UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

ÉVALUATION DU NIVEAU DE COMPRÉHENSION DES ÉTUDIANTS ISSUS DU RENOUVEAU PÉDAGOGIQUE À L'ÉGARD DU CONCEPT DE FONCTION

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

DANIEL DROLET

OCTOBRE 2012

REMERCIEMENTS

Tout d'abord j'aimerais exprimer ma reconnaissance envers mes directeurs, Monsieur Denis Tanguay et Monsieur Fernando Hitt, pour leur disponibilité, leur patience et leurs bons conseils.

J'aimerais également remercier tous les professeurs de la section didactique du Département de mathématiques pour m'avoir inspiré tout au long de ma formation.

Je remercie les deux établissements du collégial ainsi que les enseignants de m'avoir permis de réaliser mon expérimentation. Je remercie aussi tous les étudiants qui ont participé à ce projet, car sans eux je n'aurais pu y arriver.

Pour ses encouragements, sa présence et ses idées, je tiens à remercier ma copine, Anne-Marie Taillon. Merci également à tous mes amis d'avoir pris le temps de m'écouter, autant dans les moments difficiles que dans les plus réjouissants. Je remercie particulièrement Alexandre Leboeuf pour m'avoir aidé à structurer mes idées et à corriger les fautes de français.

Finalement, je dédie ce travail à ma défunte mère avec qui j'aurais aimé partager ce moment important de mon cheminement académique.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES vi

LISTE DES TABLEAUX viii

RÉSUMÉ x

CHAPITRE I
PROBLÈME DE RECHERCHE 1

1.1 Introduction 1

1.2 Problématique 4

1.2.1 La nouvelle approche pédagogique du programme de formation de l'école secondaire québécoise 4

1.2.2 L'approche par compétence 5

1.2.3 Les nouvelles exigences en mathématique 6

1.2.4 L'importance du concept de fonction 6

1.2.5 Les situations fonctionnelles du quotidien 7

1.2.6 Le concept de fonction dans le programme québécois de formation de l'école secondaire 9

1.2.7 Les cours de calcul différentiel au collégial 11

1.2.8 Les difficultés relevées par des chercheurs à propos du concept de fonction 13

1.3 Questionnement 16

1.4 L'objectif de recherche 16

CHAPITRE II
CADRE THÉORIQUE 18

2.1 Le fonctionnement cognitif de la pensée et les registres de représentation sémiotique 18

2.1.1 L'importance des représentations en mathématique 19

2.1.2 La définition d'un registre de représentation sémiotique 22

2.1.3 L'historique de la notion de fonction : un concept dynamique 25

2.1.4 Les registres de représentation sémiotique du concept de fonction 28

2.1.5 La coordination des registres de représentation sémiotique 32

2.1.6 La coordination des registres de représentation dans le programme de formation de l'école secondaire québécoise au 2e cycle (MELS 2003)....36

2.2 En quoi consiste une « bonne » compréhension....37

2.2.1 Signification de « comprendre »....37

2.2.2 La « compréhension » dans une théorie des représentations....38

CHAPITRE III
MÉTHODOLOGIE....40

3.1 Description globale....40

3.2 Élaboration du questionnaire....40

3.2.1 Principaux éléments théoriques....41

3.2.2 Échantillon type visé par notre recherche....42

3.2.3 Reconnaissance des éléments d'un registre de représentation....43

3.2.4 Activité de traitement....49

3.2.5 Activité de conversion....57

3.3 Grille de classification....68

3.3.1 Classification de Guzmán, Hitt et Páez....69

3.3.2 Outil de classification....70

CHAPITRE IV
ANALYSE DES RÉSULTATS....74

4.1 Description globale....74

4.2 Analyse des questions....75

4.2.1 Questions de reconnaissance....75

4.2.2 Questions de traitement....95

4.2.3 Questions de conversion....102

4.3 Résultats généraux des activités cognitives....118

4.3.1 Activité de reconnaissance....118

4.3.2 Activité de traitement....120

4.3.3 Activité de conversion....122

4.3.4 Coordination de registres de représentation....122

4.4 Classement des participants selon leur niveau de compréhension....125

4.4.1 Grille de classification....125

4.4.2 Résultats de la recherche....125

4.4.3 Difficultés rencontrées et modifications apportées 126

4.4.4 Nouveaux résultats de la recherche 134

CHAPITRE V
CONCLUSION 136

5.1 Résumé de la démarche 136

5.2 Réponses aux questions de recherches 137

5.3 L'enseignement des mathématiques 138

5.4 Limites de la recherche 140

5.5 Questionnements et prolongements 141

APPENDICE A
QUESTIONNAIRE D'EXPÉRIMENTATION 142

APPENDICE B
PROGRAMME TYPE EXCEL POUR LA COMPILATION DES DONNÉES 153

RÉFÉRENCES 155

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
2.1	Structure triadique de la signifiance des signes	20
2.2	Structure dyadique de la signifiance des signes	20
2.3	Représentation visuelle d'une fraction	21
2.4	Schéma de la coordination de deux registres de représentation sémiotique	35
3.1	Graphique de la question 1a	45
3.2	Graphique de la question 1b	45
3.3	Graphique de la question 1c	45
3.4	Graphique de la question 1d	45
3.5	Les six graphiques proposés à la question 8	51
3.6	Exemples de solutions acceptables à la question 12	57
3.7	Schéma des tâches possibles de conversion	58
3.8	Graphique fonction rationnelle $y = \frac{1}{x}$	59
3.9	Graphique fonction $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$	59
3.10	Graphique fonction racine carrée $y = \sqrt{x}$	60
3.11	Graphique fonction $f(x) = \sqrt{x-1}$	60
3.12	Graphique de la fonction linéaire $y = -2x - 2$	61
3.13	Graphique de la fonction définie par parties $g(x) = \begin{cases} -2 & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$	61
3.14	La fonction de la question 7	63
3.15	Table de valeurs de la question 13	64
3.16	Schéma de la bouteille proposée à la question 9	65
3.17	Graphique de la situation de la question 10	66
3.18	Graphique de la fonction sinusoïdale $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} + 1$ de la question 6	67
3.19	Exemple d'un réseau interne du *niveau 1*	71
3.20	Exemple d'un réseau interne du *niveau 2*	71
3.21	Exemple d'un réseau interne du *niveau 3*	72
3.22	Exemple d'un réseau interne du *niveau 4*	72
3.23	Exemple d'un réseau interne du *niveau 5*	73

4.1	Production de l'étudiant 53 du profil *SN* à la quesion 1b	76
4.2	Production de l'étudiant 92 du profil *SN* à la question 1c	77
4.3	Production de l'étudiant 88 du profil *SN* à la question 1c	78
4.4	Productions de l'élève 125 du profil *SN* aux questions 1c et 1d	80
4.5	Production de l'étudiant 20 du profil *SN* à la question 2a	83
4.6	Production de l'étudiant 31du profil *SN* à la question 2a	84
4.7	Production de l'étudiant 22 du profil *TS* à la question 2a	85
4.8	Production de l'étudiant 50 du profil *SN* à la question 2a	85
4.9	Production de l'étudiant 77 du profil *SN* à la question 2b	86
4.10	Production de l'étudiant 18 du profil *TS* à la question 2b	87
4.11	Production de l'étudiant 110 du profil *SN* à la question 2b	87
4.12	Production de l'étudiant 2 du profil *TS* à la question 2b	88
4.13	Définitions de l'étudiant 23 profil *SN* et de l'étudiant 23 profil *TS*	93
4.14	Définitions de l'étudiant 14 profil *TS* et de l'étudiant 15 profil *SN*	94
4.15	Production de l'étudiant 3 du profil *SN* à la question 4	98
4.16	Graphique de la fonction à la question 11b	106
4.17	Réponse de l'étudiant 116 à la question 11b	106
4.18	Schéma du réseau interne maximum	132
4.19	Réseau de l'étudiant 41	135
4.20	Réseau de l'étudiant 132	135

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
1.1	L'évolution des principaux concepts liés à l'arithmétique et à l'algèbre au 2e cycle de la séquence *Sciences naturelles*	9
1.2	L'évolution des principaux concepts liés à l'arithmétique et à l'algèbre au 2e cycle de la séquence *Technico-sciences*	10
1.3	L'évolution des principaux concepts liés à l'arithmétique et à l'algèbre au 2e cycle de la séquence *Culture, société et technique*	10
1.4	Tableau des notions et des éléments à l'étude du cours de calcul différentiel du programme de *Sciences de la nature*	12
1.5	Tableau du contexte de réalisation et des éléments à l'étude du cours de calcul différentiel du programme de *Sciences humaines*	12
3.1	Lexique des abréviations d'un réseau interne	70
4.1	Tableau des résultats de la question 1b	77
4.2	Tableau des résultats à la question 1c	78
4.3	Tableau des résultats à la question 1d	79
4.4	Tableau global des résultats à la question 1	81
4.5	Le nombre d'étudiants qui ont réussi la tâche selon le graphique proposé..	82
4.6	Tableau des résultats à la question 2a	83
4.7	Tableau des résultats à la question 2b	86
4.8	Tableau des résultats à la question 2c	89
4.9	Tableau des résultats à la question 2d	90
4.10	Tableau global des résultats à la question 2	91
4.11	Les équations proposées selon le nombre d'étudiants qui ont réussi la tâche	91
4.12	Tableau des différentes définitions selon le nombre d'étudiants et la séquence d'enseignement	92
4.13	Tableau des résultats de la question 3	96
4.14	Tableau des résultats de la question 4	99
4.15	Tableau des résultats de la question 12	100
4.16	Tableau global des résultats de la question 11	104
4.17	Tableau des réponses à la question 11a	105
4.18	Tableau des réponses à la question 11b	107

4.19	Tableau global des résultats de la question 7	108
4.20	Tableau des résultats préliminaires de la question 7	108
4.21	Tableau des résultats de la question 9	112
4.22	Tableau des résultats de la question 10	113
4.23	Tableau global des résultats de la question 6	114
4.24	Tableau des résultats préliminaires de la question 6	114
4.25	Tableau des résultats modifiés de la question 6	118
4.26	Le nombre de tâches de l'activité de reconnaissance réussies selon le nombre d'étudiants et la séquence mathématique suivie en 5e secondaire	119
4.27	Le nombre d'étudiants qui a répondu correctement à toutes les tâches proposées selon le registre de représentation et la séquence d'enseignement	120
4.28	Tableau de répartition des étudiants par rapport à la réussite des activités de traitement	121
4.29	Tableau global des résultats des activités de conversion	122
4.30	Tableau du nombre de registres coordonnés selon le nombre d'étudiants et de leur profil d'enseignement	123
4.31	Classement des 183 étudiants de l'échantillon selon la séquence d'enseignement et leur niveau de compréhension	126
4.32	Tableau comparatif de la répartition des 183 étudiants de l'échantillon selon les deux grilles de classification	134

RÉSUMÉ

Dans le cadre du présent travail, nous avons pour but d'évaluer le niveau de compréhension des étudiants issus du renouveau pédagogique à l'égard du concept de fonction. Pour ce faire, nous avons construit un questionnaire basé sur la théorie des représentations de Duval; les registres de représentation, les trois activités cognitives et la coordination de registres de représentation. Nous avons également utilisé les travaux de Guzmán, Hitt et Páez pour choisir les différentes tâches de notre questionnaire. Nous l'avons soumis à 183 étudiants du collégial inscrits en première année du profil *Sciences de la nature*. Nous avons ensuite utilisé la grille de classification en cinq niveaux, issue des travaux de Guzmán, Hitt et Páez.

Par l'analyse des réponses des étudiants à chaque tâche, et à l'aide de la grille de classification, nous avons réussi à dresser un portrait global de la compréhension de ces étudiants. De plus, nous avons construit un programme *Excel* qui permet de visualiser l'ensemble des données du projet et ce, pour chaque participant. Cependant, nous avons apporté certaines modifications à la grille de classification de Guzmán, Hitt et Páez, après avoir évalué que les résultats n'étaient pas vraiment représentatifs de la compréhension des étudiants. De ce fait, nous avons décidé de modifier les critères en conservant une grille à cinq classes. Nous avons tenu compte du nombre d'activités réussies, du nombre de liens du réseau interne et du nombre de coordinations pour classer chaque participant.

Nous constatons que la majorité des participants de l'échantillon n'a pas une « bonne » compréhension du concept de fonction, c'est-à-dire que ceux-ci ne maîtrisent pas tout à fait les trois activités cognitives de la théorie de Duval pour certains types de fonctions, entre autres les fonctions trigonométriques et les fonctions définies par partie. De plus, ils n'ont pas un réseau interne très élaboré.

Mots clés : didactique des mathématiques, arrimage secondaire-collégial, compréhension des fonctions, programme de formation en mathématiques de 2003, représentations.

CHAPITRE I

PROBLÈME DE RECHERCHE

1.1 Introduction

Au cours du 20^{e} siècle, la communauté internationale a vécu un boom économique, technologique et scientifique. Plusieurs pays ont contribué à ce développement, dont les États-Unis, l'Union Soviétique, l'Angleterre, la France et l'Allemagne, entre autres. Parmi les nombreuses découvertes scientifiques et technologiques, la théorie de la relativité d'Einstein, la conquête de l'espace et la création du premier ordinateur sont sans aucun doute des avancées marquantes du siècle dernier. Dans le but de promouvoir ces découvertes, il est primordial, pour ces pays, de mettre l'accent sur la transmission des savoirs afin de favoriser l'émergence de nouveaux concepts et de nouvelles théories. Par conséquent, ces pays industrialisés ont misé sur le développement accru des connaissances par le biais de l'éducation de la collectivité. Au cours de ce siècle, la compétition s'installe entre les pays industrialisés. L'enjeu principal est : quel pays sera le premier à faire une découverte révolutionnaire? Prenons l'exemple de la conquête de l'espace : le lancement du premier satellite en orbite est l'exploit de l'Union Soviétique en 1957. À la suite de cet événement, les États-Unis se sont interrogés sur leur programme éducatif et lui ont apporté quelques modifications. En dépit de la réplique des États-Unis aux Soviétiques, par l'envoi du premier homme sur la Lune une dizaine d'années plus tard, cette réussite ne semble pas être due aux changements apportés dans le système éducatif. Comme quelques années plus tard, les chercheurs ont montré que l'apprentissage basé sur le cadre théorique du behaviorisme n'est pas productif, ils ont changé l'orientation générale du système éducatif pour le constructivisme Piagétien. Ainsi, la recherche et l'éducation deviendront les priorités pour la majorité des pays industrialisés afin de favoriser les progressions scientifiques et technologiques.

Depuis le dernier siècle, le Canada est considéré comme l'un des pays industrialisés où les sciences et la technologie constituent un enjeu important de société. Pour devenir un pilier international dans ce domaine, le Canada et ses provinces doivent préconiser un système éducatif rigoureux et efficace. Depuis les années soixante, nous avons assisté, au Québec, à quelques modifications des programmes de formation à l'école primaire et secondaire. Par ailleurs, l'évolution rapide des sciences et des technologies, les circonstances sociales et, plus récemment, l'accès facile à l'information via internet amèneront les dirigeants du Québec à se questionner sur l'efficacité de leur système éducatif. Les attentes envers l'éducation seront de plus en plus grandes. Dans le but d'être compétitifs internationalement et de mieux préparer les jeunes au 21^{e} siècle, le *Conseil supérieur de l'éducation* et le *Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport* (MELS, 1999) ont implanté un nouveau programme de formation pour les écoles primaire et secondaire. Ce renouveau pédagogique a comme principal objectif de contrer le décrochage scolaire, d'augmenter le taux de diplomation et finalement, d'augmenter le taux d'accessibilité aux études postsecondaires. En réaction à l'approche par objectif de l'ancien programme, le principal changement de cette réforme concerne l'approche pédagogique par compétences. Nous allons consacrer une section entière à décrire ce nouveau programme.

En ce qui concerne la poursuite des études postsecondaires en Sciences de la nature ou en Sciences humaines au collégial, plusieurs questions nous viennent à l'esprit. Est-ce que les étudiants de première année sont prêts à se mesurer au cours de calcul différentiel du collégial? De manière plus générale, est-ce que ce nouveau programme de formation au secondaire favorise le passage entre le secondaire et le collégial en mathématiques? Selon une étude réalisée en 2005-2006 conjointement par le Collège Édouard-Montpetit, la Commission scolaire des Patriotes et la Commission scolaire Marie-Victorin, on a constaté : « ... qu'un fossé s'est creusé entre les deux ordres d'enseignement et qu'il est urgent d'agir pour assurer un continuum de formation en mathématiques, tant à l'intérieur de chaque ordre d'enseignement qu'entre les deux. » (Plan d'action 2007-2008, p. 7). Par ailleurs, les collaborateurs de cette recherche mentionnent notamment que même si les élèves comprennent le sens intuitif d'un concept mathématique, il n'est pas garanti qu'ils seront en mesure de reconnaître et d'utiliser ce concept dans de nouvelles situations d'apprentissage. Cette étude a été réalisée dans le cadre du renouveau pédagogique au secondaire et de l'arrimage entre le secondaire et le collégial. Elle consiste principalement en l'élaboration de recommandations visant à assurer un passage plus harmonieux entre les mathématiques du secondaire et celles du collégial.

Lorsque nous regardons le contenu du premier cours de mathématiques au collégial, *Calcul différentiel*, nous remarquons que le concept de fonction constitue le principal objet d'étude. En outre, l'étude de la continuité, des limites et de la dérivée demande aux élèves un bon niveau de compréhension du concept de fonction.

Ces constatations nous amènent à nous questionner sur le niveau de compréhension du concept de fonction des étudiants de première année du collégial. Dans ce sens, les étudiants issus de la première cohorte de la nouvelle réforme sont-ils compétents en la matière? À l'aide de plusieurs recherches, nous avons construit un questionnaire permettant de vérifier le niveau de compréhension des étudiants du premier cours de mathématiques au niveau collégial en lien avec le concept de fonction.

Nous débuterons donc en précisant la problématique évoquée dans l'introduction, puis nous aborderons l'ensemble du cadre théorique ayant permis la construction de notre questionnaire de recherche. Subséquemment, nous exposerons la méthodologie de l'expérimentation réalisée dans plusieurs classes du collégial. Finalement, nous analyserons les résultats obtenus avec l'aide de notre grille de classification au regard du cadre théorique ayant permis sa composition.

1.2 Problématique

1.2.1 La nouvelle approche pédagogique du programme de formation de l'école secondaire québécoise

Étant donné que le monde d'aujourd'hui est spécialement marqué par la transmission des savoirs, l'éducation est au cœur des programmes gouvernementaux. De plus, l'augmentation des immigrants au Québec, plus particulièrement à Montréal, demandera au gouvernement d'accorder plus d'importance au contexte social de l'environnement scolaire. Par ailleurs, la progression technologique contribuera à la nouvelle mission de l'éducation. En plus de prendre en compte la transmission des savoirs et du contexte social, les nouveaux programmes seront contraints de former une main-d'œuvre qualifiée selon les besoins du marché du travail. Dans ces conditions, le MELS s'est donné comme principale mission de jumeler éducation, qualification et socialisation.

Cette nouvelle formation encouragera la structuration de l'identité dans un monde constamment en changement. De même, l'école permettra aux élèves de se familiariser avec la « mondialisation ». Ainsi, la construction d'une vision du monde différente de celle des années 80 sera primordiale pour le MELS, dans l'optique de promouvoir la compréhension des enjeux économiques, politiques et sociaux du monde actuel. L'élargissement des connaissances et le développement de l'esprit critique chez les jeunes s'avèreront un choix important de société.

Dans ce but, le Conseil supérieur de l'éducation et le MELS ont voulu contrer le décrochage scolaire, augmenter le taux de diplômation avec l'implantation d'un nouveau programme de formation. Par conséquent, ils ont travaillé pendant plusieurs années à l'amélioration de ce programme. En septembre 1999, ce projet fit ses débuts au premier cycle du primaire. Toutefois, ce n'est qu'en septembre 2005 que cette nouvelle approche pédagogique fit son entrée en première secondaire.

1.2.2 L'approche par compétence

Puisque l'enseignement secondaire se veut personnalisé, les auteurs du nouveau programme proposent une approche par compétences car selon eux, l'enseignement centré sur la transmission des savoirs ne favorise pas cet aspect. Dans cet ordre d'idées, l'approche par compétences met dans une perspective différente l'enseignement et l'apprentissage. Le Programme de formation définit cette approche comme un « savoir-agir fondé sur la mobilisation et l'utilisation efficaces d'un ensemble de ressources » (MELS, 2007, chapitre 1, p. 11). En d'autres mots, l'élève devra identifier et utiliser adéquatement ses connaissances liées à un contexte afin de résoudre une situation-problème posée dans ce contexte.

Dans le domaine de la mathématique, le MELS a ciblé trois compétences disciplinaires à développer : *résoudre une situation-problème, déployer un raisonnement mathématique* et *communiquer à l'aide d'un langage mathématique.* Ces trois compétences sont dépendantes les unes des autres, mais elles concernent différents aspects de l'activité mathématique. À partir de ces compétences, les enseignantes et les enseignants doivent évaluer la progression de chaque élève. L'apprentissage par situation-problème est au cœur de la formation mathématique selon le MELS. Nous pouvons établir la dépendance entre la première compétence et les deux autres. D'une part, la résolution d'une situation-problème demande à l'élève l'élaboration d'un processus tel que défini par le MELS, d'où *déployer un raisonnement mathématique.* D'autre part, nous avons mentionné auparavant que l'élève devra évaluer l'efficacité de sa procédure. Il devra être capable d'expliquer son raisonnement à ses pairs, d'où *communiquer à l'aide du langage mathématique.* Il est à noter que l'importance des transformations impliquant cette nouvelle approche nous amène à nous questionner sur son efficacité pratique et sur les difficultés rencontrées dans son enseignement. Dès lors, une question s'impose: qu'est-ce qu'un élève compétent en mathématique? Nous pensons que les élèves finissant le secondaire doivent avoir une certaine compréhension de la mathématique selon leur choix de carrière. Par exemple, le niveau de compréhension en mathématique d'un élève poursuivant des études en *Arts et lettres* n'aura pas à être forcément le même qu'un élève poursuivant des études en *Sciences de la nature.*

1.2.3 Les nouvelles exigences en mathématique

Dans le nouveau programme, le MELS accorde énormément d'importance à la création de liens entre les différents domaines de la sphère d'étude et ceux du domaine de la mathématique. Selon le MELS, favoriser la création de liens interdisciplinaires concernant entre autres la mathématique aidera à développer les trois compétences visées. Pour ce faire, il fait référence aux registres de représentation sémiotique de la théorie de Duval (1993). Selon ce chercheur, l'articulation entre les registres de représentation est cruciale dans l'apprentissage de la mathématique. Autrement dit, si les élèves sont capables de passer d'une représentation à une autre, par exemple d'une représentation algébrique à une représentation graphique et vice-versa, cela devrait favoriser une compréhension conceptuelle globale de la notion en cause. De ce fait, nous nous posons la question suivante : est-ce que les élèves finissants de l'école secondaire ont une compréhension globale des concepts mathématiques?

1.2.4 L'importance du concept de fonction

Depuis la mise en forme des mathématiques modernes, entre autres avec Descartes et Wallis, l'apprentissage de la mathématique se fait par le biais de la géométrie analytique. Ce nouveau domaine jumelle l'algèbre et la géométrie. Autrement dit, l'algèbre est devenue un outil de généralisation pour les problèmes de géométrie. De ce fait, au lieu d'aborder les problèmes géométriques d'une manière statique, les scientifiques ont développé une approche plutôt dynamique. À la suite de ces changements, la géométrie analytique est devenue la colonne vertébrale des mathématiques modernes. De manière plus spécifique, cette fusion de la géométrie et de l'algèbre positionnera le concept de fonction au cœur de la réflexion mathématique. Cela a entraîné un changement majeur dans l'approche des mathématiques et dans son enseignement. Suivant cette logique, l'étude des fonctions constituera le cœur de l'enseignement des mathématiques modernes et, conséquemment, du programme québécois d'enseignement de la mathématique au secondaire. Dans le but de comprendre les fondements de ce choix, nous croyons important d'exposer d'une part, les situations fonctionnelles du quotidien et d'autre part, de montrer l'importance de l'étude des fonctions dans le nouveau programme de deuxième cycle au secondaire. Comme, l'approfondissement de l'étude des fonctions se poursuit au collégial, nous allons examiner brièvement le contenu mathématique du premier cours de calcul différentiel. Finalement, nous exposerons quelques résultats de recherche sur les difficultés rencontrées dans l'apprentissage des fonctions de façon à cerner davantage notre intérêt de recherche.

1.2.5 Les situations fonctionnelles du quotidien

Une « situation fonctionnelle », de notre point de vue, est toute situation où deux grandeurs sont mises en relation de dépendance. Ainsi, la plupart des phénomènes qui nous entourent suivent un modèle fonctionnel de variation. Les situations fonctionnelles sont donc présentes tout autour de nous et de ce fait, méritent que nous y portions attention. Afin de bien comprendre ces situations fonctionnelles, nous allons raconter une situation du quotidien. « En ce 24 juin, Benoit prépare un souper avec ses amis pour la fête nationale du Québec. Au menu, il décide de préparer des hotdogs et des hamburgers avec des frites. En matinée, Benoit quitte sa maison pour acheter tous les aliments dont il a besoin. Il choisit de se rendre à l'épicerie en transport en commun. Pour le retour, il décide de prendre le taxi car il a beaucoup de sacs et en plus, il ne veut pas que la viande soit exposée trop longtemps à la chaleur accablante de l'été montréalais. » Tout au long de cette histoire, nous pouvons relever plusieurs situations fonctionnelles. Certainement, nous pouvons mettre en relation la distance parcourue en transport en commun et le coût du transport (fonction constante), la quantité de bœuf à acheter avec le nombre d'invités (fonction linéaire), le coût du taxi avec la distance parcourue (fonction en escalier), le nombre de pains à hamburger avec la quantité de bœuf (fonction linéaire), la somme déboursée pour les saucisses avec la quantité de saucisses achetées (fonction linéaire) et finalement, le nombre de bactéries dans le bœuf avec le temps d'exposition à la chaleur (fonction exponentielle). Malgré que cette situation du quotidien soit simple et banale, nous avons réussi à trouver six relations fonctionnelles.

Bien entendu, il est rare au quotidien que nous cherchions à mettre en relation ce type de grandeurs. Par conséquent, il n'est pas nécessairement intéressant de trouver la règle de correspondance ou encore, d'en tracer le graphique. Par contre, une compréhension globale de chacune des situations faisant intervenir la notion de fonction s'avère importante, peu importe la situation, si l'on a besoin de prévoir l'impact de certains choix. Par exemple, dans la petite situation racontée précédemment, Benoit pourra prévoir le coût approximatif d'une course en taxi, il s'attendra à payer plus cher pour avoir une plus grande quantité de bœuf, la distance parcourue entre son domicile et l'épicerie n'aura pas d'impact sur le coût de son déplacement en transport en commun. De cette façon, la notion de relation fonctionnelle intervient dans nos réflexions quotidiennes afin que nous puissions prendre des décisions éclairées.

Finalement, nous considérons que la notion de fonction est un outil propice et avantageux pour prévoir et effectuer des choix judicieux. Ainsi, tout citoyen doit savoir qu'il est entouré de phénomènes fonctionnels qui influenceront ses choix au quotidien. En plus, plusieurs étudiants espèrent travailler dans le domaine des sciences naturelles, des sciences de la santé, de l'économie. En conséquence, ils doivent approfondir ce concept indispensable à l'interprétation des divers phénomènes scientifiques.

1.2.6 Le concept de fonction dans le programme québécois de formation de l'école secondaire

Dans la formation mathématique de l'école secondaire, plusieurs champs, concepts et processus sont étudiés. Nous allons nous intéresser plus particulièrement au deuxième cycle du secondaire, puisque que nous accordons ici une importance particulière à l'arrimage secondaire-collégial. Les trois principaux champs y sont l'arithmétique et l'algèbre, la géométrie et les probabilités et statistique. Nous présentons ci-dessous les trois tableaux exposant l'évolution des principaux concepts reliés à l'arithmétique et l'algèbre pour les trois séquences d'enseignement du 2e cycle.

Tableau 1.1
L'évolution des principaux concepts liés à l'arithmétique et à l'algèbre
au 2e cycle de la séquence *Sciences naturelles* (MELS, 2007)

Sciences naturelles

	CONCEPTS MATHÉMATIQUES
1er année	**Nombres réels : rationnels et irrationnels; cube et racine cubique** **Relation d'inégalité** **Relation, fonction et réciproque** - Variable dépendante et indépendante - Fonctions polynomiales de degré 0 ou 1 et système d'équations du 1er degré à deux variables de la forme y=ax+b, fonction rationnelle de la forme f(x)=k/x ou xy=k
2e année	**Expression algébrique** - Identité algébrique, équation et inéquation du 2e degré à une variable **Fonction réelle** - Fonction en escalier (partie entière) - Fonction polynomiale du degré 2 (formes canonique, générale et factorisée) - Paramètre **Système** - Système d'équations du 1er degré à deux variables - Système composé d'une équation du 1er degré et d'une équation du 2e degré à deux variables
3e année	**Expressions arithmétique et algébrique** - Nombres réels : valeur absolue, radicaux, exposants et logarithmes **Relation, fonction et réciproque** - Fonction réelle : valeur absolue, racine carrée, rationnelle, exponentielle, logarithmique, sinusoïdale, tangente et définie par parties - Opérations sur les fonctions **Système** - Système d'inéquations du 1er degré à deux variables - Système d'équations du 2e degré (en relation avec les coniques)

Tableau 1.2
L'évolution des principaux concepts liés à l'arithmétique et à l'algèbre au 2e cycle de la séquence *Technico-sciences* (MELS, 2007)

Technico-sciences

CONCEPTS MATHÉMATIQUES	
1re année	**Nombres réels : rationnels et irrationnels; cube et racine cubique** **Relation d'inégalité** **Relation, fonction et réciproque** - Variable dépendante et indépendante - Fonctions polynomiales de degré 0 ou 1 et système d'équations du 1er degré à deux variables de la forme y=ax+b, fonction rationnelle de la forme f(x)=k/x ou xy=k
2e année	**Expressions arithmétique et algébrique** - Nombres réels : radicaux, puissances de base 2 et 10 - Inéquation du 1er degré à deux variables **Relation, fonction et réciproque** - Fonction réelle : polynomiale de degré 2 (forme canonique), exponentielle, partie entière, périodique, en escalier, définie par parties - Paramètre multiplicatif **Système** - Système d'inéquations du 1er degré à deux variables
3e année	**Relation, fonction et réciproque** - Fonction réelle : polynomiale de degré 2 (forme générale) rationnelle, sinusoïdale, tangente, ainsi que les fonctions introduites l'année précédente - Paramètre additif - Opérations sur les fonctions **Système** - Système d'inéquations du 1er degré à deux variables - Système d'équations et d'inéquation faisant intervenir divers modèles fonctionnels

Tableau 1.3
L'évolution des principaux concepts liés à l'arithmétique et à l'algèbre au 2e cycle de la séquence *Culture, société et technique* (MELS, 2007)

Culture, société et technique

CONCEPTS MATHÉMATIQUES	
1re année	**Nombres réels : rationnels et irrationnels; cube et racine cubique** **Relation d'inégalité** **Relation, fonction et réciproque** - Variable dépendante et indépendante - Fonctions polynomiales de degré 0 ou 1 et système d'équations du 1er degré à deux variables de la forme y=ax+b, fonction rationnelle de la forme f(x)=k/x ou xy=k
2e année	**Expression algébrique** - Inéquation du 1er degré à deux variables **Relation, fonction et réciproque** - Fonction réelle : polynomiale de degré inférieur à 3, exponentielle, périodique, en escalier, définie par parties **Système** - Système d'inéquations du 1er degré à deux variables
3e année	**Système** - Système d'inéquations du 1er degré à deux variables

À la suite de la lecture des tableaux ci-dessus, nous remarquons que l'étude des fonctions prend une place importante dans l'enseignement des mathématiques d'aujourd'hui, surtout dans les séquences *Sciences naturelles* et *Technico-sciences*. En ce qui concerne la séquence *Culture, société et technique*, la priorité est mise sur les concepts liés aux probabilités et à la statistique. Toutefois, même si l'étude des diverses fonctions n'est pas un aspect privilégié à l'intérieur de cette séquence, la fonction affine (fonction du premier degré) est sans aucun doute la base de la corrélation linéaire. De même, le champ arithmétique et algèbrique prend une place de premier plan dans le corpus du 1er cycle. Par conséquent, la notion de fonction est la pierre angulaire de l'apprentissage de la mathématique au secondaire.

1.2.7 Les cours de calcul différentiel au collégial

La formation collégiale existe seulement depuis la fin des années soixante. À cette époque, les dirigeants ont créé ce palier d'étude d'une part, pour améliorer la formation de la main-d'œuvre avec la création du profil technique, d'autre part, pour augmenter l'accessibilité aux études supérieures via des programmes d'études générales. Dans la majorité des programmes de sciences des établissements collégiaux, le cours de calcul différentiel est le tout premier cours de mathématiques suivi par les nouveaux étudiants. Ce cours fait partie du cheminement académique de deux programmes généraux : *Sciences de la nature* et *Sciences humaines profil administration*. Dans un premier temps, nous allons regarder le contenu du cours de calcul différentiel des deux programmes et ensuite, nous allons exposer les préalables pour l'admission 2010-2011 à un programme conduisant à un diplôme d'études collégial, préalables établis par le MELS. L'admission 2010-2011 concerne la première cohorte des élèves ayant fait leurs études secondaires selon le renouveau pédagogique.

Tout d'abord, nous allons examiner le contenu du cours de calcul différentiel des programmes de *Sciences de la nature* et de *Sciences humaines* dans le but de montrer l'importance de la notion de fonction pour la réussite de ce cours. Les tableaux 1.4 et 1.5 présentent les diverses notions étudiées dans ce cours.

Tableau 1.4
Tableau des notions et des éléments à l'étude du cours de calcul différentiel du programme de *Sciences de la nature* (MELS, 2010)

SCIENCES DE LA NATURE

ÉLÉMENTS ABORDÉS	NOTIONS ÉTUDIÉES
→ Reconnaître et décrire les caractéristiques d'une fonction représentée sous la forme d'expression symbolique ou sous forme graphique → Déterminer si une fonction a une limite, est continue, est dérivable, en un point et sur un intervalle	**FONCTIONS** Algébrique, exponentielle, logarithmique, trigonométrique et trigonométrique inverse **LIMITES** Approche intuitive, définition, propriétés et calculs de limites
→ Utiliser la dérivée et les notions connexes pour analyser les variations d'une fonction et tracer son graphique → Résoudre des problèmes d'optimisation et de taux de variation	**CONTINUITÉ DE FONCTIONS** Définition et propriétés **DÉRIVÉE D'UNE FONCTION** Interprétation géométrique, définition, règles et techniques usuelles **APPLICATIONS** Étude de courbes, problèmes d'optimisation et taux de variation

Tableau 1.5
Tableau du contexte de réalisation et des éléments à l'étude du cours de calcul différentiel du programme de *Sciences humaines* (MELS, 2010)

SCIENCES HUMAINES

ÉLÉMENTS ABORDÉS
→ Situer le contexte historique du développement du calcul différentiel → Reconnaître et décrire les caractéristiques des fonctions algébriques, exponentielles, logarithmiques et trigonométriques, chacune représentée sous la forme d'expression symbolique ou sous forme graphique → Analyser le comportement d'une fonction représentée symboliquement ou graphiquement à l'aide de l'approche intuitive du concept de limite → Définir la dérivée d'une fonction, donner son interprétation et appliquer les techniques de dérivation → Analyser les variations d'une fonction en utilisant le calcul différentiel → Résoudre des problèmes d'optimisation et de taux de variation
CONTEXTE DE RÉALISATION
En utilisant des contextes reliés au domaine des sciences humaines, par exemple la croissance des populations, la propagation des épidémies et des rumeurs, les mathématiques financières, l'analyse marginale du coût, du revenu et du profit. À l'aide des technologies de traitement de l'information appropriées

À la lecture des tableaux précédents, nous pouvons affirmer que le contenu des deux cours de calcul différentiel demandera aux étudiants une bonne compréhension du concept de fonction. Par ailleurs, les exigences du MELS ont été modifiées pour l'admission 2010-2011 des élèves issus du renouveau pédagogique au secondaire. En mathématiques, ces élèves devront remplir la condition suivante :

> ➤ L'élève devra avoir réussi la séquence *Technico-sciences* ou *Sciences naturelles* de 5^e secondaire (mathématique) pour pouvoir poursuivre des études collégiales en *Sciences de la nature* ou en *Sciences humaines profil administration.*

D'autre part, le MELS a établi une correspondance entre les préalables de l'ancien programme et ceux du nouveau programme. Le cours de mathématiques du profil *Technico-sciences* de 5^e secondaire correspond grosso modo au corpus du cours 526 du programme de 1994 et celui du profil *Sciences naturelles* correspond au contenu du cours 536. Dans ces conditions, nous croyons important d'évaluer l'impact du renouveau pédagogique sur les étudiants poursuivant des études postsecondaires si l'on veut ensuite améliorer l'arrimage entre le secondaire et le collégial.

