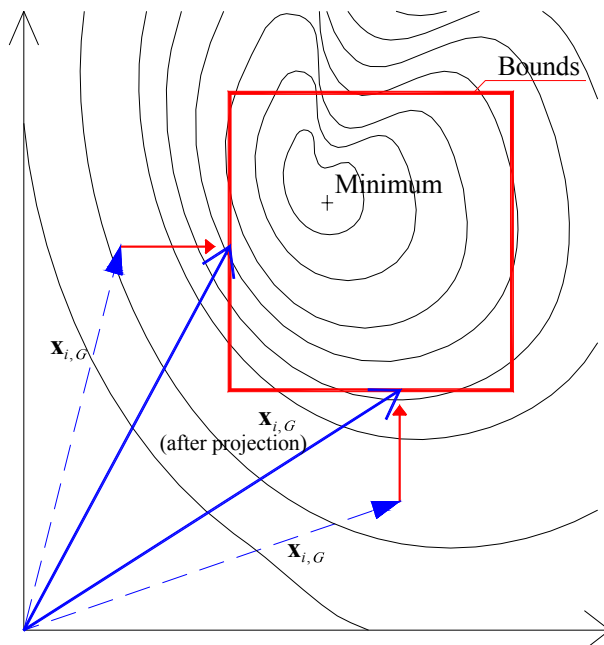


Figura 6.4. Proiezione sulla frontiera introdotta con l'algoritmo di bound constraint.

6.1.5 Criteri di convergenza

Al fine di stabilire l'avvenuta convergenza dell'algoritmo, i vettori della popolazione $G+1$ -esima vengono in primo luogo ordinati in base al valore della funzione costo ad essi corrispondente, secondo il criterio:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,G+1} \prec \tilde{\mathbf{x}}_{2,G+1} \prec \dots \prec \tilde{\mathbf{x}}_{NP,G+1},$$

tali per cui:

$$H(\tilde{\mathbf{x}}_{1,G+1}) < H(\tilde{\mathbf{x}}_{2,G+1}) < \dots < H(\tilde{\mathbf{x}}_{NP,G+1}).$$

La convergenza si considera raggiunta quando la differenza tra i valori della funzione di costo H ottenuti per i primi NC vettori è minore di una costante prefissata, congiuntamente alla condizione che la distanza tra gli NC vettori stessi non sia superiore ad una seconda costante. Per quanto riguarda la convergenza in termini di funzione costo, il test si scrive:

$$\Delta_i^H = \frac{|H(\tilde{\mathbf{x}}_{i,G+1}) - H(\tilde{\mathbf{x}}_{i+1,G+1})|}{|H(\tilde{\mathbf{x}}_{i,G+1})|} < VTR_1, \quad (6.8)$$

dove $i = 1, \dots, NC$ e VTR_1 è la costante di precisione richiesta.

Il solo controllo del valore della funzione costo H non è sempre sufficiente come nel caso in cui tale funzione presenti valori modesti del gradiente in prossimità della soluzione. Per questo motivo, la convergenza si ritiene soddisfatta solo quando anche le NC distanze relative tra le componenti dei vettori:

$$\Delta_{ij}^x = \frac{|\tilde{x}_{ji,G+1} - \tilde{x}_{j+1,G+1}|}{|\tilde{x}_{ji,G+1}|} < VTR_2. \quad (6.9)$$

diventano sufficientemente piccole.

6.2 DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO

Nel problema di ottimizzazione, riveste particolare importanza la definizione della funzione da minimizzare; la sensibilità della soluzione a variazioni delle variabili da identificare dipende in modo fondamentale dalla definizione della funzione obiettivo. Inoltre, diverse definizioni della funzione condizionano il processo di ottimizzazione, rendendo più o meno regolare la funzione stessa e accentuando o meno zone con bassa sensibilità ai parametri ricercati. In letteratura tale problema ha rivestito grande importanza [Friswell & Mottershead, 1995]. Nella metodologia standard, la funzione obiettivo è definita scrivendo il problema ai minimi quadrati:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [z_i(\boldsymbol{\theta}) - \bar{z}_i]^2, \quad (6.10)$$

dove con z_i si è indicata la generica quantità ottenuta dalla modellazione numerica, nel vettore $\boldsymbol{\theta}$ sono poste le variabili incognite del problema e con \bar{z} si è indicata la relativa quantità sperimentale.

Nella procedura ai minimi quadrati pesati, la diversa natura dei termini che possono comporre la (6.10) sono pre-moltiplicati per un fattore peso, per tenere conto dell'importanza del termine stesso in funzione dell'accuratezza del termine stesso.

Nella procedura di identificazione dinamica, i termini della (6.10) si scrivono come differenze tra le caratteristiche dinamiche del modello numerico (ad esempio un modello FEM) e quelle ottenute mediante processi di elaborazione dei segnali. In letteratura esistono due approcci differenti: il primo definito nel dominio delle frequenze e il secondo attraverso le caratteristiche modali.

Il primo approccio prevede che la funzione costo contenga la differenza

tra la risposta in frequenza ottenuta sperimentalmente e la stessa ottenuta introducendo nel modello FEM i parametri di design θ [Imregum et al., 1995, Balmes, 2002]. Poiché i gradi di libertà misurati sono solitamente in numero molto inferiore dei gradi di libertà del modello numerico, è necessario espandere il vettore contenente le quantità misurate o, al contrario, effettuare una condensazione del modello in modo da fargli assumere lo stesso numero di gradi di libertà i cui valori sono stati misurati sperimentalmente. Il vantaggio di questa tecnica è che possono essere considerati nella definizione della funzione costo anche gli smorzamenti della struttura.

Il secondo approccio utilizza invece i parametri modali sintetici della struttura, quali frequenze proprie e deformate modali. Tale procedura non necessita di alcuna espansione o riduzione del modello e, inoltre, possono essere introdotti altre quantità locali quali le curvatures modali [Teughels et al., 2003]. Il principale svantaggio di tale metodologia risiede nel fatto che le inaccurately introdotte nell'estrazione dei parametri modali, sia numerici che sperimentali, introducono errori nella determinazione dei parametri meccanici da identificare. Prima di confrontare le caratteristiche modali ottenute numericamente e sperimentalmente, occorre correlarle preliminarmente le deformate modali in modo da ottenere il confronto sui medesimi stessi modi. Riordinare le frequenze proprie in ordine ascendente non è sufficiente, in quanto può accadere che, per effetto di errori di natura sperimentale o del modello numerico, sia invertito l'ordine di modi con frequenze proprie tra loro vicine. Per ovviare a tale inconveniente, è necessario confrontare tra loro prima le forme modali, ad esempio con il *MAC (Modal Assurance Criterion)* e, successivamente, calcolare l'errore sulle frequenze corrispondenti.

In questo secondo approccio, la funzione obiettivo che deve essere minimizzata durante la procedura di identificazione può essere così riscritta:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[w_1 \cdot \left(\frac{\omega_i - \bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i} \right)^2 + w_2 \cdot \sum_{j=1}^f \left(\frac{\phi_{ij} - \bar{\phi}_{ij}}{\bar{\phi}_{ij}} \right)^2 \right], \quad (6.11)$$

considerando, quindi, la differenza relativa tra frequenze e autovettori ottenuti dal modello numerico adottando una data combinazione di parametri meccanici $(\omega_i, \boldsymbol{\varphi}_i)$ e gli stessi di riferimento $(\bar{\omega}_i, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i)$ forniti, ad esempio, dall'indagine sperimentale.

Nella (6.11) si è indicato con N il numero dei modi utilizzati e con f il numero delle componenti dell'autovettore corrispondente al i -esimo modi di vibrare. Infine, w_1 , w_2 sono i pesi attribuiti nella funzione costo rispettivamente a frequenze e autovettori.

In letteratura sono presenti diverse formulazioni per ottenere l'errore commesso sulla valutazione delle forme modali. Tra queste, vengono utilizzati ampiamente di parametri sintetici rappresentante l'intero modi di vibrare, come il *MAC* o il *Normalized Modal Difference (NMD)*. Quest'ultimo è definito mediante la seguente espressione [Gentile et al, 2001]:

$$NMD = \sqrt{\frac{1 - MAC(\boldsymbol{\varphi}_i, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_j)}{MAC(\boldsymbol{\varphi}_i, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_j)}} \quad (6.12)$$

Secondo [Gentile et al, 2001], il *NMD* risulta essere molto più sensibile alle differenze modali rispetto al *MAC*. Esso può anche essere utilizzato quale criterio di correlazione alternativo al *MAC*, ma la correlazione risulta più complessa un quanto il *NMD* non è superiormente limitato.

6.3 APPLICAZIONI DELL'ALGORITMO DI OTTIMIZZAZIONE A PROBLEMI DI IDENTIFICAZIONE DINAMICA

L'algoritmo genetico esposto nel capitolo precedente viene ora applicato a problemi di identificazione dinamica. Verranno analizzati in primo luogo i risultati ottenuti da una semplice struttura a telaio, caratterizzata da tre piani ed un'unica campata (denominato nel seguito "Esempio 1"). Successivamente si verificherà la robustezza dell'algoritmo nel caso di un ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo ("Esempio 2").

Per quanto riguarda il telaio a tre piani, le analisi sono state condotte in primo luogo per verificare l'influenza del numero delle frequenze proprie e dei modi propri adottati per l'identificazione come dati in input del processo. Per tale struttura, sono stati considerati incogniti i valori di massa di piano e moduli elastici degli elementi del telaio: in questo contesto si sono stati presi in esame due processi di identificazione nei che si differenziano per il numero dei parametri incogniti (2 o 3). In quest'ultimo caso, i risultati sono stati confrontati con quelli analoghi ottenuti mediante un classico algoritmo di ottimizzazione basato sul gradiente della funzione errore.

I test numerici sono stati ottenuti adottando come dati di input le frequenze proprie e le deformate modali della struttura, considerandone dapprima i valori esatti e successivamente considerando i valori pseudo-sperimentali, ottenuti cioè aggiungendo al dato esatto una variabile aleatoria a valor medio nullo e varianza assegnata. In tale modo si è voluto simulare il rumore presente nelle misure sperimentali e gli errori che possono essere commessi nella fase di identificazione di frequenze e deformate modali.

Nel caso dell'utilizzo dei valori esatti dei di parametri dinamici, la soluzione del problema di identificazione esiste in quanto il modello può predire i risultati con errore nullo quando vengono utilizzati i valori corretti dei

parametri incogniti. Inoltre, in corrispondenza della soluzione esatta, la funzione costo assume sempre valore nullo, a prescindere dalla definizione della funzione costo stessa. La dispersione attorno al valore esatto dei risultati ottenuti risolvendo un certo numero di volte il problema di identificazione mediante il processo di ottimizzazione, dipende quindi dalla robustezza dell’algoritmo scelto e dalla sensitività della funzione costo ai parametri da identificare.

Nel caso, invece, in cui si utilizzino dati pseudo-sperimentali, la soluzione che minimizza la funzione costo è differente a seconda di come tale funzione viene definita. La funzione costo migliore è quella che rende minima la dispersione dei risultati ottenuti.

Viene investigata, infine, l’efficacia e la robustezza dell’algoritmo per un problema più complesso, riguardante un ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo, nel quale sono da determinare il modulo elastico medio della soletta, la massa della sovrastruttura del ponte e delle rigidezze verticali e

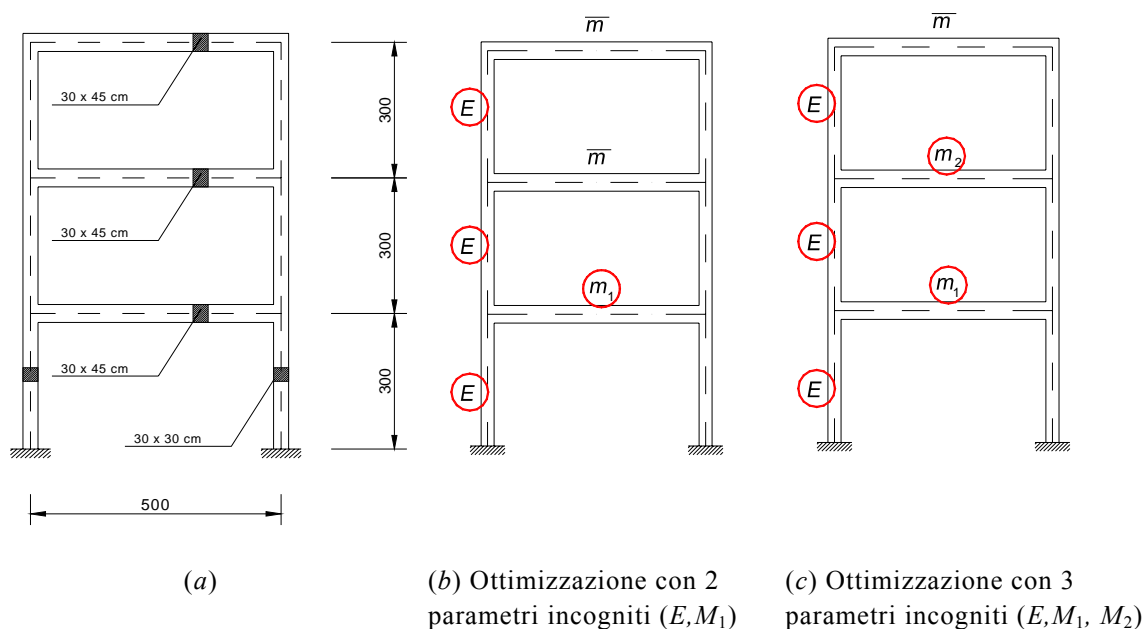


Figura 6.5. Telaio a tre piani: (a) Schema del telaio, (b,c) individuazione dei parametri ricercati nel processo di ottimizzazione.

	h	b	Modulo Elastico	Massa di piano	Densità equivalente
	[cm]	[cm]	[MPa]	[kg]	[kg/m ³]
Trave (Primo piano)	45	30	30000	17550	26000
Travi (2° e 3° piano)	45	30	30000	14175	21000
Pilastrri	30	30	30000	-	2500

Tabella 6.1. Telaio a tre piani: dimensioni e proprietà meccaniche di travi e pilastrri.

orizzontali degli apparecchi d'appoggio.

6.3.1 Esempio 1: identificazione di un telaio a tre piani.

Il telaio oggetto di identificazione dinamica è un telaio avente tre piani ed una sola campata. Il modulo elastico E del calcestruzzo è assunto pari a 30000 MPa. Le masse di piano sono state aggiunte alla massa delle travi, così da ottenere una densità equivalente per esse da utilizzare durante l'analisi dinamica della struttura. Il telaio è sinteticamente schematizzato in Figura 6.5, mentre le proprietà dei materiali e le caratteristiche geometriche degli elementi strutturali sono riportati in Tabella 6.1.

Il comportamento dinamico della struttura è stato studiato mediante un modello agli Elementi Finiti, nel quale è stata supposta la linearità dei materiali sia per le travi che per i pilastrri. Dall'analisi agli autovalori sono stati ricavati i valori delle tre frequenze proprie, rispettivamente pari a $\bar{\omega}_1=1.88$ Hz, $\bar{\omega}_2=5.52$ Hz e $\bar{\omega}_3=9.10$ Hz. La soluzione così ottenuta sarà denominata nel seguito "soluzione di riferimento", in quanto le frequenze proprie e le deformate modali esatte sono assunte note ed utilizzate quindi come dati di ingresso per il processo di identificazione.

6.3.2 Definizione della funzione costo

Come già anticipato, la definizione della funzione costo da ottimizzare condiziona il processo di identificazione, rendendo più o meno regolare la

funzione stessa e accentuando o meno zone con bassa sensitività ai parametri ricercati.

Per tale ragione, con riferimento alla struttura a tre piani definita in Figura 6.5, in questo paragrafo saranno utilizzate funzione costo con differente numero di frequenze e autovettori.

La funzione costo è definita attraverso i minimi quadrati pesati:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[w_1 \cdot \left(\frac{\omega_i - \bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i} \right)^2 + w_2 \cdot \sum_{j=1}^f \left(\frac{\phi_{ij} - \bar{\phi}_{ij}}{\bar{\phi}_{ij}} \right)^2 \right], \quad (6.13)$$

dove N rappresenta il numero di modi propri della struttura e f è il numero degli autovettori selezionati. Nel seguito verranno confrontate tre diverse definizioni della funzione costo:

- *Caso A* - sono utilizzate le prime 2 frequenze proprie e nessun autovettore ($N=2, f=0$);
- *Caso B* - sono utilizzate le prime 3 frequenze proprie e nessun autovettore ($N=3, f=0$);
- *Caso C* - sono utilizzate le prime 2 frequenze proprie con i corrispondenti autovettori ($N=2, f=3$);

Per quanto riguarda l'ultimo caso, nella definizione dell'autovettore sono stati considerati i tre spostamenti orizzontali in corrispondenza delle travi del telaio. I pesi considerati sono stati posti pari a $w_1 = 1$, $w_2 = 1/f$ in modo che, nella funzione costo, il peso delle componenti dell'autovettore fosse uguale a quello assegnato alle singole frequenze.

Si è considerato in primo luogo il caso in cui la procedura di identificazione sia stata utilizzata per ottenere i valori del Modulo Elastico E del calcestruzzo, considerato uguale per travi e pilastri, e della massa del primo piano M_1 (vedi Figura 6.5b).

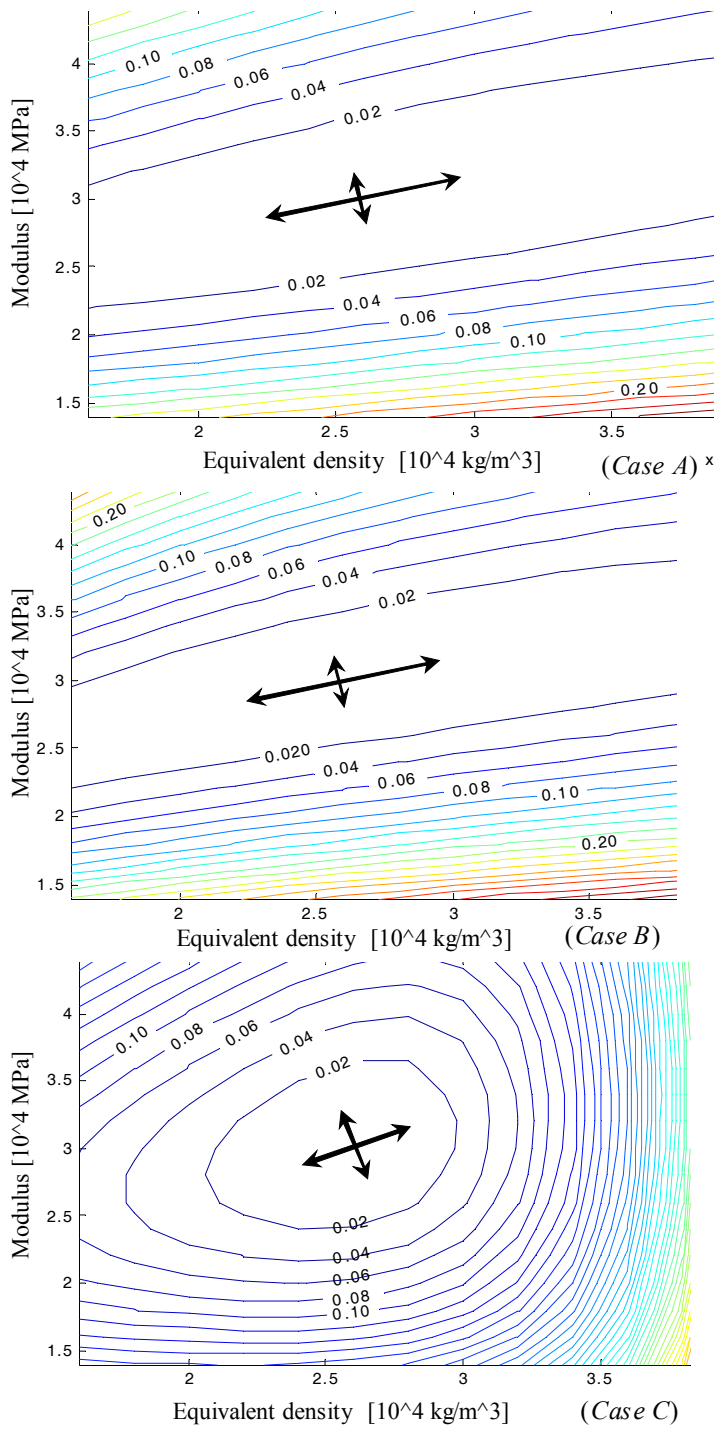


Figura 6.6. Telaio a tre piani: curve di livello della funzione costo nei Casi A, B e C.

Per le tre funzioni costo sopra descritte (*Caso A*, *Caso B* e *Caso C*), sono state quindi disegnate le curve di livello della funzione errore, riportate in Figura 6.6 per differenti valori di E e M_1 .

Dalla Figura 6.6 è possibile notare come, per i *Casi A* e *B*, esista una direzione dove la funzione costo presenta una scarsa sensitività alla variazione dei parametri da ottimizzare. Al contrario, la funzione costo ottenuta considerando anche gli autovettori presenta un minimo ben definito, confermando il fatto che l'utilizzo delle componenti della deformata modale riduce sensibilmente le incertezze del processo di identificazione.

A conferma di ciò, è stata condotta un'analisi di sensitività in corrispondenza della soluzione, corrispondenti ai valori esatti dei parametri da identificare, determinando le curvatures principali e le corrispondenti direzioni della funzione costo. Tali valori sono riportati in Tabella 6.2. Valori prossimi a zero indicano valori modesti della curvatura: da questa osservazione risulta chiaro che la curvatura minima nel *Caso C* aumenta di circa 15 volte rispetto alla stessa nei *Casi A* e *B*. Inoltre, l'autovettore minimo risulta praticamente lo stesso utilizzando 2 o 3 frequenze nella funzione costo.

Tale circostanza sarà sottolineata nei prossimi paragrafi, in particolare nello studio della dispersione dei risultati ottenuti dal processo di ottimizzazione a partire da dati pseudo-sperimentali.

Caso	A	B	C
Massimo Autovalore	0.508	0.762	1.005
Autovettori corrispondenti	$\begin{bmatrix} -0.355 \\ 0.935 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.354 \\ 0.935 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.276 \\ 0.961 \end{bmatrix}$
Minimo Autovalore	0.026	0.028	0.401
Autovettori corrispondenti	$\begin{bmatrix} 0.935 \\ 0.355 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.935 \\ 0.354 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.961 \\ 0.276 \end{bmatrix}$

Tabella 6.2. Telaio a tre piani: autovalori e autovettori della matrice Hessiana calcolati in corrispondenza della soluzione esatta.

6.3.3 Esempio 1: identificazione partendo da dati esatti.

Si vuole ora utilizzare l'algoritmo evolutivo descritto nel paragrafo 6.1 attraverso una procedura di identificazione riguardante due parametri: il valore della massa M (in termini di densità equivalente) del piano primo e il modulo elastico E del calcestruzzo. Si suppongono noti i valori di frequenze proprie e deformate modali dei tre modi di vibrare della struttura, attraverso i loro valori esatti.

Per determinare la capacità del Differential Evolution Algorithm di identificare i valori attesi dei parametri incogniti, sono state effettuate 100 analisi per ognuno dei casi presentati nella sessione precedente (*Casi A, B, C*).

Nell'algoritmo DE, si sono utilizzati 10 vettori ($NP = 10$) formanti la popolazione, ognuno dei quali aventi due componenti. Il test di convergenza è stato imposto dal controllo dell'errore relativo tra tre membri della stessa popolazione ($NC=3$), secondo le Equazioni 7.8 e 7.9. La convergenza si è considerata soddisfatta quanto tali errori risultano inferiori delle costanti $VTR_1 = VTR_2 = 0.05$. Le analisi sono state svolte inoltre sia per la strategia denominata *random* che per la strategia *best*.

La ricerca dei parametri incogniti è stata limitata in intervalli, significativi dal punto di vista fisico. In particolare il modulo elastico E è ricercato nell'intervallo $[2.0 \cdot 10^4 \text{ MPa}, 4.0 \cdot 10^4 \text{ MPa}]$, mentre la densità equivalente M è stata ritenuta significativa se essa ha valori compresi tra $[2.00 \cdot 10^4 \text{ Kg/m}^3, 3.20 \cdot 10^4 \text{ Kg/m}^3]$.

I risultati ottenuti sono riportati in Tabella 6.3 e in Tabella 6.4. Sono indicati il valore esatto del parametro da identificare, l'intervallo iniziale prescelto nel processo di identificazione, i valori massimo e minimo ottenuti, il valore medio ed il coefficiente di variazione dei risultati. Sono inoltre riportati il numero di valutazioni della funzione costo necessari per raggiungere il prefissato livello di convergenza.

Caso		Valore Esatto	Valore Massimo	Valore Minimo	Valor Medio	C.V. [%]
A	$E [10^4 \text{ MPa}]$	3.00	3.04	2.92	2.99	0.72
	$M [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.60	2.70	2.33	2.59	2.48
	N° di iterazioni	-	100	9	50.4	-
B	$E [10^4 \text{ MPa}]$	3.00	3.10	2.97	3.00	0.53
	$M [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.60	2.79	2.19	2.59	2.40
	N° di iterazioni	-	101	3	43.5	-
C	$E [10^4 \text{ MPa}]$	3.00	3.07	2.97	3.00	0.50
	$M [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.60	2.72	2.53	2.60	0.92
	N° di iterazioni	-	200	9	44.8	-

Tabella 6.3. Telaio a tre piani: analisi statistica dei risultati ottenuti partendo dai dati esatti - Strategia Random.

Caso		Valore Esatto	Valore Massimo	Valore Minimo	Valor Medio	C.V. [%]
A	$E [10^4 \text{ MPa}]$	3.00	3.01	2.99	3.00	0.14
	$M [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.60	2.63	2.57	2.60	0.34
	N° di iterazioni	-	27	11	18.2	-
B	$E [10^4 \text{ MPa}]$	3.00	3.02	2.99	3.00	0.10
	$M [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.60	2.64	2.57	2.60	0.24
	N° di iterazioni	-	25	12	18.6	-
C	$E [10^4 \text{ MPa}]$	3.00	3.00	2.98	3.00	0.10
	$M [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.60	2.61	2.59	2.60	0.09
	N° di iterazioni	-	23	12	17.3	-

Tabella 6.4. Telaio a tre piani: analisi statistica dei risultati ottenuti partendo dai dati esatti - Strategia Best.

I risultati in termini di valori identificati risulta essere buono per entrambe le strategie. Il valore di modulo elastico e della massa sono molto simili a quelli della soluzione di riferimento, sia per quanto riguarda i valori medi ma anche per ciò che riguarda i valori massimi e minimi.

Il valore medio dei parametri identificati è sempre prossimo al risultato esatto, e generalmente con un coefficiente di variazione molto modesto (Figura 6.7a).

Grazie alla regolarità della funzione, che presenta un solo minimo, la strategia *best* risulta essere la più appropriata e ciò è confermato anche dal valore molto modesto del coefficiente di variazione dei risultati. Esso risulta essere ridotto in modo significativo soprattutto per la densità equivalente, per tutti i casi (*Casi A, B, C*). Inoltre, il numero di iterazioni necessarie per giungere a convergenza è ridotto notevolmente, mediamente di un fattore maggiore di 3.

Per ciò che riguarda il confronto tra le diverse definizioni delle funzioni costo, si nota come tra il *Caso A* ed il *Caso B*, quest'ultimo ottenuto dal precedente introducendo un'altra frequenza propria nella definizione della funzione errore, non si ottengono significativi miglioramenti in termini di dispersione dei risultati. Mediante l'adozione di una funzione errore del tipo *C*, il coefficiente di variazione invece diminuisce soprattutto per quanto riguarda la dispersione della massa *M*. Tale riduzione si ottiene utilizzando sia la strategia *best* che la strategia *random*. È interessante notare che utilizzando la strategia *best* e introducendo nella funzione errore anche gli autovettori, la variazione dei parametri identificati risulti pressoché la stessa.

Caso	combinazione "Best"			combinazione "Random"		
	Errore	Errore	N° di test	Errore	Errore	N° di test
	Medio (<i>E</i>)	Medio (<i>M</i>)	errati	Medio (<i>E</i>)	Medio (<i>M</i>)	errati
	percent	percent		percent	percent	
A	0.08	0.19	1/100	0.35	1.02	5/100
B	0.07	0.17	0/100	0.23	0.95	2/100
C			0/100	0.22	0.35	1/100

Tabella 6.5. Telaio a tre piani: errori relativi ottenuti e numero di test considerati errati.

Gli errori relativi commessi nell'identificazione dei parametri incogniti (valutati come la media degli errori sui 100 test) sono riportati in Tabella 6.5. Un test è stato considerato errato quando l'errore relativo su almeno un parametro è superiore al 5%. Adottando la strategia *best*, solo un test presenta un errore maggiore del 5%, mentre non è stato commesso alcun errore per gli altri casi. Valori più elevati, ma pur sempre accettabili, caratterizzano l'identificazione dei parametri con il metodo *random*.

6.3.4 Esempio 1: identificazione partendo da dati pseudo-sperimentali.

La robustezza dell'algoritmo è stata valutata considerando i dati in input soggetti da un errore, ottenendo così quelli che nel seguito saranno denominati dati pseudo-sperimentali. I dati pseudo-sperimentali sono stati definiti aggiungendo alla variabile esatta una quantità aleatoria non correlata proporzionale al valore della variabile stessa. In questo modo si è voluto tenere in conto l'incertezza sui parametri ottenuti dal processo di identificazione delle frequenze proprie e deformate modali della struttura.

Per ottenere i dati pseudo-sperimentali, le variabili aleatorie sono state estratte da distribuzioni Gaussiane con coefficiente di variazione assegnato, quest'ultimo diverso nel caso di frequenze e autovettori. Per i secondi, in genere affetti da maggiore incertezza, si è considerato un coefficiente di variazione pari a 0.10 mentre per le frequenze, che in genere sono determinate con maggiore accuratezza, si è imposto un coefficiente di variazione pari a 0.05. Si noti che la definizione dell'incertezza come variabile aleatoria Gaussiana a media nota porta a valori di frequenze e autovettori che possono essere anche significativamente diverse da quelle esatte.

Caso		Valore	Valore	Valore	Valor	C.V.
		Esatto	Massimo	Minimo	Medio	[%]
A	$E [10^4 \text{ MPa}]$	3.00	3.65	2.29	3.04	10.90
	$M [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.60	4.89	1.11	2.67	33.22
	N° di iterazioni	-	151	6	43.08	-
B	$E [10^4 \text{ MPa}]$	3.00	3.87	2.31	2.94	11.04
	$M [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.60	4.69	1.06	2.58	29.46
	N° di iterazioni	-	200	4	16.35	-
C	$E [10^4 \text{ MPa}]$	3.00	3.50	2.47	2.95	4.14
	$M [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.60	2.80	2.37	2.58	3.82
	N° di iterazioni	-	38	4	10.88	-

Tabella 6.6. Telaio a tre piani: analisi statistica dei risultati ottenuti da dati pseudo-sperimentali.

Con tali definizioni dei dati di input, si sono svolte 100 analisi di ottimizzazione, ognuna delle quali caratterizzata da una diversa estrazione dei dati pseudo-sperimentali. Così come sottolineato, per ogni set di dati pseudo-sperimentali, si ottiene una soluzione diversa che minimizza la funzione costo.

L'analisi statistica delle analisi condotte è riportata in Tabella 6.6. Dalla tabella si può vedere che i valori medi di Modulo Elastico E e di densità equivalente M sono molto simili ai valori esatti di partenza ($E=30000$ MPa, $M=26000$ kg/m³), indifferentemente dal tipo di funzione costo. Adottando 3 frequenze nella definizione della funzione costo (*Caso B*), il numero delle iterazioni è minore di quanto trovato adottando la funzione costo del *Caso A*, ma la qualità dei risultati risulta essere paragonabile. Se invece si confrontano i Coefficienti di Variazione (C.V.), risultati molto migliori si ottengono adottando una funzione costo con formulazione di tipo del (*Caso C*): i valori del coefficiente di variazione della densità equivalente, in particolare, diminuisce da valori prossimi al 30% a valori di circa il 4%, con una riduzione di un fattore maggiore di 7. Il coefficiente di variazione risulta così paragonabile con quanto ottenuto per il Modulo Elastico. In Figura 6.7 sono riportate le distribuzioni delle variabili identificate a partire dai dati pseudo-

sperimentali. Il notevole miglioramento è da attribuire alla forma della funzione costo: se si riportano nel grafico con le curve di livello i risultati ottenuti dal processo di identificazione (Figura 6.8), nel Caso B le soluzioni del processo si dispongono principalmente nella zona a bassa sensitività, con dispersione notevole dei risultati. Tale dispersione non è presente per il Caso C.