1.2.8 Les difficultés relevées par des chercheurs à propos du concept de fonction

L'apprentissage de la mathématique s'avère un domaine d'étude essentiel pour la formation de nos générations futures. Cependant, de nombreux élèves du secondaire et du collégial sont confrontés à plusieurs difficultés. Nous allons citer quelques travaux portant sur ces difficultés.

Recherches d'Eisenberg et Dreyfus (1991)

Les recherches d'Eisenberg et Dreyfus (1991) se sont intéressées d'une part, à la résistance des étudiants des cours de calcul à visualiser les mathématiques et d'autre part, aux différentes raisons possibles de cette résistance. Ces chercheurs ont proposé différentes tâches à réaliser à des étudiants d'un cours de calcul différentiel. Ces derniers y ont favorisé la résolution algébrique plutôt que l'approche visuelle. Selon Eisenberg et Dreyfus (1991), l'enseignement des mathématiques impose une certaine hiérarchie aux différentes représentations c'est-à-dire que la représentation algébrique est souvent privilégiée par rapport aux autres représentations. À notre avis, l'utilisation de plusieurs représentations d'un concept est un aspect important de son développement. En conséquence, les apprenants ne devraient pas donner toute la place à la représentation algébrique, au détriment des représentations visuelles.

Recherches de Duval (1988)

Dans un même ordre d'idée, les recherches de Duval (1988) ont montré que la majorité des élèves de seconde (15-16 ans) n'éprouvent aucune difficulté à tracer le graphique d'une fonction à partir de l'équation algébrique. Par contre, ces derniers ne sont pas en mesure d'effectuer le processus inverse avec une fonction du premier degré. Il affirme que « la raison profonde de ces difficultés n'est pas à chercher dans les concepts mathématiques liés aux fonctions affines, mais dans la méconnaissance des règles de correspondance sémiotique entre le registre des représentations graphiques et celui de l'écriture algébrique » (p. 235). De plus, les travaux de Duval ont permis d'identifier quelques difficultés rencontrées dans la lecture et l'interprétation des représentations graphiques cartésiennes chez ces mêmes élèves. Il évoque l'incapacité des jeunes à retrouver l'équation algébrique d'une droite à partir de sa représentation graphique. Effectivement, seulement 16 élèves sur 105 ont réussi à associer correctement tous les graphiques représentant différentes fonctions linéaires avec l'équation algébrique correspondante. Duval associe cette difficulté à un manque de *coordination* (*voir* section 2.1.5) entre la représentation graphique et la représentation algébrique. C'est-à-dire que ces élèves ne sont pas en mesure d'effectuer l'aller-retour d'une représentation à une autre.

Recherches sur la transition secondaire-collégial

Au cours de l'année 2005-2006, un groupe de travail québécois a été formé afin de chercher comment améliorer la transition entre le secondaire et le collégial du point de vue des contenus mathématiques. Ce groupe de travail est composé d'enseignants et de conseillers pédagogiques de la Commission scolaire des Patriotes, de la Commission scolaire Marie-Victorin et du Collège Édouard-Montpetit. Ce projet est né du fait que le MELS a modifié l'approche pédagogique du primaire et du secondaire. À la suite de cette restructuration, le groupe de travail s'est intéressé aux difficultés des étudiants dans les cours de calcul du collégial. Il est important de noter que les difficultés relevées par cette équipe concernent les étudiants des anciens programmes. Le groupe a réussi à répertorier plusieurs problèmes reliés à l'apprentissage du calcul différentiel et intégral au collégial. Entre autres, les difficultés rencontrées concernent le domaine de l'algèbre, des fonctions et de la trigonométrie.

En algèbre, les difficultés sont nombreuses et elles sont notamment rattachées aux opérations algébriques, à la factorisation d'expressions algébriques, aux fractions algébriques et aux équations du premier et du deuxième degré. De même, la notion de fonction pose un problème considérable aux étudiants. Les difficultés liées à cette notion sont causées entre autres par les fausses conceptions de ce qu'est une fonction, par les différentes écritures et par les opérations sur les fonctions, en particulier l'opération de composition. D'ailleurs, les membres du groupe ont décelé que les étudiants coordonnent insuffisamment les définitions, les équations et les graphiques des fonctions exponentielles et logarithmiques. Ils constatent que les difficultés rencontrées par les étudiants peuvent être notamment liées à l'apprentissage intuitif de certaines notions du programme secondaire. En revanche, les enseignants du collégial vont privilégier davantage le langage formel aux représentations intuitives des concepts à l'étude, en particulier ceux de la limite et de la dérivée. Par conséquent, plusieurs interrogations ont émergé des discussions entre les enseignants du collégial. L'une des principales questions est : est-ce que l'écart actuel, déjà constaté entre les deux ordres d'enseignement à travers les anciens programmes de mathématiques, sera comblé ou au contraire agrandi avec la venue du nouveau programme ?

À la suite de ces recherches, nous pouvons affirmer que les étudiants poursuivant des études en mathématiques au collégial éprouvent toutes sortes de difficultés. Ces embûches sont reliées entre autres à une mauvaise compréhension des objets mathématiques et de l'équivalence entre les différents modes de représentations tels que les graphiques, les expressions algébriques et le langage naturel. Nous croyons que ces étudiants doivent comprendre en profondeur le concept de fonction pour réussir les cours de calcul différentiel et intégral au collégial.

1.3 Questionnement

Les questions qui se posent sont les suivantes : est-ce que les étudiants du renouveau pédagogique ont une bonne compréhension du concept de fonction? Y a-t-il un écart entre les élèves issus de la séquence d'enseignement *Sciences naturelles* et ceux issus de *Technico-sciences*? Est-ce que le nouveau programme favorisera l'arrimage entre les deux ordres d'enseignement?

1.4 L'objectif de recherche

Nous avons cherché, dans les sections précédentes, à montrer l'importance de la notion de fonction dans l'apprentissage de la mathématique moderne. Nous avons aussi résumé l'approche du nouveau programme de formation sur ce sujet dans le but de montrer la pertinence d'une étude portant sur le niveau de compréhension des élèves issus de la nouvelle réforme québécoise. Dans le cadre de notre projet de recherche, nous avons comme principal objectif d'évaluer le niveau de compréhension des élèves diplômés, plus particulièrement ceux qui poursuivent des études post-secondaires générales en *Sciences de la nature* ou en *Sciences admistratives*, au regard du concept de fonction. Ainsi, nous voulons mesurer, à l'aide d'un questionnaire, le niveau de compréhension des étudiants d'un cours de calcul différentiel au collégial par rapport au concept de fonction.

Notre projet comporte quatre autres chapitres. Le second chapitre est composé d'éléments théoriques qui ont permis de réaliser cette recherche. Tout d'abord, nous allons construire notre propre définition de qu'est une « bonne » compréhension en mathématique, avec la théorie des représentations. D'une part, nous allons expliquer ce qu'est la théorie des représentations. D'autre part, nous allons mettre en perspective la notion de compétence en éducation, pour ensuite nous centrer sur la compréhension en mathématique. Les travaux de Hitt (1994), Guzmán, Hitt et Páez (2001) et de Duval (1988, 1993) nous aideront à préciser l'importance d'une bonne coordination entre les registres de représentation sémiotique. Cette articulation sera cruciale afin de développer un réseau de représentations. Par la suite, le chapitre trois consiste en l'édification de notre questionnaire d'évaluation et de la grille d'analyse. Dans le quatrième chapitre, nous allons analyser les solutions et les réponses de tous les étudiants-participants aux différentes tâches demandées, afin de les classer selon leur niveau de compréhension liée à la notion de fonction. Finalement, au chapitre cinq, nous présenterons les conclusions générales de cette recherche.

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

2.1 Le fonctionnement cognitif de la pensée et les registres de représentation sémiotique

Au chapitre I, nous avons tenté de mettre l'accent sur l'importance de l'apprentissage de la notion de fonction autant dans le programme mathématique du secondaire que dans celui du premier cours de calcul au collégial. De plus, nous avons fait ressortir une problématique concernant l'apprentissage du concept de fonction. Par ailleurs, nous avons constaté à travers différentes études que les élèves ont certaines difficultés à transférer l'information entre les différents modes de représentation. À la suite de ces constatations, nous allons maintenant structurer notre cadre théorique à partir des travaux de Duval (1988, 1993) concernant les registres de représentation sémiotique et le fonctionnement cognitif de la pensée humaine. Ce cadre théorique nous permettra à la fois de cibler les objectifs précis de la présente recherche et d'analyser les données recueillies lors de l'expérimentation. Dans un premier temps, nous allons illustrer l'aspect fondamental des représentations à l'intérieur de l'activité mathématique. Ensuite, nous allons définir ce qu'est une représentation sémiotique en nous référant aux travaux de Duval. Étant donné notre intérêt pour le concept de fonction, nous allons établir la correspondance entre ce concept et la théorie de Duval. Ce parallèle nous permettra de saisir le sens de ce que serait une « bonne compréhension » du concept de fonction. Finalement, nous serons en position de clarifier les objectifs de notre expérimentation.

2.1.1 L'importance des représentations en mathématique

Tout d'abord, en mathématiques, il existe différentes représentations d'un même objet : par exemple le vecteur se représente par des symboles, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$, (a, b, c), une flèche dessinée sur une feuille de papier, une phrase comme « le vecteur de la force gravitationnelle ». Ces objets ne sont généralement pas accessibles, ni palpables comme des objets physiques tels une table, un arbre, une voiture, etc. Afin de bien rendre compte de cette spécificité des objets mathématiques, Duval propose une analyse des signes selon un modèle de relation entre deux éléments (structure diadique), qu'il calque sur la relation à trois éléments (structure triadique) des linguistes. Nous allons la développer ci-dessous. Selon Duval, le modèle de relation entre deux éléments, loin de simplifier la donne, implique une compréhension fine des représentations d'un objet mathématique. Ainsi, les différentes représentations d'un objet mathématique joueront un rôle important dans la conceptualisation de l'objet lui-même.

Structure triadique

D'abord, Duval explique le concept de *structure triadique* de la signifiance des signes[1]. Il mentionne que les signes linguistiques et ceux des figures sont les deux types de signes compris dans cette structure. D'ailleurs, tout signe est composé d'une partie matérielle et d'une partie immatérielle. D'une part, la partie observable (matérielle) du signe est le *signifiant.* Le *signifiant* des signes linguistiques est généralement sa forme sonore (phonétique) ou sa forme écrite. Quant aux dessins, ils constituent le *signifiant* des signes « figuraux ». Par exemple, le dessin d'un homme ou d'une femme à l'entrée des sanitaires est un *signifiant.*

D'autre part, la partie immatérielle du signe est nommée *signifié* : c'est la partie conceptuelle du signe. Autrement dit, le concept construit par la perception d'un objet est le *signifié.* La relation à un objet dépendra de la relation de signification qui est l'interaction entre le *signifiant* et le *signifié.* De plus, la relation de signification sera associée à l'objet physique qui se nomme le *référent.* Prenons l'exemple de l'objet constitué d'une porte, le mot « porte » donné à cet objet est le *signifiant.* La « porte » comme objet physique est le

[1] Duval fait une distinction entre les termes « signification » et « signifiance ». La « signification » est la relation entre le signifiant et le signifié, et la « signifiance » des signes est la relation entre le signifiant, le signifié et le référent.

référent. Le *signifié* de l'objet « porte » est l'image mentale de cet objet, c'est-à-dire que normalement, une « porte » est rectangulaire et elle possède une poignée. Toutefois, les images mentales associées à la porte peuvent tenir compte de ces caractéristiques sans éliminer la possibilité qu'elle puisse avoir une forme différente ou qu'elle puisse ne pas avoir de poignée. En résumé, cette structure de la signifiance des signes est constituée de trois éléments en relation, le *référent*, le *signifiant* et le *signifié* (voir figure 2.1).

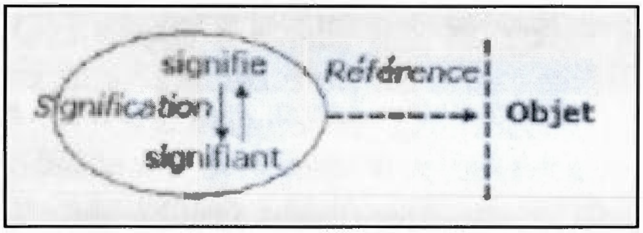


Figure 2.1 Structure triadique de la signifiance des signes.

Structure diadique

Contrairement à ce qu'il en est dans la *structure triadique* exposée précédemment, en mathématique, les notions telles que vecteurs, fonctions, etc. n'ont pas de relation de signification. La raison est que les objets mathématiques ne sont pas des « *objets physiques* » comme une table ou une porte, et que de plus, ces objets « n'existent pas » en dehors de leurs représentations, c'est-à-dire sont inconcevables sans recourir à des représentations, contrairement à ce qu'il en est avec des concepts comme « justice » ou « amour ». Ainsi, il est impossible d'associer des objets physiques aux différents objets mathématiques tels que les fonctions. Duval ajoute que les notions mathématiques « sont constituées par une relation instituée à un objet » (p. 10). Dans ce cas, le modèle de *structure triadique* ne peut convenir à la signifiance des signes des objets mathématiques. Dès lors, une deuxième structure est nécessaire pour saisir le sens des signes en mathématiques, la *structure dyadique de la signifiance des signes*.

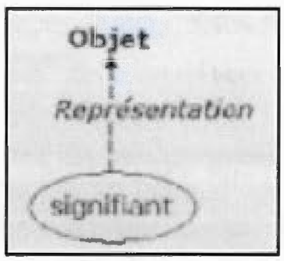


Figure 2.2 Structure dyadique de la signifiance des signes.

Cette structure est composée de deux éléments : le *signifiant* et l'objet mathématique lui-même. De la même manière que dans la *structure triadique*, le *signifiant* est la partie observable. Puisque l'objet mathématique ne peut être associé à un objet « physique », ce n'est que par ses différentes représentations que le *signifiant* peut être en relation avec l'objet mathématique. Par souci de concision, Duval, tout comme nous le faisons dans le présent texte, abandonne le mot *signifiant* pour ne garder que le mot représentation. Celui-ci désigne, selon le contexte, la relation globale ou la partie observable du signe dans cette relation.

Prenons l'exemple des nombres rationnels, qu'il est possible d'exprimer de différentes manières : écriture fractionnaire, écriture décimale ou encore, écriture scientifique.

- $\frac{3}{200} = 0{,}015 = 1{,}5\times 10^{-2}$
- $\frac{1000}{3} = 333{,}\bar{3} = 3{,}\bar{3} \times 10^{2}$

D'autre part, il est possible de représenter le nombre rationnel à partir d'un support visuel comme l'indique la figure 2.3.

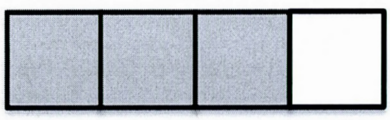


Figure 2.3 Représentation visuelle d'une fraction ($\frac{3}{4}$).

Cependant, cette représentation visuelle est uniquement un outil pour aider les enfants à développer le concept de nombre rationnel dans un contexte de partage. Bien entendu, l'objet mathématique est le nombre rationnel. C'est au travers des différentes représentations exposées préalablement que le *signifiant* sera en relation avec l'objet mathématique. En d'autres mots, la construction du sens d'un concept ou d'un objet mathématique passe obligatoirement par le développement des différentes représentations de celui-ci.

D'ailleurs, pour Duval, une confusion des différentes représentations provoquera une perte de compréhension de l'objet mathématique. Mais par ailleurs, l'élève doit pouvoir reconnaître l'objet à travers ses différentes représentations. De plus, Duval souligne l'importance du choix de la représentation dans le traitement d'un objet. Le traitement de l'objet et le coût de traitement (temps alloué par rapport au résultat recherché) seront influencés par le choix de la représentation. Par exemple, lorsque nous voulons additionner deux nombres comme 0,75 et 3,8, nous considérons que la représentation décimale est plus adéquate que l'écriture scientifique 75×10^{-2} et 38×10^{-1}. Autrement dit, lorsque nous voulons effectuer un traitement comme le calcul numérique, la représentation choisie influencera l'efficacité de nos calculs. Généralement, peu importe le traitement effectué, il y aura souvent une représentation plus économique qu'une autre. D'une part, Duval insiste sur la spécificité de chacune des représentations, les différentes représentations possèdent seulement une partie de l'information de l'objet mathématique. D'autre part, il précise que chaque représentation possède ses contraintes propres d'écriture et de traitement, d'où l'avantage de faire un choix judicieux afin de minimiser le temps de résolution. Nous partageons l'avis de Duval concernant l'importance des différentes représentations d'un objet mathématique. Nous croyons que ces représentations joueront un rôle crucial dans la compréhension d'un concept tel que celui de fonction. Nous aimerions mentionner que les termes « traitement » et « coût de traitement » seront précisés à la section 2.1.5.

2.1.2 La définition d'un registre de représentation sémiotique

En premier lieu, Duval (1993) parle des représentations mentales comme étant des images personnelles qui permettent à un individu de concevoir un objet ou une situation. Il évoque également le fait que les représentations mentales n'englobent pas totalement les conceptions et les images reliées à un objet abstrait. Ensuite, Duval traite des représentations sémiotiques. Il définit ce terme comme étant « des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement » (p. 2). En général, les représentations sémiotiques servent à exprimer un concept, une image mentale d'un individu afin qu'il puisse communiquer avec l'extérieur. Par contre, selon Duval, les représentations sémiotiques n'ont pas seulement cette utilité, elles sont un élément essentiel dans l'activité cognitive de la pensée.

En conséquence, les représentations sémiotiques jouent un rôle de premier plan dans le développement des représentations mentales puisqu'elles constituent une extériorisation de celles-ci. Ainsi, ces représentations interviennent fortement dans la réalisation de fonctions cognitives sous la forme de fonction d'objectivation, de fonction de traitement et de fonction de communication. À cet égard, la fonction d'objectivation est une expression privée ou encore une construction interne personnelle qui permet l'identification d'un objet. Cette fonction est indépendante de la fonction de communication. Quant à la fonction de traitement, elle ne peut être réalisée sans l'utilisation des systèmes sémiotiques. Autrement dit, les représentations mentales s'avèrent insuffisantes pour effectuer une activité de traitement. Ainsi, les représentations sémiotiques sont essentielles et elles constituent le fondement du fonctionnement de la pensée. Duval précise cette idée en ajoutant que l'action de marquer d'un signe ou l'appréhension d'une représentation sémiotique se nomme *sémiosis* et que l'appréhension conceptuelle d'un objet est la *noésis*. À partir de ces concepts, il affirme qu'« il n'y a pas de *noésis* sans *sémiosis* » (p. 3), c'est-à-dire qu'un individu peut avoir une conceptualisation d'un objet seulement si un processus d'interaction avec une représentation sémiotique a eu lieu. Duval ajoute aussi que « pour qu'un système sémiotique puisse être un registre de représentation, il doit permettre les trois activités cognitives fondamentales liées à la *sémiosis* » (p. 4). Ce sera donc notre critère pour savoir si nous avons affaire à un registre ou non : est-ce qu'il permet les trois activités cognitives fondamentales ?

Les 3 activités cognitives

La première activité est la formation d'une représentation sémiotique identifiable. Cette formation met en cause les différentes caractéristiques du contenu à représenter. De plus, ces caractéristiques entretiennent une cohérence avec les règles de formation qui sont directement liées au registre sémiotique dans lequel la représentation est construite. Prenons l'exemple du registre de la langue naturelle : la grammaire et l'orthographe sont des règles propres à ce registre. Il en est de même pour le registre des figures géométriques : les contraintes de construction sont les règles associées à ce registre sémiotique. De ce fait, Duval fait une mise en garde par rapport aux règles de conformité : « ... la connaissance des règles de conformité n'implique pas la compétence pour former des représentations, mais seulement celle pour les reconnaître » (p. 4). À la suite de l'identification des règles de conformité du registre, il est possible d'effectuer des traitements dans ce même registre.

Le traitement d'une représentation constitue la deuxième activité cognitive liée à la *sémiosis*. Cette activité consiste à effectuer une transformation de la représentation initiale dans le même registre où elle a été formée. Le calcul est un exemple de traitement dans le registre numérique, car il permet de modifier la représentation initiale. Pour Duval, le traitement constitue « une transformation interne dans le registre de représentation » (p. 4). Cependant, il spécifie que la langue naturelle contient peu de règles de traitement, mais un nombre élevé de règles de conformité.

La troisième activité cognitive répertoriée par Duval est la conversion d'une représentation en une représentation d'un autre registre. Dans l'enseignement, la conversion est le plus souvent faite toujours dans le même sens, alors que la conversion inverse est négligée, voire ignorée. Il souligne que l'activité de conversion est différente et distincte de l'activité de traitement. Contrairement à l'activité de traitement, l'activité de conversion consiste en une transformation externe par rapport au registre de départ c'est-à-dire que l'activité de traitement demande d'avoir recours à des règles propres au registre de représentation, mais ce n'est pas le cas pour l'activité de conversion. Un exemple d'activité de conversion liée au concept de fonction pourrait être de représenter graphiquement une fonction à partir de son équation algébrique ou vice-versa. Cet exemple et les difficultés des élèves liées à cette activité sont discutés à la section 1.2.8.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, un système sémiotique doit permettre les trois activités cognitives pour qu'il puisse être un registre de représentation. Ainsi, les représentations fractionnaires et décimales sont dans des registres de représentation parce qu'il est possible d'y mettre en œuvre les trois activités cognitives. Toutefois, elles sont dans des registres différents – parce que les règles de traitement (règles de calcul) n'y sont pas du tout les mêmes – du système sémiotique des nombres.

Nous sommes d'avis que les registres de représentation sémiotique jouent un rôle de premier plan dans l'activité cognitive de la pensée, notamment en mathématiques. À partir de la théorie de Duval, nous avons l'intention de construire un outil d'expérimentation qui nous permettra d'évaluer le niveau de compréhension des élèves issus du renouveau pédagogique en ce qui concerne la notion de fonction.

2.1.3 L'historique de la notion de fonction : un concept dynamique

Au cours de l'histoire, le concept de fonction a considérablement évolué selon les civilisations et leur époque. Les premiers connus à utiliser ce concept, sans en développer une compréhension théorique, sont les Babyloniens (vers 1800 av. J-C). Ils ont construit des tables de correspondance permettant d'effectuer rapidement certains calculs, entre autres celui qui permet d'obtenir la racine carrée d'un nombre. Cette civilisation a établi plusieurs relations numériques dans le but de faciliter les calculs. Toutefois, c'est avec la civilisation grecque que les premières véritables ébauches théoriques de la notion de fonction se sont développées. À cette époque, la géométrie et l'astronomie ont été au cœur de l'activité mathématique. Les philosophes grecs (*physiciens*) observaient les astres afin d'établir des relations entre leurs positionnements respectifs. En lien avec l'observation des phénomènes naturels, les relations entre des quantités géométriques ont été un sujet d'étude important. À partir de figures géométriques statiques, les philosophes grecs se sont intéressés aux relations entre des mesures de segments. La découverte du célèbre théorème de Pythagore et celle du nombre Pi sont le fruit d'une compréhension implicite du concept de relation. Pythagore (environ 580 av. J-C. à 495 av. J-C.) a également permis la découverte des octaves en musique. Il a démontré que la hauteur du son produit par la vibration d'une corde pincée était en rapport direct avec sa longueur. Le son monte d'une octave chaque fois qu'on divise la longueur de la corde en deux. De plus, on doit mentionner les travaux d'Euclide, qui ont contribué à l'évolution de la géométrie et à l'idée de généralisation. Selon Charbonneau (1987), la civilisation grecque n'avait qu'une idée embryonnaire du concept de fonction (relation entre variables), car les Grecs ne tenaient pas compte du principe de mouvement. Ainsi, ces penseurs se cantonnaient à une approche statique des phénomènes.

Ce n'est qu'au Moyen-Âge et à la Renaissance que les scientifiques commencent véritablement à travailler différents raisonnements sur le mouvement. Cependant, l'étude des mouvements implique une nouvelle donnée jusqu'à présent mise de côté : le temps. Ainsi, selon Charbonneau (1987), les scientifiques de cette époque commençaient à s'approcher graduellement du concept dynamique de fonction. Entre le 15^e et le 17^e siècle, le concept de fonction a subi plusieurs modifications dans son approche et dans son utilisation. Auparavant, Nicolas Oresme représentait une relation entre deux grandeurs sous la forme d'un graphique pour la première fois à la fin du 14^e siècle. De plus, il développa une idée partielle de dépendance et d'indépendance entre deux quantités. Les travaux de Viète ont permis la création de l'algèbre symbolique. Ceux de Descartes ont permis de lier cette algèbre symbolique à la géométrie, pour créer la géométrie analytique et le plan cartésien, qui sont à la base du développement des représentations des fonctions. Ce n'est donc que trois mille ans après le concept anticipé d'une fonction que les mathématiciens commencèrent à développer une approche symbolique.

Au cours du 17^{e} siècle, Fermat et Descartes ont considéré des équations à deux variables. La notion de relation entre deux quantités a perdu son sens concret pour laisser la place à une interprétation abstraite. Cette découverte a permis à ces deux philosophes « scientifiques » de marier la géométrie et l'algèbre. En d'autres mots, ils ont établi le parallèle entre l'approche géométrico-visuelle et l'approche algébrique. Grâce à cette nouvelle pratique scientifique, nous assistons à la naissance des mathématiques modernes. Nous remarquerons que la première définition explicite de fonction se trouve dans les travaux de Bernoulli (1718, p. 241). Il définit une fonction d'une variable comme une quantité composée de n'importe quelle forme par cette variable et par des constantes (Citée par Youschkevitch, 1976, p. 60). Un progrès important dans le concept de fonction a été réalisé par Euler (1796, p. 1-2); il a changé le mot quantité dans la définition de Bernoulli par expression analytique, et il a essayé d'éclaircir l'idée de quantité constante et de quantité variable.

Au 18^{e} siècle, les travaux de Leibniz et de Newton ont contribué à l'émergence du calcul différentiel et intégral. Une idée générale du calcul infinitésimal d'aujourd'hui prenait son envol. Cette nouvelle approche favorisait la construction d'outils de calcul et d'analyse permettant la résolution de plusieurs problèmes. Cependant, ces outils s'attachent à l'analyse des aspects locaux de la fonction. À partir de ce moment, le concept de fonction devenait un outil indispensable pour résoudre différents problèmes reliés aux statistiques, à la géométrie, à l'économie, aux sciences, etc. L'apprentissage de la notion de fonction est dorénavant une étape importante et cruciale dans la formation mathématique de nos jeunes.

Si nous regardons le contenu mathématique du programme actuel, l'introduction et l'utilisation de l'algèbre se font au 1er cycle du secondaire. Plusieurs recherches, dont les travaux de Janvier (1987), ont identifié des difficultés lors de l'apprentissage de l'algèbre. Par exemple, plusieurs élèves de premier cycle ne sont pas en mesure de résoudre des équations du premier degré comme $2x + 5 = 3x - 3$ en effectuant des manipulations algébriques. Selon ce chercheur, cette représentation symbolique est décisive dans l'apprentissage des futurs concepts mathématiques, en particulier celui des fonctions. Nous croyons que l'approche symbolique développée par Viète et Descartes (16^e et 17^e siècles) a contribué à l'amélioration de l'efficacité de la résolution d'équations algébriques. Par contre, l'apprentissage des mathématiques en est rendu plus difficile compte tenu que ce « nouveau langage » impose des concepts de plus en plus abstraits.

À la suite de l'élaboration du nouveau langage symbolique, le mariage entre la géométrie et l'algèbre développée par Descartes et Fermat a permis de lier la représentation symbolique à une représentation visuelle. D'ailleurs, nous avons mentionné à la section 1.2.8 que les travaux de Duval (1988, 1993) ont permis d'identifier quelques difficultés rencontrées dans la lecture et l'interprétation des représentations graphiques cartésiennes chez les élèves de seconde (15-16 ans). Ce chercheur évoque l'incapacité des jeunes à retrouver l'équation algébrique d'une droite à partir de la représentation graphique de cette dernière. Seulement 16 élèves sur 105 ont réussi à associer correctement tous les graphiques représentant différentes fonctions affines avec l'équation algébrique correspondante. Duval associe cette difficulté à une mauvaise coordination entre les registres graphique et algébrique de représentation. La difficulté relevée par Duval semble persister au niveau collégial, car les travaux de Vinner (1989) ont montré que les étudiants des cours de calcul ont de la difficulté à coordonner ces registres, à savoir graphique et algébrique.

Une étude de Hitt (1994) a permis d'identifier deux obstacles majeurs chez les futurs enseignants au secondaire. D'une part, ils croient qu'une fonction doit s'exprimer sous la forme d'une seule expression algébrique. D'autre part, une fonction doit être obligatoirement continue sur tout son domaine. À partir de cette recherche, nous pouvons constater un parallèle entre les obstacles rencontrés par les mathématiciens qui ont tenté de définir le concept de fonction et ceux rencontrés par les futurs enseignants du secondaire lors de son apprentissage. Nous sommes d'avis que la notion de fonction peut s'avérer un concept difficile à maîtriser pour les élèves du secondaire en plus d'être une notion importante des mathématiques modernes.

2.1.4 Les registres de représentation sémiotique du concept de fonction

À la section précédente, nous avons résumé l'évolution du concept de fonction dans le but d'exposer les différentes embûches rencontrées par les mathématiciens face à ce concept. De plus, nous avons établi un parallèle entre les obstacles rencontrés par les mathématiciens et ceux rencontrés par les élèves du secondaire à travers les recherches en didactique des mathématiques. En plus de cela, aux sections 1.2.6 et 1.2.7, nous avons exposé l'importance de la notion de fonction dans le curriculum mathématique du secondaire et celui du cours de calcul différentiel au collégial. Avec ces constatations, nous pouvons affirmer que cet objet mathématique est d'un apprentissage ardu, car le mariage entre l'algèbre et la géométrie n'est pas une combinaison naturelle pour les apprenants comme il ne l'a pas été pour les scientifiques de l'époque. Derrière ce concept mathématique se cache un phénomène dynamique qui fait appel à plusieurs types de représentations.

Afin de mieux comprendre le lien entre les différentes représentations et le concept de fonction, nous présentons les registres de représentation sémiotique que nous avons répertoriés.

1) Langue naturelle
2) Numérique
3) Symbolico-algébrique[2]
4) Graphique
5) Schématico-discursif

1) Le registre de la ***langue naturelle*** consiste à décrire ou à expliquer un phénomène lié à un objet mathématique avec l'aide de mots et de phrases. Par exemple, « la fonction est croissante pour toutes les valeurs du domaine » ou encore, « pour chaque accroissement constant de la variable indépendante, nous avons toujours le même accroissement de la variable dépendante », ces exemples sont exprimés dans le registre de la langue naturelle[3].

2) Le registre ***numérique*** est directement relié avec la table de valeurs de la fonction à l'étude. Autrement dit, il est possible d'organiser les valeurs de la variable

[2] Dans le présent travail, nous allons employer le terme ***symbolico-algébrique*** même si ce terme n'est pas celui utilisé dans la théorie des représentations de Duval.

[3] Le lecteur se sera sans doute demandé en quoi des termes techniques et spécialisés comme « croissante », « domaine », « accroissement » relèvent de la *langue naturelle*. Nous avons voulu garder la terminologie de Duval. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point à la section 4.4.3.

indépendante et celles de la variable dépendante de manière à les faire correspondre, dans un tableau, les valeurs de la variable dépendante étant déterminées par une règle de correspondance (équation algébrique de la fonction). Dans l'exemple ci-dessous, nous avons représenté une fonction linéaire dont la règle de correspondance est $y = 2x$.

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

D'autre part, il y a une autre représentation quelque peu différente de la table de valeurs, c'est la représentation en coordonnées cartésiennes. Elle est écrite sous la forme de couplage de nombres réels (ex. $(-1,\ \frac{1}{3})$ ou $(\sqrt{2},\ -\pi)$). Il est important de souligner que les fonctions à l'étude au secondaire sont strictement des fonctions dont le domaine et l'ensemble image sont des sous-ensembles des nombres réels. Nous considérons que cette représentation est différente de la table de valeurs, mais elle fait partie du registre numérique. La raison de ce choix est que les nombres de chaque ligne (ou colonne) de la table de valeurs est un couplage en coordonnées cartésiennes qui lui-même représente un point de la fonction. De plus, les deux représentations mentionnées peuvent être associées à la représentation mentale du type « machine à transformer » : appliquer une fonction consiste à entrer un nombre réel dans la « machine » pour qu'elle transforme le premier nombre en un deuxième qui deviendra la seconde coordonnée (ou colonne). La table de valeurs et les couples de coordonnées cartésiennes sont les deux types de représentation d'une fonction dans le registre numérique que nous avons retenus.

3) Le registre ***symbolico-algébrique*** englobe plusieurs représentations de la notion de fonction. Dans un premier temps, la représentation la plus utilisée au secondaire est celle de l'équation algébrique de la forme $y = f(x)$ où $f(x)$ est une expression symbolique dont les termes sont exprimés en relation avec x.

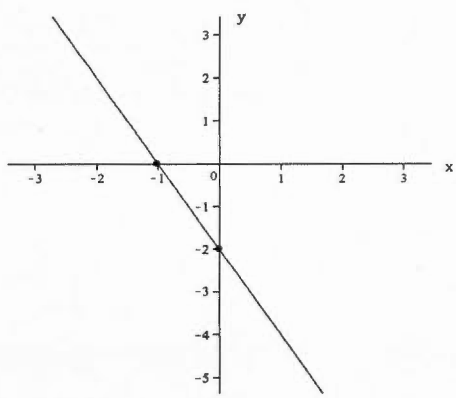
- $y = 2x$
- $y = x^2 + 2x - 1$
- $f(x) = \log_{10} x$

Il est à noter que ce registre ne contient pas seulement les équations algébriques, mais toutes les contraintes d'écriture des différentes opérations sur les fonctions, c'est-à-dire que le formalisme du langage mathématique fait partie du registre ***symbolico-algébrique*** :

• $f(5)$ ou $f(x+5)$	l'image de f correspondant à la valeur 5 de la variable indépendante, ou à la valeur $x + 5$
• $g \circ f$ ou $f \circ g$	la composée de deux fonctions f et g
• f^{-1}	l'inverse de la fonction f
• $f(x) > 0$	l'image de x par f est strictement positive

Généralement, ces écritures devraient être à l'étude lors de l'apprentissage de la notion de fonction au secondaire selon les exigences du MELS (2003).

4) Dans le cas des fonctions à deux variables réelles, le registre ***graphique*** est toujours associé au plan cartésien $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, où l'axe horizontal représente l'ensemble de départ et l'axe vertical l'ensemble d'arrivée, chacun en tant que représentation de $\mathbb{R}$. Voici le graphique de la fonction $y = -2x - 2$:

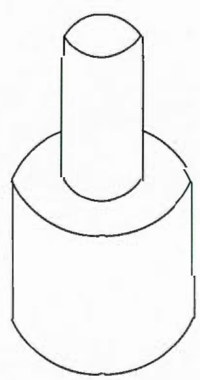


5) Comme dernier registre de représentation, nous avons identifié le registre ***schématico-discursif.*** Nous sommes d'avis que ce registre est le moins naturel de tous les registres répertoriés précédemment. La principale raison est qu'il demande une coordination entre le registre ***schématique*** et celui de la ***langue naturelle***. En ce

qui concerne le registre ***schématique***, les différentes représentations utilisées dans ce registre impliquent la schématisation d'un phénomène ou d'une expérience avec l'aide d'un dessin simplifié des objets en présence. À notre avis, le registre ***schématique*** ne peut être associé à la notion de fonction sans l'utilisation du registre de la ***langue naturelle***. Ce dernier registre servira à décrire le phénomène étudié en accompagnant le dessin de la situation. Généralement, les registres ***schématique*** et ***langue naturelle*** sont utilisés pour modéliser un phénomène. Cette pratique est souvent employée en sciences naturelles dans le but de mieux saisir le sens des phénomènes étudiés. Nous présentons trois exemples qui illustrent à la fois le caractère dépendant de ces deux registres et de l'indépendance du registre de la ***langue naturelle*** dans certains cas.

Exemple 1 : Contexte → *« Nous voulons remplir complètement une bouteille à l'aide d'un robinet. Nous nous intéressons aux grandeurs suivantes : volume d'eau compris dans la bouteille et la hauteur de l'eau dans la bouteille. »*

Exemple 2 : Schéma →



Exemple 3 : « *la fonction est croissante pour toutes les valeurs du domaine* »

Dans l'exemple 1, est-il possible d'associer une fonction à la description contextuelle? À l'inverse, est-il possible d'associer une fonction au schéma de la bouteille comme dans le second exemple? Nous croyons qu'il est impossible d'associer un type de fonction à un schéma sans contexte et vice-versa. Ces exemples montrent l'aspect de dépendance entre ces deux registres lorsque nous voulons mettre en relation le volume d'eau et la hauteur de l'eau comprise à l'intérieur de la bouteille. Contrairement aux deux premiers exemples, le troisième peut être interprété sans avoir recours à un schéma, car il ne décrit pas un phénomène à modéliser, mais il expose un aspect de la fonction dans le registre de la ***langue naturelle***. En conséquence, le registre de la ***langue naturelle*** peut être indépendant du registre ***schématique*** dans le cas où le texte ne décrit pas un phénomène à modéliser, mais l'inverse est impossible. Nous pouvons dire que le registre ***schématico-discursif*** est un « bi-registre », c'est-à-dire qu'il fait intervenir deux registres simultanément. À la suite de cette liaison entre ces deux registres lors de la modélisation d'un phénomène, nous pouvons affirmer que ce « bi-registre » demandera de la part des élèves, une coordination entre les registres ***schématique*** et ***langue naturelle***.