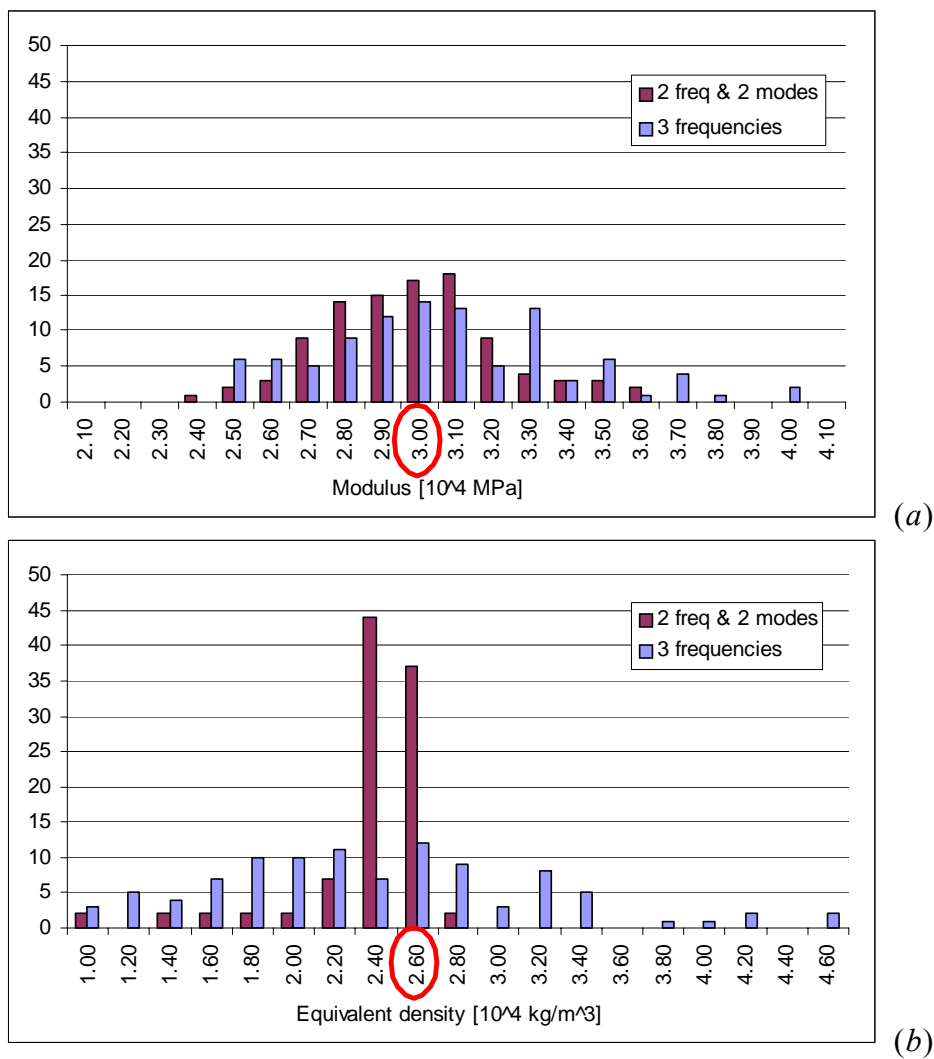


Figura 6.7. Telaio a tre piani: distribuzione dei valori identificati di (a) modulo elastico e (b) densità equivalente ottenuti dai dati pseudo-sperimentali.

In quest'ultimo caso i dati provenienti dai test di ottimizzazione sono pressoché non correlati (essi presentano un coefficiente di correlazione pari a 0.13). Al contrario, nel *Caso B*, i dati risultano avere il coefficiente di correlazione pari a 0.84.

Si sottolinea il fatto che la notevole dispersione ottenuta per il *Caso B* è dovuta alla direzione con bassa sensitività e non a problemi di convergenza dell'algoritmo.

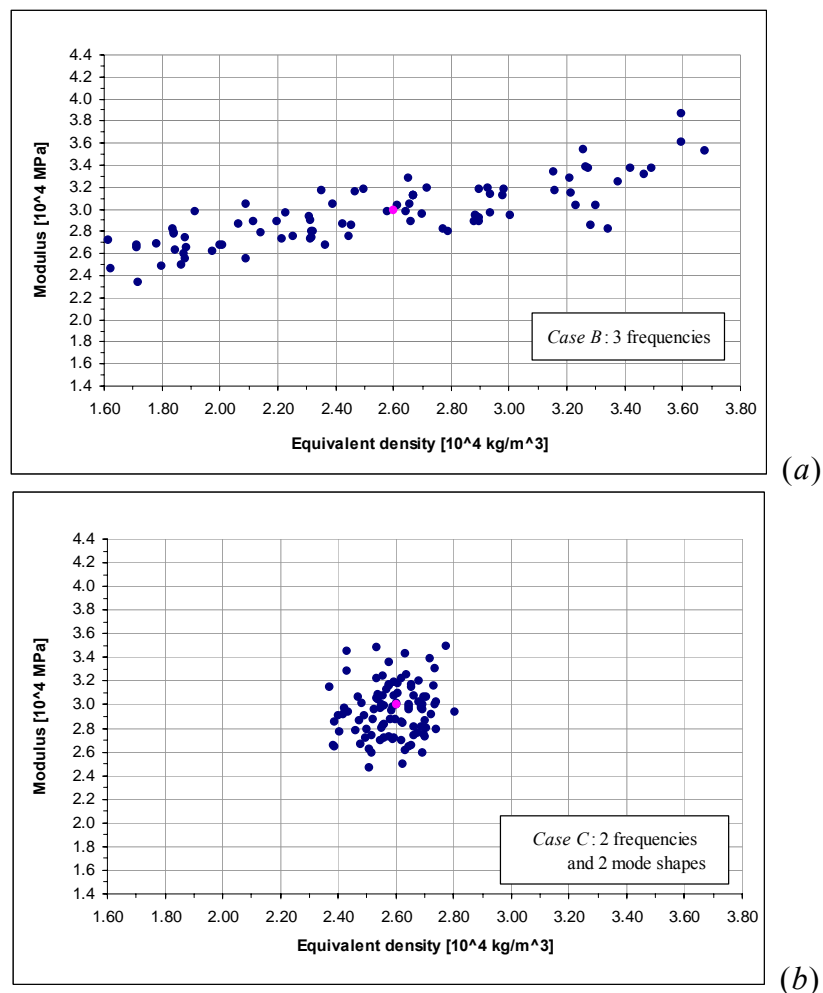


Figura 6.8. Telaio a tre piani: distribuzione dei parametri identificati da dati pseudo-sperimentali per il (a) Caso B ed il (b) Caso C. Il punto rosso indica la soluzione di riferimento.

6.3.5 Esempio 1: identificazione a 3 parametri.

Le potenzialità dell'algoritmo genetico sono state confrontate con quelle di un classico algoritmo basato sul gradiente della funzione errore. Se per funzioni con 2 variabili e con un solo minimo (globale) gli algoritmi classici ottengono soluzioni con una buona precisione e con un numero molto contenuto di iterazioni, quando il numero di variabile aumenta, aumenta di molto la complessità del problema e, di conseguenza, sono presenti problemi di convergenza.

Si vuole quindi confrontare l'algoritmo proposto con il metodo *Line Search*, implementato in *Matlab* attraverso l'*Optimization Toolbox* [2004]

I risultati ottenuti per i *Casi B* e *C*, partendo da dati esatti sono riportati in Tabella 6.7. Per il confronto sono stati utilizzati criteri di convergenza analoghi per entrambi i metodi e sono stati confrontati statisticamente i risultati prodotti da 100 test. A differenza delle tabelle precedenti, sono riportati direttamente il numero di risoluzioni del modello agli Elementi Finiti (e non il numero di iterazioni), a causa la differente architettura dei due algoritmi.

Per quanto riguarda i risultati ottenuti con la funzione errore definita mediante frequenze e deformate modali, la tabella mostra che per il metodo *Line Search* l'errore è minore del 5%, mentre scende al 2% per il *Differential Evolution Algorithm*. Inoltre il numero di test considerati errati è significativamente basso per DE, pari a 2/100, mentre 12 test errati su 100 sono stati ottenuti applicando il metodo che utilizza il gradiente. Adottando solo le frequenze (*Caso B*), inoltre, DE fornisce risultati analoghi al caso precedente, mentre il metodo *Line search* fornisce soluzioni che sono caratterizzate da un livello di errore che è superiore al valore di accuratezza prescritto. Di conseguenza i valori medi dei parametri identificati sono diversi dai valori attesi, con Coefficienti di variazione superiore al 30%.

DE						
Caso		Valore Esatto	Valore Massimo	Valore Minimo	Valor Medio	C.V. [%]
B	$E [10^4 \text{ MPa}]$	3.00	3.11	2.91	3.01	1.08
	$M_1 [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.60	2.77	2.52	2.61	1.73
	$M_2 [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.10	2.22	1.97	2.11	1.80
	N° di iterazioni	-	44	16	24.5	-
	N° di valutazioni della funzione errore	-	440	160	245	-
C	$E [10^4 \text{ MPa}]$	3.00	3.06	2.81	2.99	0.93
	$M_1 [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.60	2.71	2.34	2.59	1.06
	$M_2 [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.10	2.24	2.01	2.10	1.17
	N° di iterazioni	-	25	11	18.2	-
	N° di valutazioni della funzione errore	-	250	110	182	-
Gradiente						
Caso		Valore Esatto	Valore Massimo	Valore Minimo	Valor Medio	C.V. [%]
B	$E [10^4 \text{ MPa}]$	3.00	5.00	2.66	3.82	14.5
	$M_1 [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.60	5.99	1.03	3.64	28.1
	$M_2 [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.10	5.93	1.00	3.42	31.2
	N° di valutazioni della funzione errore	-	103	9	25.5	-
C	$E [10^4 \text{ MPa}]$	3.00	3.17	2.85	3.01	1.58
	$M_1 [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.60	2.64	2.58	2.60	0.44
	$M_2 [10^4 \text{ kg/m}^3]$	2.10	2.45	1.84	2.11	4.39
	N° di valutazioni della funzione errore	-	59	19	42.1	-

Tabella 6.7. Telaio a tre piani – ottimizzazione di 3 parametri: analisi statistica e confronto tra l'algoritmo DE e un classico metodo basato sul gradiente della funzione costo.

DE				
Caso	Errore Medio (E)	Errore Medio (M_1)	Errore Medio (M_2)	N° di test errati
	[%]	[%]	[%]	
B	0.64	1.01	1.10	6/100
C	0.46	0.77	0.63	2/100
Gradiente				
Caso	Errore Medio (E)	Errore Medio (M_1)	Errore Medio (M_2)	N° di test errati
	[%]	[%]	[%]	
B	-	-	-	-
C	0.83	0.28	2.29	12/100

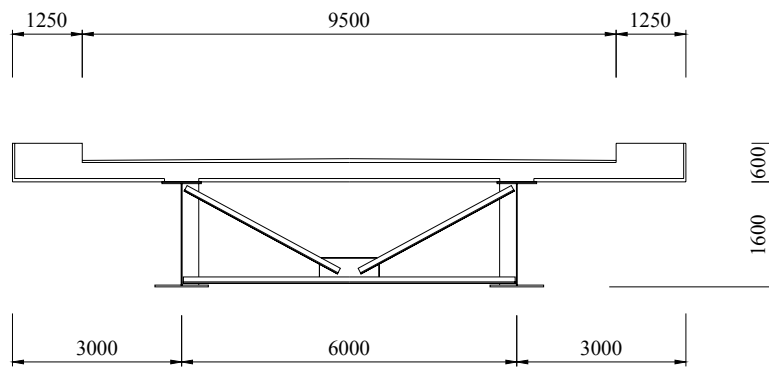
Tabella 6.8. Telaio a tre piani – ottimizzazione di 3 parametri: errori relativi ottenuti e numero di test considerati errati.

6.3.6 Esempio 2: identificazione di una struttura da ponte in sistema misto acciaio-calcestruzzo.

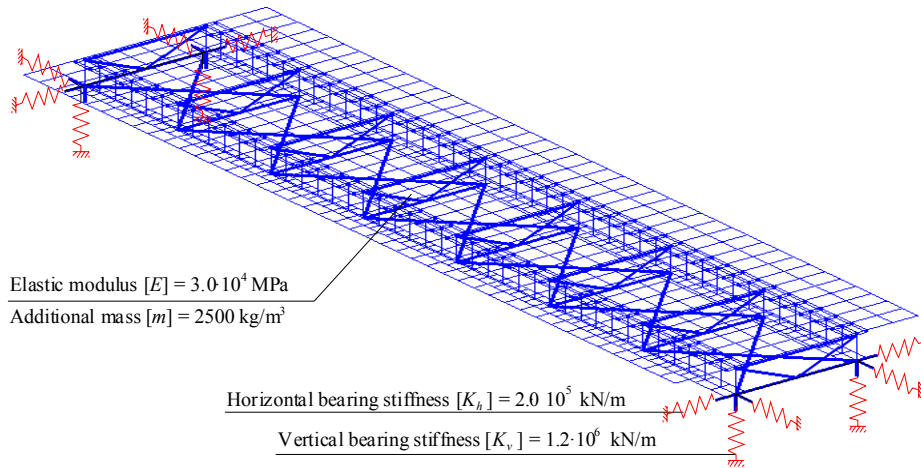
Il Differential Evolution Algorithm è stato utilizzato per determinare masse e rigidezze di una struttura da ponte acciaio-calcestruzzo di luce 42 metri e di larghezza pari a 12 metri. La soletta è in calcestruzzo avente spessore costante di 30 cm con un incremento di peso pari a ulteriori 30 cm in corrispondenza dei marciapiedi laterali. Le travi in acciaio sono profili a I con altezza pari a 1600 mm e larghezza di 600 mm. Sono presenti controventi orizzontali costituiti da croci di S. Andrea con profili angolari accoppiati, a passo costante di 6 metri e diaframmi verticali di controventamento, realizzati anch'essi mediante angolari accoppiati, allo stesso interasse dei controventi orizzontali. È stata inoltre considerata la massa relativa ai carichi permanenti portati sulla soletta in .c.a. La sezione tipo dell'impalcato è rappresentata in Figura 6.9(a). Nel modello FE, sono stati utilizzati elementi beam per le aste in

acciaio e elementi shell per la soletta ed i marciapiedi. Per modellare gli apparecchi d'appoggio sono state utilizzate molle lineari con differente rigidezza in direzione verticale ed orizzontale. Il modello FEM utilizzato è riportato in Figura 6.9(b).

Il processo di identificazione è stato condotto assumendo 4 parametri incogniti: il valore del modulo elastico del calcestruzzo (E), la rigidezza



(a)



(b)

Figura 6.9. Ponte in struttura mista Acciaio-Calcestruzzo: (a) sezione trasversale e (b) modello FEM con valori dei parametri ricercati durante il processo di ottimizzazione.

verticale K_v e orizzontale K_h degli apparecchi d'appoggio e la massa m per unità di superficie dei carichi permanenti portati (supponendo quindi incognito il valore della massa del ballast e della pavimentazione stradale).

Sono stati considerati noti i primi 4 modi di vibrare della struttura (due flessionali nel piano verticale, il primo modo torsionale e un modo con spostamenti prevalentemente nel piano orizzontale). In particolare, sono assunti note le frequenze modali ω_i e, come in un tipico test dinamico in situ, le componenti delle deformate modali sono state assunte in 9 punti sull'impalcato del ponte punti differenti della struttura (φ_i): due spostamenti in direzione verticale nella sezione di mezzeria e quattro ai quarti, nonché tre misure per le accelerazioni trasversali poste anch'esse in corrispondenza dei quarti e della mezzeria dell'impalcato. In una seconda configurazione, le misure ad un quarto sono state spostate e posizionate in analoghe posizioni ma nella sezione di appoggio (2 verticali e uno orizzontale).

In Figura 6.11 sono presenti i 4 modi di vibrare della struttura considerati mentre in Figura 6.10 è presente uno schema con la posizione degli strumenti di misura.

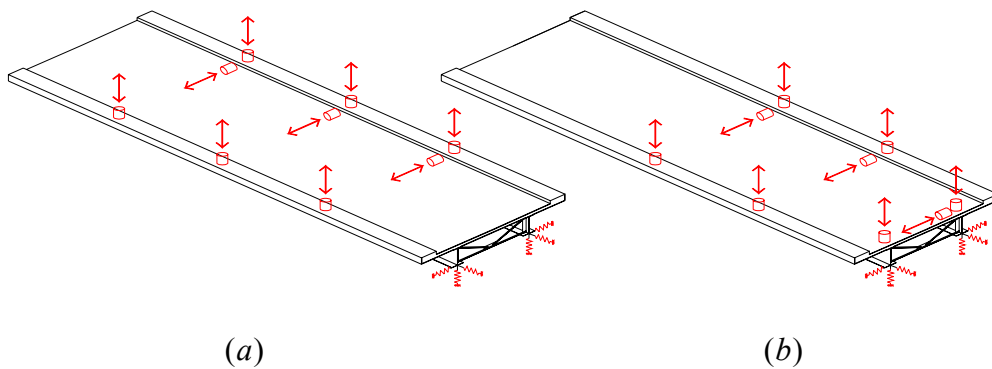


Figura 6.10. Ponte in struttura mista Acciaio-Calcestruzzo: posizione dei punti di misura: (a) configurazione A e (b) configurazione B.

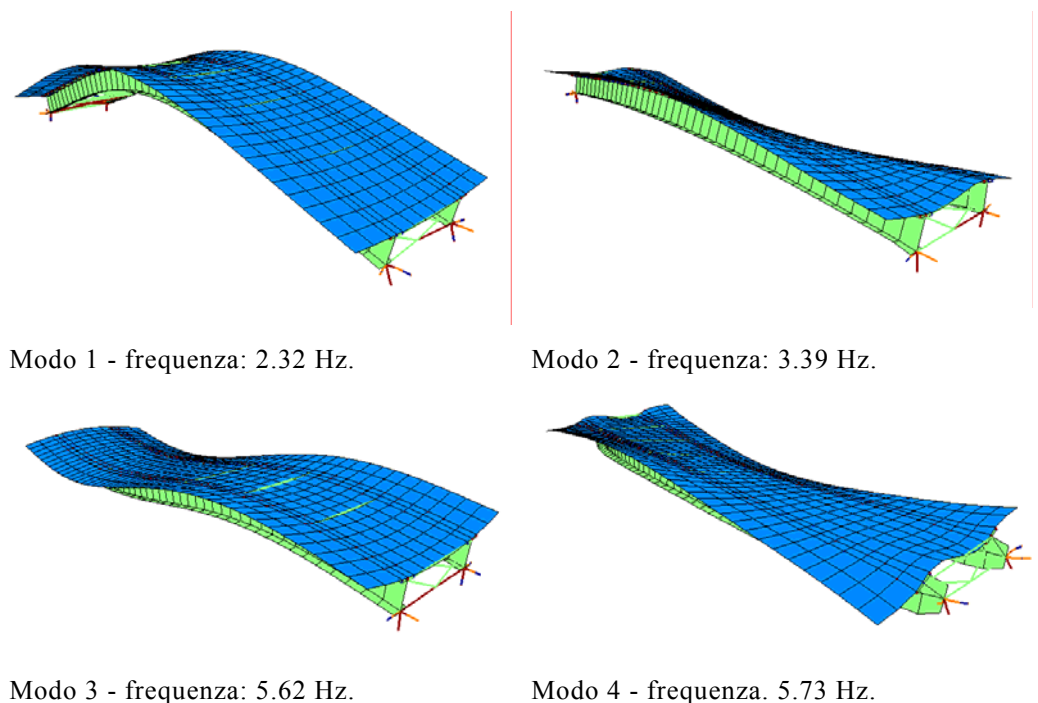


Figura 6.11. Ponte in struttura mista Acciaio-Calcestruzzo: rappresentazione dei primi 4 modi di vibrare della struttura.