2.1.5 La coordination des registres de représentation sémiotique

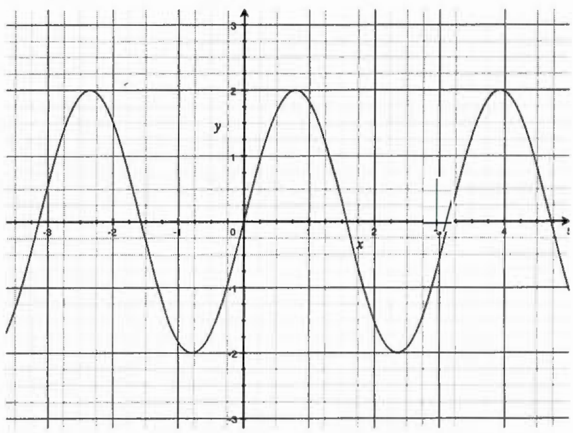
Dans cette section, nous poursuivons avec la théorie de Duval (1993) concernant les registres de représentation sémiotique. Au préalable, nous avons mentionné qu'il y avait trois activités cognitives reliées à la *sémiosis*, soit l'identification, le traitement et la conversion. Duval déplore que l'activité de conversion soit laissée de côté dans l'enseignement des mathématiques. Afin d'illustrer ses propos, nous avons présenté à la section 1.2.8 l'étude de Duval (1988) concernant le manque de coordination entre les registres ***graphique*** et ***symbolico-algébrique*** dont font preuve les élèves français, c'est-à-dire qu'ils ont fréquemment de la difficulté à associer l'expression algébrique au graphique correspondant. Ainsi, nous croyons que l'activité de conversion dans les deux sens pourrait être l'un des principaux obstacles dans la conceptualisation du concept de fonction.

Avant de préciser en quoi consiste la coordination des registres de représentation sémiotique, nous aimerions rappeler le caractère fondamental de la liaison *noésis/sémiosis*. D'une part, l'utilisation de plusieurs registres de représentation semble être une caractéristique de la pensée humaine. D'autre part, l'évolution des connaissances amène continuellement une implantation et un développement de nouveaux systèmes spécifiques qui coexistent plus ou moins avec celui de la langue naturelle. Généralement, la diversité des registres peut s'expliquer par les coûts de traitement et les limitations représentatives spécifiques à chaque registre. Le coût de traitement et le choix du registre de représentation sont directement reliés à la tâche demandée. En calcul arithmétique, nous avons déjà vu un exemple de traitements dans différents registres à la section 2.1.1.

Nous pouvons établir un rapprochement équivalent avec la notion de fonction. Supposons qu'un élève doive déterminer le signe d'une fonction trigonométrique à partir de l'équation algébrique suivante :

$$f(x) = 2\sin(2x)$$

Il est possible de résoudre ce problème sans effectuer de changement de registre. Dans un premier temps, l'élève devra trouver tous les zéros de la fonction. D'ailleurs, cette étape peut se révéler un obstacle dans la perspective où l'élève oublie la caractéristique périodique de cette fonction. En revanche, la représentation graphique nous permet de la constater rapidement. La seconde étape de la résolution sera de déterminer si la fonction est positive ou négative de part et d'autre des zéros de la fonction. Nous pensons qu'il est plus coûteux de travailler seulement à l'intérieur du registre ***symbolico-algébrique*** plutôt que d'utiliser à la fois les registres ***graphique*** et ***symbolico-algébrique***.



Nous croyons qu'il est avantageux de construire sommairement le graphique afin d'avoir une vision globale des caractéristiques de la fonction à l'étude. Cela permettra à l'élève de visualiser rapidement les éléments importants de la tâche, soit trouver l'infinité des zéros de la fonction, et déterminer les intervalles où celle-ci prend des valeurs positives ou négatives. En revanche, le registre ***graphique*** ne permet pas de trouver la valeur exacte de l'image d'une valeur du domaine et vice-versa. Dans ce cas, nous pouvons déclarer que l'utilisation du registre ***symbolico-algébrique*** serait un choix bénéfique. En conséquence, nous sommes d'avis que l'utilisation de plusieurs registres de représentation peut réduire à la fois le coût de traitement et le risque d'erreur de manipulations algébriques. Les exemples présentés au préalable nous ont permis de montrer que chaque registre de représentation contient ses propres informations concernant l'objet mathématique, c'est-à-dire que « toute représentation est cognitivement partielle par rapport à ce qu'elle représente et que d'un registre à un autre ce ne sont pas les mêmes aspects du contenu d'une situation qui sont représentés » (Duval 1993, pp. 49-50).

À partir de l'exemple précédent, nous venons de montrer que le recours à plusieurs registres de représentation lors de la résolution d'un problème permet de réduire les coûts de traitement selon l'information contenue à l'intérieur de chacun des registres, et que par ailleurs, les représentations dans les différents registres sont complémentaires. Duval propose une troisième réponse concernant l'utilisation de plusieurs représentations en mathématique. Il évoque le fait que la conceptualisation d'un objet mathématique implique une coordination de registres de représentation. Cette coordination relève de l'activité de conversion que nous avons décrite comme une transformation externe du registre de départ, c'est-à-dire que la représentation de départ ne fait pas partie du même registre que la représentation finale. Duval précise bien que la réalisation d'une simple activité de conversion ne contribue pas à la coordination des registres de représentation. Afin de mieux comprendre la signification de cette coordination, nous allons préciser ce concept que nous considérons comme fondamental dans la conceptualisation d'un objet mathématique.

Selon Duval, la compréhension d'un contenu abstrait « repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion » (Duval 1993, p. 51). Autrement dit, un étudiant qui n'accomplit une conversion que dans un sens ne manifeste pas une compréhension conceptuelle de l'objet étudié. Ainsi, il est nécessaire que l'étudiant soit en mesure d'effectuer la conversion dans les deux sens pour qu'il montre des signes de coordination entre deux registres de représentation. La figure 2.4 illustre le fonctionnement et la structure des représentations sémiotiques dans la coordination de deux registres de représentation.

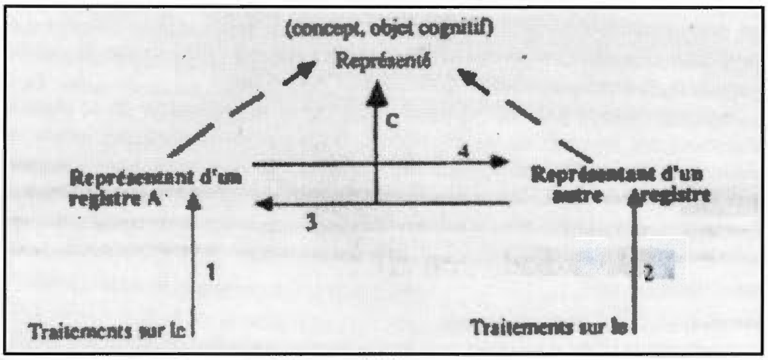


Figure 2.4 Schéma de la coordination de deux registres de représentation sémiotique.

Au sommet de ce schéma, nous avons le *représenté* qui symbolise l'objet ou le concept mathématique étudié. De part et d'autre du *représenté*, il y a deux représentations possibles de l'objet à l'intérieur de deux registres de représentation, les *représentants*. Les flèches 1 et 2 correspondent à l'activité de traitement que nous avons présentée à la section 2.1.2. Nous aimerions rappeler que cette activité consiste à effectuer des transformations internes sur les représentations sans changement de registre de départ.

Néanmoins, nous pouvons remarquer que le schéma ci-dessus ne contient aucune flèche reliant les traitements propres à chaque registre. L'explication provient du fait que pour effectuer un traitement dans un registre différent, il est obligatoire d'exécuter un changement de registre avant de pouvoir accomplir le traitement voulu. Les flèches 3 et 4 correspondent aux transformations externes au registre de départ, c'est-à-dire que chacune d'entre elles est associée à l'activité de conversion. D'ailleurs, nous avons déjà présenté un exemple de conversion à la section 2.1.2 concernant le concept de fonction. Les flèches pointillées servent à distinguer le *représentant* du *représenté*. Et finalement, la flèche C correspond à la coordination entre les deux registres de représentation de la situation. Elle symbolise le fait essentiel que la pleine compréhension conceptuelle n'est atteinte que quand l'individu reconnaît le même objet (le même représenté) à travers ses différentes représentations. Duval précise que ce schéma prend en considération le cas le plus simple de coordination entre deux registres. Il mentionne qu'une coordination entre trois registres ou plus peut s'avérer essentielle dans certains domaines des mathématiques. L'importance des changements de registre « tient au fait que chaque registre a des traitements qui lui sont propres » (Duval 1993, p. 52) et en plus, ces registres ne contiennent pas toutes les informations sur l'objet lui-même.

2.1.6 La coordination des registres de représentation dans le programme de formation de l'école secondaire québécoise au 2e cycle (MELS 2003)

Au chapitre I, nous avons invoqué l'approche par compétence du nouveau programme de formation de l'école québécoise. Le programme de mathématiques du secondaire a été construit de façon à développer trois compétences : *résoudre une situation-problème, déployer un raisonnement mathématique* et *communiquer à l'aide d'un langage mathématique.* Cependant, nous aimerions porter une attention particulière à la troisième compétence en mathématique du programme de formation de deuxième cycle, soit *communiquer à l'aide d'un langage mathématique.* À plusieurs reprises, le MELS souligne l'importance des différents registres de représentation sémiotique dans le développement de la compétence de communication. Conséquemment, nous pouvons retrouver certains aspects de la théorie de Duval à l'intérieur du programme de formation; notamment le fait que les registres de représentation et l'activité de conversion jouent un rôle crucial dans le cheminement des élèves. Le MELS définit un registre de représentations sémiotiques comme étant « *un système de "traces perceptibles" (représentation) qui comporte des règles de conformité, de transformation et de conversion* » (Chapitre 6, p. 2). Cette définition présente les trois activités cognitives répertoriées par Duval : la formation d'une représentation identifiable, le traitement d'une représentation et la conversion d'une représentation d'un registre à un autre.

De même, le développement de la compétence 3 s'appuie sur « *l'appropriation et la coordination des éléments du langage propre à la discipline, qui renvoient pour la plupart à des objets abstraits* » (Chapitre 6, p. 38). Autrement dit, la coordination et l'appropriation des registres de représentation sont essentielles dans l'apprentissage des objets mathématiques. Le MELS mentionne qu'une situation de communication mathématique servant à évaluer cette compétence implique l'utilisation de différents registres de représentation. Ces évaluations peuvent s'effectuer oralement ou par écrit et reposent sur l'activité de conversion entre registres de représentation.

Nous aimerions ajouter que la compétence 2 (*déployer un raisonnement mathématique*) met en cause la construction et l'exploitation des réseaux de concepts qui selon le MELS, doivent avoir recours à différents registres de représentation sémiotique. Le programme ajoute que la coordination de ces éléments de communication du langage mathématique est importante pour le développement de cette compétence.

Dans ces conditions, la théorie de Duval sur les registres de représentation sémiotique et sur le fonctionnement cognitif de la pensée s'avère être un élément central dans le nouveau programme de formation de l'école secondaire. Nous sommes d'avis que les différentes représentations sont des moyens de communication essentiels en mathématiques, spécialement pour la conceptualisation de ses objets abstraits.

2.2 En quoi consiste une « bonne » compréhension

En raison de notre intérêt concernant le niveau de compréhension du concept de fonction des étudiants du cours de calcul différentiel, il est primordial de définir ce qu'est une bonne compréhension relativement à cette notion fondamentale issue de la mathématique moderne. Dans un premier temps, nous allons exposer l'origine latine du mot « comprendre » et les différentes définitions retrouvées dans les dictionnaires d'aujourd'hui. Ensuite, nous allons présenter notre conception d'une « bonne » compréhension dans une théorie des représentations comme nous l'avons présentée précédemment avec les travaux de Duval. Finalement, nous allons adapter notre définition au concept de fonction.

2.2.1 Signification de « comprendre »

Comprehendere est le mot latin correspondant à « comprendre », dont le sens propre est « saisir ensemble » ou « prendre ensemble ». Ce mot latin était employé avec le sens de « saisir quelque chose » ou « saisir quelqu'un ». Ce mot était utilisé autant dans un discours oral que dans un discours écrit. Il apparaît dans la langue française comme « comprendre » au 12^{e} siècle avec le sens de « s'emparer de ». C'est au début du 13^{e} siècle que « comprendre » prendra en français le sens de « saisir par la pensée ». Le Petit Robert donne entre autres comme signification de « comprendre » : « faire entrer dans un tout, une catégorie », c'est-à-dire que l'individu doit identifier l'objet de compréhension afin de l'associer à un autre. Le

Petit Larousse donne par exemple comme acception : « concevoir », « saisir le sens », « se représenter avec plus ou moins d'indulgence les raisons de quelqu'un, quelque chose » et même, « mettre dans un tout, incorporer ». Quant aux significations mentionnées précédemment, nous pouvons affirmer que « comprendre » implique l'idée de constituer un tout et d'établir une correspondance avec des éléments connus. De ce fait, nous croyons que cette interprétation sera un aspect important de notre présente étude.

2.2.2 La « compréhension » dans une théorie des représentations

Nous avons mentionné précédemment que les différentes représentations jouent un rôle de premier plan dans l'activité mathématique. De plus, nous avons présenté la théorie de Duval concernant les registres de représentation sémiotique, notamment l'importance de la coordination entre les registres de représentation dans la conceptualisation des objets mathématiques. À partir de ce moment, nous pouvons expliquer notre point de vue sur « ce qu'est une bonne compréhension dans une théorie des représentations ».

Tout d'abord, nous croyons que sans l'utilisation des représentations sémiotiques, l'activité mathématique est irréalisable. D'ailleurs, ce sont les structures de signifiance des signes et le lien d'interdépendance de la *sémiosis/noésis* qui ont justifié l'importance des représentations sémiotiques. Cette dimension est étroitement liée à l'abstraction même des objets mathématiques étudiés. En particulier, cette relation inséparable entre la *sémiosis* et la *noésis* a permis de montrer que la conceptualisation d'un objet mathématique doit nécessairement passer par la production d'une représentation sémiotique. Aussi, nous avons montré qu'il existe plusieurs représentations d'un même objet ce qui amène une spécificité des représentations sémiotiques, c'est-à-dire que chaque représentation détient des informations partielles de l'objet.

Selon nous, une « bonne » compréhension d'un concept dans une théorie des représentations consiste à articuler plusieurs registres de représentation sémiotique autour d'une notion précise. Cette articulation doit permettre à l'étudiant de reconnaître l'objet mathématique sous ses différentes représentations. Autrement dit, il ne faut pas que l'étudiant privilégie une représentation plutôt qu'une autre car cette prépondérance entraînera un manque de compréhension de l'objet lui-même. Dans ce cas, l'étudiant rencontrera certaines difficultés lors de la résolution d'un problème de transformation externe au registre de départ. Nous sommes d'avis qu'une conceptualisation d'un objet mathématique demandera de la part des étudiants une coordination de registres de représentation sémiotique. Nous croyons qu'il est essentiel de construire d'une part un questionnaire permettant de vérifier la compréhension de certains élèves du collégial. D'autre part, l'élaboration d'une grille de classification des différents niveaux de compréhension du concept de fonction sera essentielle pour nous permettre d'atteindre notre objectif de recherche. Ces deux outils méthodologiques s'appuieront donc sur la théorie de Duval, que nous venons d'exposer.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

3.1 Description globale

Nous avons exposé au préalable que l'apprentissage de la notion de fonction posait plusieurs difficultés chez les élèves du secondaire et du collégial. Certains élèves du collégial vont privilégier l'utilisation du registre ***symbolico-algébrique*** au détriment des autres registres de représentation. D'un autre côté, plusieurs élèves du secondaire ont des difficultés à associer l'expression algébrique à son graphique, même pour les fonctions du premier degré. Par conséquent, nous voulons évaluer le niveau de compréhension des élèves issus du renouveau pédagogique en ce qui concerne la notion de fonction. Tout d'abord, nous allons revenir sur les principaux éléments du cadre théorique qui nous permettront d'atteindre notre objectif de recherche. Par la suite, nous allons expliquer l'élaboration du questionnaire d'évaluation[4] et pour la plupart des questions, nous allons présenter une analyse a priori. Dernièrement, nous allons bâtir une grille de classification de la compréhension des étudiants à partir des travaux de Guzmán, Hitt et Páez (2001), sur la signification de la compréhension des concepts mathématiques dans une théorie des représentations.

3.2 Élaboration du questionnaire

Comme nous l'avons présenté au chapitre précédent, notre cadre théorique s'appuie principalement sur le fonctionnement cognitif de la pensée et sur les registres de représentation sémiotique de la théorie de Duval (1993). De même, la nouvelle approche

[4] Il est important de préciser que la plupart des questions ont été prises des travaux de Guzmán, Hitt et Páez (2001). Cependant, nous les avons adaptées pour pouvoir atteindre notre objectif de recherche.

pédagogique du programme de formation proposée par le MELS est un aspect important de notre recherche. Afin de comprendre le choix de nos outils méthodologiques, nous croyons qu'il est important de resituer les principaux éléments théoriques de notre recherche.

3.2.1 Principaux éléments théoriques

Les différentes représentations sémiotiques d'un concept mathématique sont fondamentales dans l'activité mathématique, car les objets étudiés sont abstraits. Elles servent à symboliser et rendre visible une image mentale d'un individu afin qu'il puisse communiquer avec autrui. Par ailleurs, les représentations ne sont pas utiles seulement pour communiquer, mais elles sont essentielles pour la réalisation d'une activité cognitive. Les trois activités cognitives répertoriées par Duval (1993, p. 40) sont : *la formation d'une représentation identifiable, le traitement d'une représentation* et *la conversion d'une représentation en une représentation d'un autre registre.* Nous avons également mentionné que ces trois types d'activité jouent un rôle de premier plan dans la conceptualisation d'un concept mathématique, notamment l'activité de conversion. D'ailleurs, cette activité est cruciale pour la coordination de deux registres de représentation. Nous considérons que la coordination de plusieurs registres est une condition nécessaire à la compréhension du concept de fonction. Par conséquent, nous allons bâtir un questionnaire qui englobera les trois activités cognitives de la théorie de Duval.

Aussi, nous avons insisté sur le nouveau programme de formation de l'école québécoise. Le MELS a proposé un enseignement basé sur les compétences mathématiques et la résolution de situations-problèmes. De notre point de vue, les élèves ont besoin de développer des réseaux mentaux liés aux représentations internes des objets mathématiques, réseaux mentaux qui permettront de mieux attaquer les situations-problèmes. Bien entendu, nous pourrions composer des questions pour évaluer la compétence à résoudre des situations-problèmes, mais nous allons plutôt nous attacher à cerner les réseaux mentaux développés, et restreindre l'outil méthodologique aux trois activités cognitives et à la coordination entre les registres de représentation.

Puisque nous voulons évaluer le niveau de compréhension du concept de fonction à partir d'une théorie sur les représentations, les différents registres de représentation que nous avons répertoriés à la section 2.1.3 seront fondamentaux pour l'élaboration du questionnaire. D'ailleurs, nous aimerions préciser que nous allons axer principalement notre expérimentation sur quatre des cinq registres dans lesquels se représente le concept de fonction : ***numérique***, ***symbolico-algébrique***, ***graphique*** et ***schématico-discursif***. Une question seulement portera sur le registre de la ***langue naturelle***, celle où l'on demande de donner la définition. Le détail et la justification des choix faits seront discutés dans les prochaines sections.

3.2.2 Échantillon type visé par notre recherche

Pour atteindre notre objectif de recherche, nous avons décidé de réaliser notre expérimentation auprès d'étudiants du collégial inscrits dans un cours de calcul différentiel. Les étudiants que nous avons choisis proviennent de deux établissements scolaires publics. L'un des deux cégeps est situé en périphérie de Montréal et le deuxième est localisé en région. Nous n'avons pas choisi des établissements situés dans la même région pour avoir une meilleure représentation des étudiants québécois. Les répondants n'auront accès à aucun matériel à l'exception de la calculatrice graphique. De plus, étant donné que les enseignants ont accepté de participer à cette recherche en empiétant sur leur temps d'enseignement, nous avions convenu de limiter la collecte de données à seulement une heure. Cette contrainte méthodologique influencera naturellement le choix des questions.

Il est important de mentionner que nous avons limité notre recherche à des groupes d'étudiants inscrits au profil *Sciences de la nature*. La raison de ce choix est que nous croyons que ces étudiants doivent bien comprendre le concept de fonction pour réussir le cours de calcul différentiel. En plus de cela, plusieurs d'entre eux poursuivront leurs études dans un programme universitaire scientifique, comme l'ingénierie, la médecine, les sciences pures, et nous croyons que la notion de fonction sera incontournable dans leur profession.

Étant donné que nous nous intéressons aux élèves issus du renouveau pédagogique, nous nous avons demandé à chaque participant en quelle année il a obtenu son diplôme d'études secondaires. Cette question a permis de sélectionner les élèves qui ont terminé le secondaire en juin 2010. La seconde question concerne le cours de mathématique suivi en 5e secondaire. Nous avons demandé cette information pour différencier les élèves de la séquence *Sciences naturelles* de ceux de *Technico-sciences*. Selon le MELS, les élèves issus des deux séquences possèdent une compréhension des mathématiques suffisante pour poursuivre des études collégiales en *Sciences de la nature*. À partir de cette dernière information, nous allons tenter de comparer le niveau de compréhension des élèves issus de ces deux séquences d'enseignement. La dernière question sociologique que nous voulions poser aux étudiants concernait l'établissement scolaire qu'ils ont fréquenté en 5e secondaire. Cette donnée nous permettra peut-être de comparer et de classifier les étudiants selon l'institution fréquentée. Il est possible que cette donnée ne soit pas tenue en compte dans notre analyse. Bien qu'intéressante et accessible, elle n'enrichit en rien notre questionnement.

3.2.3 Reconnaissance des éléments d'un registre de représentation

La reconnaissance des éléments propres aux registres de représentation d'un objet mathématique est la première activité cognitive répertoriée par Duval (voir section 2.1.2). Selon nous, ce type d'activités exige de la part des étudiants une bonne connaissance de l'objet à l'étude, soit les fonctions, c'est-à-dire qu'ils sont contraints de connaître les principales caractéristiques du concept pour pouvoir le reconnaître à travers ses différentes représentations. Par conséquent, l'activité de reconnaissance est tributaire de la définition de fonction. Cela nous a amenés à construire trois questions qui nous permettront d'évaluer la reconnaissance d'une fonction dans les registres ***graphique***, ***symbolico-algébrique*** et ***langue naturelle***. Cependant, nous croyons qu'il est important d'interroger les étudiants sur ce qu'est une fonction afin de vérifier s'ils sont cohérents dans leurs idées.

Questions de reconnaissance

- La définition du concept de fonction (**question 14**, voir appendice A)

Nous croyons que la définition de fonction est un aspect fondamental de la compréhension du concept mathématique lui-même. Par conséquent, nous pensons qu'il est important de questionner les étudiants sur ce qu'est une fonction afin de bien évaluer leur niveau de compréhension. L'intention de cette tâche est de vérifier si les étudiants sont en mesure de définir ce concept en faisant ressortir ses principales caractéristiques. Tout d'abord, nous allons exposer deux définitions tirées de manuels scolaires dans l'intention de déterminer les spécificités d'une fonction selon l'enseignement au secondaire.

1) « Une fonction est une relation qui fait correspondre à chaque valeur de la variable indépendante **au plus une** valeur de la variable dépendante. Cette correspondance s'exprime par un processus opératoire appelé « règle de correspondance ».[5]

2) « Une fonction est une relation qui fait correspondre à toute valeur que prend la variable indépendante *une et une seule* valeur de la variable dépendante. On parle aussi de « relation fonctionnelle ».[6]

En ce qui nous concerne, la principale caractéristique d'une fonction est la relation entre les variables indépendante et dépendante ce qui revient à dire qu'à chaque valeur de la variable indépendante correspond au plus une valeur de la variable dépendante. Partant de ce fait, il est important que la définition énoncée par les étudiants fasse ressortir cette relation. Cependant, nous croyons qu'il n'est pas essentiel de préciser la nature des variables, soit indépendante et dépendante. Notons que les deux définitions tirées des manuels scolaires font référence à la fonction comme relation. Cet aspect n'est pas négligeable cependant, nous accorderons plus d'importance à la description de la relation entre les deux variables. À notre avis, le fait de mentionner qu'une fonction est une relation n'est pas un critère indispensable à la compréhension de ce concept. Donc, nous n'allons pas tenir compte de cet aspect pour accepter une définition.

Nous croyons que plusieurs étudiants auront certaines difficultés à définir ce concept et par le fait même, il y en a plusieurs qui n'écriront rien. Nous exposons ce pronostic parce que par expérience, les définitions sont souvent apprises par cœur sans que les élèves établissent des liens. Ce qui veut dire qu'ils ne seront pas en mesure d'expliciter la principale caractéristique mentionnée au préalable.

---

[5] Ducharme, Guay, Van Moorhem et coll. 2007. *Point de vue mathématique, 1re année du 2e cycle du secondaire volume 1*, Laval (Québec) : Édition Grand Duc, p. 218. Les caractères gras sont repris tels quels du texte.
[6] Boucher, Coupal, Marotte et coll. 2007. *Intersection, 1re année du 2e cycle du secondaire Manuel de l'élève A*, Montréal (Québec) : Graficor, p. 71. Les caractères italiques sont repris tels quels du texte.

• Registre ***graphique*** **(question 1)**

Quant au registre ***graphique***, nous avons demandé aux étudiants de reconnaître les fonctions parmi quatre graphiques cartésiens proposés. Si l'étudiant prétend que le graphique ne représente pas une fonction, alors il devra expliquer son rejet. Dans le cas où l'étudiant affirme que le graphique représente une fonction, nous avons décidé de ne pas exiger de justification. Or, nous croyons qu'il est important de proposer plusieurs types de graphique afin d'obtenir le plus d'information sur les conceptions des étudiants à l'égard de la notion de fonction. Voici les quatre graphiques que nous avons présentés aux étudiants.

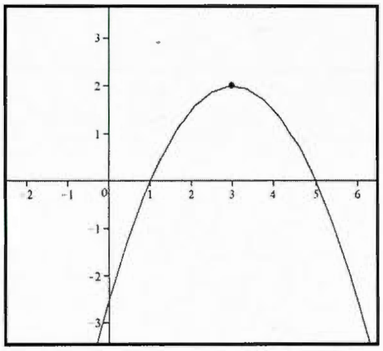


Figure 3.1 Graphique de la question 1a.

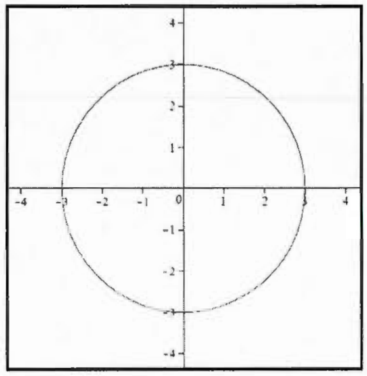


Figure 3.2 Graphique de la question 1b.

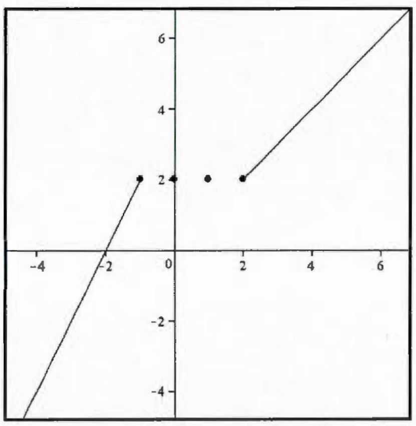


Figure 3.3 Graphique de la question 1c.

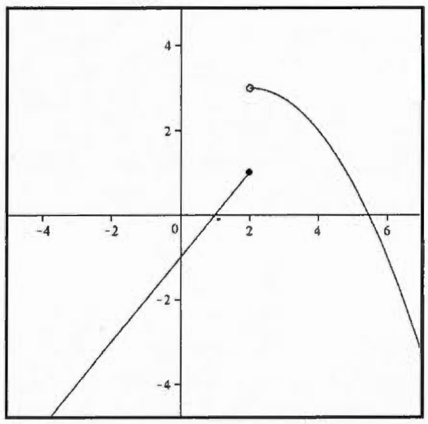


Figure 3.4 Graphique de la question 1d.

Nous avons choisi ces graphiques pour des raisons bien précises. Tout d'abord, nous nous sommes appuyés sur les notions à l'étude dans le programme de formation de l'école québécoise entre autres, les fonctions du deuxième degré, les fonctions définies par parties et les coniques. De plus, nous avons porté une attention particulière à certains obstacles épistémologiques rencontrés par les mathématiciens lors du développement du concept de fonction (voir section 2.1.3).

Graphique 1 (figure 3.1)

Dans le cas du graphique 1, nous avons choisi de présenter une parabole parce que les fonctions du deuxième degré font parties des fonctions étudiées en 4e et 5e secondaire. À notre avis et selon celui du MELS, ce type de fonction est la base de l'apprentissage des fonctions polynomiales. En principe, nous évaluons que les étudiants devraient être en mesure d'identifier ce graphique comme étant celui d'une fonction.

Graphique 2 (figure 3.2)

Concernant le choix du graphique 2, nous avons décidé de proposer celui d'un cercle centré à l'origine dont le rayon est 3. Étant donné que le graphique d'un cercle est défini par une seule équation, nous croyons que certains étudiants seront tentés d'accepter le graphique malgré le fait qu'il y a plus d'une valeur de la variable dépendante associée à certaines valeurs de la variable indépendante (voir Hitt, 1998). D'ailleurs, les mathématiciens du passé se sont également butés à cet obstacle. En plus, nous avons constaté que l'étude des coniques fait partie uniquement du contenu mathématique de 5e secondaire de la séquence *Sciences naturelles* ce qui nous amène à nous interroger sur la réussite des étudiants du profil *Technico-sciences* à cette tâche. Selon notre expérience d'enseignant[7], le taux de réussite devrait être assez élevé étant donné que le procédé favorisé est celui de la droite verticale, c'est-à-dire que le graphique représente une fonction si et seulement si chaque droite verticale croise la courbe en au plus un point.

Graphique 3 et 4 (figure 3.3 et 3.4)

Malgré le fait que plusieurs étudiants connaissent le truc de la droite verticale pour identifier le graphique d'une fonction, nous pensons qu'ils pourraient rencontrer certaines difficultés avec les deux autres graphiques proposés, puisque chacun d'eux représente des fonctions discontinues. Généralement, une fonction discontinue est représentée par plusieurs

[7] Enseignement au secondaire (2e, 4e et 5e secondaires), enseignement au collégial (NYA, NYB, 103 et 203).

expressions algébriques cependant, il existe des exceptions comme la fonction rationnelle[8] $f(x) = \frac{1}{x}$. Comme nous l'avons mentionné précédemment, les mathématiciens du passé se sont heurtés à cet obstacle ce qui veut dire que certains étudiants peuvent sans doute rencontrer les mêmes difficultés. Dans un autre ordre d'idée, la continuité des fonctions est une notion indispensable à l'apprentissage du concept de limites. D'ailleurs, cette notion fait partie du contenu du cours de calcul différentiel (voir tableau 1.4). Pour ces raisons, nous estimons qu'il est indispensable d'interroger les étudiants à ce sujet.

À cet égard, nous proposons deux graphiques de fonctions discontinues. Ces graphiques doivent être différents afin de recueillir le maximum d'informations sur la compréhension des étudiants. Comme nous l'avons déjà précisé, l'activité de reconnaissance est étroitement liée à ce qu'est une fonction, c'est-à-dire que les participants doivent connaître sa principale caractéristique : chaque valeur de la variable indépendante correspond à ***au plus une*** valeur de la variable dépendante. Nous aimerions attirer l'attention sur la condition *au plus une*. À notre avis, il est important de comprendre cette expression pour être en mesure de reconnaître le graphique d'une fonction discontinue puisqu'il n'est pas obligatoire d'associer toutes les valeurs de la variable indépendante à une valeur de la variable dépendante. Autrement dit, il est possible que le domaine d'une fonction ne soit pas l'ensemble de tous les nombres réels. Partant de cette idée, nous avons décidé de proposer le graphique d'une fonction dont certaines valeurs de la variable dépendante ne correspondaient à aucune valeur de la variable indépendante. En conséquence, le domaine de la fonction n'est pas l'ensemble de tous les nombres réels. Nous croyons que cette tâche nous permettra d'identifier certaines conceptions concernant la notion de fonction, entre autres celle de la nécessaire continuité d'une fonction.

De plus, nous voulons également proposer le graphique d'une fonction discontinue (figure 3.4) dont le domaine est l'ensemble de tous les nombres réels. Ce choix implique l'utilisation d'un symbole propre au registre graphique, soit le « point ouvert ». Ce symbole signifie que le couple (2,3) n'appartient pas au graphique de la fonction. En choisissant ce graphique, nous voulons évaluer plusieurs aspects de la notion de fonction discontinue. Est-ce qu'ils rejetteront le graphique parce qu'il est impossible de représenter cette fonction avec

---

[8] La fonction n'est pas définie pour $x = 0$, elle est continue sur chacun des intervalles de $\mathbb{R} / \{0\}$, mais n'est cependant pas continue en tant que fonction $\mathbb{R}$ puisqu'elle a une discontinuité en $x = 0$.

une seule expression algébrique? Est-ce qu'ils seront en mesure de distinguer les symboles de ce graphique? Selon nous, il est important de confronter les étudiants à ce type de graphique pour évaluer leur compréhension.

- Registre ***symbolico-algébrique*** **(question 2)**

Nous avons construit une question similaire à la question 1, mais elle fait référence au registre ***symbolico-algébrique***. Cette question consiste à reconnaître les fonctions parmi les quatre expressions algébriques proposées. Pareillement à la question précédente, les étudiants devront justifier leur réponse uniquement dans le cas où l'expression ne représente pas une fonction. Comme pour la question 1, les expressions algébriques ont été choisies de manière à tenir compte du corpus mathématique du secondaire et des obstacles épistémologiques associés au concept de fonction. L'objectif de cette question est de vérifier si les étudiants sont capables de reconnaître une fonction dans le registre ***symbolico-algébrique*** et d'identifier les critères de décision. Voici les équations que nous avons présentées.

1) $x^2 + y^2 = 4$
2) $x^2 + 2x - y = 3$
3) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & si\ x < 0 \\ 3 & si\ x \geq 0 \end{cases}$
4) $y = \frac{x+5}{x-4}$

Équation 1

La première équation $x^2 + y^2 = 4$ représente un cercle centré à l'origine et de rayon 2. C'est l'équation d'une conique. Il est important de préciser que cette équation ne représente pas une fonction, car la relation fait correspondre à pratiquement toutes les valeurs de la variable x plus d'une valeur de la variable y. Ainsi, nous allons accepter ce type de justification. Par ailleurs, nous sommes conscients que l'étude des coniques ne fait pas partie du contenu mathématique du profil *Technico-sciences*. Cependant, nous voulons tout de même savoir si ces étudiants sont en mesure de rejeter l'équation et en plus, de donner une justification valable. À notre avis, les étudiants du profil *Sciences naturelles* devraient pouvoir répondre correctement puisqu'ils ont étudié les coniques. Nous croyons tout de même que plusieurs participants associeront cette équation avec celle d'une fonction parce qu'il y a une seule équation.

Équation 2

La seconde expression $x^2 + 2x - y = 3$ correspond à une fonction de deuxième degré. Nous avons décidé d'exprimer cette fonction sous une forme implicite puisque la plupart du temps, les fonctions polynomiales du deuxième degré sont présentées sous la forme $y = f(x)$. Nous présumons que la majorité des étudiants seront en mesure d'associer l'équation présentée à une fonction pour la simple raison qu'il est simple d'isoler la variable y pour retrouver la forme générale $y = ax^2 + bx + c$ de la fonction quadratique.

Équation 3

Pour ce qui est de la troisième équation $f(x) = \begin{cases} x + 2 & si\, x < 0 \\ 3 & si\, x \geq 0 \end{cases}$, nous avons construit une fonction définie par parties. Deux raisons nous ont poussés à choisir une équation de ce type. Premièrement, nous voulons vérifier si les participants croient qu'une fonction doit nécessairement s'écrire avec une seule équation. Deuxièmement, nous voulons savoir quelles seraient les raisons qui mèneraient les étudiants à exclure cette expression.

Équation 4

La dernière équation $y = \frac{x+5}{x-4}$ représente une fonction rationnelle. Selon le contenu mathématique des deux profils d'enseignement, ce type de fonction devrait être étudié en 5^e secondaire. De ce fait, les étudiants devraient être en mesure d'associer cette équation à celle d'une fonction. En proposant cette équation, nous voulons vérifier si les élèves reconnaitront la fonction rationnelle ou s'ils la rejetteront. Bien entendu, nous nous intéressons particulièrement aux raisons qui mèneraient les étudiants à exclure cette équation.

3.2.4 Activité de traitement

La deuxième activité cognitive inventoriée par Duval (ibid.) est la transformation d'une représentation à l'intérieur d'un registre. Par exemple, le calcul algébrique est une activité de traitement à l'intérieur du registre ***symbolico-algébrique***. Dans le but de vérifier si les étudiants sont en mesure de réaliser des activités de traitement concernant le concept de fonction, nous avons choisi de construire trois questions faisant appel au registre ***symbolico-algébrique*** et une question concernant le registre ***graphique***. Nous nous sommes limités à ces deux registres parce que nous croyons que les activités de traitement proposées au secondaire s'appliquent principalement à ces deux registres.

Questions de traitement

- Registre ***graphique*** **(question 8)**

À la question 8, nous voulons vérifier si les étudiants sont en mesure de comparer plusieurs graphiques afin d'associer ceux qui représentent la même fonction. Dans le but d'établir ces correspondances, les étudiants devront être capables de lire les informations à l'intérieur de chacun des graphiques proposés. En conséquence, le choix des graphiques est capital pour que nous puissions évaluer le niveau de compréhension de l'activité de traitement à l'intérieur du registre ***graphique***. Pour ce faire, nous avons construit six graphiques de fonctions sinusoïdales (voir figure 3.5) et nous avons proposé la question suivante : si possible, associer les graphiques qui représentent la même fonction sinusoïdale. Afin d'éviter les erreurs d'interprétation de la question, nous avons souligné qu'il pouvait y avoir plusieurs associations possibles.

Dans l'intention d'évaluer cette activité cognitive, nous devions proposer des graphiques qui à première vue, ont certaines ressemblances malgré le fait qu'ils ne représentent pas la même fonction. Pour cette raison, nous avons choisi quatre fonctions sinusoïdales semblables. Voici les expressions algébriques pour ces fonctions :

1) $2\sin x$ $\Rightarrow$ amplitude de 2 et fréquence (ou période) de 2π
2) $2\sin\frac{x}{2}$ $\Rightarrow$ amplitude de 2 et fréquence de 4π
3) $3\sin x$ $\Rightarrow$ amplitude de 3 et fréquence de 2π
4) $3\sin\frac{x}{2}$ $\Rightarrow$ amplitude de 3 et fréquence de 4π

Les différences entre ces quatre fonctions sont les valeurs de l'amplitude et de la fréquence. Pour pouvoir représenter différemment deux fois la même fonction, nous avons dû modifier certains aspects du graphique sans pour autant que la fonction représentée ne soit altérée. De plus, nous ne voulions pas que cette tâche soit trop simple. Pour ces raisons, nous avons privilégié un changement de graduations des deux axes de chaque graphique pour obtenir des courbes différentes au premier regard. Pour bien comprendre notre intention, nous allons expliquer ces changements en comparant les graphiques 1 et 3 qui représentent la fonction $f(x) = 2\sin x$.

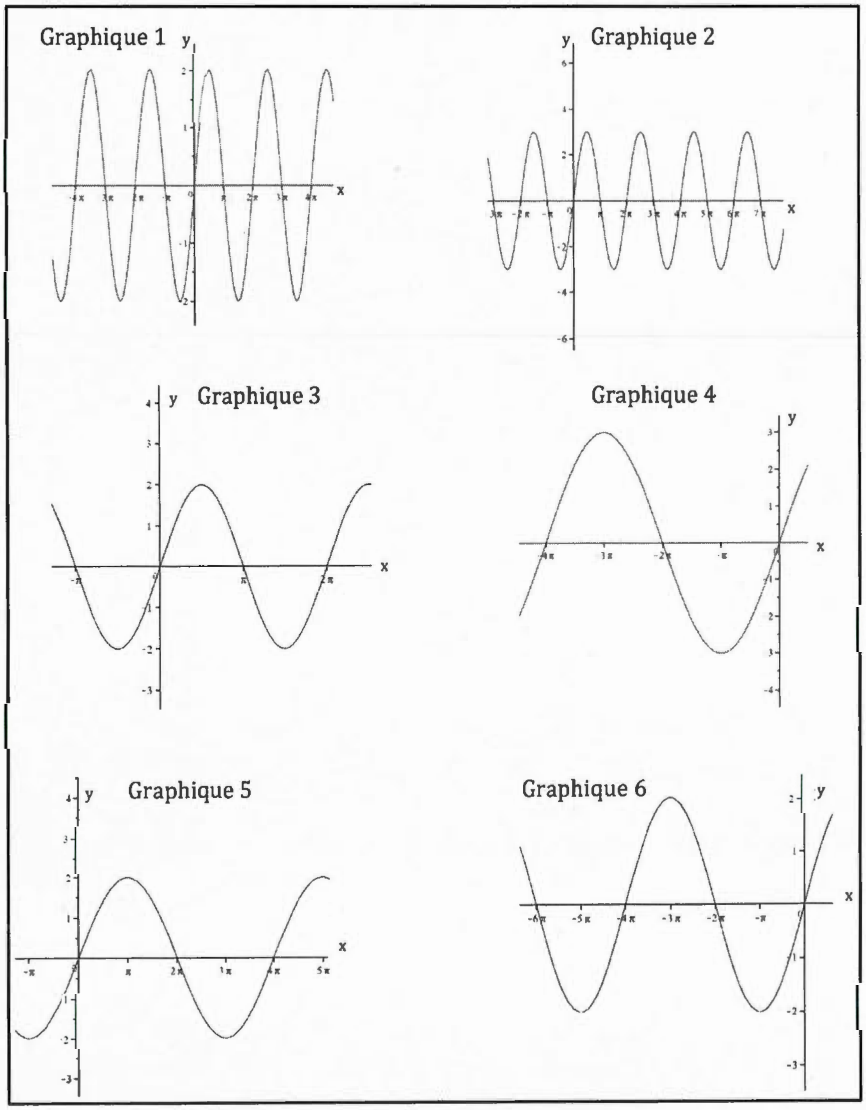


Figure 3.5 Les six graphiques proposés à la question 8.

Lorsque nous comparons l'allure globale des deux courbes, nous remarquons qu'il y a plus d'oscillations dans le graphique 1 que dans le graphique 3. De même, chaque oscillation semble plus grande dans le graphique 1 que dans le graphique 3. Au premier abord, nous serions tentés de dire que les deux fonctions sont différentes. Cependant, ces graphiques représentent la même fonction. Les différences de l'allure globale de la courbe sont provoquées par une modification du cadrage du graphique c'est-à-dire que nous avons fait un « zoom in » ou « zoom out » du graphique.

Nous avons également modifié le cadrage des graphiques 5 et 6 pour vérifier si les étudiants sont en mesure d'interpréter les informations contenues dans la représentation graphique. Néanmoins, la correspondance entre ces deux graphiques n'est pas directe, car il y a uniquement un point en commun entre les deux graphiques, c'est l'origine. Cela est dû au choix du cadrage. Par conséquent, les informations contenues dans chacune des représentations graphiques s'avèreront cruciales pour la réalisation de cette activité de traitement.

Nous croyons que la majorité des étudiants seront en mesure d'associer correctement les graphiques 1-3 et 5-6 qui représentent respectivement les mêmes fonctions. La principale raison est qu'ils ont travaillé la lecture de points des graphiques cartésiens. En revanche, nous croyons que certains étudiants peuvent rencontrer certaines difficultés pour la correspondance entre les graphiques 5 et 6 car, comme nous l'avons précisé antérieurement, le seul point commun entre les deux graphiques est l'origine du plan. Pour associer ces graphiques, les élèves devront observer d'autres caractéristiques comme les maximums, les minimums et la fréquence.

- Registre ***symbolico-algébrique*** **(questions 3 et 4)**

Nous avons décidé de concevoir deux questions semblables qui ont pour objectif de déterminer si les deux expressions algébriques représentent la même fonction. Pour ce faire, les étudiants doivent effectuer quelques manipulations algébriques afin d'établir la correspondance entre les deux équations s'il y a lieu. De plus, ils doivent vérifier si les deux équations ont le même ensemble-solution pour les mêmes valeurs de x. En effet, deux équations représentent la même fonction si et seulement si elles ont le même domaine de définition et le même ensemble image et si par des manipulations algébriques, nous pouvons montrer l'équivalence des deux équations.

Question 3

À la question 3, nous avons proposé les deux équations suivantes : $f(x) = \frac{x+2}{x-5}$ et $g(x) = 1 + \frac{7}{x-5}$. Pour montrer l'équivalence de ces deux fonctions, les étudiants devront avoir recours à des manipulations algébriques. Nous croyons qu'ils privilégieront deux méthodes similaires. Cependant, nous sommes conscients qu'il existe d'autres manières de raisonner ce problème.

Méthode 1 (division de deux binômes)

La première méthode consiste à effectuer la division des deux binômes de l'expression pour $f(x)$, soit $x + 2$ et $x - 5$.

Calcul :
$$\begin{array}{r|l} x+2 & x-5 \\ \cline{2-2} -\underline{x-5} & 1 \text{ reste } 7 \quad \text{ou } 1 + \frac{7}{x-5} \\ 0x+7 & \end{array}$$

Le résultat de cette division sera $1 + \frac{7}{x-5}$ donc les deux équations sont équivalentes parce que pour chaque valeur de $x \neq 5$, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ ont la même valeur de y. Ainsi, les deux équations proposées représentent la même fonction.

Méthode 2 (dénominateur commun)

La seconde méthode consiste à transformer l'écriture de la fonction $g(x)$ de manière à retrouver exactement l'expression $\frac{x+2}{x-5}$.

Calcul : 1 et $\frac{7}{x-5}$ ont comme dénominateur commun $x - 5$

$$g(x) = 1 + \frac{7}{x-5} = 1 \times \frac{x-5}{x-5} + \frac{7}{x-5} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{7}{x-5} = \frac{x-5+7}{x-5} = \frac{x+2}{x-5} = f(x)$$

Étant donné que l'expression de $g(x)$ est exprimée comme la somme de deux fractions, la première étape serait de trouver le dénominateur commun de ces fractions : $x - 5$. Ensuite, il suffit de réécrire les deux fractions et d'additionner les numérateurs pour obtenir l'expression correspondant à la fonction $f(x)$.

Nous croyons que les étudiants vont privilégier la deuxième méthode parce qu'il nous semble plus simple de mettre deux fractions sur le même dénominateur que d'effectuer la division de deux binômes. Dans un autre ordre d'idées, il se peut que certains étudiants montrent l'équivalence en utilisant le registre ***numérique***. Par exemple, ils se donneront quelques valeurs de la variable x, puis ils calculeront la valeur de la variable dépendante correspondante. Nous estimons que les étudiants qui préconiseront cette méthode ne maîtrisent pas l'activité de traitement dans ce registre de représentation, car le registre ***symbolico-algébrique*** représente la généralisation de la relation contrairement au registre ***numérique*** qui permet d'émettre des hypothèses sur l'équivalence, mais qui ne permet pas de montrer l'équivalence pour toutes les valeurs de x.

Question 4

L'objectif de la question 4 est similaire à celui de la question 3. Par contre, nous avons changé les fonctions $f(x)$ et $g(x)$. À première vue, les deux équations proposées $f(x) = x - 3$ et $g(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1}$ semblent représenter différents types de fonctions, mais elles sont toutes les deux des fonctions linéaires. Pourquoi avons-nous proposé ces équations?

1) vérifier si les étudiants se fient uniquement sur la forme de l'écriture (premier degré et fraction de polynômes) pour déterminer l'inégalité de deux fonctions,
2) vérifier si les étudiants tiennent compte des domaines de définition des fonctions,
3) vérifier si les étudiants sont en mesure d'effectuer des manipulations algébriques adéquates pour passer de $g(x)$ à $f(x)$.

Étant donné que nous croyons que plusieurs étudiants favoriseront une démarche algébrique, nous avons exprimé la droite $f(x) = x - 3$ sous la forme d'une fraction dont le numérateur est une expression du deuxième degré et le dénominateur est une expression du premier degré. Ceci étant dit, il est possible de retrouver l'expression de $f(x)$ en effectuant des manipulations algébriques sur l'expression de $g(x)$. Cependant, la différence entre ces deux fonctions est leur domaine de définition : le domaine de la fonction $f(x)$ est tous les nombres réels et celui de la fonction $g(x)$ est tous les nombres réels sauf -1. Comme nous l'avons dit précédemment, nous croyons que plusieurs étudiants opteront pour une approche algébrique afin de déterminer si les deux équations représentent la même fonction. Pour ce faire, nous présenterons deux méthodes algébriques, l'une est la factorisation d'un polynôme de degré 2 et l'autre est la division de deux polynômes.

Méthode 1 (factorisation de $g(x)$)

La première méthode consiste à factoriser le polynôme $x^2 - 2x - 3$ ce qui revient à réécrire le polynôme sous la forme d'une multiplication de deux binômes. Nous croyons que les étudiants qui feront une mise en facteur chacun avec la méthode qu'il maîtrise le mieux. Les participants trouveront que le polynôme $x^2 - 2x - 3$ est égal à $(x - 3)(x + 1)$. Ensuite, ils n'auront qu'à simplifier l'expression $\frac{(x-3)(x+1)}{x+1}$. Il est important de préciser que l'expression $\frac{(x-3)(x+1)}{x+1}$ est égale à $x - 3$ seulement si $x \neq -1$.

Méthode 2 (division de polynômes)

La deuxième méthode consiste à effectuer la division de $x^2 - 2x - 3$ par $x + 1$.

$$\text{Calcul} \Rightarrow \quad \begin{array}{rl|l} & x^2 - 2x - 3 & x+1 \\ - & \underline{x^2 + 1x} & x-3 \\ & 0x^2 - 3x - 3 & \\ - & \underline{3x + 3} & \\ & 0 & \end{array}$$

Finalement, l'expression $\frac{x^2-2x-3}{x+1}$ est équivalente à $x - 3$ pour toutes les valeurs de $x \neq -1$. À notre avis, la plupart des participants seront en mesure de différencier les deux fonctions c'est-à-dire qu'ils répondront que les équations ne représentent pas la même fonction en précisant qu'il est impossible de diviser $x^2 - 2x - 3$ par $x + 1$ si $x = -1$ parce que la division par 0 est impossible. Néanmoins, nous pensons que plusieurs participants seront capables d'effectuer des manipulations algébriques pour montrer l'équivalence des deux expressions, mais il ne feront aucune référence à la restriction de l'expression $\frac{x^2-2x-3}{x+1}$. Par exemple, si un étudiant réussit à montrer l'équivalence, mais sans préciser la restriction de l'expression $\frac{x^2-2x-3}{x+1}$, nous sommes d'avis qu'il ne maîtrise pas suffisament l'activité de traitement dans le registre ***symbolico-algébrique***.

- Registre ***symbolico-algébrique* (question 12)**

À la question 12, nous avons choisi d'interroger les étudiants sur la recherche des zéros de la fonction sinusoïdale $y = 2\sin(\frac{x}{2})$. Nous croyons que ce type de tâche est capital pour déterminer les signes d'une fonction notamment pour le cours de calcul différentiel. Les zéros de cette fonction sont tous les nombres définis par l'ensemble $\{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Selon nous, il y a plusieurs manières de résoudre cette tâche. Nous présentons une méthode pour résoudre l'équation $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$.

Méthode

Il est possible de résoudre l'équation $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ en raisonnant à partir de l'équation $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$. Les étudiants peuvent résoudre cette dernière équation de manière à trouver toutes les valeurs de l'angle dont le sinus vaut 0. De cette façon, ils trouveront que la mesure de l'angle doit appartenir à l'ensemble défini par $\{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. La seconde et dernière étape consiste à résoudre l'équation $\frac{x}{2} = \pi n$, où n est un entier relatif. L'ensemble solution de cette équation est défini par $\{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Selon nous, cette question peut s'avérer difficile à résoudre, car les manipulations algébriques ne sont pas suffisantes pour résoudre ce problème. Nous croyons qu'il est important que les étudiants se rappellent de certaines caractéristiques de la fonction sinusoïdale entre autres, la périodicité et le schéma du cercle trigonométrique. C'est pourquoi nous croyons que cette question est plus difficile que les questions 3 et 4 par le fait que les étudiants doivent posséder une représentation mentale du cercle trigonométrique. De même, nous pensons que plusieurs étudiants ne seront pas en mesure d'exprimer les solutions en écriture ensembliste. Cependant, nous allons accepter la proposition d'un étudiant qui énumère les solutions de manière à exprimer l'infinité de solutions sans avoir recours à cette écriture spécifique. À la figure 3.6, nous présentons quelques exemples de solution que nous allons accepter comme des réponses valables. En revanche, nous n'accepterons pas la solution d'un étudiant qui énumère uniquement quelques solutions sans expliquer ou exprimer l'infinité des solutions.

Exemple 1	$... -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi ...$
Exemple 2	$n\pi$ où n est un nombre pair positif ou négatif
Exemple 3	$-360°, 0°, 360°, 720° ...$

Figure 3.6 Exemples de solutions acceptables à la question 12.

3.2.5 Activité de conversion

La dernière activité cognitive de la théorie de Duval est la conversion d'un registre vers un autre, conversion également nommée transformation externe. Comme nous l'avons précisé dans notre cadre théorique (voir section 2.1.5), nous croyons que ce type d'activités est fondamental pour le développement conceptuel d'un objet mathématique. Puisque notre intention de recherche est d'évaluer la compréhension du concept de fonction dans une théorie des représentations, nous croyons qu'il est important de construire plusieurs tâches liées à cette activité cognitive. Nous devons également varier les registres de représentation impliqués dans l'activité de conversion et le sens de la conversion. Nous aimerions rappeler que selon nous, la coordination de plusieurs registres est fondamentale au développement conceptuel d'un objet mathématique. Par le fait même, ce sont les activités de conversion qui nous permettront d'identifier les étudiants qui coordonnent plusieurs registres. Autrement dit, le fait qu'un étudiant soit capable de passer d'une représentation à une autre est un indice substantiel de sa compréhension. Toutefois, la coordination de deux registres exige la conversion dans les deux sens, c'est-à-dire que la conversion d'un registre vers un autre registre n'est pas une condition suffisante pour qu'un individu coordonne les deux registres. Par ailleurs, un individu qui coordonne plusieurs registres aura un réseau interne plus élaboré qu'un individu qui n'en coordonne que deux. Ceci dit, les quatre principaux registres listés sont : ***numérique***, ***symbolico-algébrique***, ***graphique*** et ***schématico-discursif***. Si nous tenons compte de toutes les conversions possibles entre ces registres, nous devrions construire au moins douze questions sur l'activité de conversion. Pour illustrer nos propos, nous avons schématisé toutes les conversions possibles avec les quatre registres (voir figure 3.7).

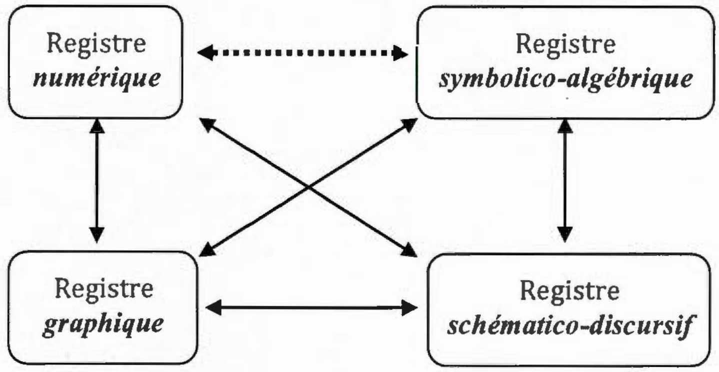


Figure 3.7 Schéma des tâches possibles de conversion.

Cependant, nous avons choisi de sélectionner sept tâches sur les douze tâches associées à l'activité de conversion. Ce choix est dû au fait que nous avions seulement une heure à accorder aux étudiants pour répondre au questionnaire[9]. De ce fait, nous avons ciblé les conversions qui selon nous, sont les plus importantes dans la compréhension du concept de fonction. De plus, la plupart des tâches choisies nous permettront d'identifier les étudiants qui coordonnent plusieurs registres de représentation.

Dans cette recherche, nous allons évaluer les trois coordinations suivantes :

Coordination des registres ***symbolico-algébrique*** et ***graphique***

- Conversion registres ***symbolico-algébrique*** vers registre ***graphique*** (question 5)
- Conversion registres ***graphique*** vers registre ***symbolico-algébrique*** (question 11)

Coordination des registres ***symbolico-algébrique*** et ***numérique***

- Conversion registres ***symbolico-algébrique*** vers registre ***numérique*** (question 7)
- Conversion registres ***numérique*** vers registre ***symbolico-algébrique*** (question 13)

Coordination des registres ***schématico-discursif*** et ***graphique***

- Conversion registres ***schématico-discursif*** vers registre ***graphique*** (question 9)
- Conversion registres ***graphique*** vers registre ***schématico-discursif*** (question 10)

[9] Nous avons déjà explicité les raisons de ce choix à la section 3.2.2.

Questions de conversion

- Registre ***symbolico-algébrique*** et registre ***graphique*** **(questions 5 et 11)**

Question 5 (registre ***symbolico-algébrique*** vers registre ***graphique***)

À la question 5, nous demandons aux étudiants d'esquisser le graphique de deux fonctions à partir de leur équation respective. Le premier graphique à tracer est celui de la fonction rationnelle $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ et le second correspond à la fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x-1}$. Ces choix sont dus au fait que ces fonctions sont étudiées en 5^{e} secondaire et d'autre part, elles seront employées et approfondies dans le cours de calcul différentiel du collégial. Étant donné que nous demandons aux étudiants d'esquisser le graphique des fonctions rationnelle et racine carrée, nous nous attendons à voir certaines caractéristiques propres à chacune d'entre elles, notamment les valeurs exclues du domaine, les asymptotes et l'allure générale de la courbe. Selon nous, l'allure globale des deux fonctions doit ressembler à la courbe de la fonction dite « de base » de chacune d'entre elles. Nous présentons les graphiques les fonctions de base aux figures 3.8 et 3.10 et les graphiques des fonctions $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ et $f(x) = \sqrt{x-1}$ respectivement aux figures 3.9 et 3.11.

Caractéristiques de la représentation graphique de la fonction rationnelle $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
⇒ Asymptotes à $x = 1$ et $y = 1$ (les droites en bleu)
⇒ Courbe dans le quadrant I (par rapport aux deux asymptotes)
⇒ Courbe dans le quadrant III (par rapport aux deux asymptotes)

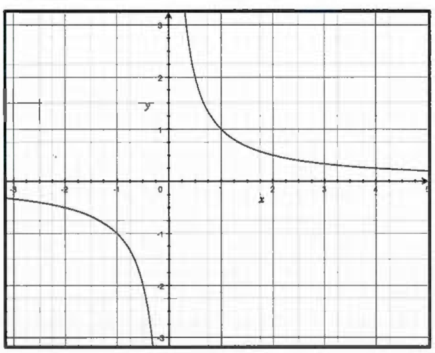


Figure 3.8 Graphique fonction rationnelle $y = \frac{1}{x}$.

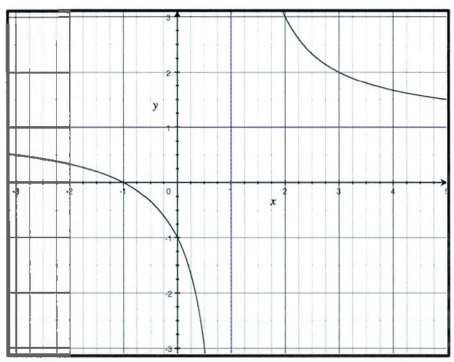


Figure 3.9 Graphique fonction $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

Caractéristiques de la représentation graphique de la fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x-1}$

- ⇒ Sommet de la parabole au point (1 , 0)
- ⇒ Courbe identique à la fonction de base $y = \sqrt{x}$

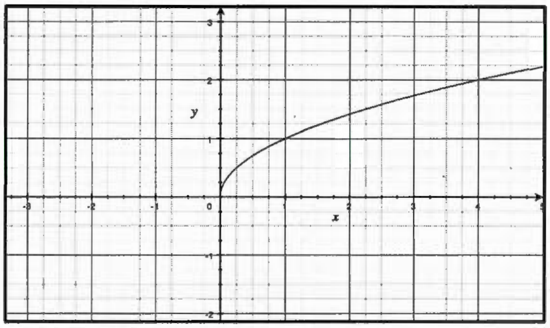


Figure 3.10 Graphique fonction racine carrée $y = \sqrt{x}$

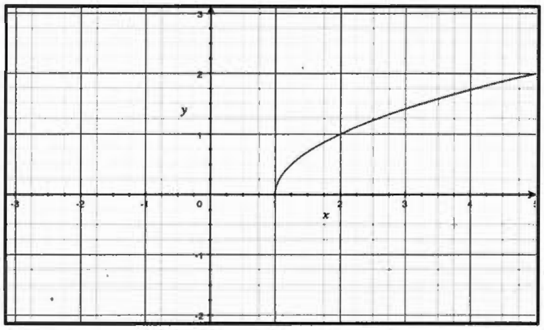


Figure 3.11 Graphique fonction. $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Question 11 (registre ***graphique*** vers registre ***symbolico-algébrique***)

À la question 11, nous proposons deux graphiques (voir figures 3.12 et 3.13) et les participants doivent retrouver l'équation algébrique de chaque graphique. Le premier représente la fonction linéaire $f(x) = -2x - 2$ et le second est celui de la fonction définie par parties $g(x) = \begin{cases} -2 & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$. Nous avons choisi une fonction linéaire pour deux raisons. Premièrement, ce type de fonctions est généralement introduit au premier cycle et son étude est poursuivie tout au long du secondaire. Deuxièmement, les travaux de Duval (1988) ont montré que plusieurs élèves de seconde (4[e] secondaire) ne sont pas capables d'associer le graphique d'une fonction linéaire avec son équation. Or, les étudiants du cours de calcul différentiel devraient être capables de trouver l'équation d'une droite à partir de sa représentation graphique. Quant au choix de la deuxième fonction, nous avons décidé de proposer une fonction définie par parties parce que selon certaines recherches (voir Hitt 1994), les courbes discontinues ou encore celles qui ne peuvent pas être associées à une unique équation ne sont pas considérées comme des fonctions par les futurs maîtres. C'est pour cette raison que nous voulons vérifier si les étudiants peuvent exprimer correctement une fonction définie par parties ainsi que trouver les deux expressions algébriques associées aux deux droites.

L'équation algébrique de la fonction linéaire doit être de la forme :

$$f(x) = -2x - 2 \quad \text{OU} \quad y = -2x - 2$$

- La pente est égale à -2 et l'ordonnée à l'origine est égale à -2

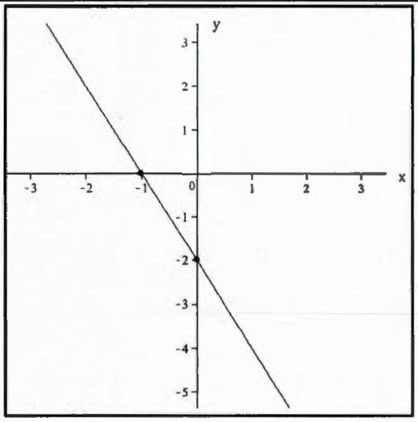


Figure 3.12 Graphique de la fonction linéaire $y = -2x - 2$.

L'équation algébrique de la fonction définie par parties est de la forme :

$$g(x) = \begin{cases} -2 & si\, x < 0 \\ x & si\, x \geq 0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad y = -2\, si\, x < 0 \text{ et } y = x\, si\, x \geq 0$$

- Les restrictions associées aux valeurs de x dans chacune des équations doivent être précisées

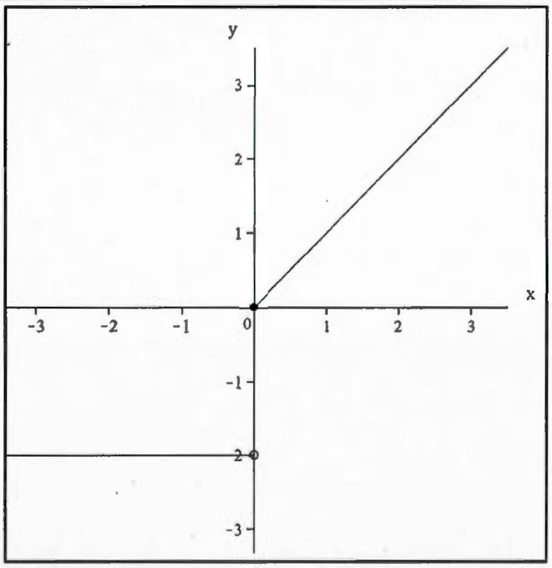


Figure 3.13 Graphique de la fonction définie par parties $g(x) = \begin{cases} -2 & si\, x < 0 \\ x & si\, x \geq 0 \end{cases}$.

Nous croyons que la plupart des étudiants seront capables de retrouver l'équation de la fonction linéaire. En nous appuyant sur les recherches de Duval (1988), nous pouvons postuler qu'il y aura peut-être des étudiants qui auront certaines difficultés à retrouver l'équation de la fonction linéaire proposée. En ce qui concerne la seconde fonction, nous croyons qu'il y aura une plus grande proportion d'étudiants qui ne seront pas capables d'exprimer correctement l'expression de la fonction définie par parties. Nous avançons cette hypothèse car selon les recherches de Guzmán, Hitt et Páez (2001) concernant le niveau de compétence sur le concept de fonction, la majorité des futurs maîtres en mathématiques rencontrent certaines difficultés lors de la recherche de l'équation d'une fonction définie par parties. Nous pensons que les étudiants rencontreront sûrement des difficultés similaires. En revanche, notre questionnaire ne permettra pas d'identifier la nature spécifique des difficultés rencontrées, mais plutôt d'identifier les étudiants qui exprimeront correctement ce type de fonction.

- Registre ***symbolico-algébrique*** et registre ***numérique*** **(questions 7 et 13)**

Les registres ***numérique*** et ***symbolico-algébrique*** sont couramment employés dans l'étude des différents types de fonctions au secondaire. De ce fait, nous avons bâti deux questions qui demandent aux étudiants d'effectuer une conversion impliquant ces deux registres de représentation.

Question 7 (Registre ***symbolico-algébrique*** vers registre ***numérique***)

Afin d'évaluer la conversion du registre ***symbolico-algébrique*** vers le registre ***numérique***, nous devions choisir une tâche qui allait faire appel aux concepts de domaine, d'ensemble image et de couple de coordonnées cartésiennes. La raison de ce choix est que ces concepts sont étroitement liés au registre ***numérique***. De plus, nous croyons qu'il est important que les étudiants du cours de calcul différentiel soient capables de déterminer le domaine et l'ensemble image d'une fonction pour réaliser certaines tâches comme esquisser le graphique d'une fonction à partir de son équation.

Pour cette tâche, nous avons décidé d'une subdivision en trois parties. La première tâche consiste à identifier parmi huit nombres réels, ceux qui appartiennent au domaine de la fonction exprimée par son équation algébrique. Pour la seconde, nous avons également proposé huit nombres réels parmi lesquels les participants doivent identifier ceux qui appartiennent à l'ensemble image. Comme dernière tâche, nous demandons d'identifier les couples appartenant à la fonction. Par ailleurs, les nombres que nous avons choisis appartiennent à différents ensembles, soit nombres rationnels, nombres relatifs, nombres irrationnels, dont des multiples de π. Ces choix nous permettront d'obtenir des informations pertinentes concernant les différentes conceptions des participants par rapport aux nombres.

En ce qui concerne le choix de la fonction, nous avons proposé l'équation d'une fonction racine carrée dont l'expression sous le radical est du second degré (voir figure 3.14). Pourquoi présentons-nous une fonction composée? Tout simplement, parce que les étudiants du cours de calcul différentiel auront à dériver des fonctions de ce type. Par conséquent, nous croyons qu'ils doivent être capables d'identifier le domaine, l'ensemble image et les couples qui appartiennent à ce type de fonction.

$$\boldsymbol{f: R \times R}$$
$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2 - 1}}$$

Figure 3.14 La fonction de la question 7.

Nous croyons que cette activité peut s'avérer difficile pour certains participants dû au fait que les nombres proposés sont exprimés de différentes façons et que l'équation choisie représente une fonction composée, cela peut provoquer certaines difficultés chez les participants. Toutefois, pour pouvoir réaliser cette activité, les étudiants peuvent simplement substituer chaque valeur proposée, soit celle du domaine ou de l'ensemble image, dans l'équation $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ de manière à vérifier s'il est possible de trouver une valeur correspondante à l'autre variable. Dans le cas où il est impossible de trouver une valeur correspondante, la valeur qui a été substituée n'appartient pas au domaine ou à l'image, selon le cas. Par ailleurs, nous aimerions préciser que la réussite des trois tâches est requise pour la maîtrise de cette activité de conversion.

Le domaine de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est le suivant :

$$(-\infty, -1] \quad \cup \quad [1, \infty)$$

L'ensemble image de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est l'intervalle suivant :

$$[0, \infty)$$

Question 13 (Registre ***numérique*** vers registre ***symbolico-algébrique***)

À la question 13, nous demandons aux étudiants de retrouver l'équation d'une fonction quadratique à partir de la table de valeurs de la figure 3.15. Par surcroît, il est important de mentionner que nous ne précisons pas le type de fonction représentée dans la question, car cela rendrait la tâche beaucoup trop simple à notre avis. Selon notre expérience d'enseignement, ce type d'activités n'est pas travaillé régulièrement au secondaire, mais nous sommes d'avis qu'il est important de reconnaître les principales caractéristiques de certaines fonctions à partir de leur table de valeurs ; entre autres, celles des fonctions linéaires et quadratiques.

x	f(x)
2	2
4	14
6	34
8	62
10	98
12	142

Figure 3.15 Table de valeurs de la question 13.

Pour cette tâche, nous croyons que la majorité des étudiants ne seront pas en situation de trouver l'équation quadratique associée à la table de valeurs car selon notre expérience et notre fréquentation des manuels, ce type de conversion n'est pas vraiment travaillé à l'école secondaire. Ainsi, si un étudiant est capable d'identifier la fonction quadratique, nous croyons qu'il est en voie d'effectuer la conversion du registre ***numérique*** vers le registre ***symbolico-algébrique***. Toutefois, nous estimerons que cet étudiant maîtrise tout à fait ce type de conversion seulement s'il trouve l'équation $y = x^2 - 2$.

- Registre ***graphique*** et registre ***schématico-discursif*** **(questions 9 et 10)**

Question 9 (Registre ***schématico-discursif*** vers registre ***graphique***)

Selon le nouveau programme de formation de l'école secondaire québécoise (MELS, 2007, chapitre 6, p. 27), la modélisation devrait être au cœur de l'apprentissage de la notion de fonction. Partant de ce fait, nous avons décidé de questionner les étudiants sur la modélisation d'un phénomène quotidien, soit le remplissage d'une bouteille d'eau. Cette tâche est associée à l'activité de conversion du registre ***schématico-discursif*** vers le registre ***graphique***, car les participants doivent interpréter les informations données par le schéma et visualiser le contexte pour esquisser le graphique du volume d'eau en fonction de la hauteur de l'eau dans la bouteille.

Nous avons décidé de proposer une bouteille de forme cylindrique (voir la figure 3.16). Comme nous l'avons mentionné plus haut, cette tâche consiste à esquisser le graphique du volume d'eau d'une bouteille en fonction de la hauteur de l'eau. Le principal objectif de cette tâche est de vérifier si les étudiants sont aptes à transposer les informations importantes données par un schéma dans un graphique cartésien. Afin d'éviter les erreurs associées aux règles d'écriture du registre ***graphique***, nous avons dessiné les deux axes, nous les avons identifiés et nous avons inscrit le titre du graphique, qui en précise la fonction.

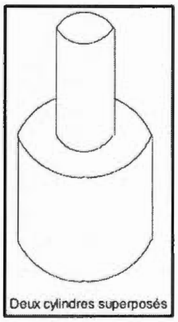


Figure 3.16 Schéma de la bouteille proposée à la question 9.

Caractéristiques du graphique de la fonction qui modélise la situation :

1) le graphique doit être composé de deux droites de pente positive,
2) la première droite doit débuter à l'origine du plan cartésien,
3) la pente correspondant au remplissage de la première partie du récipient doit être supérieure à celle correspondant à la seconde partie du récipient.

Puisque nous voulons que les participants esquissent le graphique de la fonction, il est important de préciser quelles seront les principales caractéristiques à examiner pour déterminer si un étudiant a réussi cette activité de conversion ou s'il l'a échouée. Ceci dit, un graphique qui ne tient pas compte de ces trois caractéristiques sera automatiquement rejeté.

Question 10 (Registre ***graphique*** vers registre ***schématico-discursif***)

Cette tâche consiste à esquisser la forme d'un récipient à partir du graphique du volume d'eau comme fonction de la hauteur de l'eau dans le récipient. Ce qui revient à effectuer la conversion inverse de celle de la question précédente. Nous avons décidé de proposer une courbe dans le graphique (voir figure 3.17) parce que nous croyons qu'il est plus difficile d'interpréter les informations d'une courbe plutôt que par une droite lors de l'activité de conversion entre les registres ***graphique*** et ***schématico-discursif***.

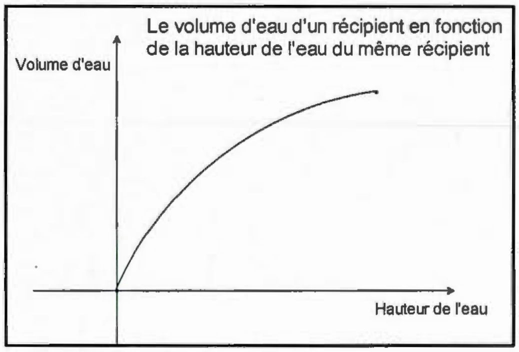


Figure 3.17 Graphique de la situation de la question 10.