La funzione costo è definita dalla differenza relativa tra i valori di frequenza e deformata modale ottenuti dal modello (ω_i, Φ_i) rispetto ai valori sperimentali quelli forniti da una prova dinamica $(\bar{\omega}_i, \bar{\Phi}_i)$, secondo la relazione:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[w_1 \left(\frac{\omega_i - \bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i} \right)^2 + w_2 \sum_{j=1}^f \left(\frac{\Phi_{ij} - \bar{\Phi}_{ij}}{\bar{\Phi}_{ij}} \right)^2 \right], \quad (6.14)$$

dove $N = 4$ è il numero di modi propri considerati e $f = 9$ è il numero delle componenti delle rispettive deformate modali. I parametri w_1 , w_2 sono rispettivamente i pesi per frequenze e deformate modali nella funzione errore, assunti pari a $w_1 = 1$, $w_2 = 1/9$. La combinazione *Best* è stata utilizzata per tutte le analisi.

Come per il telaio a tre piani, si sono ottenuti sia i risultati partendo da

frequenze e deformate modali esatte che utilizzando dati pseudo-sperimentali in input. Valor medio, massimo e minimo dei parametri identificati e il numero di iterazioni necessarie per giungere a convergenza sono riportati in Tabella 6.9 e Tabella 6.10.

Buoni risultati sono stati ottenuti partendo dai dati esatti per quanto riguarda i valori della massa e del modulo elastico del calcestruzzo. Gli errori ottenuti sono contenuti entro il 2%. Per quanto riguarda il valore della rigidezza verticale degli apparecchi d'appoggio, il coefficiente di variazione è abbastanza alto, pari a circa il 20%, dovuto principalmente alla scarsa sensitività dei parametri modali alle variazioni di tale parametro. Adottando la seconda configurazione (Tabella 6.11 e Tabella 6.12), i risultati per massa e modulo elastico sono leggermente peggiorati, ma i parametri di rigidezza degli appoggi sono notevolmente migliorati, con C.V. minore del 10%.

Per ciò che concerne i risultati da dati pseudo-sperimentali, non è possibile identificare la rigidezza degli appoggi se si utilizza la prima configurazione (coefficiente di variazione del 96% per la rigidezza verticale e 44 % per quella orizzontale); Invece, utilizzando la seconda configurazione, la variazione di tali parametri è decisamente contenuta (tra il 3 ed il 13%).

DE					
	Valore Esatto	Valore Massimo	Valore Minimo	Valor Medio	C.V. [%]
E [10^4 MPa]	3.20	3.34	3.11	3.23	2.06
K_h [10^5 kg/m]	2.00	2.14	1.96	2.01	1.64
K_v [10^6 kg/m]	1.20	1.90	0.85	1.26	18.8
M [10^3 kg/m³]	2.50	2.56	2.49	2.52	0.53
N° di iterazioni	-	40	8	23.0	-

Tabella 6.9. Ponte in struttura mista Acciaio-Calcestruzzo - configurazione A: analisi statistica dei risultati ottenuti partendo da dati esatti.

DE					
	Valore Esatto	Valore Massimo	Valore Minimo	Valor Medio	C.V. [%]
E [10^4 MPa]	3.20	3.39	2.86	3.18	3.52
K_h [10^5 kg/m]	2.00	6.73	1.68	2.77	43.6
K_v [10^6 kg/m]	1.20	9.90	0.13	1.55	95.9
M [10^3 kg/m³]	2.50	2.92	2.36	2.62	5.51
N° di iterazioni	-	25	5	14.1	-

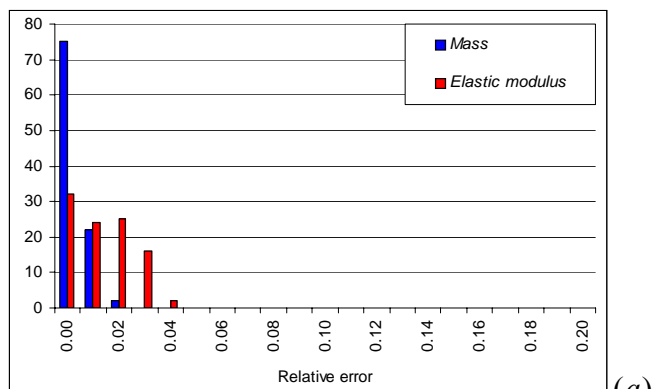
Tabella 6.10. Ponte in struttura mista Acciaio-Calcestruzzo - configurazione A: analisi statistica dei risultati ottenuti da dati pseudo-sperimentali.

DE					
	Valore Esatto	Valore Massimo	Valore Minimo	Valor Medio	C.V. [%]
E [10^4 MPa]	3.20	3.99	2.47	3.15	11.2
K_h [10^5 kg/m]	2.00	2.65	1.82	2.11	6.37
K_v [10^6 kg/m]	1.20	1.39	0.94	1.19	9.72
M [10^3 kg/m³]	2.50	2.68	2.30	2.50	3.73
N° di iterazioni	-	56	22	46.3	-

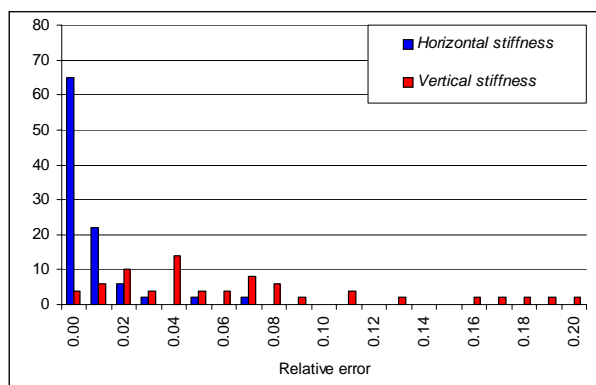
Tabella 6.11. Ponte in struttura mista Acciaio-Calcestruzzo - configurazione B: analisi statistica dei risultati ottenuti partendo da dati esatti.

DE					
	Valore Esatto	Valore Massimo	Valore Minimo	Valor Medio	C.V. [%]
E [10^4 MPa]	3.20	3.90	2.55	3.25	11.23
K_h [10^5 kg/m]	2.00	2.63	1.76	2.11	12.27
K_v [10^6 kg/m]	1.20	1.37	0.96	1.25	13.34
M [10^3 kg/m³]	2.50	2.72	2.30	2.56	3.38
N° di iterazioni	-	42	12	32.6	-

Tabella 6.12. Ponte in struttura mista Acciaio-Calcestruzzo - configurazione B: analisi statistica dei risultati ottenuti da dati pseudo-sperimentali.



(a)



(b)

Figura 6.12. Ponte in struttura mista Acciaio-Calcestruzzo: Errore relativo ottenuto per i parametri identificati a partire da dati esatti: (a) errore sulla massa dell'impalcato e sul modulo elastico e (b) sulle rigidezze orizzontali e verticali degli apparecchi d'appoggio.

7. CONFRONTO TRA IL DIFFERENTIAL EVOLUTION ALGORITHM ED IL COUPLED LOCAL MINIMIZER METHOD

Il successo di una procedura di ottimizzazione dipende dalla definizione del problema di ottimizzazione, così come analizzato nel capitolo precedente, ma anche dalla capacità analitica dell'algorithm di ottimizzazione.

Gli algoritmi convenzionali che si basano sul gradiente della funzione errore, (come i metodi di Newton e Quasi-Newton) sono molto efficienti nei riguardi della velocità di convergenza ma possono convergere a minimi locali. Il successo della procedura dipende quindi dal punto di partenza prescelto, in particolare se esso si trova nei pressi o meno del minimo globale. In tali metodi, la curvatura calcolata nell'intorno del punto in cui si valuta la funzione costo è utilizzata per costruire un'approssimazione quadratica della funzione. Quando la funzione costo presenta quindi una zona a limitata sensitività rispetto ai parametri incogniti, i metodi classici basati sul gradiente forniscono spesso risultati inaccurati a causa del mal condizionamento del problema di ottimizzazione.

Tra i metodi di ricerca globale, esistono due famiglie di algoritmi: gli

algoritmi genetici ed evolutivi e i metodi che utilizzano minimizzatori accoppiati. Il Coupled Local Minimizers method è un metodo che appartiene a quest'ultima categoria.

In questo capitolo viene effettuato il confronto tra il Coupled Local Minimizers (CLM) method e il Differential Evolution (DE) algorithm, con applicazione ad una trave nella quale sono state introdotte molle rotazionali per modellare la presenza di danneggiamenti localizzati dell'elemento strutturale.

Il confronto viene effettuato considerando una trave in semplice appoggio nella quale un intaglio produce una flessibilità locale. Tale flessibilità può essere modellata con una molla rotazionale [Chondros et al., 2001]. L'efficienza dei due metodi è stata messa a confronto mediante l'analisi statistica dei risultati ottenuti conducendo un elevato numero di simulazioni numeriche del problema di ottimizzazione.

7.1 COUPLED LOCAL MINIMIZERS (CLM) METHOD

Il CLM è un metodo proposto da Suykens et al. [2001]; il metodo utilizza minimizzatori accoppiati ognuno dei quali è guidato da un processo di minimizzazione basato su metodi classici ma nel quale è possibile lo scambio di informazioni attraverso l'introduzione di vincoli mutui tra i diversi minimizzatori. I minimi locali possono essere evitati in quanto diversi punti di ricerca sono utilizzati simultaneamente, ma, allo stesso tempo, la velocità di convergenza è in parte mantenuta, grazie all'utilizzo di algoritmi basati sul gradiente [Suykens & Vandewalle, 2002] (vedi Figura 7.1).

L'algoritmo utilizza una popolazione costituita da un numero q di minimizzatori locali,

$$\mathbf{x}^i, \quad i = 1, 2, \dots, q$$

contenenti ognuno le D variabili da ottimizzare. La popolazione iniziale è scelta

in modo random, uniformemente distribuita su tutto lo spazio di ricerca; informazioni derivanti dal gradiente della funzione costo guidano ogni minimizzatore nella ricerca del minimo globale. Anziché ricercare il minimo indipendentemente (come nel caso del *multistart local optimization method*), ogni punto di ricerca sfrutta le informazioni degli altri minimizzatori attraverso un vincolo che costringe i minimizzatori a convergere tutti nello stesso minimo (Figura 7.1b).

In accordo con [Teughels, 2003], CLM è stato implementato attraverso la formulazione di Lagrange (*Augmented Lagrangian method*), dove la funzione costo L è ottenuta utilizzando sia le informazioni sul gradiente della funzione costo originaria, attraverso il contributo di ogni singolo minimizzatore, sia da un termine aggiuntivo penalizzante che incrementa il valore di L se i punti di ricerca non convergono verso lo stesso minimo. Se la definizione della funzione L è ben impostata, un'algoritmo classico è in grado di minimizzare L .

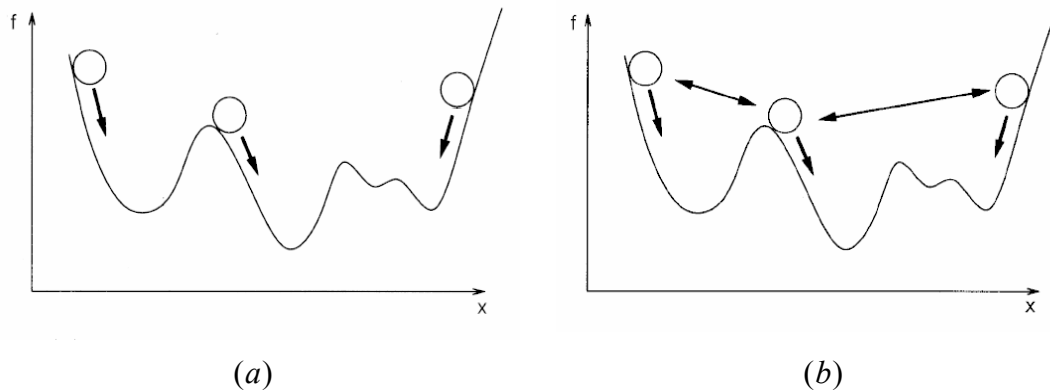


Figura 7.1. (a) Schema del processo di ottimizzazione secondo punti indipendenti (*multistart local optimization*) e (b) schema del vincolo introdotto nell'algoritmo CLM.

7.1.1 Augmented Lagrangian method

La funzione di Lagrange generalizzata L è definita secondo l'espressione [Suykens et al., 2001; Teughels, 2003]:

$$L_A(\mathbf{X}, \lambda_i) = f(\mathbf{X}) + \sum_i \lambda_i h_i(\mathbf{x}_i) + \frac{\gamma}{2} \sum_i h_i^2(\mathbf{x}_i) \quad (7.1)$$

dove $f(\mathbf{X})$ è la funzione costo definita secondo la (6.11) e soggetta ai vincoli $h_i(\mathbf{x}_i)$ e con:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_q]$$

I parametri λ_i e γ sono, rispettivamente, i moltiplicatori di Lagrange e il *penalty factor*. Il secondo ed il terzo termine dell'espressione (8.1) sono rispettivamente termini di vincolo debole e vincolo forte, rispettivamente.

Definendo con $H(\mathbf{x}_i)$ il valore della funzione costo ottenuta per ogni minimizzatore, la funzione $f(\mathbf{X})$ è la media di tale funzione su tutti i punti di ricerca:

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q H(\mathbf{x}^i) \quad (7.2)$$

I minimizzatori sono accoppiati durante il processo mediante un vincolo tale che i punti convergano nella stessa soluzione:

$$\min f(\mathbf{x}) \text{ tale che } \mathbf{x}^i - \mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{0} \quad (7.3)$$

I vincoli di sincronizzazione $h_i(\mathbf{x})$ sono quindi definiti secondo la seguente relazione:

$$(7.4)$$

Sostituendo le equazioni (8.2), (8.4) nella (8.1), la funzione di Lagrange generalizzata è riscrivibile nel seguente modo.

$$L_A(\mathbf{x}, \Lambda) = \frac{\eta}{q} \sum_{i=1}^q H(\mathbf{x}_i) + \sum_i \langle \lambda_i, [\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}] \rangle + \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^q \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}\|^2 \quad (7.5)$$

dove $\langle \cdot \rangle$ indica il prodotto interno e $\|\cdot\|$ la norma euclidea del vettore \mathbf{x} . Inoltre, nell'equazione (8.5) è stato introdotto inoltre un fattore peso η che regola il contributo del primo termine.

Per minimizzare la funzione di Lagrange L è possibile utilizzare un metodo iterativo dove, ad una generica iterazione k le variabili \mathbf{x} sono poste pari al valore ottimo \mathbf{x}_k^* . Alla generica iterazione, il vettore Λ_k contenente i moltiplicatori lagrangiani $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$, è ottenuto in modo iterativo attraverso la seguente espressione:

$$\lambda_{k+1}^i = \lambda_k^i + \gamma h_i(\mathbf{x}_k) \quad (7.6)$$

Il processo non termina fino a quando non si sono ottenuti i valori ottimi delle variabili $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_q^*)$ e i valori di \mathbf{x}^* .

La minimizzazione della funzione di Lagrange L risulta essere agevole in quanto l'introduzione dei vincoli produce una regolarizzazione della funzione obiettivo complessiva. Per tale ragione, viene utilizzato un algoritmo standard, il *Trust Region Newton method*, caratterizzato da una veloce convergenza con un sufficiente accuratezza.

Per applicare il *Trust Region Newton method*, si è scomposta la funzione L in serie di Taylor, ottenendo un'approssimante quadratica $m(\mathbf{p})$ nel sottospazio Δ :

$$m(\mathbf{p}) = L + [\nabla L]^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T [\nabla^2 L] \mathbf{p} \quad \text{tale che } \|\mathbf{p}\| \leq \Delta, \quad (7.7)$$

Nell'equazione (8.7), il Gradiente e la matrice Hessiana della funzione L sono indicate con ∇L e $\nabla^2 L$, mentre con \mathbf{p} corrisponde al vettore \mathbf{x} delle variabili ristretto alla Trust Region Δ .