Caractéristiques du récipient

1) le récipient doit être plus étroit dans le haut qu'à la base du récipient,
2) le bord du récipient ne doit pas présenter d'étranglement subit comme celui du récipient de la figure 3.16 : en effet, d'après le graphique, le taux de variation de la fonction volume varie de façon continue, sans faire de saut.

Étant donné qu'il y a une infinité de récipients qui correspondent au graphique proposé, il est nécessaire de préciser les principales caractéristiques que doit avoir la forme du récipient pour pouvoir accepter ou rejeter celui-ci lors de l'analyse des résultats.

- Registre ***graphique*** et registre ***numérique*** **(question 6)**

À la question 6, nous avons décidé de soumettre aux étudiants une question liée à la conversion du registre ***graphique*** vers le registre ***numérique***. Nous avons proposé le graphique de la fonction sinusoïdale $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} + 1$ qui est présenté à la figure 3.18.

Similairement à la question 7, les étudiants doivent déterminer parmi un choix de huit nombres pour chaque tâche, ceux qui appartiennent au domaine dans un premier temps, puis dans un 2e temps ceux qui appartiennent à l'ensemble image de la fonction représentée graphiquement. En plus de ces deux tâches, nous avons aussi demandé aux participants d'identifier les couples de coordonnées cartésiennes qui appartiennent à la fonction sinusoïdale présentée. Nous sommes conscients que le choix des nombres s'avèrera capital dans la réalisation des trois tâches de cette activité. Conséquemment, nous avons décidé de présenter des nombres appartenant à différents ensembles, certains exprimés dans différents registres ; par exemple, des nombres décimaux, des fractions et des multiples de π. Ainsi, nous croyons que la diversité des nombres réels proposés permettra d'émettre certaines hypothèses sur l'interprétation des informations contenues dans un graphique par certains participants.

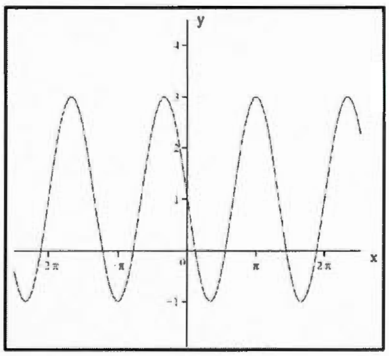


Figure 3.18 Graphique de la fonction sinusoïdale $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} + 1$ de la question 6.

Le domaine de la fonction $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} + 1$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les nombres réels
L'ensemble image de la fonction $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} + 1$ est l'intervalle suivant :

$$[-1, 3]$$

Selon nous, la majorité des étudiants devrait être en mesure de déterminer les valeurs possibles du domaine de la fonction sinusoïdale car pour n'importe quelle fonction sinusoïdale, le domaine est toujours $\mathbb{R}$. Par conséquent, tous les nombres que nous avons proposés appartiennent au domaine de la fonction. En ce qui concerne l'ensemble image, nous pensons que les étudiants n'auront pas de problème à répondre correctement parce que l'ensemble image d'une fonction sinusoïdale est toujours déterminé comme l'intervalle fermé compris entre ses valeurs minimales et maximales. Nous croyons qu'il est aisé de déterminer les valeurs minimales et maximales d'une fonction sinusoïdale à partir de son graphique quand celui-ci contient plus d'une période.

La dernière tâche de cette conversion nous semble assez simple pour les mêmes raisons que nous avons exposées au préalable. Si un étudiant est capable de répondre correctement aux deux premières tâches, alors nous croyons qu'il pourra identifier les couples qui appartiennent à la fonction sinusoïdale. En revanche, nous aimerions mentionner qu'un étudiant qui répond adéquatement aux deux premières tâches, mais qui n'est pas en mesure de bien identifier les couples appartenant à la fonction, ne maîtrise pas complètement l'activité de conversion du registre ***graphique*** vers le registre ***numérique***. Autrement dit, si un étudiant ne répond pas correctement aux trois tâches, alors nous allons le considérer comme ne maîtrisant pas l'activité de conversion du registre ***graphique*** vers le registre ***numérique***.

3.3 Grille de classification

À la section 2.1.6, nous avons présenté l'approche pédagogique basée sur le développement de compétences et sur la résolution de problème, nous croyons que la structure interne des concepts jouera un rôle de premier plan dans la résolution de situation. Partant de ce fait, nous allons construire une grille d'analyse qui nous permettra de classifier les réseaux mentaux des étudiants selon le nombre et le type de liens qu'ils ont établis. Il est important de préciser que les réseaux des étudiants seront établis à partir des résultats aux différentes tâches du questionnaire.

Puisque notre objectif de recherche est d'évaluer le niveau de compréhension du concept de fonction en utilisant un questionnaire, nous devons construire un outil méthodologique qui nous permettra de classer les étudiants selon la complexité de leur réseau de connexions internes. Nous allons nous appuyer sur les travaux de Guzmán, Hitt et Páez (2001) pour construire cette grille. Tout d'abord, nous allons exposer l'approche méthodologique de ces chercheurs pour ensuite développer notre propre outil d'analyse.

3.3.1 Classification de Guzmán, Hitt et Páez

Tout d'abord, nous aimerions mentionner l'intention de recherche de Guzmán, Hitt et Páez (2001). Ces derniers voulaient évaluer le niveau de compétence de 30 étudiants mexicains au baccalauréat à l'égard du concept de fonction. Pour ce faire, ils se sont appuyés sur la théorie des représentations sémiotiques de Duval (1993). En tenant compte de cette approche théorique, Guzmán, Hitt et Páez (*ibid.*) ont élaboré un questionnaire sur le concept de fonction. Ce questionnaire leur permettait de recueillir de l'information sur la compétence des étudiants à ce sujet. D'ailleurs, nous nous sommes basés sur cette recherche pour construire notre questionnaire. Pour atteindre leur objectif de recherche, ils ont dû bâtir une grille qui allait leur servir d'outil de classification et d'analyse. Cette catégorisation se divisait en six classes. Voici les catégories tirées telles quelles de l'article publié en 2001 pour le colloque annuel du Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec (GDM) :

Catégorie A. Dans cette catégorie, nous plaçons les élèves qui ont des idées imprécises sur un concept (mélange incohérent de différentes représentations).

Catégorie B. Dans cette catégorie, nous plaçons les élèves qui reconnaissent les éléments d'un système sémiotique de représentation en relation avec l'objet mathématique donné.

Catégorie C. Dans cette catégorie, nous nous intéressons aux activités de transformation de représentations à l'intérieur d'un même registre de représentation. Ainsi, les étudiants ou étudiantes qui font les activités de transformation d'un système de représentations à l'intérieur d'un même registre sont placés dans cette catégorie.

Catégorie D. Dans cette catégorie, nous classons les étudiants qui font de manière satisfaisante des activités de conversion de représentations d'un système sémiotique vers un autre.

Catégorie E. Dans cette catégorie, nous allons exiger l'articulation entre des représentations, et ce d'un système sémiotique vers un autre.

Catégorie F. On retrouve ici une articulation cohérente entre les représentations de différents systèmes sémiotiques relativement au concept abordé.

Après avoir pris connaissance de cette grille de classification, nous étions en accord avec les propos de Guzmán, Hitt et Páez. Toutefois, nous voulons modifier quelque peu cette grille et apporter des précisions concernant la classification des participants. Cela nous aidera à concevoir un outil d'analyse qui nous permettra d'atteindre notre objectif de recherche.

3.3.2 Outil de classification

Comme nous l'avons mentionné antérieurement, le développement conceptuel d'un objet mathématique repose sur la coordination de plusieurs registres de représentation. Pour nous, un étudiant qui coordonne plusieurs registres aura un réseau mental plus élaboré. De ce fait, il pourra mieux attaquer les situations parce que les informations comprises dans son réseau seront bien structurées. Ainsi, il pourra localiser plus rapidement les connaissances nécessaires pour résoudre la situation. Tout comme pour la classification de Guzmán, Hitt et Páez (*ibid.*), nous devons tenir compte de ces éléments pour construire notre grille de classification. Voici le lexique des abréviations que nous allons utiliser dans la schématisation du réseau interne d'un étudiant.

Tableau 3.1
Lexique des abréviations d'un réseau interne

Abréviations	Activités cognitives et registres de représentation
R_G	Reconnaissance dans le registre ***graphique***
R_{LN}	Reconnaissance dans le registre ***langue naturelle***
R_{SA}	Reconnaissance dans le registre ***symbolico-algébrique***
T_G	Traitement dans le registre ***graphique***
T_{SA}	Traitement dans le registre ***symbolico-algébrique***
$C_{G \to SA}$	Conversion du registre ***graphique*** vers le registre ***symbolico-algébrique***
$C_{SA \to G}$	Conversion du registre ***symbolico-algébrique*** vers le registre ***graphique***
$C_{G \to SD}$	Conversion du registre ***graphique*** vers le registre ***schématico-discursif***
$C_{SD \to G}$	Conversion du registre ***schématico-discursif*** vers le registre ***graphique***
$C_{N \to SA}$	Conversion du registre ***symbolico-algébrique*** vers le registre ***numérique***
$C_{SA \to N}$	Conversion du registre ***numérique*** vers le registre ***symbolico-algébrique***
$C_{G \to N}$	Conversion du registre ***graphique*** vers le registre ***numérique***

Niveau 1

La première catégorie que nous avons établie est identique à la catégorie A de Guzmán, Hitt et Páez (*ibid.*). À l'intérieur de ce niveau, nous allons placer les étudiants qui ont des idées imprécises et incomplètes du concept de fonction. Par exemple, un étudiant qui n'est pas capable de reconnaître les différentes représentations d'une fonction sera placé dans cette catégorie. Dans un même ordre d'idée, un étudiant placé dans cette catégorie peut avoir réussi quelques transformations internes et externes sans pour autant comprendre le concept de fonction. Autrement dit, le réseau de concepts de cet étudiant ne sera pas très élaboré c'est-à-dire qu'il ne contiendra pas énormément de liens entre les différentes activités maîtrisées. À la figure 3.19, nous présentons une schématisation d'un réseau interne de *niveau 1*. Les traits entre les différentes activités cognitives réussies représentent un lien du réseau interne de l'individu (voir Guzmán, Hitt et Páez, 2001).

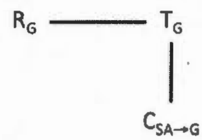


Figure 3.19 Exemple d'un réseau interne du *niveau 1*.

Niveau 2

À ce niveau, nous allons placer tous les étudiants qui auront bien identifié les différentes représentations d'une fonction, c'est-à-dire qui auront répondu correctement aux deux premières questions. De plus, ils devront avoir défini correctement ce qu'est une fonction. Sinon, ils seront placés au *niveau 1*. Ce niveau est similaire à la catégorie B de Guzmán, Hitt et Páez (*ibid.*). À la figure 3.13, nous donnons un exemple de réseau mental de *niveau 2*.

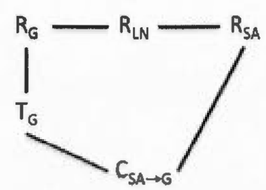


Figure 3.20 Exemple d'un réseau interne du *niveau 2*.

Niveau 3

Tout comme pour la catégorie C de Guzmán, Hitt et Páez (*ibid.*), nous avons décidé que tous les étudiants qui réussiront à répondre correctement à toutes les questions concernant les activités de traitement seront placés dans le *niveau 3*. Par conséquent, ces étudiants auront répondu correctement aux questions 3, 4, 8 et 12 en plus d'avoir identifié les différentes représentations d'une fonction (questions 1, 2 et 14).

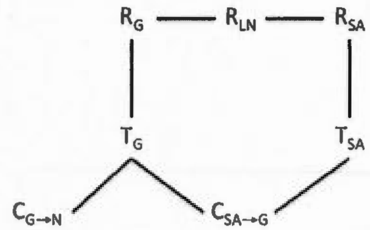


Figure 3.21 Exemple d'un réseau interne du *niveau 3*.

Niveau 4

Au *niveau 4*, nous allons placer tous les étudiants qui auront réussi à exécuter au moins trois activités de conversion. Nous croyons que les étudiants de ce niveau doivent avoir maîtrisé toutes les activités de reconnaissance et de traitement pour être placés dans cette catégorie. Une fois de plus, nous nous sommes appuyés sur l'une des catégories des travaux de Guzmán, Hitt et Páez (*ibid.*), soit la catégorie D.

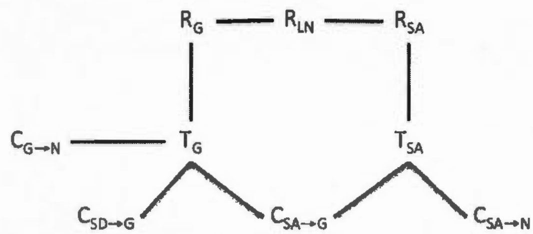


Figure 3.22 Exemple d'un réseau interne du *niveau 4*.

Niveau 5

En ce qui concerne le *niveau 5*, nous avons décidé de jumeler les catégories E et F de Guzmán, Hitt et Páez (*ibid.*). Conséquemment, tous les étudiants qui coordonneront plusieurs registres et ce, pour la plupart des registres répertoriés, seront placés dans cette catégorie. De plus, les critères de classification des niveaux 1 à 4 doivent être respectées pour qu'un individu soit classé *niveau 5*. À la figure 3.23, nous exposons le réseau d'un étudiant qui serait placé dans cette catégorie. Dans ce réseau, les flèches bidirectionnelles représentent la coordination entre deux registres.

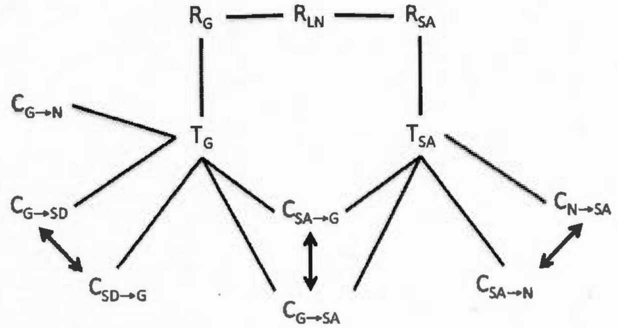


Figure 3.23 Exemple d'un réseau interne du *niveau 5*.

CHAPITRE IV

ANALYSE DES RÉSULTATS

4.1 Description globale

Nous entamons maintenant l'analyse des questionnaires passés à 183 étudiants du collégial inscrit au programme de *Sciences de la nature*, dont 154 sont issus de la séquence *Sciences naturelles* et 29 de la séquence *Technico-sciences*. Nous avons subdivisé cette analyse en quatre parties. D'abord, l'analyse de chacune des questions, ensuite la présentation des résultats selon les trois activités cognitives ; suit la répartition des participants selon leur niveau de compréhension et finalement, nous proposons certaines modifications de la grille de classification qui ont engendré de nouveaux résultats. Pour l'analyse de chaque question, nous présentons la question dans un encadré avec un rappel de son objectif et, à la suite, nous analysons des productions d'étudiants pour certaines tâches. Nous présentons également un tableau des résultats pour chaque question avec les critères de réussite établis au chapitre précédent. Par ailleurs, comme la grille de classification est directement liée à la réussite de chacune des activités cognitives de la théorie de Duval, nous présentons les résultats pour chacune d'elles, accompagnés d'un rappel des niveaux de classification. Comme nous nous intéressons au niveau de compréhension des participants, nous présentons la répartition de l'échantillon et nous proposons des modifications à la suite des difficultés rencontrées lors de la réalisation de cette recherche.

4.2 Analyse des questions

4.2.1 Questions de reconnaissance

À cette question, les participants devaient reconnaître les fonctions parmi les quatre graphiques proposés (voir section 3.2.3). Selon nous, il est nécessaire qu'un étudiant ait réussi les quatre tâches de reconnaissance pour que nous puissions dire qu'il maîtrise l'activité de reconnaissance dans le registre ***graphique***. Nous aimerions rappeler que la justification était exigée dans le cas où l'étudiant rejetait le graphique.

- Registre ***graphique*** **(question 1)**

Question 1-	Lesquels, parmi les graphiques suivants, représentent des fonctions de variable indépendante x ? Vous devez donner une justification quand le graphique ne représente pas une fonction.

Critère de réussite de chaque activité de reconnaissance du registre ***graphique***

➢ L'étudiant doit avoir répondu correctement et donner une justification adéquate dans le cas où le graphique ne représente pas une fonction.

Analyse de la question 1a

À cette question, les résultats que nous avons obtenus sont à la hauteur de nos attentes. Il y a 174 étudiants sur 183 qui ont associé le graphique d'une parabole ouverte vers le bas à une fonction. Les autres étudiants se sont abstenus ou encore, ont cru que ce graphique ne correspond pas à une fonction. Cependant, nous ne pouvons pas savoir la raison de l'exclusion parce qu'ils ne l'ont pas précisée.

Analyse de la question 1b

Cette tâche consistait à déterminer si le graphique d'un cercle centré à l'origine représentait ou pas une fonction. Au tableau 4.4, nous présentons les résultats à cette question. Nous constatons que plus de 85 % de notre échantillon rejette ce graphique. Malgré le fait que l'étude des coniques ne fasse pas partie du contenu de la séquence *Technico-sciences*, plusieurs étudiants de ce profil ont tout de même réussi la tâche. Néanmoins, nous observons que plusieurs étudiants des deux séquences ont donné une justification invalide. Voici la liste de ces justifications :

- o deux valeurs possibles à x pour le même y (confusion entre les deux variables)
- o cercle n'est pas une fonction
- o c'est une conique, etc.

Selon nos résultats, la confusion entre les deux variables est l'erreur qui revient le plus souvent. Afin de bien comprendre la signification d'une telle confusion, nous avons choisi de présenter la justification de l'étudiant 53 (figure 4.1). Nous pouvons remarquer qu'il a rejeté le graphique du cercle parce qu'il y a deux valeurs possibles de x pour la même valeur de y, ce qui veut dire qu'il a interchangé la variable indépendante avec la variable dépendante[10]. Étant donné que nous demandions une réponse courte, il nous est impossible de déterminer la ou les raisons de cette confusion. À notre avis, il est possible que certains participants aient fait une erreur d'inattention ce qui nous a amenés à accepter cette réponse seulement dans le cas où l'étudiant ne répétait pas cette erreur à une autre tâche. En revanche, nous croyons qu'un étudiant qui a fait cette erreur à plus d'une reprise ne maîtrise pas l'activité de reconnaissance du registre ***graphique***.

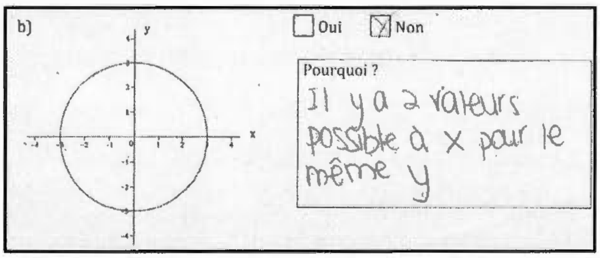


Figure 4.1 Production de l'étudiant 53 du profil *SN* à la quesion 1b.

D'autre part, certains étudiants ont affirmé que ce graphique représentait une fonction. Étant donné que la justification était demandée seulement dans le cas d'un rejet, nous pouvons que spéculer sur l'origine de cette erreur. Nous pensons que plusieurs d'entre eux supposent que les graphiques cartésiens étudiés au secondaire représentent tous des fonctions c'est-à-dire qu'ils ne font probablement pas de lien entre la définition d'une fonction et sa représentation graphique. D'un autre point de vue, il se peut qu'ils ne se souviennent plus de

---

[10] Rappelons qu'il était précisé dans la question que x était la variable indépendante.

la principale caractéristique d'une fonction, soit qu'une fonction associe à chaque valeur de la variable indépendante x au plus une valeur de la variable dépendante y.

Tableau 4.1
Tableau des résultats à la question 1b

Réponse à la question 1b	Nombre d'étudiants: Sciences naturelles	Nombre d'étudiants: Technico-sciences
Sans réponse	1	0
Ce n'est pas une fonction, sans justification	6	3
Ce n'est pas une fonction, avec justification non valable	42	6
Ce n'est pas une fonction, avec justification valable	**85**	**15**
C'est une fonction	20	5
Total	154	29

Analyse de la question 1c

Le troisième graphique proposé était celui d'une fonction discontinue définie par parties. Cette question a été relativement bien réussie de la part des étudiants des deux séquences. En effet, nous avons comptabilisé au total 108 réponses affirmatives, ce qui représente 59 % de l'échantillon. Toutefois, il y a quand même 56 participants qui n'ont pas réussi à associer ce graphique à une fonction. Nous avons constaté que les deux principales raisons d'exclusion étaient d'une part la discontinuité de la courbe et d'autre part, l'impossibilité d'exprimer la courbe en une seule expression algébrique. Afin d'illustrer nos propos, nous présentons deux réponses d'étudiants du profil *Sciences naturelles*.

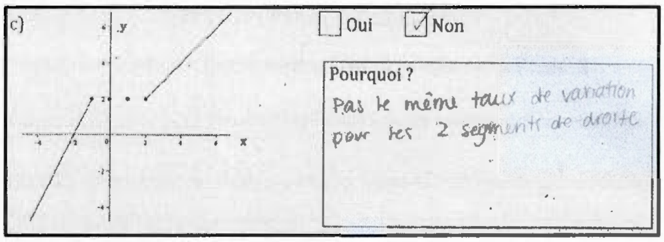


Figure 4.2 Production de l'étudiant 92 du profil *SN* à la question 1c.

Nous constatons que l'étudiant 92 (figure 4.2) ne reconnaît pas le graphique d'une fonction parce que les deux droites n'ont pas le même taux de variation. De ce fait, nous pouvons affirmer que cet étudiant croit qu'une fonction doit s'exprimer en une seule expression algébrique.

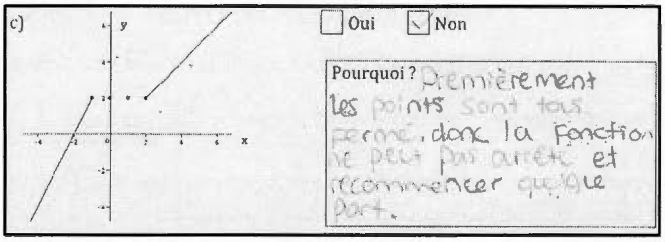


Figure 4.3 Production de l'étudiant 88 du profil *SN* à la question 1c.

En ce qui concerne la justification de l'étudiant 88, nous constatons qu'il accorde de l'importance aux quatre point fermés, ce qui l'amène à conclure que la courbe de la fonction ne peut pas s'arrêter et recommencer ailleurs. Nous croyons que l'étudiant 88 reconnaître quelque chose qui n'est pas admissible (quatre points fermés les uns au dessus des autres) mais il perd de vue la raison pour laquelle ce n'est pas admissible et refuse en confondant momentanément les deux variables. Autrement dit, il confond les deux variables dans son application du critère (mais peut-être pas en général) parce qu'il ne maîtrise pas bien les raisons derrière ce critère.

Tableau 4.2

Tableau des résultats à la question 1c

	Nombre d'étudiants	
Réponse à la question 1c	Sciences naturelles	Technico-sciences
Sans réponse	16	3
Ce n'est pas une fonction, sans justification	13	2
Ce n'est pas une fonction, avec justification	36	5
C'est une fonction	**89**	**19**
Total	154	29

Analyse de la question 1d

Le dernier graphique que nous avons proposé aux étudiants était composé d'une partie de droite et d'une partie de parabole dont toutes les valeurs de la variable indépendante correspondaient toujours à une seule valeur de la variable dépendante (voir section 3.2.3). En examinant les données du tableau 4.6, nous remarquons que les résultats à cette question sont similaires à celle de la question précédente. Pour la majorité des étudiants des deux séquences, le graphique proposé représente une fonction. En revanche, un peu plus de 25 % de l'échantillon ont rejeté le graphique.

Les justifications de ces étudiants sont les suivantes :

- Le graphique représente deux fonctions
- Le y n'est pas dépendant, car il y a plusieurs fonctions
- Deux valeurs de y pour $x = 2$
- Jamais vu ce type de fonction

Parmi ces justifications, nous avons remarqué que la première revenait plus souvent que les trois autres. Partant de ce fait, nous faisons l'hypothèse que ces étudiants croient qu'une fonction doit s'exprimer par une seule expression algébrique. À notre avis, l'étude des fonctions définies par parties n'a sûrement pas été assez travaillée ce qui revient à dire que les fonctions étudiées au secondaire sont principalement des fonctions exprimées en une seule expression algébrique.

Dans un autre ordre d'idées, nous aimerions préciser qu'étant donné la piètre qualité de l'impression du questionnaire, il était difficile de distinguer le point ouvert du point fermé. Ainsi, nous avons décidé de modifier un de nos critères d'acceptation ce qui veut dire que selon nous, un étudiant qui a rejeté le graphique parce qu'il y avait deux images pour la valeur $x = 2$, a réussi cette tâche de reconnaissance du registre ***graphique***. D'ailleurs, nous aimerions ajouter que les données du tableau 4.3 tiennent compte de ce changement, c'est-à-dire que ces étudiants ont été classés dans la catégorie « c'est une fonction ».

Tableau 4.3
Tableau des résultats à la question 1d

	Nombre d'étudiants	
Réponse à la question 1d	Sciences naturelles	Technico-sciences
Sans réponse	10	3
Ce n'est pas une fonction, sans justification	10	1
Ce n'est pas une fonction, avec justification	48	3
C'est une fonction	**86**	**22**
Total	154	29

Est-ce que les étudiants ont des idées contradictoires en ce qui concerne les tâches 1 c) et 1 d)?

Nous avons remarqué que certains étudiants ont des idées contradictoires par rapport au concept de continuité. Pour mettre en lumière nos propos, nous avons choisi de présenter les productions de l'étudiant 125 (figure 4.4). Cet étudiant a affirmé que le graphique constitué de deux demi-droites et de trois points ne représentait pas celui d'une fonction parce que la fonction n'est pas continue. Cette justification est contradictoire en soi puisque l'étudiant emploie le terme « fonction » pour dire que ce graphique n'est pas celui d'une fonction. Nous avons observé ce phénomène à quelques reprises. De plus, à la tâche suivante, cet étudiant a répondu que le graphique correspondait à celui d'une fonction malgré le fait que le trait n'est pas continu.

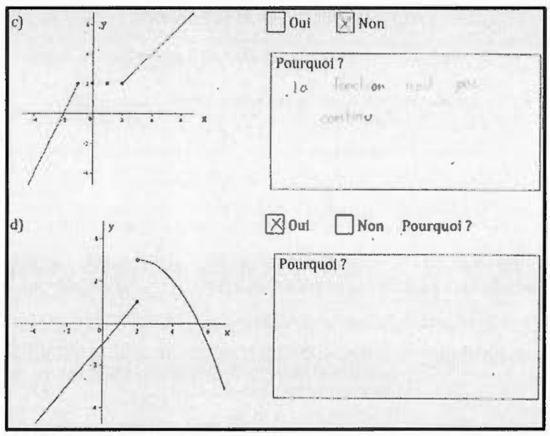


Figure 4.4 Productions de l'élève 125 du profil *SN* aux questions 1c et 1d.

Selon nous, il est possible que la notion de continuité ait été associée au domaine de définition de la fonction. Autrement dit, puisque la relation de la question c fait correspondre à toutes les valeurs de x une seule valeur de y, son graphique est nécessairement celui d'une fonction. En fin de compte, nous sommes tentés de dire que les notions de continuité et de fonction sont confuses pour cet étudiant.

Résultat de la question 1

*Critère de réussite de l'activité de reconnaissance du registre **graphique***
➢ L'étudiant doit avoir réussi les quatre tâches de reconnaissance.

Le taux de réussite de l'activité de reconnaissance du registre ***graphique*** est relativement faible compte tenu du fait qu'il est assez simple de reconnaître une fonction dans ce registre. En effet, il y a uniquement 73 étudiants qui ont réussi toutes les tâches de reconnaissance (voir tableau 4.4). Ceci étant dit, nous pouvons affirmer qu'il y a plusieurs étudiants qui ont des idées confuses et même contradictoires concernant les caractéristiques spécifiques d'une fonction représentée graphiquement.

Tableau 4.4
Tableau global des résultats à la question 1

	Nombre d'étudiants	
Nombre de tâches réussies à la question 1	Sciences naturelles	Technico-sciences
4	60	13
3	35	4
2	33	9
1	23	2
aucune	3	1
Total	154	29

Bilan des quatre tâches

En observant les données du tableau 4.5, nous constatons que le graphique de la parabole est associé aisément à celui d'une fonction. Cependant, le nombre d'étudiants diminue considérablement lorsqu'il s'agit de reconnaître les fonctions parmi les trois autres graphiques. Ces graphiques ont été sans aucun doute plus difficiles à reconnaître que celui de la parabole. Nous croyons que cet écart pourrait être causé par le fait que plusieurs étudiants supposent qu'une fonction doit être automatiquement représentée par un trait continu. Partant de ce fait, plusieurs participants ne sont pas en mesure de reconnaître une fonction dans le registre ***graphique***.

Tableau 4.5
Le nombre d'étudiants qui ont réussi la tâche selon le graphique proposé

	Nombre d'étudiants	
Type de graphique	Sciences naturelles	Technico-sciences
Tâche a) => Parabole	146	28
Tâche b) => Cercle	85	15
Tâche c) => Courbe discontinue	89	19
Tâche d) => Courbe discontinue (de domaine $\mathbb{R}$)	86	22

- Registre ***symbolico-algébrique*** **(question 2)**

Question 2- Les expressions algébriques suivantes représentent-elles une fonction de variable indépendante x ? Vous devez donner une justification quand l'expression algébrique ne représente pas une fonction.

Critère de réussite de chaque activité de reconnaissance du registre ***symbolico-algébrique***

➢ L'étudiant doit avoir répondu correctement et donner une justification adéquate dans le cas où l'expression algébrique ne représente pas une fonction.

Analyse de la question 2a

La première expression algébrique proposée est celle d'un cercle centré à l'origine. Les résultats à cette question nous ont particulièrement étonnés, car il y a à peine les deux tiers des étudiants de l'échantillon qui ont répondu que cette équation ne représentait pas celle d'une fonction. D'ailleurs, nous pouvons observer un écart considérable entre les résultats des étudiants des deux séquences. En effet, il y a environ les deux tiers des étudiants du profil *Sciences naturelles* qui ont rejeté cette équation comparativement à seulement 17 % de l'autre profil. Cet écart est probablement dû au fait que les coniques font partie uniquement du contenu mathématique de la séquence *Sciences naturelles*. Cependant, nous constatons que près de la moitié des participants ayant affirmé que l'équation ne représentait pas une fonction a donné une justification invalide.

Tableau 4.6
Tableau des résultats à la question 2a

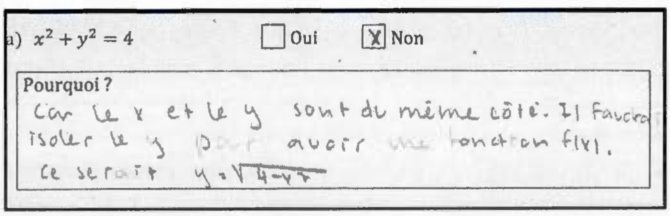
Réponse à la question 2a	Nombre d'étudiants	
	Sciences naturelles	Technico-sciences
Sans réponse	17	5
Ce n'est pas une fonction, sans justification	5	1
Ce n'est pas une fonction, avec justification non valable	42	3
Ce n'est pas une fonction, avec justification valable	**53**	**1**
C'est une fonction	37	19
Total	154	29

La majorité des étudiants du profil *Sciences naturelles* qui ont accepté le graphique du cercle comme graphique d'une fonction ont également accepté cette équation. Ce qui nous laisse croire qu'ils sont en mesure de dire que l'équation proposée est celle d'un cercle. Ceci dit, nous pensons que la plupart des étudiants du profil *Sciences naturelles* sont en mesure d'associer l'équation d'un cercle à son graphique, mais nous ne pouvons pas en être certains. Comme, près du quart des étudiants du profil de *Sciences naturelles* a associé cette équation à celle d'une fonction, nous sommes portés à croire que plusieurs d'entre eux ne savent pas reconnaître une fonction exprimée dans le registre ***symbolico-algébrique***.

Justifications invalides

Nous avons constaté que plusieurs étudiants ont rejeté l'équation du cercle cependant, ils n'ont pas réussi à donner une justification convenable. Nous avons choisi de présenter quatre productions d'étudiants afin de donner une bonne idée des justifications invalides et de préciser nos critères de validité.

- Étudiant 20, profil *SN*

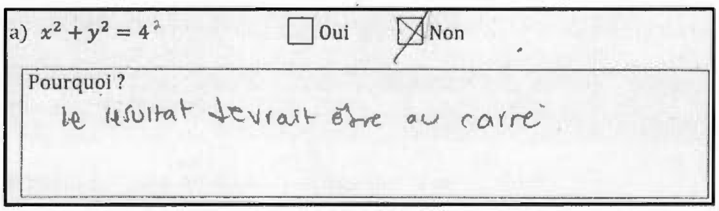

a) $x^2 + y^2 = 4$ ☐ Oui ☒ Non

Pourquoi ?
Car le x et le y sont du même côté. Il faudrait isoler le y pour avoir une fonction f(x). Ce serait $y = \sqrt{4-x^2}$

Figure 4.5 Production de l'étudiant 20 du profil *SN* à la question 2a.

Nous remarquons que l'explication de cet étudiant repose sur le fait que les variables x et y sont du même côté de l'équation ce qui veut dire que l'équation proposée n'est pas de la forme $y = f(x)$. De plus, il effectue un traitement dans le registre ***symbolico-algébrique*** pour donner la nouvelle équation qui selon lui, représenterait une fonction. D'ailleurs, cet étudiant a fait une erreur de manipulation parce que l'équation $y = \sqrt{4 - x^2}$ n'est pas équivalente à l'équation que nous avons proposée. Dans l'équation $x^2 + y^2 = 4$, la variable y peut prendre une valeur négative tandis que la variable y de l'équation trouvée par l'étudiant 20 est obligatoirement positive à cause de la racine carrée. Malgré le fait que nous n'avons pas toutes les étapes de calcul, il nous ait possible de dire que cet étudiant a omis la racine négative lorsqu'il est passé de l'équation $y^2 = 4 - x^2$ à $y = \sqrt{4 - x^2}$. En conséquence, nous pouvons prétendre que pour cet étudiant, le fait de transformer l'écriture d'une équation algébrique implique un changement de la nature de la courbe. Autrement dit, cet étudiant a une perception erronée de ce qu'est une fonction car il croit que l'expression algébrique d'une fonction est seulement de la forme $y = f(x)$.

- Étudiant 31, profil *SN*


a) $x^2 + y^2 = 4^2$ ☐ Oui ☒ Non

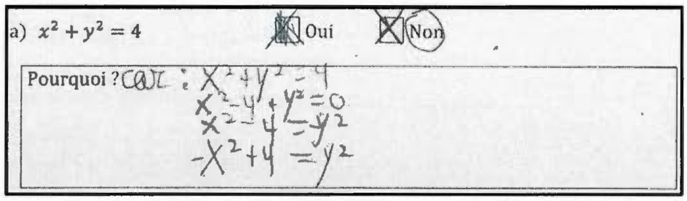
Pourquoi ?

le résultat devrait être au carré

Figure 4.6 Production de l'étudiant 31du profil *SN* à la question 2a.

Cet étudiant a rejeté l'expression algébrique parce que le 4 n'était pas au carré. Donc, nous croyons qu'il aurait accepté cette équation si nous avions proposé l'équation $x^2 + y^2 = 4^2$, comme le laisse supposer l'exposant 2 ajouté à la main par l'étudiant. Il nous est difficile de déterminer les motifs exacts de cette conception. Néanmoins, nous supposons que la manière d'écrire une expression algébrique est un critère de reconnaissance d'une fonction.

- Étudiant 22, profil *TS*


a) $x^2 + y^2 = 4$ Oui Non

Pourquoi ? car : $x^2+y^2=4$

$x^2-4+y^2=0$

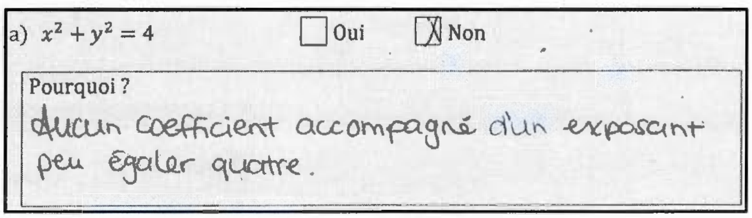
$x^2-4=-y^2$

$-x^2+4=y^2$

Figure 4.7 Production de l'étudiant 22 du profil *TS* à la question 2a.