Per risolvere il problema di minimizzazione attraverso la Trust Region, occorre ricavare analiticamente i valori della funzione Gradiente e della Matrice Hessiana. Questo è possibile assumendo l'indipendenza tra loro dei vari minimizzatore locale, ottenendo le seguenti espressioni:

$$\nabla_{\mathbf{x}_i} L = \frac{\eta}{q} \nabla_{\mathbf{x}_i} H(\mathbf{x}_i) + (\lambda_i - \lambda_{i-1}) - \gamma [\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i] + \gamma [\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}] \quad (7.8)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}_i}^2 L = \frac{\eta}{q} \nabla_{\mathbf{x}_i}^2 H(\mathbf{x}_i) + 2\gamma \mathbf{I} \quad (7.9)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i-1}}^2 L = -\gamma \mathbf{I} \quad (7.10)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}}^2 L = -\gamma \mathbf{I} \quad (7.11)$$

dove con \mathbf{I} si è indicate la matrice identità.

Poichè il CLM ricerca la convergenza nello stesso punto di tutti i minimizzatori accoppiati alla fine del processo, il criterio di convergenza è stato definito mediante la distanza relativa tra i minimizzatori locali, secondo l'espressione:

$$\left\| \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}}{D \cdot q} \right\| < VTR \quad (7.12)$$

dove VTR è la precisione richiesta e D è il numero delle variabili da ottimizzare.

Le proprietà di convergenza del metodo sono legate alla definizione del numero di minimizzatori q , del penalty factor γ e del parametro η . Se tali

parametri sono scelti in modo adeguato, la soluzione risulta essere precisa e l'algoritmo veloce.

Il numero dei minimizzatori q è legato alla complessità della forma della funzione costo da minimizzare: per funzioni sufficientemente regolari occorre un numero modesto di punti, mentre in presenza di numerosi minimi locali occorre utilizzare più minimizzatori.

Per quanto riguarda il penalty factor γ e il parametro η , essi non sono assegnabili a priori con facilità. La difficoltà di tarare i parametri è tipico dei metodi di ricerca globale, ma allo stesso tempo tali parametri determinano la riuscita e la velocità del metodo stesso.

Con riferimento alla equazione (8.5), incrementando il parametro γ nei confronti di η , viene dato maggiore peso ai vincoli che impongono ai punti di convergere alla stessa soluzione. Di conseguenza, la velocità di convergenza aumenta, ma aumenta anche la possibilità di ottenere un minimo locale posto nei pressi del centro del dominio di ricerca. D'altra parte, un valore minore di γ permette un'esplorazione maggiore del dominio ma con tempo di calcolo più elevati.

7.1.2 Esempio: identificazione di un danno localizzato per una trave semplicemente appoggiata.

Il confronto tra il Coupled Local Minimizers method e il Differential Evolution algorithm è stato effettuato con riferimento all'identificazione del danno di una trave nella quale è presente un danneggiamento localizzato.

Il comportamento dinamico dell'asta è stato studiato con l'ausilio del programma agli Elementi Finiti ANSYS [2001], dove la presenza della fessura è stata modellata come una molla rotazionale di rigidezza K nella posizione della fessura. La trave è in alluminio, di sezione prismatica avente dimensioni pari a 6×25.4 mm e lunghezza di 235 mm (vedi Figura 7.2).

Le caratteristiche meccaniche del materiale sono il modulo elastico $E =$

$7.2 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, la densità pari a 2800 kg/m^3 e il coefficiente di Poisson di 0.35.

Il problema di identificazione consiste nel determinare posizione e rigidità della molla rotazionale utilizzata per modellare la fessura. La presenza di un intaglio provoca nell'elemento strutturale una flessibilità concentrata. Questo cambiamento di rigidità è utilizzato nel problema di identificazione per individuare la posizione e l'entità del danneggiamento. Nel modello numerico, la flessibilità è tenuta in conto posizionando una molla rotazionale di rigidità K dipendente dalla profondità della fessura. La rigidità K della molla è stimabile con la seguente formula [Chondros et al., 1998]:

$$K = \frac{EI}{6\pi h(1-\nu^2)\varepsilon} \quad (7.13)$$

dove h è l'altezza della trave, I è il momento d'inerzia, E è il modulo elastico e ν è il coefficiente di Poisson. Il parametro ε è ottenuto in funzione della profondità dell'intaglio a mediante la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 0.6272\left(\frac{a}{h}\right)^2 - 1.04533\left(\frac{a}{h}\right)^3 + 4.5948\left(\frac{a}{h}\right)^4 - 9.9736\left(\frac{a}{h}\right)^5 + 20.2948\left(\frac{a}{h}\right)^6 \\ & - 33.0351\left(\frac{a}{h}\right)^7 + 47.1063\left(\frac{a}{h}\right)^8 - 40.7556\left(\frac{a}{h}\right)^9 + 19.6\left(\frac{a}{h}\right)^{10} \end{aligned} \quad (7.14)$$

L'assunzione alla base della (8.14) è che la fessura presente nell'elemento strutturale sia aperta durante le oscillazioni .

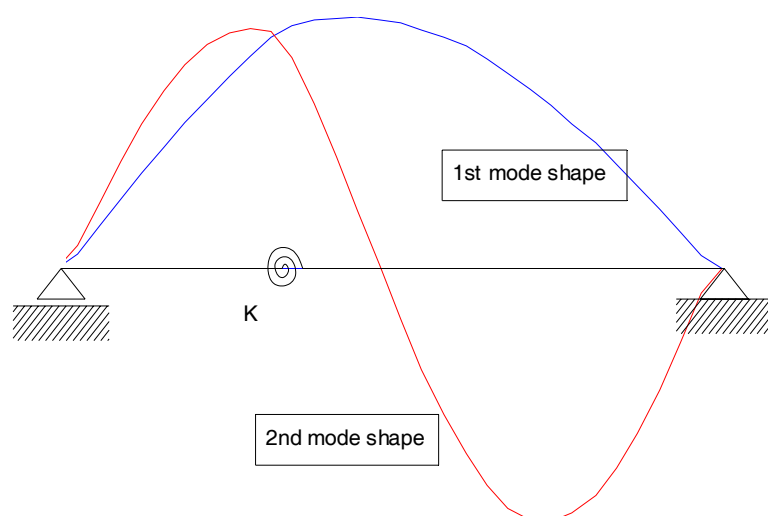


Figura 7.2. Trave con un danneggiamento modellato come una molla rotazionale: schema statico, posizione della molla rotazionale e prime due forme modali.

È stata definita in primo luogo la soluzione di riferimento, imponendo la posizione e l'intensità della molla rotazionale. La posizione y è assunta ad un terzo della lunghezza l della trave e la rigidità è ottenuta mediante l'equazione (8.13) utilizzando una profondità della fessura pari a 9.7 mm.

Dall'analisi agli autovalori si sono ricavate le prime due frequenze proprie e gli autovalori corrispondenti, riportati in Tabella 7.1 e in Figura 7.2. I parametri da identificare sono stati ricercati nell'intervallo $K =] 0, 28000 [$ Nm, $y =] 0, 235 [$ mm.

Invece di considerare i valori assoluti dei parametri incogniti x_j , si è utilizzata per essi una forma normalizzata:

$$z_j = \frac{x_j - x_{jR}}{x_{jR}} \Rightarrow x_j = x_{jR}(1 + z_j), \quad (7.15)$$

in modo da utilizzare nell'analisi variabili z_j definite nell'intervallo $]-1, 1[$, con x_{jR} valore medio dell'intervallo considerato della variabile x_j .

		Valore assoluto	Valore normalizzato
Posizione y	[mm]	78.3	0.33
Rigidità K	[Nm]	15680	0.12
Frequenze	f_1 [Hz]	908.52	-
	f_2 [Hz]	3569.6	-

Tabella 7.1. Trave con una molla rotazionale: valori di riferimento per la rigidità e la posizione della molla.

La funzione costo è stata successivamente definita secondo la formulazione riportata nell'equazione (7.11). La funzione costo così determinata e le relative curve di livello sono riportate in Figura 7.3.

Per confrontare i due algoritmi, i coefficienti caratterizzanti i due metodi sono stati accuratamente selezionati (in particolare per l'algoritmo CLM) in modo da assicurare a ciascun metodo le migliori prestazioni. Per quanto riguarda l'algoritmo CLM, sono stati utilizzati 4 minimizzatori locali e, per ottenere una soluzione rapida, il parametro γ è stato posto pari a 10, mentre il peso della funzione obiettivo è stato scelto $\eta = 0.5$. Per l'algoritmo evolutivo DE, sono stati utilizzati 10 vettori di ricerca utilizzando la strategia best; la costante F , caratterizzante l'operazione di *Mutation*, è stata posta pari a 0.60.

Il test di convergenza è stato definito allo stesso modo per entrambi gli algoritmi, considerando la costante VTR pari a 0.01:

$$\left\| \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}}{D \cdot q} \right\| < 0.01 \quad (7.16)$$

Sono state così effettuate 100 simulazioni scegliendo, per entrambi i metodi, diverse popolazioni di partenza, scelte in modo random sul dominio di definizione delle variabili. Sono stati estratti anche valori casuali per i valori iniziali dei parametri Lagrangiani Λ nel metodo CLM.

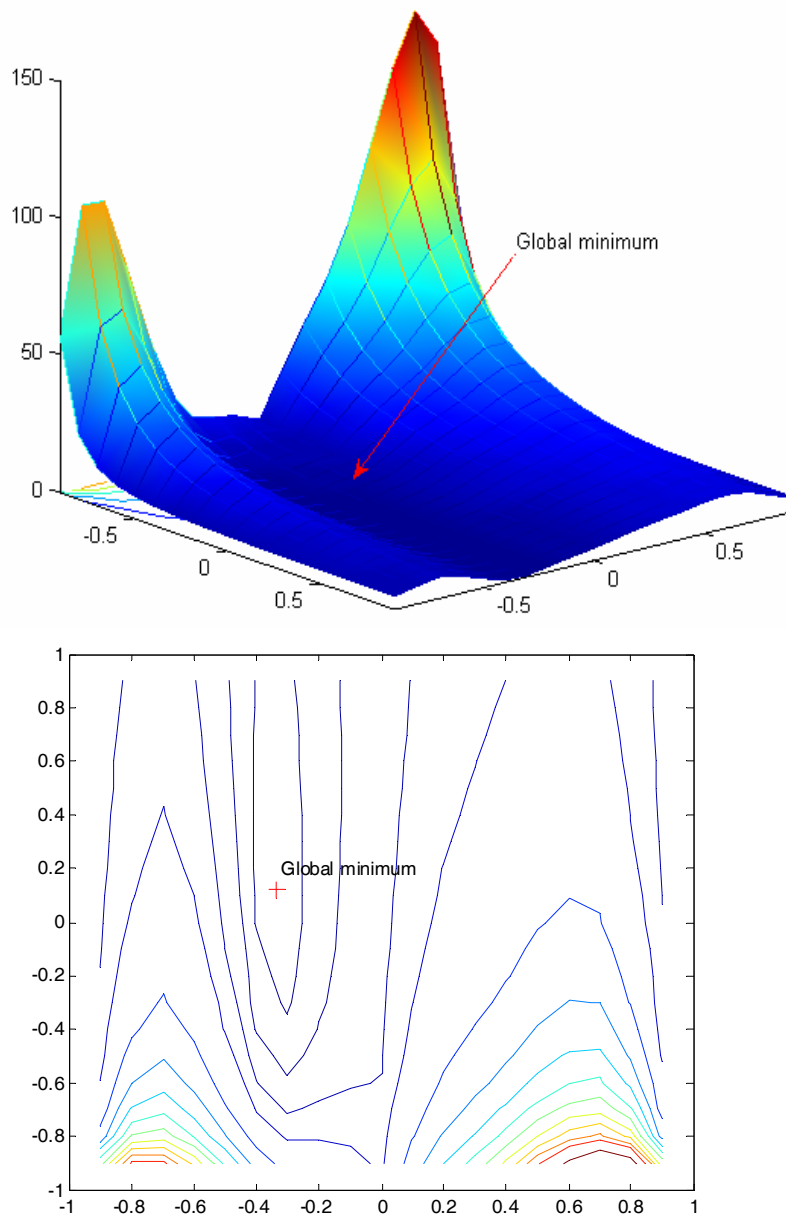


Figura 7.3. Trave con una molla rotazionale: (a) vista tridimensionale e (b) curve di livello della funzione costo.

In Tabella 7.2 sono riportati i valori statistici (media e coefficiente di variazione) dei risultati ottenuti per 100 simulazioni.

È interessante sottolineare che, sia utilizzando il metodo CLM che l'algoritmo DE, i valori medi dei parametri identificati sono molto prossimi ai

valori di riferimento.

Utilizzando il CLM, l'errore sul valore della posizione del danno identificata (0.57%) è paragonabile con l'errore commesso sulla rigidità della molla (0.32%); i coefficienti di variazione sono anch'essi molto modesti e prossimi tra loro, con valori inferiori al 3%. I risultati ottenuti con il DE mostrano, invece, migliori risultati per ciò che riguarda l'identificazione della posizione del danno, con un coefficiente di variazione minore dello 0.2%, ma produce risultati più dispersi per quanto riguarda la rigidità K (6%). Questo è dovuto al vincolo introdotto nell'algoritmo CLM, che costringe tutti i punti a convergere nello stesso punto finale. Al contrario, DE, ricercando il minimo con più punti separatamente l'uno dall'altro, fornisce soluzioni che si posizionano nella zona a minor valore della funzione costo, la quale è poco sensibile a variazioni del valore della rigidità della molla. Pertanto, i punti di ricerca si trovano pressoché allineati, fornendo valori di dispersione maggiore per la rigidità.

In Tabella 7.2 viene riportato anche il numero delle iterazioni necessarie per giungere a convergenza e il numero di risoluzioni del problema strutturale, parametro ritenuto significativo per determinare la velocità di convergenza del metodo. Per quanto riguarda il numero delle iterazioni, DE utilizza in media 23 iterazioni (su 100 simulazioni condotte), con un Coefficiente di Variazione elevato, pari al 34.8%. Il CLM utilizza in media 14.5 iterazioni, con un coefficiente di variazione più ridotto (circa il 20%). Il numero di valutazioni della funzione costo dipende dal numero di iterazioni e dal numero di punti utilizzati dal metodo durante l'analisi. Per ogni iterazione, CLM utilizza 4 minimizzatori accoppiati, ognuno dei quali necessita di tre valutazioni della funzione costo ad ogni iterazione (due di queste per determinare il gradiente), per un totale di 12 valutazioni per ogni iterazione. DE, invece, richiede un maggior numero di iterazioni dato che è basato sulla ricerca stocastica del minimo, ma non necessita di alcuna informazione sul gradiente.

	Exact value	CLM						DE					
		VALUE			ERROR %			VALUE			ERROR %		
		Mean	Range	C.V. %	Mean	Max		Mean	Range	C.V. %	Mean	Max	
Ident. parameter (normalized)	-	-0.3485	÷ -	2.06	0.57	1.58	-	-0.3348	÷	0.18	0.23	0.45	
	0.3333	0.3175	0.3175	0.3338	0.32	1.35	0.3339	-0.3327					
Ident. Parameter (not normalized)	0.1200	-0.1158	÷ -	2.98	0.32	1.35	0.1180	0.0974	÷	6.19	6.52	10.83	
		0.1335	0.1335	0.1220	0.30	1.03	0.1180	0.1236					
Ident. Parameter [mm]	7.834	7.753	÷	0.39	0.30	1.03	7.826	7.816	÷	0.08	0.11	0.22	
		7.894	7.894	7.828	0.25	0.88	7.826	7.840					
K1 [Nm]	15680	15625	÷	0.28	0.25	0.88	15577	15363	÷	0.63	0.70	2.02	
		15819	15819	15703	-	-	15577	15730					
Cost function value:	-	0.0004	÷	0.0040	-	-	0.0013	0.0004	÷	-	-	-	
		0.0204	0.0204	0.0040	-	-	0.0013	0.0033					
Number of iteration:	-	10	÷	14.49	-	-	22.8	10	÷	34.8	-	-	
		23	23	14.49	-	-	22.8	40					
Number of cost-function evaluation:	-	120	÷	174	-	-	228	100	÷	34.8	-	-	
		276	276	174	-	-	228	400					

Tabella 7.2. Identificazione di un danno di una trave appoggiata: confronto dei risultati ottenuti (100 simulazioni) con il CLM e l' algoritmo DE.

Per tale ragione, il numero di valutazioni per ogni iterazione è semplicemente pari al numero di punti utilizzati nell'analisi, fissato in 10 unità. Per tali ragioni, in numero di risoluzioni richieste del problema strutturale è maggiore, ma solo del 20% rispetto al CLM.

In Tabella 7.2 è riportato il numero di test considerati errati. Questi sono definiti da un errore sui parametri identificati maggiore del 5% rispetto ai valori di riferimento. Utilizzando il CLM, 1 solo test su 100 produce valori errati delle variabili, ed in particolare una soluzione giunta a convergenza sul contorno del dominio di definizione delle variabili. Anche con l'algoritmo DE si è verificato un solo test non accettabile, in questo caso a causa della scarsa accuratezza prodotta dalla vicinanza di diversi punti di ricerca nella zona a bassa sensitività, producendo un errore sulla rigidezza maggiore del 10%.

7.1.3 Identificazione del danno in una trave con due fessure

Sono ora riportati i risultati riguardanti l'identificazione di due danni sulla trave, , ognuno dei quali rappresentato da un intaglio con profondità diversa. La prima sezione danneggiata è posta ad un terzo della lunghezza della trave e la seconda a 5/8 di essa. Le rigidezze sono state imposte pari a $K_1 = 15680$ Nm and $K_2 = 11900$ Nm corrispondenti a valori normalizzati pari a 0.1200 e -0.1500.

In modo analogo al caso con la singola fessura, per l'algoritmo DE si utilizza la combinazione *Best* ma il numero di vettori è stato incrementato a 25. Anche per CLM, si è ritenuto opportuno aumentare il numero di minimizzatori locali, portandolo a 10 e imponendo altresì un penalty factor $\gamma = 25$. Si sono utilizzati, infine, gli stessi criteri di convergenza dell'esempio precedente.

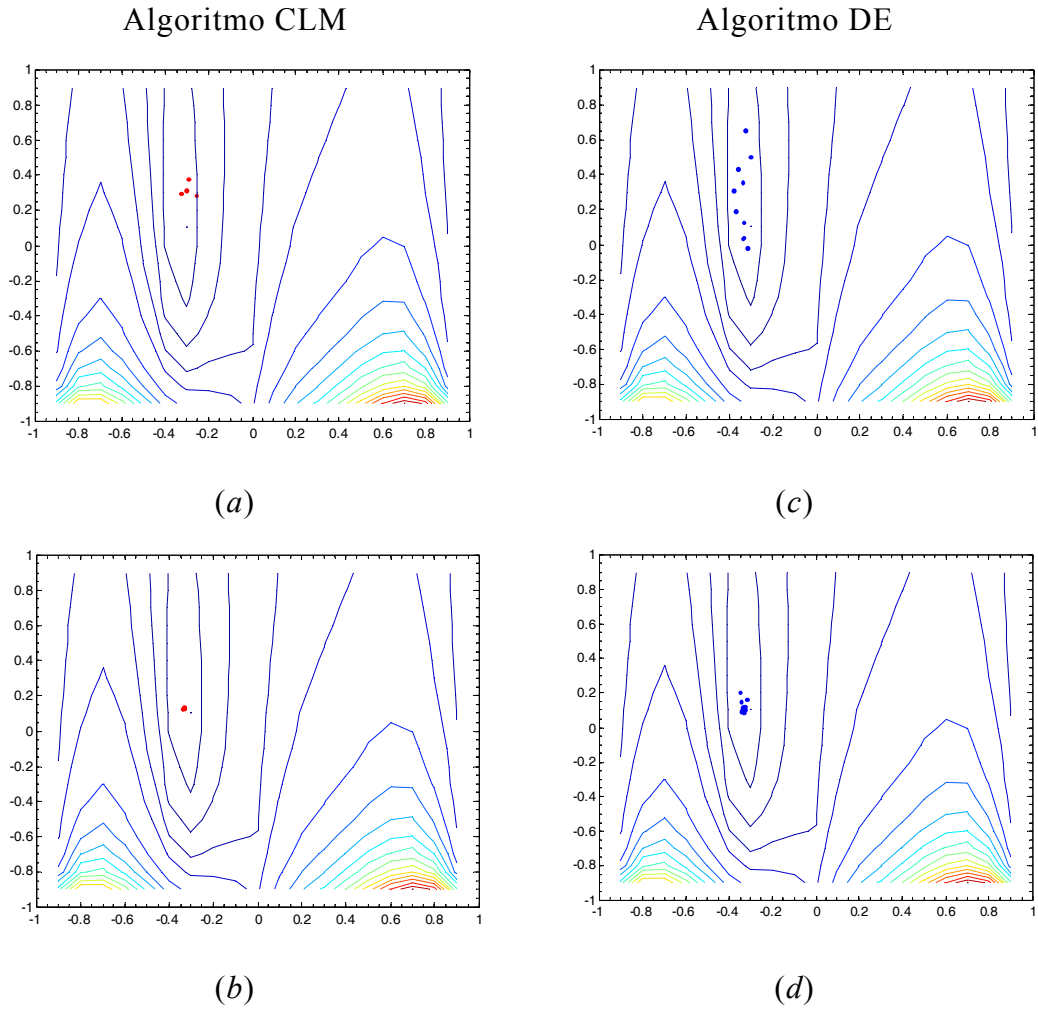


Figura 7.4. Identificazione di un danno di una trave appoggiata: durante il processo di ottimizzazione il CLM presenta tutti i punti prossimi l'uno all'altro (a) sia in ogni step intermedio che (b) a convergenza. I punti ottenuti dal DE algorithm (c,d), invece, si presentano allineati nella zona con basso valore della funzione costo.

Dai valori identificati presenti in Tabella 7.3, si può notare come DE ottiene, in termini di precisione, risultati paragonabili a quelli ripostati nell'esempio del paragrafo precedente, con valori prossimi a quelli esatti e coefficienti di variazione modesti per i valori di posizione identificati; le dispersioni maggiori riguardano la determinazione della rigidità della molla rotazionale, per i motivi già discussi in precedenza. Il numero medio di valutazioni della funzione costo è pari a circa 750, con nessun test errato.

Come mostrato in tabella, CLM ottiene risultati paragonabili in termini di velocità (valor medio pari a 780 valutazioni) ma con un alto valore del coefficiente di variazione per posizioni e rigidità. Inoltre, il 7% dei test risulta essere non accettabile (errore superiore al 5%).

Con tale metodo, se si riduce il numero di minimizzatori, la sensibilità della soluzione alla scelta dei punti di partenza cresce in modo significativo. A titolo di esempio, sono state effettuate analisi con 6 e 8 vettori. Il numero di iterazioni a convergenza si riduce rispettivamente a 400 e 590 ma il numero di test inaccettabili cresce fino al 20% nel primo caso e al 15% nel secondo. Un numero maggiore di punti, invece, incrementa notevolmente il numero di iterazioni senza aumentare sostanzialmente la precisione dei risultati.

Al contrario, il numero di vettori utilizzati per DE modifica il numero delle iterazioni richieste ma modifica solo marginalmente il numero complessivo delle valutazioni della funzione costo. Anche la dispersione dei risultati ottenuti rimane senza sostanziale variazione, evitando i minimi locali.

Il *Penalty factor* ed il numero di minimizzatori devono essere scelti accuratamente per ottenere risultati affidabili. Quindi CLM risulta essere un metodo strettamente parametro-dipendente quando il numero di variabili ricercate cresce.

	Exact value	CLM						DE					
		VALUE			ERROR %			VALUE			ERROR %		
		Mean	Range	C.V. %	Mean	Max		Mean	Range	C.V. %	Mean	Max	
Ident. parameter (normalized)	Pos 1:	-	-0.3548 ÷ -0.3112	3.58	3.00	6.63	-	-0.3346 ÷ -0.3322	0.12	0.03	0.13		
	K1:	0.1200	0.1259 ÷ 0.2179	15.8	47.2	81.6	0.1215	0.1013 ÷ 0.1386	6.81	0.63	1.87		
	Pos 2:	0.2500	0.2376 ÷ 0.3066	6.16	8.53	22.6	0.2505	0.2467 ÷ 0.2552	0.80	0.15	0.52		
	K2:	-	-0.1045 ÷ -0.0151	47.9	59.6	90.0	-	-0.1734 ÷ -0.1198	7.69	0.84	3.02		
Ident. parameter (not normalize)	Pos 1: [mm]:	7.834	7.581 ÷ 8.093	1.78	1.50	3.31	7.833	7.819 ÷ 7.847	0.08	0.05	0.20		
	K1: [Nm]:	15680	15762 ÷ 17051	2.48	5.06	8.74	15701	15418 ÷ 15940	0.74	0.57	1.67		
	Pos 2: [mm]:	14.687	14.54 ÷ 15.35	1.34	1.71	4.53	14.694	14.649 ÷ 14.745	0.16	0.12	0.42		
	K2: [Nm]:	11900	12537 ÷ 13789	3.15	10.51	15.9	11933	11572 ÷ 12322	1.33	0.99	3.55		
Cost function value:	-	0.0010 ÷ 0.0750	-	-	-	1.6·10 ⁻⁴	0.1·10 ⁻⁴ ÷ 5.6·10 ⁻⁴	-	-	-	-		
Number of iteration:	-	9 ÷ 32	44.7	-	-	29.72	24 ÷ 37	10.4	-	-	-		
Number of cost-function evaluation:	-	784	44.7	-	-	743	600 ÷ 925	10.4	-	-	-		

Tabella 7.3. Trave con due molle rotazionali: confronto dei risultati ottenuti tra il CLM e l' algoritmo DE.

8. INTRODUZIONE DI UNA APPROSSIMAZIONE QUADRATICA NELL'ALGORITMO DE

8.1 INTRODUZIONE

Come già sottolineato in precedenza, i metodi di ricerca globale, quali algoritmi genetici ed evolutivi, hanno lo svantaggio di richiedere un alto numero di valutazioni della funzione costo in quanto essi sono basati sulla ricerca random del minimo senza utilizzare informazioni sulla forma della funzione costo (quali, ad esempio, il gradiente della funzione stessa). Inoltre, dopo essere giunti in prossimità del minimo globale, sono necessarie numerose iterazioni per ottenere la precisione richiesta dal test di convergenza. Nel caso in cui la funzione costo abbia un unico minimo (globale), i metodi di ricerca globale risultano essere troppo onerosi e possono essere sostituiti a favore di metodi basati sul gradiente della funzione.

Invece di condurre la ricerca del minimo direttamente sulla funzione costo, metodologie quali la *Response Surface Methodology (RSM)* sono basate su successive approssimazioni della funzione costo. Nella formulazione

classica, la superficie di risposta è ottenuta combinando termini polinomiali fino al secondo ordine, che approssimano la funzione errore originaria in punti prefissati (sampling points). La teoria del progetto degli esperimenti (*DOE*) consente di scegliere tali punti basandosi su criteri di tipo statistico [Khuri & Cornell 1996].

Il costo computazionale di tali metodi è drasticamente ridotto rispetto ad un metodo di ricerca globale, garantendo al *RMS* una rapida convergenza quando la funzione costo presenta un solo minimo. Nei casi di più minimi locali, l'uso della cosiddetta *General Response Surface Method (GRSM)* [Alotto et al., 1997] può solo parzialmente essere utilizzata in presenza di più minimi, in quanto quest'ultima metodologia è applicabile quando il problema presenta un modesto numero di parametri da ottimizzare, mentre la sua efficienza decresce rapidamente con un alto numero di variabili [Pahner, 1998].

Va inoltre sottolineato che nei problemi di identificazione strutturale, raramente è nota a priori la forma della funzione costo, in quanto essa è definita implicitamente; notevole importanza riveste quindi la scelta dell'algoritmo, che deve essere effettuata in funzione della presenza o meno di minimi locali.

In questo paragrafo la metodologia della superficie di risposta è stata introdotta nell'algoritmo DE per ottenere migliori prestazioni nel processo di identificazione strutturale.

Partendo dall'architettura dell'algoritmo DE, il processo di *Mutation* è stato modificato: un nuovo vettore di parametri viene ottenuto ricercando il minimo di una superficie di risposta del secondo ordine ottenuta da punti valutati all'iterazione precedente. La velocità di convergenza risulta essere notevolmente superiore, in particolare, viene drasticamente ridotto il numero di iterazioni necessarie per ottenere la precisione richiesta quando si è già raggiunto un intorno del minimo globale. D'altra parte, l'algoritmo trova comunque il minimo globale della funzione costo, in quanto basato sulla ricerca di molti punti simultaneamente, così come nell'impostazione originaria

dell'algoritmo evolutivo. Non per ultimo, quando la funzione costo presenta un solo minimo, l'introduzione della superficie di risposta porta a convergenza in un ridotto numero di iterazioni.

Nel paragrafi successivi viene descritta brevemente la metodologia della Superficie di Risposta; successivamente si presenta l'algoritmo denominato DE-Q, nel quale viene modificata l'operazione di *Mutation*.

Vengono quindi presentati i risultati ottenuti con l'algoritmo proposto e confrontati con quello originale nel caso del ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo e nei confronti di una applicazione ad un caso reale, costituita dal viadotto Incoronata sull'Autostrada Salerno-Reggio Calabria (strutture già descritte nei Capitoli precedenti).

8.2 LA METODOLOGIA DELLA SUPERFICIE DI RISPOSTA

La metodologia della superficie di risposta si basa sulla approssimazione della funzione originaria, implicitamente o esplicitamente definita, utilizzando semplici e esplicite funzioni.

La metodologia della superficie di risposta è stata originariamente proposta per ottenere le migliori condizioni per processi chimici, durante i quali alcune funzioni dovevano essere ottimizzate. L'uso della RSM è stata successivamente estesa ad altri campi di applicazione, specialmente nelle applicazioni ingegneristiche che comportavano analisi complesse [Box & Draper, 1987]. In tali casi, infatti, la superficie di risposta può essere utilizzata per ridurre il costo computazionale. Khuri & Cornell [1996] presentarono recentemente la metodologia per applicazioni di affidabilità strutturale.

L'ipotesi per l'utilizzo della RSM è l'esistenza di una funzione dei parametri da ottimizzare x per ogni combinazione dei parametri ai quali corrisponde un valore della funzione costo H , cioè:

$$H = g(\mathbf{x}) \quad (8.1)$$

dove \mathbf{x} rappresenta il vettore avente dimensione D , contenenti i parametri da cercare e $g(\mathbf{x})$ è la funzione di risposta.

Se $g(\mathbf{x})$ è una funzione continua e differenziabile, può essere rappresentata localmente mediante una serie di Taylor nell'intorno di un punto arbitrario \mathbf{x} :

$$H_k = g(\mathbf{x}_k) + \nabla g(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p} \nabla^2 g(\mathbf{x}_k) \mathbf{p} \quad (8.2)$$

dove $\nabla g(\mathbf{x}_k)$ e $\nabla^2 g(\mathbf{x}_k)$ rappresentano il gradiente e la matrice Hessiana della funzione.

Quando la funzione costo non è definita esplicitamente, è più conveniente arrestare l'Equazione 8.2 ad un prestabilito grado.

Nella metodologia classica della RSM, si utilizza una combinazione di termini di primo e secondo grado, valutata in determinati punti nel seguito denominati *sampling points*.

Il secondo grado è comunemente utilizzato nei problemi strutturali in quanto consente una accuratezza accettabile con un basso costo computazionale. Gradi più elevati non sono solitamente utilizzati in quanto necessitano di un onere computazionale maggiore, dovuto ai numerosi coefficienti che devono essere stimati, senza aumentare significativamente la precisione del risultato. Al contrario, alcuni autori adottano approssimazioni quadratiche senza i termini misti e pertanto assumendo sviluppi polinomiali incompleti.

Adottando un'approssimazione quadratica, l'Equazione 8.2 può essere riscritta nel seguente modo:

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{L} \mathbf{x} + \beta_0 \quad (8.3)$$

dove \mathbf{Q} è una matrice di dimensione $D \times D$ contenente i coefficienti dei termini quadratici, \mathbf{L} è un vettore D dimensionale dei coefficienti lineari e β_0 è il termine costante.

Khuri & Cornell [1996] proposero la seguente procedura per ottenere una relazione analitica tra il valore dei coefficienti della superficie di risposta e un numero limitato di sampling points.

Senza perdita di generalità, nel seguito si farà riferimento ad una funzione di due variabili (corrispondente ad un processo di identificazione di 2 parametri, x_1 e x_2).

Scelta una superficie di risposta contenente termini al più di secondo grado, la funzione costo può essere espressa nel modo seguente

$$H(x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_2^2 + \beta_5 x_1 x_2 \quad (8.4)$$

dove i coefficienti β_i sono incogniti.

Date NS osservazioni della funzione costo, l'equazione 8.4 può essere espressa mediante una notazione lineare:

$$\mathbf{H} = \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (8.5)$$

dove:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & x_{2,1} & (x_{1,1})^2 & (x_{2,1})^2 & x_{1,1} x_{2,1} \\ 1 & x_{1,2} & x_{2,2} & (x_{1,2})^2 & (x_{2,2})^2 & x_{1,2} x_{2,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1,NS} & x_{2,NS} & (x_{1,NS})^2 & (x_{2,NS})^2 & x_{1,NS} x_{2,NS} \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

e

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_1(x_{1,1}, x_{2,1}) \\ H_2(x_{1,2}, x_{2,2}) \\ \vdots \\ H_{NS}(x_{1,NS}, x_{2,NS}) \end{bmatrix}$$

Il vettore $\boldsymbol{\beta}$ contiene i parametri incogniti che definiscono la superficie di risposta.

Per una migliore definizione della superficie di Risposta, il numero di osservazioni NS deve essere ridondante, cioè superiore al numero di coefficienti β_i da definire.