Tout d'abord, nous sommes portés à dire que cet étudiant croyait au départ que l'équation représentait une fonction du fait qu'il a biffé le « oui ». De plus, nous supposons que cet étudiant a effectué des manipulations algébriques afin de vérifier si l'équation proposée représentait vraiment celle d'une fonction. À partir des manipulations effectuées, cet étudiant a possiblement modifié sa réponse. Toutefois, son raisonnement algébrique ne nous permet pas de savoir s'il a compris pourquoi l'équation ne représentait pas une fonction. Ceci dit, la dernière étape de son raisonnement nous porte à croire qu'il ne savait plus quoi faire pour transformer $-x^2 + 4 = y^2$ en une équation de la forme $y = f(x)$, c'est pour cette raison qu'il l'aurait rejetée. Par conséquent, nous n'avons pas accepté sa justification.

- Étudiants 50, profil *SN*


a) $x^2 + y^2 = 4$ Oui Non

Pourquoi ?

aucun coefficient accompagné d'un exposant peu égaler quatre.

Figure 4.8 Production de l'étudiant 50 du profil *SN* à la question 2a.

L'étudiant 50 affirme que l'équation ne représente pas une fonction parce qu'il est impossible que deux variables élevées au carré donnent comme résultat 4. À notre avis, cet étudiant a possiblement tenté de trouver des valeurs entières de x et de y pour lesquelles l'équation serait vérifiée. Ou encore, le fait que les deux variables soient du même côté de l'équation aurait peut-être influencé sa justification c'est-à-dire que la somme de deux variables élevées au carré ne peut pas donner comme résultat un nombre entier. Ceci étant dit, cette justification nous fait prendre conscience à quel point il peut y avoir une rupture entre le registre ***symbolico-algébrique*** et le registre ***numérique***.

Analyse de la question 2b

Comme deuxième expression algébrique, nous avons proposé celle d'une parabole. Cependant, nous l'avons exprimée sous sa forme générale légèrement modifiée. Malgré tout, les résultats sont relativement bons, car il y a environ les trois quarts des étudiants qui ont reconnu l'équation d'une fonction. Toutefois, il y a tout de même 29 étudiants qui croient que l'équation proposée ne représente pas une fonction. Ce résultat est surprenant lorsque nous le comparons avec celui de la question 1a, car le nombre d'étudiants qui n'avait pas associé le graphique d'une parabole à celui d'une fonction était seulement de 5. Étant donné cet écart considérable, nous avons tenté de comprendre les raisons qui ont poussé les étudiants à rejeter cette équation. Nous rendons compte de notre tentative en prosant notre analyse des productions de deux étudiants du profil *Sciences naturelles* et puis de deux du profil *Technico-sciences*.

Tableau 4.7
Tableau des résultats à la question 2b

	Nombre d'étudiants	
Réponse à la question 2b	Sciences naturelles	Technico-sciences
Sans réponse	11	6
Ce n'est pas une fonction, sans justification	4	3
Ce n'est pas une fonction, avec justification	19	3
C'est une fonction	**120**	**17**
Total	154	29

- Étudiant 77, profil *SN*

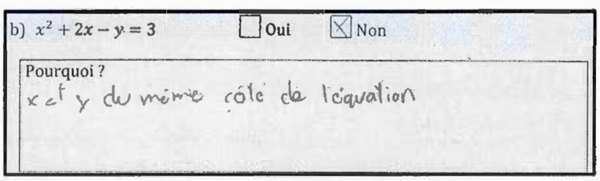
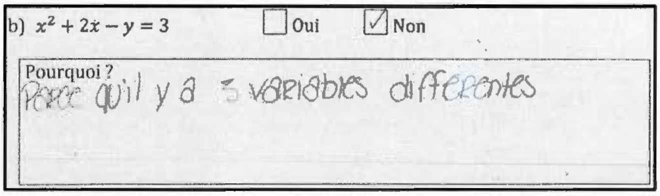

b) $x^2 + 2x - y = 3$ Oui ☒ Non
Pourquoi ?
x et y du même côté de l'équation

Figure 4.9 Production de l'étudiant 77 du profil *SN* à la question 2b.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, il y a certains étudiants qui croient que l'équation d'une fonction doit nécessairement être de la forme $y = f\ (x)$. Le propos de l'étudiant 77 témoigne de cette association inexacte. À notre avis, cette erreur est peut-être due au fait que les équations algébriques des fonctions présentées au secondaire sont pratiquement tout le temps écrites sous la forme $y = f\ (x)$.

- Étudiant 18, profil *TS* et étudiant 110, profil *SN*

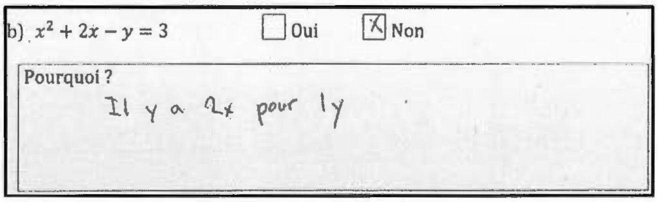


b) $x^2 + 2x - y = 3$ ☐ Oui ☑ Non

Pourquoi ?

Parce qu'il y a 3 variables différentes

Figure 4.10 Production de l'étudiant 18 du profil *TS* à la question 2b.



b) $x^2 + 2x - y = 3$ ☐ Oui ☒ Non

Pourquoi ?

Il y a 2x pour 1y

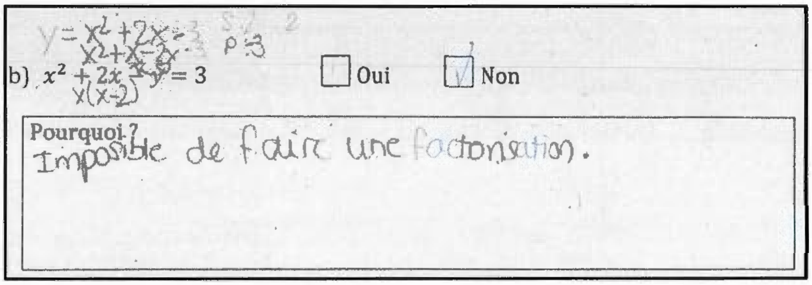
Figure 4.11 Production de l'étudiant 110 du profil *SN* à la question 2b.

Dans le cas de l'étudiant 18, nous remarquons qu'il affirme que l'équation n'est pas celle d'une fonction parce qu'elle contient trois variables différentes : x^2, x et y. Bien entendu, cet étudiant a uniquement compté le nombre de lettres contenu dans l'équation, puis il a conclu qu'elle ne représentait pas l'équation d'une fonction de variable indépendante x. De ce fait, nous faisons l'hypothèse que cet étudiant considère x^2 et x comme deux expressions avec des variables différentes.

Pour ce qui est de l'explication de l'étudiant 110, nous croyons qu'il a possiblement compté le nombre de x de l'équation et qu'il a conclu qu'il y avait plus de x que de y. Il est difficile de cerner exactement ce que cet étudiant veut dire. Cependant, nous pouvons affirmer qu'il ne sait pas quelles sont les principales caractéristiques d'une fonction exprimée dans le registre ***symbolico-discursif***.

Ces explications nous ont particulièrement étonnés étant donné que l'équation générale d'une parabole présentée au secondaire est de la forme $y = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des constantes. Nous sommes portés à croire que la forme canonique de l'équation de la parabole $y = a(x - h)^2 + k$ est peut-être privilégiée parce qu'elle contient seulement un x et un y. Est-ce que cette équation canonique a pu créer une interférence ? C'est possible selon nous. Il aurait été intéressant d'interroger l'étudiant pour en savoir plus sur sa compréhension.

- Étudiant 2, profil *TS*


b) $x^2 + 2x - y = 3$ ☐ Oui ☑ Non

Pourquoi ? Impossible de faire une factorisation.

Figure 4.12 Production de l'étudiant 2 du profil *TS* à la question 2b.

Lorsque nous observons le raisonnement de l'étudiant 2, nous remarquons qu'il a transformé l'écriture de l'équation de départ afin de trouver une forme plus conventionnelle $y = f\ (x)$. Ensuite, nous remarquons qu'il a tenté de factoriser l'équation $y = x^2 + 2x - 3$ en utilisant la technique de la somme et du produit, sans succès. Il a finalement conclu que l'équation ne représentait pas une fonction. Tout d'abord, nous sommes d'avis que cet étudiant n'a pas saisi tout à fait l'utilité d'une équation écrite sous la forme factorisée. D'autre part, nous croyons qu'il effectue des manipulations algébriques bien précises en pensant que cela expliquera probablement si l'équation représente ou non une fonction. De même, il a peut-être des difficultés à comprendre ce qu'est une équation équivalente. Encore une fois, nous constatons que certains étudiants ont des critères inappropriés pour déterminer si l'expression algébrique proposée représente celle d'une fonction.

Analyse de la question 2c

À cette question, nous avons proposé l'expression d'une fonction définie par parties. L'objectif de cette tâche était de vérifier d'une part si les étudiants croient qu'une fonction doit nécessairement s'écrire avec une seule équation, d'autre part, nous voulions en savoir davantage sur les conceptions des étudiants face à ce type d'équations. Nous avons obtenu un nombre élevé de « sans réponse » par rapport aux deux premières tâches de reconnaissance. En fait, plus du tiers des étudiants du profil *Technico-sciences* n'ont pas répondu à cette question et environ le cinquième de *Sciences naturelles*. Il est difficile de connaître les raisons qui ont poussé ces étudiants à ne pas répondre, mais cette donnée nous laisse croire que ce type d'écriture ne fait probablement pas partie des priorités de l'enseignement des fonctions au secondaire.

Tableau 4.8
Tableau des résultats à la question 2c

	Nombre d'étudiants	
Réponse à la question 2c	Sciences naturelles	Technico-sciences
Sans réponse	30	10
Ce n'est pas une fonction, sans justification	15	5
Ce n'est pas une fonction, avec justification	32	7
C'est une fonction	77	7
Total	154	29

Lorsque nous comparons la proportion des étudiants des deux profils qui ont répondu correctement à la tâche, nous constatons qu'il y a un écart important. En effet, près de la moitié des étudiants de *Sciences naturelles* ont identifié l'équation d'une fonction comparativement à un peu moins du quart des étudiants de l'autre profil. Parallèlement, plusieurs étudiants ont rejeté cette expression algébrique. Pour la plupart de ces étudiants, cette équation ne représente pas une fonction, mais plutôt deux fonctions distinctes, d'après les justifications données. D'autre part, certains étudiants affirment qu'une fonction ne peut pas s'écrire de cette façon ou bien qu'ils n'ont jamais vu ce type de fonction. En fin de compte, l'expression algébrique d'une fonction définie par parties est sans aucun doute une écriture complexe ou inconnue pour plusieurs de nos participants.

Analyse de la question 2d

La dernière équation proposée comme activité de reconnaissance est celle d'une fonction rationnelle. Tout comme pour la tâche précédente, nous avons obtenu un taux de « sans réponse » assez élevé par rapport aux autres activités de reconnaissance. Malgré tout, nous croyons que cette tâche a été bien réussie. En effet, il y a seulement 15 étudiants qui ont affirmé que l'équation ne représentait pas une fonction. Parmi ceux-ci, il y en a un qui prétend que l'expression algébrique est celle d'une ellipse. Nous pouvons affirmer que cet étudiant a fait une mauvaise association, mais il ne nous est pas possible d'en connaître les raisons.

Tableau 4.9
Tableau des résultats à la question 2d

	Nombre d'étudiants	
Réponse à la question 2d	Sciences naturelles	Technico-sciences
Sans réponse	20	7
Ce n'est pas une fonction, sans justification	4	2
Ce n'est pas une fonction, avec justification	7	2
C'est une fonction	**123**	**18**
Total	154	29

Résultat à la question 2

Critère de réussite de l'activité de reconnaissance dans le registre ***symbolico-algébrique***

- L'étudiant doit avoir réussi les quatre tâches de cette activité.

Il va sans dire que les résultats concernant la tâche de reconnaissance du registre ***symbolico-algébrique*** sont relativement faibles, car il y a uniquement 31 étudiants qui ont réussi les quatre tâches. De plus, nous constatons que la grande majorité des étudiants de *Technico-sciences* ont rencontré certaines difficultés, puisqu'il n'y a aucun étudiant qui a réussi les quatre tâches proposées. Au préalable, nous avons précisé que l'étude des coniques n'est pas dans le contenu mathématique de la séquence *Technico-sciences,* ce qui pourrait avoir eu un effet sur les résultats. Toutefois, nous estimons que l'étude des coniques n'est pas une exigence à la réussite de cette activité de reconnaissance. Tout compte fait, nous pouvons affirmer que plusieurs étudiants ne sont pas en mesure de reconnaître une fonction uniquement à partir d'une expression algébrique.

Tableau 4.10
Tableau global des résultats à la question 2

	Nombre d'étudiants	
Nombre de tâches réussies à la question 2	Sciences naturelles	Technico-sciences
4	31	0
3	39	2
2	58	14
1	15	9
aucune	11	4
Total	154	29

Bilan des quatre tâches

En observant les données du tableau 4.11, nous constatons que les tâches a) et c) ont sans aucun doute été les plus difficiles à réaliser. Nous sommes tentés d'associer cet échec au fait que la plupart des étudiants supposent qu'une fonction est nécessairement représentée par une seule expression algébrique. D'ailleurs, il aurait été intéressant d'exiger une justification, peu importe la réponse des étudiants, cela nous aurait permis de comprendre quels sont leurs critères de sélection.

Tableau 4.11
Les équations proposées selon le nombre d'étudiants qui ont réussi la tâche

	Nombre d'étudiants	
Type d'équation	Sciences naturelles	Technico-sciences
Tâche a) → Cercle	53	1
Tâche b) → Parabole (forme implicite)	120	17
Tâche c) → En deux parties	77	7
Tâche d) → Rationnelle	123	18

Question 14- Quelle est la définition d'une fonction?

Critère de réussite de cette activité de reconnaissance dans le registre de la ***langue naturelle***

- L'étudiant doit avoir donné une définition semblable à celles des manuels scolaires (voir section 3.2.3).

Analyse de la question 14

Comme nous l'avons spécifié à la section 3.2.3, nous allons accepter toutes les définitions qui précisent la nature de la relation d'une fonction. En observant les données du tableau 4.12, nous remarquons que le nombre de « sans réponse » est relativement élevé, soit plus du quart de l'échantillon. Ce résultat est probablement dû au fait que plusieurs étudiants ont manqué de temps parce que cette question est la dernière du questionnaire.

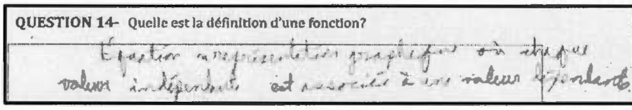
Tableau 4.12
Tableau des différentes définitions selon le nombre d'étudiants
et la séquence d'enseignement

	Nombre d'étudiants	
Réponse à la question 14	Sciences naturelles	Technico-sciences
Sans réponse	37	10
Bonne définition selon les critères établis	**44**	**6**
Ont confondu les deux variables	10	4
Fonction est une expression algébrique	14	6
Fonction est un graphique	20	6

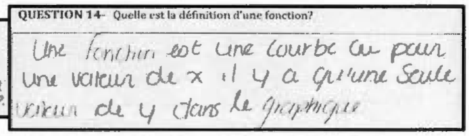
Par ailleurs, nous constatons qu'il y a seulement 50 étudiants qui ont réussi à définir correctement ce concept selon nos critères d'acceptation. Cette donnée est étonnante compte tenu du fait que l'étude des fonctions est au cœur du programme de formation de l'école québécoise. À partir de ces résultats, nous pouvons prétendre que cette tâche a été difficile pour la majorité des participants.

Exemples de définition valide

- Étudiants 23, profil *SN* et étudiant 23, profil *TS*


QUESTION 14- Quelle est la définition d'une fonction?

Équation représentation graphique où chaque valeur indépendante est associée à une valeur dépendante


QUESTION 14- Quelle est la définition d'une fonction?

Une fonction est une courbe ou pour une valeur de x il y a qu'une seule valeur de y dans le graphique

Figure 4.13 Définitions de l'étudiant 23 profil *SN* et de l'étudiant 23 profil *TS*.

Tout d'abord, nous constatons que ces étudiants associent une fonction à une représentation graphique. De plus, l'étudiant 23 du profil *SN* mentionne qu'une fonction peut être une équation algébrique. Malgré tout, nous remarquons que chacune des définitions insiste sur la nature de la relation de correspondance d'une fonction qui « à chaque valeur de la variable indépendante associe une valeur de la variable dépendante ». Toutefois, nous aimerions porter une attention particulière sur le fait que ces définitions ne précisent pas que certaines valeurs de la variable indépendante peuvent ne pas avoir d'image. Autrement dit, ces définitions ne mettent pas l'accent sur la restriction « **au plus une valeur** de la variable dépendante ». D'ailleurs, nous avons constaté qu'aucun étudiant n'avait inséré cette condition dans sa définition. Pourtant, les définitions proposées dans les manuels scolaires de la première année du 2^{e} cycle insistent tout particulièrement sur cette restriction.[11] À notre avis, il est possible que certains étudiants n'accordent pas d'importance à cet aspect de la relation ou encore, il considèrent d'emblée la définition comme s'appliquant à une fonction définie sur son domaine, où effectivement, il y a toujours une valeur de la variable dépendante associée à chaque valeur de la variable indépendante. Autrement dit, c'est la notion de domaine qui reste floue pour eux, ils ne conçoivent peut-être pas que l'ensemble de départ puisse être autre chose que le domaine et qu'il faille distinguer les deux. Étant donné que notre questionnaire ne nous permet pas de les distinguer, nous avons décidé d'accepter toutes les définitions similaires à celles présentées à la figure 4.13. À cet égard, il aurait été intéressant de questionner davantage les étudiants.

[11] Voir la section 3.2.3

Exemples de définition invalide

- Étudiant 14 profil *TS* et étudiant 15 profil *SN*

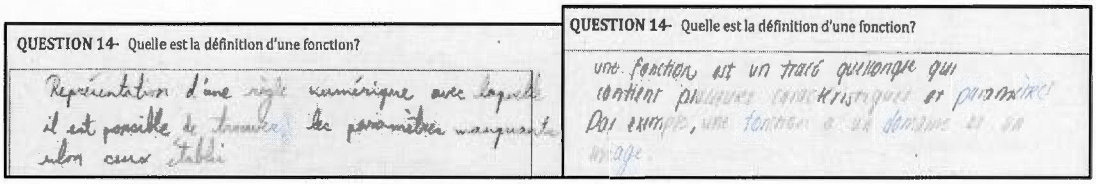


Figure 4.14 Définitions de l'étudiant 14 profil *TS* et de l'étudiant 15 profil *SN*.

Comme nous l'avons mentionné antérieurement, plusieurs participants définissent une fonction comme étant un graphique ou une expression algébrique au lieu de l'associer à une relation entre deux variables. Nous remarquons que pour l'étudiant 14 du profil *TS* et l'étudiant 15 du profil *SN,* les paramètres sont sûrement plus importants que la nature de la relation de correspondance d'une fonction. Nous avons remarqué que plusieurs définitions mettaient l'accent sur le type d'activités liées aux fonctions plutôt qu'à la nature de la relation entre les deux variables.

Bilan de la question 14

- Aucune définition n'a précisé qu'une fonction est une relation
- Aucune définition n'a souligné qu'à chaque valeur de la variable dépendante correspond à **au plus une** valeur de la variable indépendante
- Certaines définitions ont inversé les variables
- Certaines définitions ont associé une fonction à une activité réalisée en classe comme la recherche des paramètres, de l'image ou du domaine à partir d'une représentation

4.2.2 Questions de traitement

- Registre ***graphique*** **(question 8)**

Question 8-	Si possible, associer les graphiques qui représentent la même fonction sinusoïdale. *(il peut y avoir plusieurs associations)*

Critère de réussite de cette activité de traitement dans le registre ***graphique***

- L'étudiant doit avoir trouver les deux associations, soit les graphiques 1-3 et les graphiques 5-6.

Analyse de la question 8

Pour cette tâche, nous avons proposé six graphiques de fonctions sinusoïdales et les étudiants devaient associer ceux qui représentaient la même fonction. En général, cette question a été bien réussie. En effet, nous avons obtenu 122 bonnes réponses ce qui correspond exactement aux deux tiers de notre échantillon. Il y a tout de même 61 étudiants qui n'ont pas réussi cette tâche, dont un seul qui a laissé « sans réponse ». Dans le cas où les associations étaient incorrectes, nous croyons avoir détecté les raisons de cet échec. Premièrement, nous avons remarqué que plusieurs de ces réponses ont seulement pris en compte la période de chacune des fonctions en répondant que les graphiques 1-2-3 (période de 2π) et 4-5-6 (période de 4π) représentaient la même fonction. Deuxièmement, il y a plusieurs participants qui ont associé les graphiques ayant la même amplitude, soit les graphiques 1-3-5-6 (amplitude de 2) et 2-4 (amplitude de 3). À notre avis, ils ont probablement des difficultés à lire les informations comprises dans la représentation graphique ou encore, ils n'ont peut-être pas construit tous les liens entre les caractéristiques des fonctions sinusoïdales et leurs représentations graphiques. Si tel est le cas, ils rencontreront certaines difficultés lors de la réalisation d'activités de conversion impliquant ce type de fonctions.

- Registre ***symbolico-algébrique*** **(questions 3, 4 et 12)**

Question 3- Les deux expressions suivantes représentent-elles la même fonction ?

Critère de réussite de cette activité de traitement dans le registre ***symbolico-algébrique***

- L'étudiant doit avoir effectué des manipulations algébriques cohérentes pour montrer l'égalité des fonctions.

Analyse de la question 3

Dans cette question, nous proposions deux équations algébriques qui représentaient la même fonction rationnelle. Comme nous le présentons au tableau 4.13, le taux de réussite à cette tâche n'est pas très élevé. En effet, il y a environ 40 % des étudiants du profil *SN* et 30 % des étudiants du profil *TS* qui ont réussi à montrer l'équivalence fonctionnelle des deux expressions. D'une part, nous avons constaté que la majorité des participants ont utilisé l'une des deux méthodes que nous avions prévues à la section 3.2.4, soit la division de deux binômes ou la recherche d'un dénominateur commun. Nous avions également prédit que la méthode du dénominateur commun serait plus utilisée que la division de binômes. Néanmoins, nos résultats montrent que les deux techniques ont été employées respectivement 35 et 36 fois, ce qui veut dire qu'aucune n'est privilégiée par les participants.

Tableau 4.13
Tableau des résultats de la question 3

	Nombre d'étudiants	
Les réponses à la question 3	Sciences naturelles	Technico-sciences
Sans réponse	29	5
Ont réussi à montrer l'équivalence des deux fonctions	**62**	**9**
Représentent la même fonction, **sans** justification	13	2
Représentent la même fonction, **avec** justification non valable	13	1
Ne représentent pas la même fonction, **sans** justification	11	4
Ne représentent pas la même fonction, **avec** justification	26	8
Total	154	29

D'autre part, nous avons observé que le registre ***numérique*** était également employé par certains étudiants. Pour ces étudiants, le fait de remplacer les variables par quelques valeurs dans les deux expressions permet de vérifier l'équivalence des équations. Malgré le fait que cela constitue une conversion du registre ***symbolico-algébrique*** vers le registre ***numérique***, nous croyons que ces étudiants ont une mauvaise compréhension de l'aspect général d'une expression algébrique. Pour cette raison, nous n'avons pas accepté cette explication comme valable. Ainsi, nous avons classés de telles réponses dans la catégorie « *Représente la même fonction **avec** justification non valable* ». Et par le fait même, les étudiants en cause ne sont pas en mesure de réaliser cette activité de traitement.

Question 4- Les deux expressions suivantes représentent-elles la même fonction ?

Critère de réussite de cette activité de traitement dans le registre ***symbolico-algébrique***

- L'étudiant doit avoir pris en considération le domaine de chacune des fonctions pour montrer l'inégalité de ces dernières.

Analyse de la question 4

À la question 4, nous proposions deux expressions pour une même droite. La première est donnée sous la forme traditionnelle $y = ax + b$ et la seconde est écrite sous forme de fraction dont le numérateur est un polynôme de deuxième degré et le dénominateur est un polynôme du premier degré. Le principal objectif de cette question était de vérifier si les étudiants prennent en considération le domaine des fonctions proposées pour déterminer leur équivalence. Résultat surprenant, nous avons obtenu uniquement un seul étudiant qui a tenu compte du domaine des deux fonctions pour justifier qu'elles ne représentaient pas la même fonction (voir tableau 4.14). De ce fait, nous nous sommes questionnés sur le critère de réussite de cette activité traitement. Nous sommes arrivés au constat suivant :

- Si l'étudiant a effectué des manipulations algébriques cohérentes afin de montrer l'équivalence des expressions sans préciser que la fonction $g(x)$ n'est pas définie pour $x = -1$, alors nous croyons qu'il a réussi l'activité de traitement dans le registre ***symbolico-algébrique***.

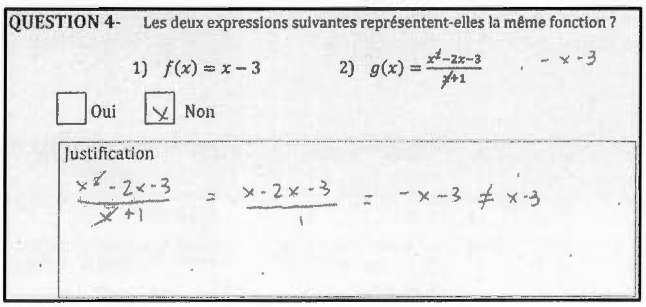
- Si l'étudiant a tenu compte des domaines respectifs des fonctions proposées pour montrer l'inégalité de ces dernières, alors nous croyons qu'il a eu recours au registre

numérique[12], car le dénominateur d'une fraction ne peut pas être égal à 0 ou encore il est impossible de diviser un nombre par 0. De plus, il doit avoir réussi la tâche de la question 3 afin que nous puissions prétendre qu'il maîtrise l'activité de traitement de la question 4.

Ce questionnement nous a également permis de constater que cette tâche exige de la part des participants de connaître ce que sont deux fonctions équivalentes. Ce qui veut dire que le fait d'effectuer des manipulations algébriques pour montrer l'équivalence de deux expressions algébriques n'est pas une condition suffisante, non plus nécessaire.

Dans un autre ordre d'idée, nous remarquons que le nombre des étudiants qui ont réussi à montrer l'équivalence des expressions est semblable à celui de la question 3, soit 39 % de l'échantillon. Cependant, nous avons constaté que ce ne sont pas tous les mêmes étudiants qui sont parvenus à réussir à la fois la question 3 et la question 4. De là, nous avons tenté de répertorier quelques erreurs de justification dans le cas où les étudiants avaient répondu que les expressions ne représentaient pas la même fonction.

- Étudiant 3 profil *SN*


QUESTION 4- Les deux expressions suivantes représentent-elles la même fonction ?

1) $f(x) = x - 3$ 2) $g(x) = \frac{x^{\cancel{2}}-2x-3}{\cancel{x}+1}$, $-x-3$

☐ Oui ☒ Non

Justification

$\frac{x^{\cancel{2}}-2x-3}{\cancel{x}+1} = \frac{x-2x-3}{1} = -x-3 \neq x-3$

Figure 4.15 Production de l'étudiant 3 du profil *SN* à la question 4

Par exemple, en observant la justification de l'étudiant 3 du profil *SN* (figure 4.15), nous constatons qu'il a fait une erreur de simplification lorsqu'il a supprimé l'exposant du x^2 avec le x au dénominateur. Étant donné qu'il n'a pas obtenu exactement la même équation que celle de la fonction $f(x)$, il a répondu que les deux fonctions n'étaient pas équivalentes. Clairement, cet étudiant a des difficultés avec les notions relatives aux fractions algébriques,

12 Il faut aussi prendre en compte les notions de domaine et d'égalité entre 2 fonctions, ce qui pourrait relever du registre ***théorico-discursif***, auquel nous reviendrons à la section 4.4.3.

en particulier celle de fractions équivalentes. Ainsi, nous pouvons affirmer que cet étudiant ne maîtrise pas l'activité de traitement.

Les autres erreurs que nous avons répertoriées sont des erreurs de calcul, en particulier des erreurs de factorisation. De plus, il y a quelques étudiants qui se sont servis d'une table de valeurs pour montrer l'égalité des expressions. D'ailleurs, la plupart de ceux-ci ont utilisé la même technique pour la question 3. Tout cela considéré, nous pouvons affirmer que la majorité des étudiants des deux séquences ont d'importantes lacunes sur le plan des manipulations algébriques.

Tableau 4.14
Tableau des résultats de la question 4

	Nombre d'étudiants	
Les réponses à la question 4	Sciences naturelles	Technico-sciences
Sans réponse	22	4
Ne représente pas la même fonction avec justification valable	**1**	**0**
Ont réussi à montrer l'équivalence des deux expressions	60	11
Représentent la même fonction, **avec** justification non valable	62	7
Ne représentent pas la même fonction, **sans ou avec** justification non valable	9	7
Total	154	29

Question 12- Vous devez trouver le ou les zéros de la fonction sinusoïdale suivante :

$$y = 2\sin(\frac{x}{2})$$

Critère de réussite de cette activité de traitement dans le registre ***symbolico-algébrique***

- L'étudiant doit avoir trouvé tous les zéros de la fonction $y = 2\sin(\frac{x}{2})$.

Analyse de la question 12

Comme dernière tâche d'évaluation de l'activité de traitement, nous avons demandé aux étudiants de trouver les zéros d'une fonction sinusoïdale. Avant d'effectuer notre expérimentation, nous étions conscients que cette tâche était plus difficile que celle des questions 3 et 4. Malgré tout, nous voulions évaluer ce type d'exercices en raison de son utilité dans les cours de calcul différentiel et intégral, par exemple pour la recherche des maximums et des minimums d'une fonction.

Tableau 4.15
Tableau des résultats de la question 12

	Nombre d'étudiants	
Les réponses de la question 12	Sciences naturelles	Technico-sciences
Sans réponse	48	18
Ont réussi à trouver tous les zéros	**19**	**0**
Ont réussi à trouver un seul zéro	21	1
Ont réussi seulement à identifier la tâche demandée ($y=0$)	34	4
Ont identifié la tâche demandée à $x=0$ au lieu de $y=0$	3	4
Ont fait des calculs qui ne mènent à rien	29	2
Total	154	29

Tout d'abord, nous remarquons au tableau 4.15 qu'il y a un taux de « sans réponse » élevé, soit près de 40 % de l'échantillon total. De plus, presque les deux tiers des étudiants de *TS* n'ont rien répondu. Nous pourrions interpréter ce résultat par le fait qu'au premier abord, cette tâche est plus complexe que les autres activités de traitement proposées précédemment. Nous pensons de plus que ce type d'activité n'est pas assez travaillé dans la séquence *Technico-science*. Nous observons également qu'il y a uniquement 19 étudiants du profil *SN* qui ont réussi à trouver tous les zéros de cette fonction périodique. De plus, aucun étudiant du profil *TS* n'a réussi à trouver tous les zéros. Ces résultats sont relativement étonnants compte tenu du fait que ce type d'exercices est généralement réalisé en cinquième secondaire et que tous les participants ont terminé leur secondaire, il y a à peine quelques mois. En raison de ce faible taux de réussite, nous avons décidé de remettre en question la classification de cette tâche avec l'activité de traitement. Pour ce faire, nous avons décortiqué ce que nous croyons être un raisonnement valable afin de mieux catégoriser la tâche selon les activités cognitives présentées à la section 2.1.2. Voici les trois étapes importantes d'un raisonnement complet :

Étape 1 : Associer l'objectif principal de la tâche, qui est de trouver tous les zéros d'une fonction, à l'équation $y = 0$.

Étape 2 : Effectuer des manipulations algébriques valides dans le but de trouver une valeur de la variable x.

Étape 3 : Utiliser le cercle trigonométrique ou la représentation graphique pour trouver les autres valeurs possibles de la variable x.

Selon nous, il n'est pas possible de trouver toutes les valeurs de x uniquement en effectuant des manipulations algébriques, c'est pourquoi l'étape 3 s'avèrera cruciale dans la réalisation de cette tâche. Nous croyons qu'il faut que l'étudiant ait recours au registre ***graphique*** et/ou au cercle trigonométrique pour arriver à ses fins. C'est pourquoi nous avons modifié la classification de cette tâche. Nous avons décidé d'associer les étapes 1 et 2 à l'activité de traitement et l'étape 3 à l'activité de coordination. Autrement dit, nous croyons que les étudiants devront à la fois réaliser une activité de traitement et une coordination de deux registres, plus précisément des registres ***symbolico-algébrique*** et ***graphique***, afin de trouver tous les zéros de la fonction. Ainsi, un étudiant qui réussit à trouver au moins une valeur associée au zéro (étapes 1 et 2) sera considéré comme étant en mesure d'effectuer l'activité de traitement.

Cette précision nous amène à interpréter différemment les données du tableau 4.16. D'abord, nous comptabilisons 41 étudiants qui ont réussi à trouver au moins un zéro et par le fait même, nous les considérons comme étant en mesure de réaliser l'activité de traitement liée à cette tâche parce qu'ils ont réussi les étapes 1 et 2. Par ailleurs, 19 de ces étudiants ont réussi à trouver tous les zéros de la fonction $y = 2\sin(\frac{x}{2})$. Alors nous croyons que ces étudiants sont en mesure de coordonner les registres ***symbolico-algébrique*** et ***graphique***.

Par ailleurs, nous avons relevé une confusion entre la tâche demandée et l'équation qui lui est associée, c'est-à-dire que certains participants ont cherché le ou les valeurs de y pour l'équation $x = 0$, ce qui veut dire qu'ils ont remplacé la variable x par zéro et ont ensuite tenté de trouver les valeurs de y. Selon nous, le fait de demander les zéros d'une fonction ne déclenche pas un automatisme chez certains participants. Outre cette confusion, nous avons remarqué que plusieurs élèves ont également tenté d'effectuer des manipulations algébriques qui n'aboutissaient à rien. Bref, nous pouvons prétendre que cette tâche a été difficile comparativement aux trois autres tâches associées à l'activité de traitement. Tout cela considéré, nous sommes d'avis que les résultats auraient dû être supérieurs compte tenu du fait que la recherche des zéros d'une fonction fait partie du programme du secondaire. Nous croyons aussi que le congé d'été peut avoir eu un effet négatif dans la réussite de ce type de tâches, d'un niveau technique plus exigeant.

4.2.3 Questions de conversion

- Registre ***symbolico-algébrique*** et registre ***graphique*** **(questions 5 et 11)**

Question 5- Vous devez esquisser le graphique de chacune des fonctions de variable indépendante x.

Critère de réussite de cette activité de conversion du registre ***symbolico-algébrique*** *vers le registre* ***graphique***

- L'étudiant doit avoir réussi à esquisser les graphiques des deux fonctions proposées (fonctions rationnelle et racine carrée) en faisant ressortir les caractéristiques définies à la section 3.2.5.

À cette question, nous avons proposé deux équations : l'une représente une fonction rationnelle et l'autre une fonction racine carrée. Nous avons demandé d'esquisser le graphique de chacune d'elles. Pour l'évaluation du graphique de la fonction rationnelle, nous avons établi deux critères qui étaient le positionnement des asymptotes et l'allure globale des deux branches de l'hyperbole. En ce qui concerne le graphique de la fonction racine carrée, l'allure de la courbe et le sommet de la parabole correspondante étaient, selon nous, les deux caractéristiques importantes de la représentation graphique.

Analyse de la question 5a (Fonction rationnelle)

En comptabilisant les résultats de la première tâche, nous avons constaté un taux de « sans réponse » élevé, soit plus de 40 % de l'échantillon. Encore une fois, ce résultat est en dessous de nos attentes d'autant plus que la fonction rationnelle est supposée être étudiée en 5^{e} secondaire dans les deux séquences d'enseignement. De plus, nous avons obtenu un taux de réussite d'environ 10 %. En effet, nous avons répertorié uniquement 25 esquisses correctement réalisées. Nous avons également remarqué que certains étudiants ont fait des erreurs par rapport à l'emplacement exact des asymptotes, ce qui revient à dire qu'ils n'ont pas effectué la bonne transformation géométrique, soit une translation de 1 vers la droite et de 1 vers le haut. Par ailleurs, quelques étudiants ont tracé le graphique de la fonction rationnelle de base sans se soucier des caractéristiques spécifiques de l'équation proposée. Tout de même, ces étudiants ont réussi à reconnaître ce type de fonction à partir de son équation.

Malgré tout, nous croyons qu'ils ne sont pas en mesure d'effectuer l'activité de conversion que nous avons proposée.

Analyse de la question 5b (Fonction racine carrée)

En ce qui a trait à la deuxième tâche, nous avons obtenu des résultats largement supérieurs par rapport à la question précédente c'est-à-dire que le taux de réussite est plus élevé de même que le taux de réponse. Effectivement, il y a 33 étudiants qui n'ont rien répondu, comparativement à 75 pour la question précédente. De même, le taux de réussite est passé de 14 % pour la tâche 1 à 32 % pour la seconde tâche, c'est plus que le double. Malgré tout, ce pourcentage est assez bas compte tenu du fait que ce type de fonction fait partie du contenu mathématique des deux séquences *TS* et *SN*. Dans tous les cas, nous ne pouvons pas en donner les raisons. Cependant, nous sommes tentés de dire que le niveau des étudiants n'est pas à la hauteur des attentes du programme du MELS. D'une manière générale, nous pouvons prétendre que la majorité des étudiants éprouvent certaines difficultés avec le passage du registre ***symbolico-algébrique*** au registre ***graphique***.

Question 11- Vous devez trouver l'expression algébrique **correspondant** à chacune des représentations graphiques.