I valori di tali parametri possono essere stimati attraverso il metodo dei minimi quadrati, ottenendo la seguente relazione:

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{H}. \quad (8.7)$$

In tale formulazione, tutti i sampling points \mathbf{x} hanno il medesimo peso. D'altra parte, una buona superficie di risposta è definita in modo tale da ottenere migliori performance in prossimità della soluzione. Per questo motivo, in [Myers & Montgomery, 1995; Kaymax & McMahon, 2005] è stata proposta la seguente formulazione:

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{H}, \quad (8.8)$$

dove \mathbf{W} è una matrice diagonale di dimensioni $NS \times NS$ contenente i coefficienti peso. Per determinare i termini w_i di tale matrice, può essere utilizzata la seguente espressione

$$w_i = \exp\left(-\frac{g(\mathbf{x}_i) - H_{best}}{H_{best}}\right) \quad (8.9)$$

dove H_{best} è così definito:

$$H_{best} = \min(g(\mathbf{x}_i)) \quad (8.10)$$

Sono stati proposti diversi algoritmi in letteratura per selezionare appropriatamente i sampling points \mathbf{x} , necessari per definire la matrice \mathbf{Z} . Per tali strategie si rimanda a [Khuri & Cornell 1996; Box & Draper, 1987]. Per quanto riguarda lo scopo della seguente trattazione, la scelta degli esperimenti viene determinata attraverso l'algoritmo DE, nel quale viene introdotta la superficie di Risposta.

8.3 ALGORITMO DE CON APPROSSIMAZIONE QUADRATICA

La metodologia della Superficie di Risposta viene ora introdotta nell'algoritmo Evolutivo DE. Per semplicità di notazione verrà chiamato con DE-Q l'algoritmo modificato mentre verrà utilizzato il nome DE per quello nella sua formulazione originale.

Le fasi salienti dell'algoritmo DE-Q sono riportate in Figura 8.1. e descritte nel seguito.

Si sceglie la popolazione iniziale in modo casuale a partire da una distribuzione uniforme su tutto lo spazio dei possibili valori assunti dai parametri. Ad ogni iterazione, i vettori sono suddivisi in NP gruppi (dove NP è il numero totale dei punti), ognuno contenenti NS vettori.

Per ogni gruppo, è possibile determinare la Superficie di Risposta che approssima la funzione errore secondo l'Equazione 8.3. Per ogni superficie, i coefficienti β possono essere ottenuti mediante la formulazione (8.7) o (8.8). Successivamente si controlla se la superficie ottenuta presenta o meno un minimo, valutando i segni delle curvature principali, mediante gli autovalori della matrice \mathbf{Q} .

Se la superficie di risposta presenta un minimo, il nuovo *mutant vector*

è ottenuto come il vettore che fornisce il minimo valore della Superficie di Risposta di secondo grado, determinato a partire dai vettori della popolazione precedente:

$$\mathbf{v}_{i,G+1} = \mathbf{x}^* \mid H(\mathbf{x}^*) = \min g(\mathbf{x}), \quad (8.11)$$

Se invece la superficie di Risposta non presenta un minimo, o non presenta un minimo all'interno del dominio di esistenza dei parametri da identificare, il *mutant vector* è ottenuto (come nell'algoritmo DE originale) sommando ad ogni vettore la differenza pesata della differenza di altri due vettori. Le successive fasi di *Crossover*, e di *Selection* sono le stesse dell'algoritmo DE, ma le caratteristiche dell'algoritmo proposto, è importante notare quanto segue:

- Dal momento che non è nota a priori la forma della funzione costo, nel caso in cui essa presenta un solo minimo (globale) è possibile utilizzare già dalla prima iterazione l'approssimazione quadratica ed ottenere rapida convergenza.
- Se invece la funzione presenta più minimi, l'utilizzo di numerosi vettori di parametri contemporaneamente consente di mantenere i caratteri che contraddistinguono l'algoritmo DE, evitando così i minimi locali;
- D'altra parte, quando nel processo di ottimizzazione i punti tendono a concentrarsi nei pressi del minimo globale, allora esisterà una funzione con concavità positiva che approssima la funzione costo. Data l'alta efficienza in termini computazionali del RSM, la velocità di convergenza aumenta così come l'accuratezza.
- Se la superficie di risposta ha concavità positiva ma i punti che generano tale superficie non si trovano in prossimità dello stesso minimo, la funzione costo valutata in tale punto presenterà, in generale, un valore maggiore rispetto ai punti generati dall'iterazione precedente,

e quindi potrà essere eliminato durante l'operazione di *Selection* oppure, in alternativa, costituisce un nuovo punto, combinazione di altri della popolazione precedente, non dissimile a quanto può essere ottenuto mediante la combinazione lineare.

- Infine va sottolineato che la procedura ha vantaggi rispetto all'applicazione in successione dell'algoritmo DE (in una prima fase) seguito dall'approssimazione quadratica (in prossimità del minimo). Infatti, in questi casi, risulta in genere assai difficile decidere quando terminare la prima procedura per iniziare la seconda, senza ottenere una sostanziale riduzione dell'onere computazionale. Utilizzando l'algoritmo sopra descritto, invece, la decisione di adottare la procedura evolutiva o la procedura RMS risulta essere determinata a priori, controllando la concavità della funzione quadratica approssimante.

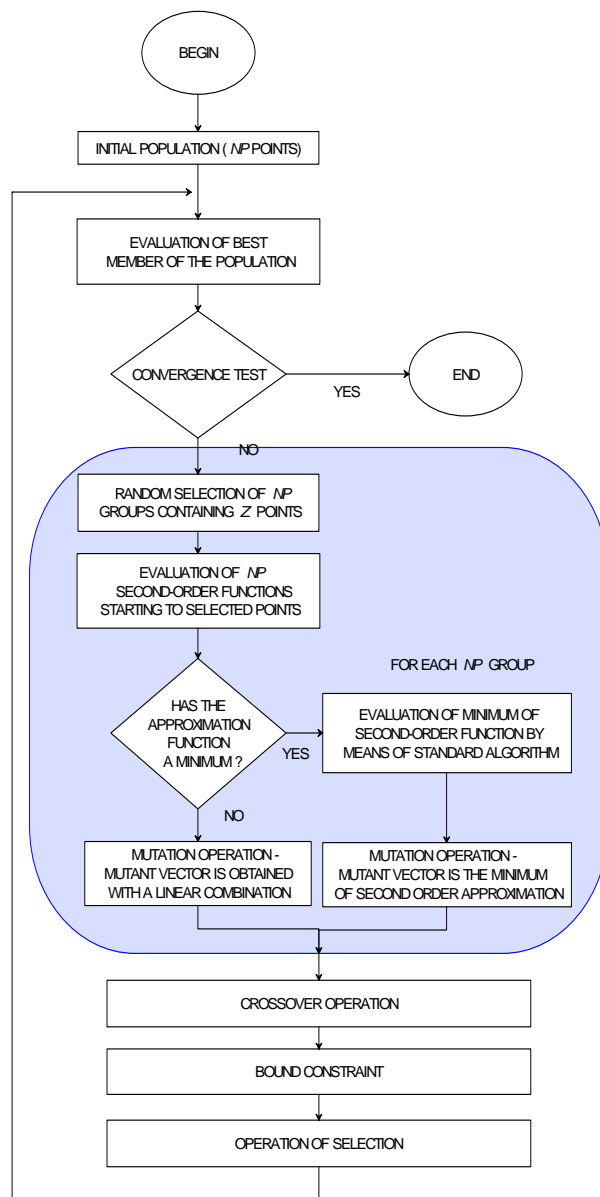


Figura 8.1. Diagramma delle operazioni principali del Differential Evolution Algorithm con approssimazione quadratica.

8.4 1° ESEMPIO: IDENTIFICAZIONE DI UNA STRUTTURA DA PONTE ACCIAIO-CALCESTRUZZO

Il nuovo algoritmo proposto nel paragrafo precedente viene messo a confronto con il Differential Evolution Algorithm nella sua formulazione originale. Nel seguito sono riportati i risultati provenienti dall'identificazione delle caratteristiche meccaniche del ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo, descritta nel Capitolo 6 e riportata in Figura 8.2.

Il processo di identificazione è stato condotto assumendo 4 parametri incogniti: il valore del modulo elastico del calcestruzzo (E), la rigidezza verticale K_v e orizzontale K_h degli apparecchi d'appoggio e la massa m per unità di superficie dei carichi permanenti portati (supponendo quindi incognito il valore della massa del ballast e della pavimentazione stradale).

Sono stati considerati noti i primi 4 modi di vibrare della struttura (due flessionali nel piano verticale, il primo modo torsionale e un modo con spostamenti prevalentemente nel piano orizzontale). In particolare, si assume che siano note le frequenze modali ω_i e, come in un tipico test dinamico in situ, le componenti delle deformate modali in 9 punti sull'impalcato (φ_i). Sono state considerate le due disposizioni dei punti di misura secondo la Configurazione B (Figura 8.3b).

La funzione costo è definita dalla differenza relativa tra i valori di frequenza e deformata modale ottenuti dal modello (ω_i, φ_i) e quelli sperimentali quelli forniti da una prova dinamica ($\bar{\omega}_i, \bar{\varphi}_i$), secondo la relazione:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[w_1 \left(\frac{\omega_i - \bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i} \right)^2 + w_2 \sum_{j=1}^f \left(\frac{\varphi_{ij} - \bar{\varphi}_{ij}}{\bar{\varphi}_{ij}} \right)^2 \right], \quad (8.12)$$

dove $N = 4$ è il numero di modi propri considerati e $f = 9$ è il numero delle componenti delle rispettive deformate modali. I parametri w_1, w_2 sono

rispettivamente i pesi per frequenze e deformate modali nella funzione errore, assunti pari a $w_1 = 1$, $w_2 = 1/9$.

Si sono effettuate analisi 50 analisi partendo sia da frequenze e deformate modali esatte che utilizzando dati pseudo-sperimentali generati artificialmente. I risultati, in termini di valor medio, massimo e minimo dei

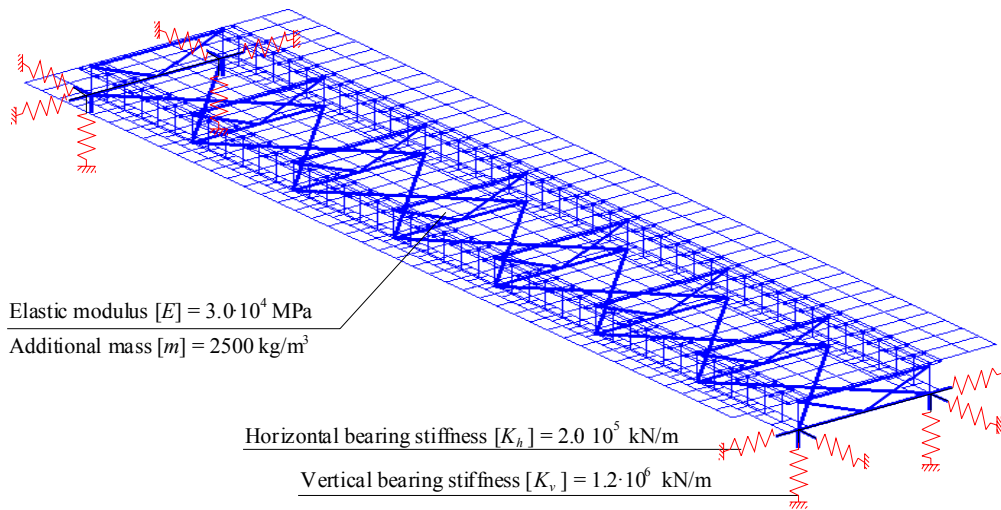


Figura 8.2. Ponte in struttura mista Acciaio-Calcestruzzo: modello FEM con valori dei parametri ricercati durante il processo di ottimizzazione.

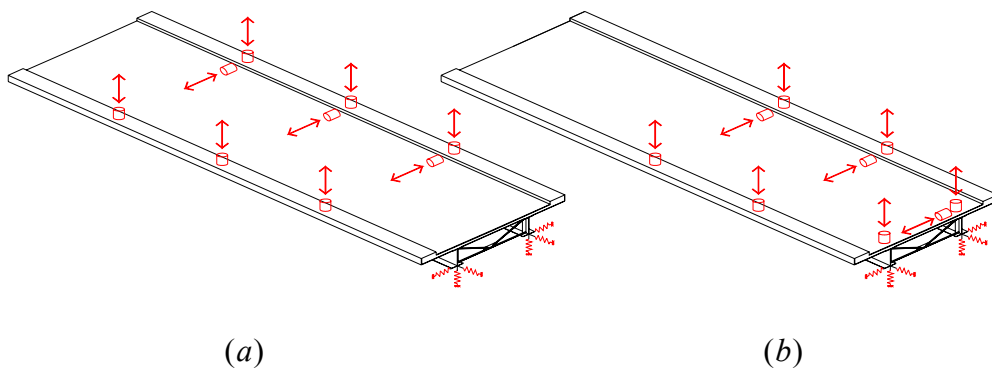


Figura 8.3. Ponte in struttura mista Acciaio-Calcestruzzo: posizione dei punti di misura: (a) configurazione A e (b) configurazione B.

parametri identificati e il numero di iterazioni necessarie per la convergenza, sono riportati in Tabella 8.1 per quanto riguarda i dati di input esatti e in Tabella 8.2 utilizzando i dati pseudo-sperimentali.

Dalle tabelle è possibile notare che l'adozione dei medesimi criteri di convergenza adottati per gli algoritmi DE e DE-Q producono analoghi risultati in termini di accuratezza (si vedano i coefficienti di variazione dei parametri identificati). Rilevante, invece, è la riduzione del numero di iterazioni necessarie per la convergenza: sono necessarie, mediamente, un numero di iterazioni inferiore del 30 rispetto all'algoritmo DE originale se si utilizzano dati pseudo-sperimentali, mentre partendo da dati esatti il numero medio di iterazioni diventa circa un terzo (17 iterazioni effettuate con DE-Q, 46 con l'algoritmo DE).

DE	Valore Esatto	Valore Massimo	Valore Minimo	Valor Medio	C.V. [%]
<i>E</i> [10^4 MPa]	3.20	3.99	2.47	3.15	11.2
<i>K_h</i> [10^5 kg/m]	2.00	2.65	1.82	2.11	6.37
<i>K_v</i> [10^6 kg/m]	1.20	1.39	0.94	1.19	9.72
<i>M</i> [10^3 kg/m ³]	2.50	2.68	2.30	2.50	3.73
N° di iterazioni	-	56	22	46.3	-

DE-Q	Valore Esatto	Valore Massimo	Valore Minimo	Valor Medio	C.V. [%]
<i>E</i> [10^4 MPa]	3.20	4.04	2.28	3.26	16.62
<i>K_h</i> [10^5 kg/m]	2.00	2.58	1.75	2.07	7.11
<i>K_v</i> [10^6 kg/m]	1.20	1.33	0.97	1.17	9.12
<i>M</i> [10^3 kg/m ³]	2.50	2.73	2.31	2.50	5.03
N° di iterazioni	-	36	8	16.7	-

Tabella 8.1. Ponte in struttura mista Acciaio-Calcestruzzo - configurazione B dei punti di misura: analisi statistica dei risultati ottenuti partendo da dati di input esatti.

DE	Valore Esatto	Valore Massimo	Valore Minimo	Valor Medio	C.V. [%]
E [10^4 MPa]	3.20	3.90	2.55	3.25	11.23
K_h [10^5 kg/m]	2.00	2.63	1.76	2.11	12.27
K_v [10^6 kg/m]	1.20	1.37	0.96	1.25	13.34
M [10^3 kg/m ³]	2.50	2.72	2.30	2.56	3.38
N° di iterazioni	-	42	12	32.6	-

DE-Q	Valore Esatto	Valore Massimo	Valore Minimo	Valor Medio	C.V. [%]
E [10^4 MPa]	3.20	3.68	2.50	3.24	11.43
K_h [10^5 kg/m]	2.00	2.67	1.90	2.30	11.20
K_v [10^6 kg/m]	1.20	1.25	0.89	1.06	13.50
M [10^3 kg/m ³]	2.50	2.69	2.37	2.56	3.81
N° di iterazioni	-	35	15	21.6	-

Tabella 8.2. Ponte in struttura mista Acciaio-Calcestruzzo - configurazione B: analisi statistica dei risultati ottenuti da dati pseudo-sperimentali.

8.5 2° ESEMPIO: OTTIMIZZAZIONE DEI PARAMETRI MECCANICI DEL VIADOTTO INCORONATA SULL'AUTOSTRADA SA-RC

Lo studio della caratterizzazione dei parametri meccanici riguarda il Viadotto Incoronata (Autostrada A3 Salerno-Reggio Calabria dal km 59+811 al km 61+025) attualmente in fase di ampliamento (Figura 5.1). Le caratteristiche dinamiche dei due ponti oggetto di indagine, gemelli a tre campate, sono state esaminate nel Capitolo 5, ottenute registrando le accelerazioni indotte dal traffico veicolare agente su uno dei due impalcati.

I parametri modali di riferimento sono le prime 7 frequenze proprie e le relative forme modali determinate a partire dalle accelerazioni acquisite

sperimentalmente, ottenute mediante algoritmi a sottospazi (si veda il Capitolo 3). In Tabella 8.3 sono riportate le frequenze proprie sperimentali.

8.5.1 Modello agli Elementi Finiti

Il comportamento dinamico del ponte è stato studiato realizzando un semplice modello agli elementi finiti delle travi a cassone, costituito da elementi tipo “shell” a comportamento elastico lineare (Figura 8.4). Gli appoggi sono stati modellati considerando due diversi valori di rigidezze in corrispondenza delle pile centrali e laterali. Per entrambe sono stati vincolati rigidamente gli spostamenti verticali (data l’elevata rigidezza assiale), mentre sono state introdotte molle elastiche orizzontali trasversali in grado di simulare la deformabilità delle pile stesse e degli appoggi, con rigidezza differente tra le pile centrali e quelle laterali in quanto quest’ultime sono sensibilmente più corte delle altre.

La massa che grava sul ponte è stata aggiunta alla massa della soletta superiore, così ottenendo un valore di peso specifico equivalente su quest’ultima. Nella carreggiata chiusa al traffico, durante le prove sperimentali, nella carreggiata Sud (Ponte 2) era presente anche il peso del nuovo impalcato metallico in costruzione con conseguente incremento di massa. Il processo di identificazione è stato imposto per determinare i valori delle rigidezze K_{h1} e K_{h2} delle molle in corrispondenza delle pile, il Modulo Elastico del Calcestruzzo E , e la massa m aggiuntiva sul Ponte 2.

La funzione costo è definita dalla differenza relativa tra i valori di frequenza e deformata modale ottenuti dal modello (ω_i, ϕ_i) e i valori sperimentali forniti da una prova dinamica $(\bar{\omega}_i, \bar{\phi}_i)$, secondo la relazione:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[w_1 \left(\frac{\omega_i - \bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i} \right)^2 + w_2 NMD_i \right], \quad (8.13)$$

dove si è introdotto il *Normalized Modal Difference (NMD)* ottenibile dalla seguente espressione:

$$NMD_i = \sqrt{\frac{1 - MAC(\boldsymbol{\varphi}_i, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i)}{MAC(\boldsymbol{\varphi}_i, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i)}} \quad (8.14)$$

I parametri w_1 , w_2 sono rispettivamente i pesi per frequenze e deformate modali nella funzione errore, assunti pari a $w_1 = w_2 = 1$.

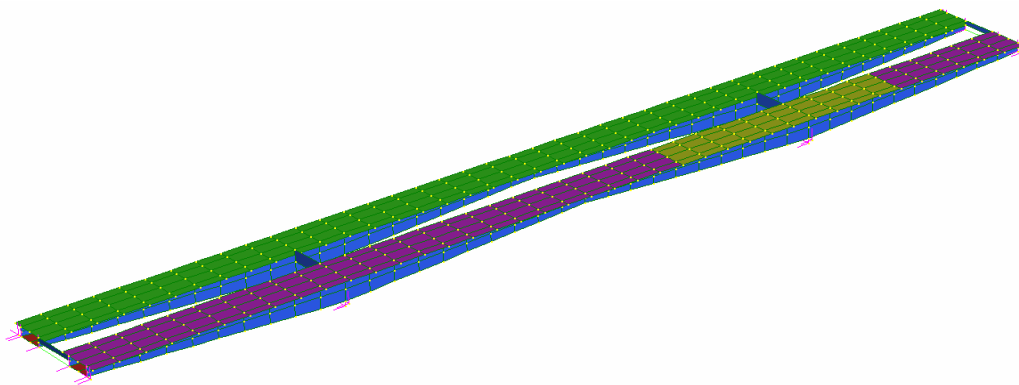


Figura 8.4. Viadotto Incoronata sull'Autostrada Salerno-Reggio Calabria: modello agli Elementi Finiti.

Modo	Frequenza Sperimentale	Frequenza Analitica	Errore
	[Hz]	[Hz]	%
1	0.97	0.99	-2.45
2	1.15	1.31	-12.43
3	1.44	1.33	+8.74
4	1.69	1.69	+0.27
5	2.08	1.78	+16.78
6	2.41	2.62	-8.09
7	2.96	2.65	+11.63

Tabella 8.3 Frequenze proprie identificate e ottenute dal processo di ottimizzazione parametrica.

BIBLIOGRAFIA

- Alaggio, R., Benedettini, F. & Gattulli, V. 2003. Modal testing of retrofitted concrete arch bridge for structural identification and condition assessment. *XVI congresso AIMETA*. Ferrara, settembre 2003, su cd.
- Alotto, P., Gaggero, M. & Molinari, G. 1997. A design of experiment and statistical approach to enhance the generalized response surface method in the optimization of multim minima problems. *IEEE Transaction on Magnetics*, 33(2):1896-1899.
- Allemang, R.J. & Brown, D-L. 1998. A unified matrix polynomial approach to modal identification. *Journal of sound and Vibration*, 211(3), 301-322.
- Andersen, P. 1997. Identification of civil engineering structures using ARMA models. *PhD. Thesis*. Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark.
- Aoki, M. 1987. *State space modeling of time series*. Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- ANSYS, *Robust simulation and analysis software*. Available at: <http://www.ansys.com> Release 10.0 ANSYS Incorporated, 2001.
- Balmès, E. 2002. *Structural Dynamics Toolbox User Manual*. Paris: scientific software group.
- Balmes, E. 1997. New results on the identification of normal modes from experimental complex modes. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 11(2): 229-243.

- Barker, C. 2002. Some observations on the nature of the mechanism that drives the self-excited lateral response of footbridges. *Proceeding of Footbridge 2002*, Paris, France, November 20-22.
- Bedant, J.S. & Piersol, A.G. 1993. *Engineering application of correlation and spectral analysis*. New York: John Wiley & Son.
- Benveniste A. & Fuchs J.J. 1985. Single sample modal identification on a nonstationary stochastic process. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(1) 66-74.
- Bittanti, S. 2000. *Teoria della predizione e del filtraggio*. Pitagora editrice, Bologna.
- Bittanti, S. 2002. *Identificazione dei modelli e sistemi adattivi*. Pitagora editrice, Bologna.
- Bodeux, J.B. & Golinval, J.C. 2001. Application of ARMAV model to the identification and damage detection of mechanical and civil engineering structures. *Smart Materials and Structures*. 10, 479-489.
- Bonato, P., Ceravolo, R. & De Stefano, A. 1998. The use of wind excitation in structural identification. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 74-76: 709-718.
- Box, G.E.P. & Draper, N.R. 1987. *Empirical Model-Building and Responce Surfaces*, John Wiley & Sons.
- Casciati F., Casciati, S. & Faravelli, L. 2003. Damage detection via Response surface Approximation. *Applications of statistics and Probability in Civil Engineering*. 1: 511-516
- Ceccoli, C., Diotallevi, P.P. & Tullini, N. 2001. Identificazione strutturale di un fabbricato a pareti portanti realizzate con blocchi cassero in legno-cemento. *X convegno nazionale ANIDIS*, Potenza e Matera, 9-13 settembre, su cd.
- Cerri, M.N. & Vestroni, F. 2003. Identification on damage due open cracks by changes of measured frequencies. *XVI Congresso AIMETA*, Ferrara, settembre 2003, su cd.
- Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. & Yao J. 1998. A continuous cracked beam vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, 239(1): 57-67.
- Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. & Yao J. 2001. Vibration of a beam with breathing crack. *Journal of Sound and Vibration*, 239(1): 57-67.

- Clemente, P., Marulo, F., Lecce, L. & Bifulco, A. 1998. Experimental modal analysis of the Garigliano cable-stayed bridge. *Soil dynamics and earthquake engineering*, 17: 485–493.
- Cole, H.A. 1968. On-the-line analysis of random vibration. *AIAA*.
- Diotallevi P.P, Manfroni O., & Tullini N., 2002. On site dynamic test of a long span timber footbridge, *Proceeding of Footbridge 2002*, Paris, France, November 20-22.
- Diotallevi, P.P. & Poluzzi, R. 1997. Sperimentazione dinamica ed identificazione strutturale: risultati salienti e considerazioni critiche relative ad un programma di prove eseguite sui viadotti autostradali. *Giornate Aicap '97*, Roma, 23-25 ottobre, su cd.
- Diotallevi, P.P. & Tullini, N. 2001a. Prove di vibrazione armonica forzata su costruzioni pubbliche di tipo strategico ubicate in diverse località della Romagna. *X convegno nazionale ANIDIS*, Potenza e Matera, 9-13 settembre, su cd.
- Diotallevi, P.P. & Tullini, N. 2001b. Prove di vibrazione armonica forzata e identificazione strutturale di un ponte in c.a. ad arco di grande luce dopo cinquanta anni di esercizio. *X convegno nazionale ANIDIS*, Potenza e Matera, 9-13 settembre, su cd.
- Diotallevi, P.P., Paladin, A., Tralli, A. & Tullini, N. 1999. Identificazione strutturale di un edificio di muratura sottoposto a prove di vibrazione forzata. *IX convegno nazionale ANIDIS*, Torino, 20-23 settembre, su cd.
- Ewins, D.J. 2000. *Modal Testing: Theory and Practice*. New York: John Wiley & Sons.
- Faravelli L, Materazzi F, & Rarina M. 2005. Genetic algorithms for structural identification, *Proceedings of ICOSSAR 2005*, Roma, 19-23 giugno, su CD.
- Faravelli, L., Farina, M. and Marazzi, F. 2005. Genetic Algorithm for structural identification, *Proceedings of ICOSSAR 2005*, June 19-23, Rome, Italy.
- Farrar, C.R. & James III, G.H. 1997. System identification from ambient vibration measurements on a bridge. *Journal of sound and Vibration*, 205(1), 1-18.
- Fox, R. & Kapoor, M. 1995. Rate of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA J*, 1968; 6:2426-9.
- Friswell, M.I., Mottershead, J.E. 1995. *Finite element model updating in structural dynamics*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers; 1995.
- Garibaldi, L., Marchesiello, S. & Bonisoli, E. 2003. Identification and up-dating over the Z24 benchmark. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 17(1), 153-161.

- Gentile, C. & Matinez y Cabrera, F. 2001. Dynamic assessment of a curved cable-stayed bridge at the Malpensa 2000 Airport, Milan, Italy. *Structural Engineering International*, 1:52-58
- Goldberg, D.E. 1989. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley.
- Grewal, M.S. & Andrews, A. P. 2001. *Kalman filtering. Theory and practice using Matlab*, John Wiley & Sons, Inc.
- Guidorzi, R., 2003. *Multivariable System Identification*, Bnomia University Press, Bologna.
- Hrstka O., Kucerova A., Leps M., & Zeman J. 2003. A competitive comparison of different types of evolution algorithms, *Computers and Structures*, 81, 1979-1990.
- Iacono, C., Sluys L. J., & van Mier J. G. M.. 2006. Estimation of model parameters in nonlocal damage theories by inverse analysis techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195: 7211–7222.
- Iacono, C., Sluys L. J., & van Mier J. G. M.. 2004. Parameter identification of computational fracture models. *FraMCoS – 5, Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures Conference*, Colorado, USA, April 12-16.
- Imregun, M., Sanliturk, K.Y., & Ewins, D.J. 1995. Finite element model updating using frequency response function data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 9 (2): 203-213
- Ingberg, L. & Rosen, B. 1992. Genetic algorithms and very fast simulated reannealing: a comparison. *J. of Mathematical and Computer Modeling*, 16 (11): 87-100.
- Kaymax I. & McMahan, C.A. 2005. A response surface method based on weighted regression for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics* 20(1): 11-17.
- Kapetanios, G. 2003. A note on iterative least-squares estimation method for ARMA and VARMA models. *Economics Letters*, 79: 305-312.
- Khuri, A. & Cornell, J.A. 1996. *Response Surfaces. Designs and Analyses*. Marcel Dekker Inc., New York.
- Kyprianou, A., Worden, K. & Panet, M. 2001. identification od hysteretic system using the differential evolution algorithm. *Journal of sound and Vibration*, 248(2), 289-314.

- Larbi, L. & Lardies, J. 2000. Experimental modal analysis of a structure excited by a random force, *Mechanical System and Signal Processing*, 14(2), 181-192.
- Ljung, L., 1987. *System Identification - Theory for the User*, Prentice-Hall.
- Maeck, J. & De Roeck, G. 1999. Damage detection on a prestressed concrete bridge and RC beams using dynamic system identification. In: *Proceedings DAMAS 99*. Dublin, Ireland: Trans Tech Publications. pp.320-327.
- Maia, N.M.M., Silva J.M.M. & He J. 1997. *Theoretical and experimental modal analysis*. Somerset, England: Research Studies Press.
- MATLAB. 2004 *Matlab Optimization Toolbox User's Guide*. <http://www.mathworks.com>, Release 14. The Mathworks.
- Mazzotti, C., Vincenzi, L., Savoia, M. & Poluzzi, R. 2004. Identificazione di una struttura da ponte acciaio-calcestruzzo mediante prove di vibrazione forzata, *XI convegno ANIDIS*, Genova, 25-29 gennaio, su CD.
- Mazzotti, C. & Vincenzi L. 2005. Structural identification of a steel structure by forced vibrations, *ICOSSAR - International conference of structural safety and reliability*, Rome, Italy, June 19-22.
- Mazzotti, C., Ferracuti, B. & Savoia M. 2004. An experimental study on FRP-concrete delamination. *FraMCoS - 5, Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures Conference*, Colorado, USA, April 12-16.
- Myers, R.H. & Montgomery, D.C. 1995. *Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments*, Wiley, New York.
- Pahner, U. 1998. A general design tool for the numerical optimization of electromagnetic energy transducer. *PhD Thesis*. Katholieke Universiteit, Leuven, Belgium.
- Peeters, B. & De Roeck, G. 1999. Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis, *Mechanical Systems And Signal Processing*, 13 (6): 855-878
- Peeters, B. 2000. System identification and damage detection in civil engineer, *PhD Thesis*, Katholieke Universiteit, Leuven, Belgium.
- Rivella, D., Sabia, D. & Sabia, L. 2004. Analisi della risposta dinamica di un ponte strillato con eccitazione ambientale, *XI congresso Nazionale ANIDIS*, Genova, 25-29 gennaio, su CD.
- Sabia, L. 1997. Identificazione strutturale in regime lineare e non-lineare. *Phd Thesis*. Politecnico di Torino, Italia.

- Savoia, M. & Vincenzi, L. 2005. Differential evolution algorithm for dynamic structural identification, *ICOSSAR - International conference of structural safety and reliability*, Rome, Italy, June 19-22.
- Schwefel, H.P. 1995. *Evolution and Optimum Seeking*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Simoni, L. & Secchi, S. 2003. Sull'uso di minimizzatori accoppiati in problemi di identificazione parametrica. *XVI Congresso AIMETA*, Ferrara, settembre 2003, su cd.
- Slowik, V., Villmann, B. & Bretschneider, N. 2006. Computational aspects of inverse analyses for determining softening curves of concrete. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (52): 7223-7236.
- Smail, M. & Thomas, M. 1999. Assessment of optimal ARMA model orders for modal analysis. *Mechanic system and signal processing*. 13(5): 803-819.
- Smail, M., Thomas, M. & Lakis, A. 1999. ARMA models for modal analysis: effect of model orders and sampling frequency. *Mechanic system and signal processing*. 13(6): 925-941.
- Söderström, T. & Stoica, P. 1989. *System identification*. Prentice-Hall International, Hemel Hempstead, U.K.
- Storn, R. 1996. On the usage of differential evolution for function optimization. *NAFIPS 1996*, Berkeley, 519-523.
- Storn, R. & Price, K. 1997. Differential Evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, 11 (4), 341-359.
- Suykens, J.A.K. & Vandewalle, J. 2002. Coupled local minimizers: alternative formulations and extensions. *World Congress on Computational Intelligence - International Joint Conference on Neural Networks IJCNN 2002*, Honolulu, USA, pp. 2039-2043.
- Suykens, J.A.K., Vandewalle, J. & De Moor B. 2001. Intelligence and cooperative search by coupled local minimizers. *J Bifurc Chaos*; 11(8): 2133-44.
- Teughels, A., De Roeck, G. & Suykens, J.A.K. 2003. Global optimization by coupled local minimizers and its application to FE model updating, *Computers & Structures*, 81 (24-25): 2337-2351.
- Teughels A., Maeck J. & De Roeck G., 2002. Damage assessment by FE model updating using damage functions. *Computers & Structures*, 80(25), 1869-1879.

- Van Overschee, P. & De Moor B. 1993. Subspace algorithms for the stochastic identification problem. *Automatica*, 29(3): 649-660.
- Van Overschee, P., De Moor, B. 1994. N4SID: Subspace Algorithms for the Identification of Combined Deterministic-Stochastic Systems. *Automatica (special issue on Statistical Signal Processing and Control)*, 30(1): 75-93.
- Van Overschee, P. & De Moor, B. 1998. *Subspace identification for linear system – Theory, implementation, applications*. Kluwer Academic Publisher.
- Vanderplaats, G.N. 1984. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. McGraw-Hill.
- Villmann, B., Villmann, T. & Slowik, V. 2004. Determination of softening curves by backward analyses of experiments and optimisation using an evolutionary algorithm. *FraMCoS – 5*, Colorado, USA, April 12-16, 439-445.
- Vincenzi, L. & Savoia, M. 2005. Identificazione dei parametri autoregressivi di un modello ARMA Vettoriale attraverso algoritmi evolutivi. *XVII Congresso AIMETA*, 11-15 Settembre, Firenze, Italia.
- Vincenzi, L., Mazzotti, C. & Savoia, M., 2006. Modal identification of a TAV viaduct: frequency domain and time domain methods. *2° international Fib congress*. 5-8 Giugno, Napoli, Italia.