Critère de réussite de cette activité de conversion du registre ***graphique*** *vers le registre* ***symbolico-algébrique***

- L'étudiant doit avoir réussi à construire les expressions algébriques des deux fonctions proposées (fonctions linéaire et par parties) : voir section 3.2.5.

L'évaluation de l'activité de conversion du registre ***graphique*** vers le registre ***symbolico-algébrique*** s'est faite à travers deux tâches. La première consistait à trouver l'équation d'une droite à partir de sa représentation graphique. La seconde consistait également à trouver l'équation d'une fonction à partir de sa représentation graphique, mais le graphique proposé était celui d'une fonction définie par parties. Les résultats obtenus aux deux tâches sont relativement faibles. En effet, il y a uniquement 30 participants qui ont réussi à trouver l'expression algébrique associée à chacune des fonctions proposées (voir tableau 4.16). De plus, nous remarquons que près du tiers des étudiants du profil *SN* et la moitié de ceux du profil *TS* n'ont réussi aucune des deux tâches. Selon la progression des apprentissages au secondaire proposée par le MELS (2008), les fonctions de degré 0 et de degré 1 sont étudiées à partir de la 3^e année du secondaire et cette étude devrait se poursuivre jusqu'à la fin de la 5^e année. Ceci établi, le taux de réussite aurait dû être supérieur. Afin de mieux comprendre ces résultats, nous allons analyser les différentes réponses pour chacune des tâches.

Tableau 4.16
Tableau global des résultats de la question 11

	Nombre d'étudiants	
Nombre de tâches réussies à la question 11	Sciences naturelles	Technico-sciences
2	28	1
1	73	10
Aucune	50	16
Sans réponse aux deux tâches	3	2
Total	154	29

Analyse de la question 11a (Fonction linéaire)

Dans l'ensemble, nous avons obtenu des résultats acceptables en ce qui concerne la première tâche. Effectivement, il y a un peu plus de 60 % de l'échantillon qui a réussi à trouver l'équation de la droite $y = -2x - 2$ (voir tableau 4.17). Toutefois, nous avons remarqué un écart considérable entre le taux de réussite des étudiants du profil *SN* et ceux de *TS*, soit d'environ 20 %. En effet, il y a uniquement 45 % des étudiants du profil *TS* qui ont pu retrouver l'équation de la droite, comparativement à plus de 60 % pour ceux du profil *SN*. Partant de ce fait, nous avons décidé de classer les résultats selon les erreurs commises par les participants pour avoir une meilleure idée de leur compréhension. Nous avons constaté qu'il y a très peu d'étudiants qui n'ont pas été en mesure de trouver soit le bon taux de variation (pente de la droite), soit la bonne ordonnée à l'origine. Ceci étant dit, nous croyons qu'une bonne partie d'entre eux ne sont pas capables de déchiffrer les informations importantes incluses dans la représentation graphique d'une droite dans le but de construire l'équation associée.

Tableau 4.17
Tableau des réponses à la question 11a

Réponse à la question 11a	Nombre d'étudiants	
	Sciences naturelles	Technico-sciences
Ont réussi à trouver l'équation de la droite	**97**	**13**
Ont calculé la bonne pente avec une erreur à l'ordonnée à l'origine	17	3
Ont calculé la mauvaise pente, mais la bonne ordonnée à l'origine	36	8
Mauvaise pente et mauvaise ordonnée à l'origine	1	3
Sans réponse	3	2
Total	154	29

Analyse de la question 11b (Fonction par parties)

La seconde tâche s'est révélée plus difficile que la précédente, car nous avons obtenu un taux de « sans réponse » plus élevé. En plus de cela, seulement 30 étudiants ont réussi à trouver la bonne expression associée à la fonction définie par parties. De ces 30 étudiants, il n'y en a aucun du profil *TS*. Étant donné que le taux de réussite à cette tâche est très faible ($\approx$ 16 %), nous nous sommes questionnés davantage sur les causes possibles de cet échec. Nous avons constaté que près du tiers de l'échantillon a mal pris en compte le fait que la droite horizontale était uniquement dans le 3^{e} quadrant, ce qui veut dire que pour chaque valeur de $x < 0$, la valeur de la variable y devait être négative. Ces étudiants ont associé cette demi-droite à l'équation $y = 2$ au lieu de $y = -2$. Pourquoi ont-ils commis cette erreur ? En observant le graphique de cette tâche (figure 4.16), nous avons constaté que pour la graduation correspondante à $y = -2$, le signe « moins » devant le 2 est caché par la droite. Toutefois, nous croyons qu'un étudiant devrait savoir que la valeur comprise entre -1 et -3 sur l'axe des y devrait être -2. Pour cette raison, nous n'avons pas accepté cette réponse malgré le fait que le signe négatif n'était pas visible.

Nous avons répertorié deux autres erreurs. La première concerne la manière d'écrire l'équation d'une fonction définie par parties, c'est-à-dire qu'il est obligatoire de préciser pour quelles valeurs du domaine la fonction correspond à une expression plutôt qu'à une autre. En d'autres mots, les restrictions associées à chaque expression sont indispensables sans quoi il n'est pas possible de produire son graphique. À notre avis, cette caractéristique propre aux fonctions définies par parties n'est probablement pas assez travaillée.

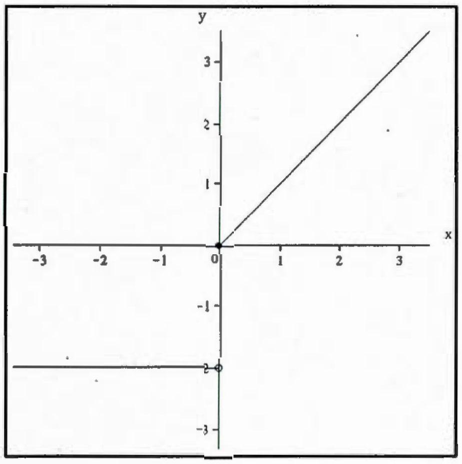


Figure 4.16 Graphique de la fonction à la question 11b.

La seconde erreur que nous avons relevée est liée à l'interprétation des différents symboles contenus dans la représentation graphique, comme le point ouvert et le point fermé. Nous avons constaté que 11 étudiants ont fait une erreur en établissant les contraintes de la fonction. Par exemple, l'étudiant 116 (voir figure 4.17) a inclus la valeur $x = 0$ à chacune des contraintes, mais le point correspondant appartient seulement à la droite $y = x$, à cause du point ouvert à $(0, -2)$. Premièrement, nous croyons que la représentation graphique ne permettait pas de bien distinguer le point ouvert du point fermé. D'autre part, nous n'avons pas mentionné que l'expression associée au graphique devait être celle d'une fonction. Conséquemment, nous n'avons pas tenu compte de cette erreur et par le fait même, nous avons accepté ce type de réponse. Le nombre de réponses valables à cette tâche est alors passé de 30 à 41.

Expression algébrique : $X \leq 0 \rightarrow y = -2$
$x \geq 0 \rightarrow y = x$

Figure 4.17 Réponse de l'étudiant 116 à la question 11b.

Tableau 4.18
Tableau des réponses à la question 11b

Réponse à la question 11b	Nombre d'étudiants	
	Sciences naturelles	Technico-sciences
Ont réussi à trouver l'équation de la fonction définie par parties	**30**	**0**
Ont fait une erreur d'inclusion	8	3
N'ont pas donné les contraintes de la fonction définie par parties	28	7
Ont confondu les écritures ensembliste et fonctionnelle	4	2
N'ont pas trouvé les bonnes équations	51	8
Sans réponse	33	9
Total	154	29

Dans l'ensemble, nous pouvons affirmer que la majorité des participants a eu certaines difficultés à réaliser les deux tâches proposées. Cela nous amène à dire que non seulement plusieurs participants ont des lacunes au niveau de la lecture des informations incluses dans un graphique, mais aussi ils n'ont peut-être pas établi de règles de conversion entre le registre ***graphique*** et le registre ***symbolico-algébrique***.

- Registre ***symbolico-algébrique*** et registre ***numérique*** **(questions 7 et 13)**

Question 7- À partir de la fonction suivante :

$$f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

a) Vous devez indiquer par un crochet ✓ les nombres qui appartiennent au domaine de cette fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

b) Vous devez indiquer par un crochet ✓ les nombres qui appartiennent à l'ensemble image de cette fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

c) Vous devez identifier par un crochet ✓ les couples de coordonnées cartésiennes qui appartiennent à cette fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Critère de réussite de cette activité de conversion du registre ***symbolico-algébrique*** *vers le registre* ***numérique***

- ➢ L'étudiant doit répondre correctement aux trois tâches proposées.

Pour ce qui est de la question 7, nos attentes par rapport à la réussite de cette question étaient élevées compte tenu du fait qu'il était possible de remplacer les données numériques d'une variable dans l'équation proposée afin de vérifier s'il existe une valeur pour l'autre variable. Néanmoins, nous avons obtenu des résultats en dessous de nos espérances. En effet, il y a uniquement deux étudiants qui ont réussi les trois tâches de cette question (voir tableau 4.19). De plus, nous remarquons que plus du tiers des participants n'ont pas répondu. Cette donnée nous a amenés à nous questionner à la fois sur les perceptions des participants face à cette tâche ainsi que sur la tâche elle-même. Est-ce que la tâche est trop complexe ? Quelles pourraient être les causes du refus de répondre ? Après mûres réflexions, nous sommes arrivés à trois hypothèses. La première pourrait être provoquée par la convention d'écriture $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, c'est-à-dire que plusieurs d'entres eux n'auraient pas vu ce type d'écriture ce qui les auraient empêchés de répondre à la question. La seconde cause serait reliée au choix de l'expression algébrique sous prétexte que celle-ci ne serait pas, de prime à abord, associée à une fonction connue. La troisième pourrait être provoquée par la nature des nombres choisis. En conséquence, ces étudiants n'ont pas voulu essayer de déterminer les nombres appartenant au domaine, à l'ensemble image et les couples appartenant à cette fonction. De toute évidence, cette question a causé plusieurs difficultés.

Tableau 4.19

Tableau global des résultats de la question 7

	Nombre d'étudiants	
Nombre de tâches réussies à la question 7, sur 3	Sciences naturelles	Technico-sciences
3	2	0
2	10	0
1	43	7
Aucune	53	14
Sans réponse aux trois questions	46	8
Total	154	29

Tableau 4.20

Tableau des résultats préliminaires de la question 7

	Nombre d'étudiants	
Les tâches de la question 7	Sciences naturelles	Technico-sciences
Ont réussi à déterminer les valeurs du domaine (question a)	4	0
Ont réussi à déterminer les valeurs de l'image (question b)	44	4
Ont réussi à déterminer les points appartenant à la fonction (question c)	20	3

Analyse de la question 7a

Une autre donnée surprenante : il y a seulement 4 étudiants qui sont parvenus à identifier toutes les valeurs du domaine (voir tableau 4.20). Partant de ce résultat, nous avons décidé de répertorier les nombres rejetés par les étudiants afin de mieux comprendre ce résultat. Premièrement, nous avons constaté qu'il y a plusieurs étudiants qui ont exclu toutes les valeurs négatives proposées étant donné qu'il y a une racine carrée dans l'équation. Nous croyons que ces étudiants n'ont pas porté attention au terme x^2, un nombre supérieur ou égal à 0 pour tout x. D'autre part, plusieurs étudiants ont rejeté la valeur $x = 1$, donnant lieu à l'image $\sqrt{0}$ qui semble avoir causé problème pour des raisons sur lesquelles nous ne pouvons que spéculer : peut-être une interférence avec l'interdiction de diviser par 0 ? Tout compte fait, nous pouvons prétendre que cette tâche s'est avérée difficile pour la quasi totalité de l'échantillon. Nous croyons que le concept de racine carrée n'est probablement pas tout à fait maîtrisé.

Analyse de la question 7b

Tout d'abord, nous avons obtenu de meilleurs résultats comparativement à la tâche précédente. Certes, plus du quart des étudiants ont réussi à identifier correctement les cinq valeurs de l'ensemble image. En dépit de l'augmentation considérable du taux de réussite par rapport à la première tâche, nous constatons qu'il y a toujours énormément d'étudiants qui n'ont pas réussi identifier tous les nombres appartenant à l'ensemble image. Comme nous l'avons fait pour la première tâche, nous avons relevé les nombres exclus de l'ensemble image dans le but de comprendre ce faible résultat. Nous avons obtenu des informations intéressantes.

1) Certains étudiants semblent croire que la racine carrée d'un certain nombre ne peut pas être égale à 0 parce qu'ils ont exclu 0 de l'ensemble image.
2) Certains étudiants ont inclus des valeurs négatives comme faisant partie de l'ensemble image de la fonction racine carrée.

Analyse de la question 7c

À cette tâche, seulement 23 étudiants sont parvenus à déterminer tous les couples appartenant à la fonction (voir tableau 4.20). Encore une fois, cette tâche s'est avérée difficile pour la majorité des participants. Par ailleurs, nous avons constaté que 40 étudiants ont exclu le point $(-1, 0)$ et de ceux-ci, seulement six avaient exclu la valeur 0 de l'ensemble image. Cette information nous permet de constater que la plupart de ces étudiants ne tiennent pas compte de l'interrelation entre le domaine, l'ensemble image et les points appartenant à la fonction. En somme, l'activité de conversion du registre ***symbolico-algébrique*** vers le registre ***numérique*** n'a pas été un succès. En dépit du fait que les résultats illustrent un manque de compréhension de la part des participants, nous sommes conscients que notre outil méthodologique ne nous permet pas de cibler exactement les causes de cet insuccès.

Question 13- À partir de la table de valeurs ci-dessous, vous devez trouver l'expression algébrique associée à cette fonction.

Critère de réussite de cette activité de conversion du registre ***numérique*** *vers le registre* ***symbolico-algébrique***

- L'étudiant doit avoir réussi à reconstruire l'expression algébrique associée à la table de valeurs proposée.

Comparativement à la question précédente, la question 13 a été généralement mieux réussie. En effet, nous avons répertorié 39 étudiants qui sont parvenus à retrouver l'équation de la fonction quadratique proposée. De plus, le nombre de « sans réponse » est passé de 73 pour la question 7 à 40 pour la question 13.

Nous avons obtenu des réponses de toutes sortes. Nous avons observé que 10 étudiants ont reconnu la fonction du deuxième degré sans pour autant trouver son équation. Un fait étonnant, plusieurs étudiants ont associé la table de valeurs à une fonction du premier degré malgré le fait que les accroissements de la variable dépendante ne sont pas constants. Nous pouvons dire que ces étudiants ne sont pas en mesure de différencier une fonction du premier et du deuxième degré à partir d'une table de valeurs. De plus, quelques participants ont cru que la table de valeurs représentait celle d'une fonction racine carrée. Ce résultat attire particulièrement notre attention car la principale caractéristique d'une fonction racine carrée est que pour un même accroissement de la variable indépendante, les accroissements de la variable dépendante diminuent, au lieu d'augmenter comme dans le cas d'une fonction quadratique. Plusieurs questions viennent à l'esprit : est-ce que ce type d'activités est réalisé au secondaire? Est-ce que l'enseignement met l'accent sur les caractéristiques des fonctions dans la table de valeurs? Nous ne sommes pas en mesure de nous prononcer à ce sujet. Néanmoins, nous constatons que la majorité des répondants ont certaines lacunes par rapport au passage du registre ***numérique*** vers le registre ***symbolico-algébrique***. À notre avis, il est important qu'un étudiant puisse reconnaître les caractéristiques de certaines fonctions dans le registre ***numérique*** pour mieux comprendre le concept de fonction.

- Registre ***graphique*** et registre ***schématico-discursif*** **(questions 9 et 10)**

Question 9- Nous voulons remplir d'eau la bouteille représentée ci-dessous. Nous nous intéressons à deux grandeurs, le volume d'eau de la bouteille et la hauteur d'eau dans cette même bouteille. Dessiner le graphique du volume d'eau en fonction de la hauteur de l'eau.

Critère de réussite de cette activité de conversion du registre ***schématico-discursif*** *vers le registre* ***graphique***

- L'étudiant doit avoir réussi à esquisser correctement le graphique de la situation proposée.

Tout d'abord, nous aimerions rappeler que le graphique associé à cette situation devait contenir les caractéristiques suivantes :

Caractéristiques du graphique de la fonction qui modélise la situation

- le graphique doit être composé de deux droites de pente positive
- la première droite doit débuter à l'origine du plan cartésien
- la pente correspondante au remplissage de la première partie du récipient doit être supérieure à celle correspondant à la seconde partie du récipient

La majorité des participants n'a probablement pas réussi à transposer toutes les informations de la situation dans le graphique, car le taux de réussite est de 40 % (voir tableau 4.21). Nous avons dressé une liste des différents types de graphique pour avoir une idée globale des perceptions des participants concernant une tâche de modélisation graphique.

- ❖ Deux droites horizontales (5 étudiants).
- ❖ Courbe similaire à celle d'une fonction exponentielle (16 étudiants).
- ❖ Courbe similaire à celle d'une fonction racine carrée (24 étudiants).
- ❖ Deux droites de pente positive, mais la pente de la première droite est plus petite que celle de la deuxième droite (20 étudiants).

En d'autres mots, ces étudiants ne sont pas parvenus à comprendre l'influence de la largeur et de la forme du récipient sur l'interaction entre les deux grandeurs. En somme, nous pouvons affirmer que la majorité des étudiants des deux profils n'ont pas été en mesure de réaliser cette activité de conversion.

Tableau 4.21
Tableau des résultats de la question 9

Réponse à la question 9	Nombre d'étudiants – Sciences naturelles	Nombre d'étudiants – Technico-sciences
Réussi à modéliser la situation du récipient	**64**	9
N'ont pas réussi à modéliser la situation	86	15
Sans réponse	4	5
Total	154	29

Question 10- Voici le graphique du volume d'eau d'un récipient en fonction de la hauteur de l'eau de ce même récipient dont on ne connaît pas la forme. Sachant que le graphique est le suivant, esquisser la forme que pourrait avoir le récipient.

Critère de réussite de cette activité de conversion du registre ***schématico-discursif*** *vers le registre* ***graphique***

- ➢ L'étudiant doit avoir réussi à esquisser correctement la forme du récipient pour la situation proposée.

Cette tâche consistait à esquisser le récipient de la situation en tenant compte des informations contenues dans le graphique donné. L'esquisse du récipient devait contenir les caractéristiques suivantes :

Caractéristiques du récipient

- ➢ le récipient doit être plus étroit dans le haut qu'à la base du récipient
- ➢ le bord du récipient ne doit pas présenter d'étranglement subit, comme celui de la figure 3.16

Les résultats obtenus à cette question sont similaires à ceux de la tâche précédente. En effet, le pourcentage de réussite est d'environ 37 % de l'échantillon. Plus de la moitié des participants n'a pas réussi à esquisser correctement le récipient. De là, nous avons décidé de présenter la liste des différentes formes de récipients données en réponse.

- Forme similaire au récipient de la question 9 (8 étudiants)
- Forme inversée du récipient de la question 9 (7 étudiants)
- Récipient avec parois verticales (24 étudiants)
- Forme d'un ballon jaugé : instrument de laboratoire (9 étudiants)

D'une façon générale, nous pouvons prétendre que la majorité de l'échantillon n'est pas en mesure d'identifier les caractéristiques contenues dans un graphique pour dessiner correctement le croquis du récipient. En somme, cette activité de conversion s'est avérée difficile pour beaucoup d'étudiants.

Tableau 4.22
Tableau des résultats de la question 10

	Nombre d'étudiants	
Réponse à la question 10	Sciences naturelles	Technico-sciences
Ont réussi à dessiner la bouteille à partir du graphique	**59**	**6**
N'ont pas réussi à dessiner la bouteille	76	17
Sans réponse	19	6
Total	154	29

- Registre ***graphique*** et registre ***numérique*** **(question 6)**

Question 6- À partir de la représentation graphique de la fonction de variable indépendante x suivante :

a) Vous devez indiquer par un crochet ✓ les nombres qui appartiennent au domaine de cette fonction;

b) Vous devez indiquer par un crochet ✓ les nombres qui appartiennent à l'ensemble image de cette fonction;

c) Vous devez identifier par un crochet ✓ les couples qui appartiennent à cette fonction.

*Critère de réussite de cette activité de conversion du registre **graphique** vers le registre **numérique***

➢ L'étudiant doit répondre correctement aux trois tâches proposées.

À la question 6, nous avons proposé le graphique d'une fonction sinusoïdale et nous avons demandé aux participants de déterminer les nombres qui appartiennent respectivement au domaine et à l'ensemble image de cette fonction. Nous avons proposé un choix limité de nombres afin de vérifier si les étudiants sont capables de lire et d'interpréter les informations données par un graphique cartésien. De plus, nous avons demandé de déterminer les couples appartenant à la fonction parmi six choix. Les résultats à cette question sont étonnants, étant donné qu'il y a uniquement 40 participants qui ont réussi les trois tâches, ce qui représente environ 22 % de l'échantillon (voir tableau 4.23). De même, nous constatons qu'il y a 48 étudiants, dont 11 du profil *TS*, qui n'ont réussi aucune tâche associée à cette activité de conversion. Ces résultats nous ont amenés à approfondir notre analyse.

Tableau 4.23
Tableau global des résultats de la question 6

	Nombre d'étudiants	
Nombre de tâches réussies à la question 6 (sur 3)	Sciences naturelles	Technico-sciences
3	38	2
2	42	4
1	37	11
Aucune	37	11
Sans réponse aux trois questions	0	1
Total	154	29

Tableau 4.24
Tableau des résultats préliminaires de la question 6

	Nombre d'étudiants	
Les tâches de la question 6	Sciences naturelles	Technico-sciences
Ont réussi à déterminer les valeurs du domaine (question a)	66	3
Ont réussi à déterminer les valeurs de l'image (question b)	59	6
Ont réussi à déterminer les points appartenant à la fonction (question c)	22	1

Analyse de la question 6a

Les résultats obtenus à la première tâche nous ont particulièrement surpris. En effet, il y a seulement 69 étudiants qui ont coché les huit valeurs proposées, dont seulement trois sont du profil *TS* (voir tableau 4.24). Dans le but de discerner les causes de ce faible taux de réussite, nous avons tenté d'identifier le ou les nombres rejetés par les étudiants.

1) Exclusion de 7,327 du domaine de la fonction

Nous avons constaté que 84 étudiants de l'échantillon ont exclu 7,327 du domaine de la fonction. De ce fait, nous avons tenté d'identifier la raison qui aurait poussé ces étudiants à rejeter cette valeur. Nous sommes arrivés à l'hypothèse suivante : étant donné que l'extrémité droite de la courbe correspondait à une valeur de x d'environ 2π, plusieurs d'entre eux ont peut-être exclu 7,327 parce que ce nombre est supérieur à 2π.

En raison du nombre élevé d'étudiants qui ont rejeté ce nombre, nous nous sommes questionnés sur la manière dont nous avions posé notre question, car selon nous, c'était évident que la courbe continuait indéfiniment. Après mûres réflexions, nous avons réalisé qu'en aucune façon, l'aspect infini de la fonction n'était indiqué. En principe, nous aurions dû insister sur cet aspect en mentionnant soit le nom de la fonction soit le caractère périodique de celle-ci afin d'éviter cette interprétation. Conséquemment, nous aurions peut-être obtenu des résultats différents. C'est pourquoi nous avons décidé d'accepter tous les étudiants qui ont exclu uniquement 7,327 du domaine. Cette modification fait passer le nombre de réponses acceptables de 69 à 92, une augmentation de plus de 10 %.

2) Exclusion de 3, -1, $\frac{2}{3}$, $\frac{17}{16}$ et 7,327 du domaine de la fonction

Nous avons constaté que 20 % de l'échantillon a exclu du domaine toutes les valeurs suivantes : 3, -1, $\frac{2}{3}$, $\frac{17}{16}$ et 7,327. Pourquoi y a-t-il autant de participants qui ont rejeté ces nombres du domaine ? À notre avis, cette erreur serait provoquée par les différentes conceptions liées aux graduations de l'axe des abscisses, c'est-à-dire à l'aspect continu de la courbe. Étant donné que les graduations de l'axe des abscisses sont représentées uniquement par des multiples de π ($n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$), nous pensons que ces étudiants n'ont probablement accepté que les nombres exprimés ainsi. En d'autres mots, tous les nombres qui ne sont pas exprimés sous la forme $n\pi$ ne font pas partie du domaine de la fonction. Si tel est le cas, nous croyons qu'ils ont certaines lacunes quant au sens donné à la droite numérique. En plus de cela, nous sommes portés à dire qu'ils n'ont pas tout à fait saisi le rôle des graduations dans la représentation graphique. Partant de cette hypothèse, il serait intéressant d'approfondir l'évaluation de ce type d'activité en choisissant des graduations entières, cela nous permettrait de vérifier si les étudiants tiennent compte de tous les nombres réels compris entre deux graduations. En fin de compte, nous pouvons prétendre que la majorité des étudiants des deux profils ne sont pas en mesure de déterminer le domaine d'une fonction sinusoïdale.

Analyse de la question 6b

Comme à la question précédente, nous avons obtenu un taux de réussite relativement faible (voir tableau 4.22). En effet, il y a exactement 65 étudiants qui sont parvenus à identifier tous les nombres appartenant à l'ensemble image, soit ceux compris entre le minimum -1 et le maximum 3 de la fonction. Puisqu'il y a 64 % de l'échantillon qui n'a pas réussi cette tâche, nous avons relevé les nombres les plus fréquemment rejetés par les participants dans le but de mieux comprendre les causes de ces faibles résultats.

1) Exclusion de $\sqrt{7}$ de l'ensemble image de la fonction

Tout d'abord, nous avons constaté que $\sqrt{7}$ est le nombre qui a été rejeté par le plus grand nombre d'étudiants, soit à 74 reprises. À notre avis, il est possible que certains étudiants qui n'avaient pas de calculatrice n'aient pas été capables d'évaluer approximativement la racine carrée de 7 ou encore, aient pensé qu'une fonction sinusoïdale ne peut pas avoir une racine carrée comme valeur de la variable dépendante parce que son équation est de la forme $y = a \sin b(x - h) + k$. Autrement dit, le fait de ne pas avoir de racine carrée dans l'équation de la fonction proposée peut avoir entraîné le rejet de la valeur $\sqrt{7}$.

2) Exclusion de $\frac{-\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ de l'ensemble image de la fonction

Nous avons aussi constaté que plusieurs étudiants ont exclu les nombres $\frac{-\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$. À notre avis, soit que ces étudiants ne sont pas en mesure d'estimer la valeur de cette fraction, soit qu'ils ont encore une fois de fausses conceptions concernant la signification des graduations. Il est également possible que certains d'entre eux croient que les nombres $\frac{-\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ sont uniquement associés aux valeurs de l'angle d'une fonction trigonométrique, donc au domaine plutôt qu'à l'image.

Analyse de la question 6c

En ce qui concerne la 3^e tâche, nous avons recueilli des données intéressantes. En effet, il y a uniquement 23 étudiants qui ont accompli correctement la tâche demandée ce qui revient à dire qu'il y a 160 étudiants qui ne l'ont pas réussi. Au premier abord, nous pensions qu'il était relativement simple de déterminer les points appartenant au graphique de la fonction, mais réflexion faite il se peut que le choix de certains points ait pu provoquer des erreurs. En examinant les réponses des étudiants, nous nous sommes aperçus que la plupart d'entre eux avaient exclu le point $(\frac{7\pi}{3}, 3)$. Nous avons tenté de comprendre les raisons qui ont poussé les participants à rejeter ce couple. À notre avis, la principale raison serait due au fait qu'il est difficile de déterminer exactement l'abscisse des différents maximums de cette fonction uniquement en effectuant la lecture des points du graphique. À cet égard, nous croyons que les étudiants auraient dû avoir recours à des procédures beaucoup plus complexes. Voici un exemple de raisonnement :

Étape 1 →	Trouver la période associée à cette fonction : $\frac{3}{4}$ de la période correspond à π => la période est égale à $\frac{4\pi}{3}$ Activité de traitement dans le registre ***numérique***
Étape 2 →	Trouver les coordonnées du sommet à l'extrémité droite du graphique S'il y a un maximum au point $(\pi, 3)$, alors il y aura un maximum au point $(\pi + la\ période\ de\ la\ fonction\ ;\ 3) = \left(\pi + \frac{4\pi}{3}\ ; 3\right) = \left(\frac{7\pi}{3}\ ; 3\right)$ Coordination des registres ***numérique*** et ***graphique***

Selon nous, cette démarche exige de la part des étudiants plus qu'une simple conversion, nous croyons qu'elle nécessite une coordination des deux registres en présence. Quoi qu'il en soit, nous avons décidé d'exclure le point $(\frac{7\pi}{3}, 3)$ de l'activité de conversion du registre ***graphique*** au registre ***numérique.*** En conséquence, la réussite de l'activité de conversion implique l'identification des points suivants : $(\pi\ ; 3)$ et $(-\pi\ ; -1)$. Cependant, nous aimerions préciser qu'il se peut que le rejet du point $(\frac{7\pi}{3}, 3)$ soit provoqué par d'autres facteurs que nous ne pouvons énoncer en raison de la structure de la question. En fin de compte, ce changement a fait passer le pourcentage de réussite de 13 % (23 participants) à 56 % (91 participants) de l'échantillon. Malgré tout, nous croyons que les résultats sont relativement faibles pour des étudiants inscrits en sciences au collégial. À notre avis, il est important que ces étudiants puissent déterminer le domaine et l'ensemble image d'une fonction représentée graphiquement.

Tableau 4.25
Tableau des résultats modifiés de la question 6

Les tâches de la question 6	Nombre d'étudiants — Sciences naturelles (154 étudiants)	Nombre d'étudiants — Technico-sciences (29 étudiants)
Ont réussi à déterminer les valeurs du domaine (question a)	85	7
Ont réussi à déterminer les valeurs de l'image (question b)	59	6
Ont réussi à déterminer les points appartenant à la fonction (question c)	79	12

4.3 Résultats généraux des activités cognitives

4.3.1 Activité de reconnaissance

CRITÈRE DE CLASSEMENT *(selon les cinq niveaux établis à la section 3.3.2)*

Niveau 2 et + : L'étudiant doit maîtriser toutes les tâches liées à l'activité de reconnaissance

Tout d'abord, l'analyse des questions de reconnaissance et la comptabilisation des résultats des trois questions de reconnaissance nous ont permis de constater que la plupart des étudiants ne sont pas en mesure de reconnaître une fonction ou de définir correctement ce concept (voir tableau 4.26). Effectivement, seulement 11 participants ont réussi les trois tâches liées à l'activité de reconnaissance. D'ailleurs, aucun étudiant du profil *TS* n'est parvenu à reconnaître toutes les fonctions parmi les graphiques et les équations algébriques proposés. En comparant les deux colonnes correspondant au nombre d'étudiants de chacune des séquences d'enseignement, nous remarquons que ceux de *Sciences naturelles* ont légèrement mieux performé que les étudiants de *Technico-sciences*. Parallèlement, nous constatons que le pourcentage d'étudiants qui n'ont réussi aucune activité est sensiblement le même. Ceci dit, nous pouvons soutenir que la majorité des étudiants de chaque séquence ont certes des lacunes dans la reconnaissance d'une fonction.

Tableau 4.26
Le nombre de tâches de l'activité de reconnaissance réussies selon le nombre d'étudiants et la séquence mathématique suivie en 5^{e} secondaire

	Nombre d'étudiants	
Nombre d'activités de reconnaissance réussies	Sciences naturelles	Technico-sciences
3	11 (7 %)	0 (0 %)
2	28 (18 %)	4 (14 %)
1	46 (30 %)	11 (38 %)
0	69 (45 %)	14 (48 %)
Total	154 (100 %)	29 (100 %)

En dépit du fait que la majorité des participants ne sont pas capables de reconnaître ou de définir une fonction, nous nous sommes questionnés sur laquelle des trois activités de reconnaissance a été la mieux réussie. En observant les données du tableau 4.27, nous constatons que l'activité impliquant le registre ***graphique*** est la mieux réussie, autant pour les étudiants du profil *SN* que ceux de *TS*. Nous remarquons également que l'activité de reconnaissance du registre ***symbolico-algébrique*** a été la moins bien réussie. D'ailleurs, aucun étudiant du profil *TS* n'a réussi à identifier toutes les fonctions exprimées dans ce registre. À partir de ces résultats, nous sommes portés à dire que les étudiants sont probablement plus à l'aise avec le registre ***graphique*** qu'avec le registre ***symbolico-algébrique*** pour reconnaître une fonction. Selon notre expérience, nous croyons que cela serait dû au fait que la reconnaissance d'une fonction se fait davantage dans le registre ***graphique***. D'ailleurs, il existe une méthode de reconnaissance dans ce registre qui revient régulièrement dans l'enseignement, c'est celle de la droite verticale. Cette méthode permet d'identifier rapidement si un graphique représente une fonction. À l'inverse, cette technique ne s'applique pas à une fonction représentée dans le registre ***symbolico-algébrique***. C'est peut-être pour cette raison que la majorité des répondants n'ont pas réussi les quatre tâches de reconnaissance du registre ***symbolico-algébrique***. Tout compte fait, nous pouvons dire que la plupart des participants des deux séquences ne savent possiblement pas comment cibler les caractéristiques propres à chaque registre de représentation pour décider si cela représente une fonction ou non.

Tableau 4.27
Le nombre d'étudiants qui a répondu correctement à toutes les tâches proposées selon le registre de représentation et la séquence d'enseignement

	Nombre d'étudiants		
Registre de représentation	Sciences naturelles	Technico-sciences	
Graphique	60	13	73
Symbolico-algébrique	31	0	31
Langue naturelle	54	6	60

4.3.2 Activité de traitement

CRITÈRE DE CLASSEMENT *(selon les cinq niveaux établis à la section 3.3.2)*

Niveau 2 :	L'étudiant doit maîtriser toutes les tâches liées à l'activité de reconnaissance
Niveau 3 et + :	L'étudiant doit maîtriser l'activité de reconnaissance et l'activité de traitement de tous les registres impliqués

Tout d'abord, pour être en mesure de bien évaluer les étudiants à l'égard de l'activité de traitement, nous avons construit quatre tâches différentes faisant appel à deux registres de représentation. Nous avons choisi de poser trois questions en lien avec le registre ***symbolico-algébrique*** et une question de traitement dans le registre ***graphique***. À la suite de la compilation des résultats (tableau 4.28), nous avons constaté qu'il y a peu d'étudiants qui ont réussi les trois activités de traitement dans le registre ***symbolico-algébrique***. Effectivement, il y a uniquement 12 étudiants qui ont réussi toutes ces activités de traitement. Cela nous a étonnés parce que selon notre expérience d'enseignement, l'activité de traitement dans ce registre est souvent privilégiée par rapport aux autres activités cognitives. Quant à l'activité de traitement dans le registre ***graphique***, nous remarquons qu'il y a un plus grand nombre de participants qui l'a réussie.

Tableau 4.28
Tableau de répartition des étudiants par rapport à la réussite des activités de traitement

	Nombre d'étudiants	
Les catégories	Sciences naturelles	Technico-sciences
Ont réussi toutes les activités de traitement (deux registres)	10	0
Ont réussi l'activité de traitement dans le registre ***graphique***	105	17
Ont réussi toutes les activités de traitement dans le registre ***symbolico-algébrique***	12	0
Autres	47	12

Ce constat nous a amenés à nous questionner sur notre classification du niveau de compréhension des participants par rapport à cette activité. Nous avons mentionné à la section 3.3.2 qu'un étudiant doit nécessairement réussir les quatre activités de traitement pour être considéré comme maîtrisant cette activité cognitive. Compte tenu des résultats, nous devons nous pencher sur ce critère de classification, car cela voudrait dire qu'il y aurait uniquement 10 participants qui maîtriseraient l'activité de traitement. De ce fait, nous devons apporter la correction suivante à notre classification :

- ✓ L'étudiant doit avoir réussi au moins trois tâches de traitement, dont celle impliquant le registre ***graphique*** (réussite d'au moins deux activités de traitement sur trois dans le registre ***symbolico-algébrique***).

Selon nous, ce changement est nécessaire parce que certains étudiants pourraient avoir commis une erreur à l'une des activités de traitement dans le registre ***symbolico-algébrique*** et par le fait même, ne maîtriseraient pas l'activité de traitement. Nous croyons que ce critère de réussite était trop rigide et pour cette raison, nous avons apporté cette modification. Ainsi, le nombre d'étudiants qui ont réussi l'activité dans le registre ***graphique*** et au moins deux activités dans le registre ***symbolico-algébrique*** est de 42, dont 5 sont du profil *TS*.

4.3.3 Activité de conversion

En ce qui concerne l'évaluation de l'activité de conversion, nous avons construit sept tâches différentes (voir 3.2.5) faisant appel à la plupart des registres répertoriés au préalable. Nous présentons la répartition des étudiants selon le nombre de tâches de conversion réussies au tableau 4.29. Les résultats obtenus sont relativement faibles. En effet, 143 participants sur 183 ne sont pas en mesure d'effectuer plus de deux activités de conversion. En comparant les résultats de chaque colonne, nous constatons que 40 étudiants du profil *SN* ont réussi plus de deux conversions comparativement à aucun du profil *TS*. Cette donnée nous a étonnés, car les contenus mathématiques des deux séquences sont similaires ce qui veut dire que tous les étudiants devraient être sensiblement au même niveau. Tout compte fait, nos résultats nous signalent qu'il y a un écart entre le niveau de compréhension des étudiants du profil *SN* et ceux du profil *TS*. Nous sommes conscients cependant que la taille de l'échantillon en *TS* est relativement petite et ne permet pas de généraliser avec assurance.

Tableau 4.29
Tableau global des résultats des activités de conversion

	Nombre d'étudiants	
Nombre de tâches de conversion réussies sur 7	Sciences naturelles	Technico-sciences
5 et +	6	0
3 ou 4	34	0
1 ou 2	69	18
Aucune	45	11
Total	154	29

4.3.4 Coordination de registres de représentation

Comme nous l'avons mentionné à la section 3.2.6, l'activité de conversion est fondamentale dans le développement conceptuel d'un objet mathématique. Conséquemment, la coordination de plusieurs registres de représentation est capitale pour bien saisir ce qu'est une fonction. Ceci dit, la coordination de deux registres de représentation exige de la part d'un étudiant la réussite des activités de conversions bidirectionnelles entre les deux registres impliqués.

Nous devions comptabiliser le nombre d'étudiants qui avaient réussi toutes les activités de conversion des deux registres en jeu dans le but de connaître ceux qui maîtrisent l'une des coordinations (voir section 3.2.6). Par exemple, si un étudiant est parvenu à réaliser les deux activités de conversion des registres ***schématico-discursif*** et ***graphique*** (question 9 et 10), alors nous croyons qu'il coordonne ces deux registres. L'évaluation des deux autres activités se fait de la même manière.

Les résultats généraux de cette activité cognitive sont relativement faibles (voir tableau 4.30). En effet, nous remarquons qu'aucun étudiant ne coordonne les quatre registres de représentation. De plus, seulement 4 étudiants coordonnent plus de deux registres de représentation. Nous constatons également qu'une majorité d'étudiants ne coordonne aucun registre, soit 70 % des étudiants du profil *SN* et 86 % des étudiants du profil *TS*.

Tableau 4.30
Tableau du nombre de registres coordonnés selon
le nombre d'étudiants et de leur profil d'enseignement

	Nombre d'étudiants	
Nombre d'activités de coordination réussies	Sciences naturelles	Technico-sciences
4	0	0
3	4	0
2	42	4
0	108	25
Total	154	29

1) Coordination ***schématico-discursif*** et ***graphique***

La coordination de ces deux registres implique la réussite à la fois de la question 9 et de la question 10. Comme nous avons l'avons précisé à la section 4.4.2, seulement 40 % des étudiants sont parvenus à faire l'activité de conversion du registre ***schématico-discursif*** vers le registre ***graphique***. En ce qui concerne la conversion inverse, le taux de réussite est similaire, soit de 36 % des répondants. Étant donné que l'activité de coordination dépend de la réussite des deux activités de conversion, il est tout à fait normal que le pourcentage d'étudiants qui coordonne ces deux registres soit inférieur à 36 % de l'échantillon. Effectivement, 26 % des répondants coordonnent les registres ***schématico-discursif*** et ***graphique***, c'est-à-dire ont réussi les deux tâches..

2) Coordination ***symbolico-algébrique*** et ***graphique***

La coordination de ces registres exige la réussite des activités de conversion des questions 5 et 11 (voir tableau 4.21). Manifestement, nous pouvons affirmer que les deux tâches n'ont pas été bien réussies compte tenu du fait qu'il y a respectivement 10 % et 16 % des étudiants qui ont réussi les questions 5 et 11. En raison du faible taux de réussite des activités de conversion impliquant ces deux registres, nous croyons qu'une grande majorité d'étudiants n'est pas en mesure d'effectuer le passage entre la représentation graphique et la représentation symbolique. Parallèlement, nous avons constaté qu'il y a seulement 5 étudiants qui ont accompli les deux tâches. En sommes, nous pouvons prétendre qu'il y a un manque de coordination entre les registres ***symbolico-algébrique*** et ***graphique***.

3) Coordination ***symbolico-algébrique*** et ***numérique***

Les activités de conversion proposées aux questions 7 et 13 sont liées à la coordination des registres ***symbolico-algébrique*** et ***numérique***. Tout d'abord, nous aimerions rappeler le but de chacune des questions. À la question 13, l'objectif était de trouver l'équation d'une fonction du 2^e^ degré à partir de sa table de valeurs et l'objectif de la question 7 était de déterminer, parmi des choix de réponses, les valeurs appartenant au domaine, celles appartenant à l'ensemble image et les couples appartenant à la fonction sinusoïdale représentée par son équation. Le taux de réussite à la question 7 est uniquement de 1 % ce qui signifie que très peu d'étudiants sont capables de déterminer le domaine et l'ensemble image d'une fonction trigonométrique. Étant donné que 99 % des participants ne sont pas en mesure de déterminer le domaine, l'ensemble image et les couples appartenant à une fonction, nous estimons qu'ils ne coordonnent pas les registres ***symbolico-algébrique*** et ***numérique***. En conséquence, les résultats à la question 13 n'influenceront pas le nombre d'étudiants qui coordonnent ces registres. Dans l'ensemble, nous constatons qu'il y a très peu d'étudiants qui coordonnent deux registres de représentation. Nous ne sommes pas en mesure d'en comprendre les causes.

4.4 Classement des participants selon leur niveau de compréhension

4.4.1 Grille de classification

Tout d'abord, nous aimerions rappeler que l'objectif principal de cette recherche est d'évaluer le niveau de compréhension des étudiants diplômés et inscrits en sciences au collégial, en lien avec les fonctions et les notions sous-jacentes. Pour ce faire, nous avons construit un questionnaire basé sur la théorie des représentations de Duval. Ensuite, nous avons présenté la grille de classification de Guzmán, Hitt et Páez. Cette grille s'appuie à la fois sur les trois activités cognitives répertoriées par Duval et sur la coordination de registres de représentation sémiotique.

Niveau de compréhension selon les activités cognitives

Niveau 1 :	Les étudiants qui ont des idées imprécises et incomplètes du concept de fonction
Niveau 2 :	Les étudiants qui ont réussi à reconnaître toutes les fonctions dans les registres ***graphique*** et ***symbolico-algébrique*** en plus d'avoir défini correctement le concept de fonction
Niveau 3 :	Les étudiants qui ont réussi à répondre correctement aux tâches de traitement des registres ***graphique*** et ***symbolico-algébrique***
Niveau 4 :	Les étudiants qui ont réussi au moins trois activités de conversion
Niveau 5 :	Les étudiants qui coordonnent plusieurs registres de représentation

Le classement d'un individu se fait de manière à ce que les conditions des niveaux inférieurs soient satisfaites. En d'autres mots, un étudiant qui n'est pas capable de reconnaître toutes les fonctions dans les deux registres ne peut pas être classé *niveau 4* malgré le fait qu'il a réussi toutes les tâches de traitement et plusieurs tâches de conversion.

4.4.2 Résultats de la recherche

Comme nous l'avons présenté, nous avons pu comptabiliser les résultats de chacune des tâches du questionnaire. Cela nous a permis de constater que le taux de réussite des étudiants aux différentes activités cognitives proposées est relativement faible et cela, pour la majorité des tâches. Voici la répartition des répondants selon la séquence d'enseignement suivie en cinquième secondaire et le niveau de compréhension du concept de fonction.

Tableau 4.31
Classement des 183 étudiants de l'échantillon
selon la séquence d'enseignement et leur niveau de compréhension

	Nombre d'étudiants	
NIVEAU	Sciences naturelles	Technico-sciences
5	0	0
4	2	0
3	1	0
2	8	0
1	142	29
	153	29

En observant le tableau 4.31, nous constatons que les résultats sont faibles. En effet, il y a seulement 11 étudiants parmi les 183 de l'échantillon qui ne sont pas classés *niveau 1*. En conséquence, le niveau de compréhension de la notion de fonction est faible pour la plus grande part de l'échantillon. Cette constatation nous a amené à un questionnement concernant notre grille de classification, le cadre théorique et par le fait même, le choix des activités cognitives.

4.4.3 Difficultés rencontrées et modifications apportées

I. Élaboration du questionnaire

⇒ Difficulté à construire des activités de traitement avec le registre ***symbolico-algébrique***

À notre avis, le cadre théorique de Duval sur les registres de représentation sémiotiques et le fonctionnement cognitif de la pensée a une approche plutôt générale des mathématiques. Nous croyons que les trois activités cognitives ne s'appliquent pas à tous les concepts mathématiques, entre autres celui des fonctions. Étant donné que les fonctions ont différentes représentations et que chacune d'elles contient des informations parfois différentes, parfois similaires, nous croyons que l'activité de traitement n'est pas tout à fait adaptée à ce concept mathématique. Prenons la tâche suivante :

Vous devez trouver le ou les zéros de la fonction sinusoïdale suivante: $y = 2\sin(\frac{x}{2})$

Puisque nous demandons de trouver, à partir de l'équation, les valeurs de x pour lesquelles la fonction est égale à 0 ce qui revient à résoudre l'équation $y = 0$, nous avons associé cette tâche à l'activité de traitement dans le registre ***symbolico-algébrique***. En décortiquant la tâche, nous sommes arrivés à constater qu'il est pratiquement impossible de trouver toutes les valeurs seulement en effectuant des manipulations algébriques (traitement du registre ***symbolico-algébrique***). C'est pourquoi nous avons modifié la classification de cette tâche lors de l'analyse des données. Selon nous, l'activité de traitement est possible avec certains types de fonctions comme la fonction linéaire ou quadratique, mais beaucoup plus difficile avec d'autres comme les fonctions trigonométriques.

⇒ Plusieurs des tâches proposées exigent une bonne connaissance de certaines définitions

Lors de l'analyse des données, nous avons constaté que plusieurs répondants n'ont pas identifié correctement la tâche demandée. Nous sommes arrivés au constat suivant : pour réaliser une certaine tâche, le répondant doit comprendre la signification du vocabulaire propre à ce concept. Prenons l'exemple de la recherche des zéros d'une fonction, l'étudiant doit être en mesure d'associer « zéro d'une fonction » à l'équation $y = 0$ pour réussir la tâche demandée. Si nous avions plutôt demandé de trouver toutes les valeurs de x où la fonction s'annule, alors le vocabulaire employé aurait peut-être permis à certains étudiants d'associer la tâche à l'équation $y = 0$. Dans ce cas, nous croyons que le vocabulaire du mathématicien prête à confusion. Étant donné qu'une fonction mathématique est un objet abstrait qui sert à établir une correspondance entre deux quantités, nous croyons qu'il est important de faire une distinction entre le vocabulaire propre à ce concept mathématique et le vocabulaire plus familier. Par exemple, lorsque que nous proposons une tâche qui demande de trouver le maximum et le minimum d'une fonction, il est important de comprendre que l'objectif de cette tâche est de trouver les valeurs de x pour lesquelles la fonction atteint sa valeur minimale ou maximale. Le vocabulaire du mathématicien n'est pas toujours explicite. C'est pour cette raison que nous proposons d'ajouter un registre plus spécifique que celui de la ***langue naturelle***, le registre ***théorico-discursif***.

II. Classification des répondants

⇒ Classes trop rigides

En observant les résultats de la recherche (section 4.4.2), nous remarquons que la majorité des répondants sont classés dans le *niveau* malgré le fait que certains d'entre eux aient réussi à répondre correctement à plusieurs tâches. Pour appuyer nos propos, nous aimerions présenter les résultats de deux étudiants classés *niveau 1*.

- Étudiant 41 de *SN* a réussi
  - 2 activités de reconnaissance (possibilité de 3 activités de reconnaissance)
  - 2 activités de traitement (possibilité de 2 activités de traitement)
  - 4 activités de conversion => coordonne 2 registres de représentation (possibilité de 8 activités de conversion => coordonne 4 registres de représentation)

- Étudiant 132 de *SN* a réussi
  - 2 activités de reconnaissance (possibilité de 3 activités de reconnaissance)
  - 2 activités de traitement (possibilité de 2 activités de traitement)
  - 5 activités de conversion => coordonne 3 registres de représentation (possibilité de 8 activités de conversion => coordonne 4 registres de représentation)

Puisque ces deux étudiants n'ont pas réussi les trois activités de reconnaissance, ils ont été classés dans le premier niveau. Pourtant, ils ont réussi une bonne partie des activités proposées. À notre avis, l'interdépendance des niveaux de la grille de classification est trop rigide. Par conséquent, nous croyons que nos résultats ne sont pas représentatifs de notre échantillon.

Sous ce constat, nous avons décidé de modifier quelques aspects de la grille de classification de Guzmán, Hitt et Páez (2001). Dans un premier temps, nous croyons qu'il est important de schématiser le réseau interne d'un individu afin d'avoir une idée globale de sa complexité. Ce choix nous permettra d'évaluer le nombre de liens compris dans chaque réseau. Ainsi, nous pourrons classer les répondants selon les trois critères suivants :

1. Réussite de tâches associées aux différentes activités cognitives
2. Nombre de liens contenus dans le réseau d'un individu
3. Nombre de coordinations de registre

Nouvelle grille de classification

Dans le but d'établir des niveaux tenant compte de ces trois critères, nous devons au préalable expliquer comment nous allons nous y prendre pour construire un tel réseau pour les 183 répondants de notre projet. Il est important de rappeler que nous allons utiliser les abréviations du tableau 3.1 (p. 70). Voici les étapes à suivre pour construire ce réseau :

- Activités cognitives appartenant au réseau d'un participant

    1) Chaque activité cognitive sera associée à une abréviation selon le ou les registres en jeu (voir section 3.3.2)

    2) Les activités cognitives réussies seront intégrées au réseau et les autres en seront supprimées. Le nombre maximal d'activités réussies est de 13 : 3 activités de reconnaissance, 2 activités de traitement et 8 activités de conversion.

    Exemple : Si un participant réussit l'activité de reconnaissance du registre ***graphique***, alors son réseau contiendra l'abréviation R_G. Dans le cas contraire, son réseau ne contiendra pas l'abréviation R_G.

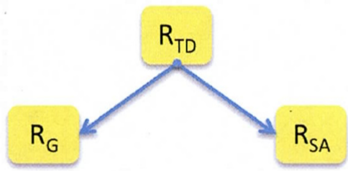
- Liens entre les activités cognitives

    Activités de reconnaissance

    3) L'activité de reconnaissance du registre ***théorico-discursif*** (R_{TD}) peut seulement être liée aux deux autres tâches de reconnaissance. De plus, nous aimerions mentionner que la seule tâche associée à cette activité est celle où l'on demande de définir ce qu'est une fonction (question 14). Dans le cas où le participant n'a réussi que la tâche de reconnaissance du registre ***théorico-discursif***, il n'y aura pas de lien partant de cette activité. Par conséquent, cette activité sera isolée par rapport aux deux autres activités cognitives (traitement et conversion).

Exemple : Réussite seulement de la tâche associée au registre ***théorico-discursif***

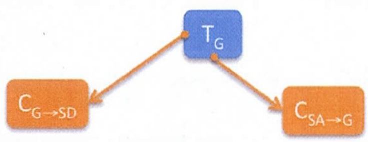
Exemple : Réussite des trois tâches associées à l'activité de reconnaissance



4) L'activité de reconnaissance du registre ***graphique*** sera liée soit à l'activité de traitement dans ce registre, soit à chacune des activités de conversion réussie impliquant le registre ***graphique*** si et seulement si l'activité de traitement n'a pas été réussie.

CAS 1 : Si un individu réussit l'activité de reconnaissance du registre ***graphique*** et qu'il réussit l'activité de traitement du registre ***graphique***.

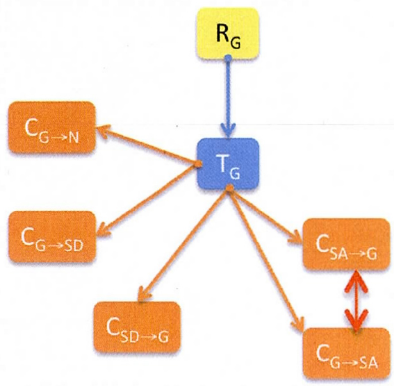
CAS 2 : Si un individu réussit l'activité de reconnaissance du registre ***graphique*** et qu'il ne réussit pas l'activité de traitement du registre ***graphique***, alors nous allons créer un lien entre l'activité de reconnaissance du registre ***graphique*** et chacune des activités de conversion réussies impliquant ce registre de représentation.



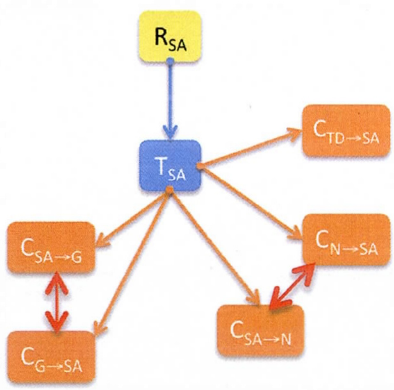
5) Nous procéderons de la même manière pour l'activité de reconnaissance du registre ***symbolico-algébrique***.

Activités de traitement

6) L'activité de traitement du registre ***graphique*** peut être liée à l'activité de reconnaissance de ce registre (voir le point 4, cas 1) et à chacune des activités de conversion réussies impliquant le registre ***graphique***. Étant donné qu'il y a cinq activités de conversion impliquant le registre ***graphique***, il aura un maximum de cinq liens sortant de l'activité de traitement et un lien entrant. Voici tous les liens possibles de l'activité de traitement du registre ***graphique*** :

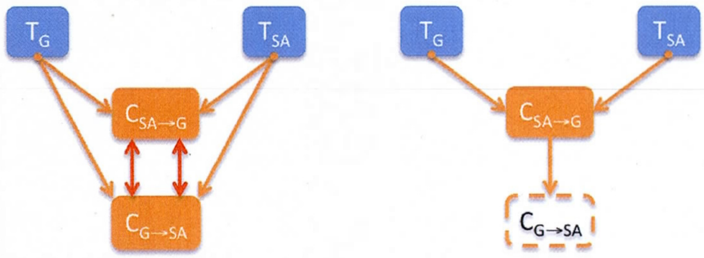


7) Nous procédons de la même manière pour l'activité de traitement du registre ***symbolico-algébrique***. Étant donné qu'il y a cinq activités de conversion impliquant le registre ***symbolico-algébrique***, il aura un maximum de 5 liens sortants de l'activité de traitement et un lien entrant. Voici tous les liens possibles de l'activité de traitement du registre ***symbolico-algébrique*** :



Activités de conversion

8) Certaines activités de conversion seront liées par une flèche bidirectionnelle si et seulement si le participant coordonne les deux registres de représentation impliqués (voir section 3.2.6). Il y a un maximum de quatre flèches bidirectionnelles. Il est important de préciser qu'un participant peut avoir réussi la question 12 (coordination des registres ***symbolico-algébrique*** et ***graphique***) et ne pas avoir réussi les deux activités de conversion des registres ***symbolico-algébrique*** et ***graphique***. Dans ce cas, nous allons apporter la modification suivante à son réseau.



Réseau interne maximum

Le réseau interne maximum contient 18 liens, 3 activités de reconnaissance (en jaune), 2 activités de traitement (en bleu), 8 activités de conversion (en orange) et 4 coordinations (flèches bidirectionnelles rouges).

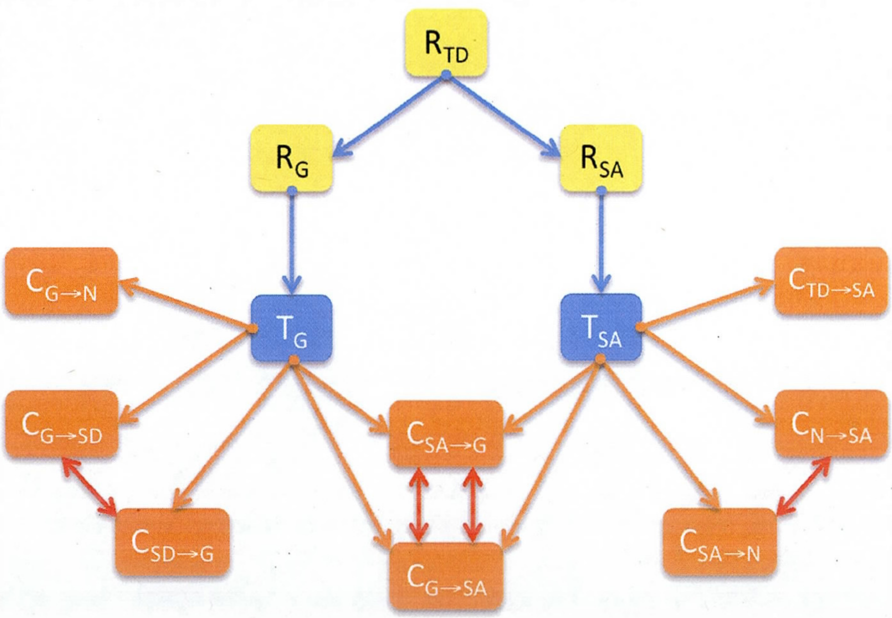


Figure 4.18 Schéma du réseau interne maximum.

Nouveaux critères de classification

Dans le but d'assouplir l'interdépendance des niveaux de classification, nous devions modifier les niveaux de classification de notre grille. Comme nous l'avons mentionné précédemment, le nombre de liens contenus dans le réseau interne est un indicateur de la compréhension des participants. La coordination de plusieurs registres de représentation est également un aspect à ne pas négliger dans l'évaluation de la compréhension. Pour ces raisons, nous avons tenu compte du nombre de liens et du nombre de coordinations pour établir la nouvelle grille de classification. Voici les cinq niveaux de compréhension :

CRITÈRE DE CLASSEMENT

Niveau 5	=>	9 liens et +	et	3 coordinations et +
Niveau 4	=>	9 liens et +	et	1 coordination et +
Niveau 3	=>	7 liens et +		
Niveau 2	=>	4 liens et +		
Niveau 1	=>	3 liens et -		

Comptabilisation des données

Nous devions trouver une manière de comptabiliser le nombre de liens contenus dans chaque réseau interne et ce, pour chaque participant. Nous avons décidé de construire un programme Excel. Voici les quatre composantes de ce programme :

- Feuille 1 → Réussite selon question

  Nous avons construit un tableau qui présente le résultat de chaque participant à chacune des questions. Le 1 indique que l'étudiant a répondu correctement à la question et dans le cas contraire, c'est le 0. De plus, pour chaque question, nous avons ajouté la tâche ou les tâches qui y sont associées. Nous avons également comptabilisé le nombre d'activités réussies pour chaque étudiant.

- Feuille 2 → Réseau et activités cognitives

  Nous présentons les résultats de chaque participant à chacune des activités cognitives. De plus, nous comptabilisons le nombre de coordinations en tenant compte des activités de conversion réussies pour chaque participant (voir section 4.3.4). Finalement, nous avons utilisé ces données pour comptabiliser le nombre de liens contenus dans chaque réseau interne des participants.

- Feuille 3 → Niveau de compréhension

  Nous présentons globalement les résultats pour chaque participant. En utilisant ces données, nous avons pu construire un programme qui nous permet de déterminer le niveau de compréhension de chaque étudiant en accord avec les nouveaux critères exposés.

- Feuille 4 → Distribution de l'échantillon

  Ce programme nous permet de comptabiliser le nombre d'étudiants selon leur niveau de compréhension.

4.4.4 Nouveaux résultats de la recherche

À la suite des modifications apportées principalement à la grille de classification, nous avons obtenu des résultats légèrement différents de ceux présentés à la section 4.4.2.

Tableau 4.32
Tableau comparatif de la répartition des 183 étudiants de l'échantillon selon les deux grilles de classification

	Nouveau classement			Ancien classement		
	Nombre d'étudiants			Nombre d'étudiants		
NIVEAU	Sciences naturelles	Technico-sciences	TOTAL	Sciences naturelles	Technico-sciences	TOTAL
5	3	0	3	0	0	0
4	8	0	8	2	0	2
3	6	0	6	1	0	1
2	28	2	30	8	0	8
1	109	27	136	143	29	172
TOTAL	154	29	183	154	29	183

Tout d'abord, nous remarquons qu'il y a 3 étudiants de *niveau 5* dans le nouveau classement, ce qui n'était pas le cas avec l'ancienne grille. De même, nous constatons qu'il y a une différence de 36 étudiants entre le nombre d'étudiants de *niveau 1* du nouveau classement et de l'ancien classement. Afin de montrer la pertinence du reclassement des participants, nous aimerions revenir sur les cas des étudiants 41 et 132 qui avaient été classés au *niveau 1* malgré leur bonne performance. Avec les nouveaux critères de classification, l'étudiant 41, avec ses 7 liens et une seule coordination, est de *niveau 3* ; tandis que l'étudiant 132, ses 13 liens et ses 3 coordinations, est de *niveau 5*. Voici les schémas qui représentent leurs réseaux internes respectifs.

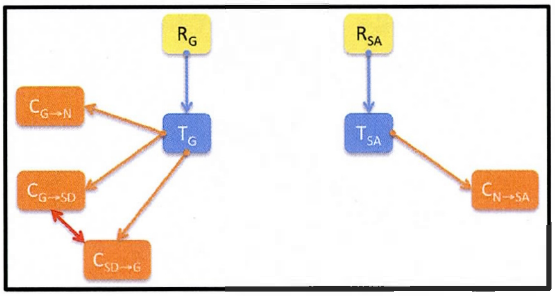


Figure 4.19 Réseau de l'étudiant 41.

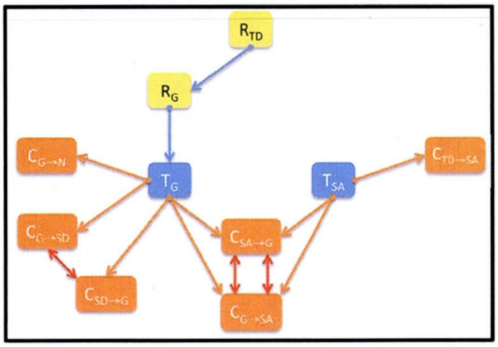


Figure 4.20 Réseau de l'étudiant 132.

En comparant les deux réseaux, nous constatons que celui de droite est plus élaboré et plus complexe que celui de gauche. Nous remarquons que non seulement le réseau de l'étudiant 41 est non connexe, mais encore ce dernier coordonne seulement un registre de représentation comparativement aux 3 coordinations de l'étudiant 132. À notre avis, l'étudiant 132 sera en mesure de mobiliser plus de connaissances pour résoudre une situation-problème que l'étudiant 41. C'est pourquoi le niveau de compréhension de l'étudiant 132 est supérieur à celui de l'étudiant 41. Nous croyons que les modifications apportées à la grille de classification permettent d'évaluer plus précisément le niveau de compréhension du concept de fonction des participants.

CHAPITRE V

CONCLUSION

5.1 Résumé de la démarche

Notre intérêt pour la transition entre les ordres secondaire et collégial en mathématique nous a amenés à nous intéresser au concept de fonction, puisque le contenu du cours de calcul différentiel du collégial repose principalement sur cette notion. De plus, le nouveau programme de formation implanté par le MELS nous a poussés à nous interroger sur la préparation des élèves poursuivant des études postsecondaires en *Sciences de la nature*. Par ailleurs, nos lectures nous ont permis de constater que l'apprentissage du calcul différentiel et intégral n'est pas de tout repos pour les apprenants. Pour ces motifs, nous nous sommes questionnés davantage à ce sujet dans le but de préciser notre objectif de recherchequi est d'évaluer le niveau de compréhension des étudiants issus du renouveau pédagogique à l'égard du concept de fonction. Nos trois questions de recherche sont les suivantes:

- Est-ce que les étudiants du renouveau pédagogique ont une « bonne » compréhension du.concept de fonction ?
- Y a-t-il un écart entre les élèves issus de la séquence d'enseignement *Sciences naturelles* et ceux de *Technico-sciences* ?
- Est-ce que le nouveau programme favorisera l'arrimage entre les deux ordres d'enseignement ?

Nous avons alors décidé de répondre à ces questions en dirigeant notre recherche vers l'évaluation des élèves issus du renouveau pédagogique à l'égard du concept de fonction. Pour ce faire, nous avons choisi de construire un questionnaire qui permettrait de recueillir des informations pertinentes sur la compréhension de ces élèves. La conception du questionnaire repose principalement sur les recherches de Duval et de Guzmán, Hitt et Páez (*voir* chapitre II). Nous avons tenté d'approfondir et d'adapter sa théorie des représentations au concept de fonction. Bien entendu, la coordination de plusieurs registres de représentation est l'élément principal de sa théorie. En conséquence, un individu qui est en mesure d'effectuer des allers-retours entre les différents registres comprend bien l'objet mathématique à l'étude. Cette appropriation nous a permis de définir ce qu'est une « bonne » compréhension de la notion de fonction dans une théorie des représentations.

Dans le but d'évaluer la compréhension des répondants, il nous fallait d'une part établir les critères de correction pour chacune des tâches proposées dans le questionnaire, et d'autre part construire un outil méthodologique permettant la classification de tous les participants. À cette fin, nous nous sommes appuyés sur les travaux de Guzmán, Hitt et Páez sur ce que signifie « être compétent » dans une théorie des représentations (*voir* chapitre III). Cette grille nous a permis d'effectuer une première classification des 183 étudiants. À ce moment, nous avons constaté que les niveaux de cette grille étaient trop rigides, et peut-être pas pleinement représentatifs. Nous avons alors modifié les critères de classification qui nous a donné de nouveaux résultats sur la compréhension des étudiants à l'égard du concept de fonction (*voir* section 4.4.4).

5.2 Réponses aux questions de recherches

Est-ce que les étudiants du renouveau pédagogique ont une « bonne » compréhension du concept de fonction ?

À l'issue de ce travail, nous constatons que la majorité des étudiants de l'échantillon n'a vraisemblablement pas un réseau interne très élaboré, c'est-à-dire que la plupart réussissent quelques tâches du questionnaire sans pour autant avoir construit de liens opérants entre les représentations sémiotiques du concept de fonction. Par ailleurs, notre étude montre qu'il y a peu d'étudiants qui coordonne au moins deux registres de représentation, ce qui veut dire qu'ils ont une compréhension relativement faible du concept. De plus, nous remarquons que seulement 11 étudiants coordonnent trois registres ou plus. À notre avis, la coordination de plusieurs registres de représentation est essentielle dans la compréhension d'un concept mathématique. Quoi qu'il en soit, nous arrivons au constat suivant : la grande majorité des étudiants de notre échantillon n'a pas une « bonne » compréhension de certaines fonctions, entre autres les fonctions trigonométriques et les fonctions définies par partie. Les résultats auraient peut-être été différents avec d'autres types de fonctions.

Y a-t-il un écart entre les élèves issus de la séquence d'enseignement *Sciences naturelles* et ceux issus de *Technico-sciences*?

Selon les résultats de notre étude, il est difficile d'affirmer avec certitude que les élèves de la séquence *Sciences naturelles* ont un niveau de compréhension plus élevé que ceux de *Technico-sciences*, car les deux échantillons ne sont pas de la même taille. Cependant, nous constatons que 27 étudiants sur 29 du profil *Technico-sciences* sont classés de *niveau 1* comparativement à 109 étudiants sur 154 en *Sciences naturelles*. Selon nous, les élèves de la séquence *Sciences naturelles* ont construit plus de liens entre les différentes représentations d'une fonction, c'est-à-dire qu'ils ont un réseau interne plus élaboré que ceux de *Technico-sciences*. Ainsi, nous croyons que les élèves de la séquence *Technico-sciences* rencontreront plus de difficultés lors de l'apprentissage du calcul différentiel et intégral que ceux de *Sciences naturelles*.

Est-ce que le nouveau programme favorisera l'arrimage entre les deux ordres d'enseignement ?

À partir de notre recherche, il nous est difficile de répondre à cette question puisqu'il y a plusieurs facteurs qui influenceront l'arrimage entre les deux ordres d'enseignement, entre autres, la formation des maîtres au secondaire, les manuels scolaires et l'approche pédagogique préconisé dans chacun des deux milieux. Néanmoins, lorsque nous survolons le nouveau programme de formation en mathématiques, nous croyons que les changements apportés peuvent s'avérer bénéfique pour l'arrimage secondaire-collégial, mais notre recherche peut laisser présager qu'au contraire, l'arrimage sera moins bon.

5.3 L'enseignement des mathématiques

Les sciences et les mathématiques ont une place de premier plan dans le développement des sociétés modernes. Par conséquent, l'enseignement de ces matières est crucial afin de développer des citoyens compétents au regard éclairé quant au jugement qu'ils portent sur la myriade de situations fonctionnelles formant notre monde, notre réalité. Dans ce sens, les rôles d'enseignant et d'apprenant, ainsi que leur relation mutuelle, devront favoriser cet essor. Ainsi, le rôle de l'enseignant est, selon nous, de promouvoir, par des approches pédagogiques pertinentes, l'élaboration par l'élève d'un réseau de compréhension. Le rôle de l'étudiant est essentiellement de s'adapter à un apprentissage non plus seulement linéaire, mais dorénavant *réseautique*.

Pour ce faire, nous croyons fermement qu'un programme d'enseignement visant à diplômer des étudiants prêts à affronter les défis contemporains, en ce qui a trait aux mathématiques spécifiquement, devra donner à ces étudiants une compréhension fine des différentes activités cognitives et registres de représentation liés au concept de fonction.

Dans un premier temps, en ce qui concerne les activités cognitives, nous aimerions faire une mise en garde: *l'activité de traitement ne s'associe pas à n'importe quel concept mathématique* du moins, en ce qui concerne les fonctions, sur certaines des formes du concept comme les fonctions trigonométriques (voir section 4.4.3). De plus, il faudrait peut-être s'intéresser aux opérations mentales qui, avant même toutes activités de traitement, rendent celles-ci possibles ou non. Par exemple, dans la recherche des zéros d'une fonction, l'élève doit d'une part, associer l'objectif de la question avec l'équation $y = 0$, d'autre part, la subsitution de la valeur de la variable y dans l'équation de la fonction.

Dans un deuxième temps, en ce qui concerne les registres de représentation, nous aimerions apporter une précision relative au registre de la ***langue naturelle***: *le registre de la **langue naturelle** permet des constructions linguistiques qui, la faisant varier d'une forme familière à une forme abstraite, la détachent de plus en plus des objets physiques. Conséquemment, une subdivision du registre proposant la distinction entre d'une part, un vocabulaire familier et, d'autre part, un vocabulaire théorique, nous semble nécessaire. Cette dernière se nommera registre **théorico-discursif**.*

5.4 Limites de la recherche

Bien sûr, cette recherche comporte certaines limites. Nous avons identifié trois aspects importants qui ont pu influencer les résultats de cette recherche : le temps alloué pour répondre au questionnaire, la taille de l'échantillon des étudiants profil *Technico-sciences* et l'ambiguïté de certaines questions et de certains graphiques.

Temps alloué

Puisque le temps alloué aux étudiants pour répondre au questionnaire était d'une heure, nous avons dû faire des choix judicieux concernant les tâches proposées pour atteindre notre objectif de recherche. Le questionnaire comportait 14 questions dont plusieurs étaient divisées en sous-questions (26 tâches). Les étudiants avaient environ 2 à 3 minutes par tâche et ce, pour les 26 tâches du questionnaire. Nous croyons que cette contrainte de temps a peut-être influencé certains résultats. Si nous avions eu plus de temps, nous aurions pu à la fois ajouter des tâches et accorder plus de temps de réflexion pour y répondre, ce qui aurait sans doute amélioré notre recherche.

Taille de l'échantillon des étudiants de profil *Technico-sciences*

Nous sommes conscients que la taille de l'échantillon des étudiants de la séquence *Technico-sciences* est relativement petite par rapport à celle de l'échantillon des étudiants de la séquence *Sciences naturelles*. Il aurait été intéressant de pouvoir augmenter la taille de l'échantillon des étudiants de la séquence *Technico-sciences* pour préciser si les étudiants de la séquence *Sciences naturelles* ont une meilleure compréhension du concept de fonction que les étudiants de la séquence *Technico-sciences*.

Questionnaire

Après l'analyse des questionnaires, nous avons pris conscience que certaines tâches pouvaient porter à confusion, c'est-à-dire qu'elles n'étaient peut-être pas assez précises. De plus, l'impression de certains graphiques ne semblait pas claire, comme le point ouvert de la question 1 d (voir section 4.2.1). Nous croyons que le questionnaire peut avoir influencé les résultats de la recherche.

5.5 Questionnements et prolongements

Bien qu'intéressant et fertile en résultats, le présent mémoire appelle à une poursuite des questionnements quant aux orientations de nos programmes d'enseignement, à la valorisation de la connaissance dans notre société et à l'évaluation de ce que nous pourrions nommer la « bonne » compréhension. Ainsi, une éventuelle recherche plus poussée, partant des bases que nous venons d'établir, nous semble aller de soi :

- Pouvons-nous améliorer notre outil d'analyse, c'est-à-dire élaborer un questionnaire apte à recueillir des informations plus nombreuses et plus précises ?
- Pouvons-nous ajuster, sur la base théorique des réseaux mentaux, la grille de classification et les critères qu'elle propose ?
- Serait-il pertinent d'étendre notre étude à l'évaluation de la compréhension d'autres concepts mathématiques ?
- Pouvons-nous même penser à évaluer directement les enseignants quant à leur compréhension de différents concepts mathématiques ?
- Finalement, une poursuite intelligente de cette étude ne devrait-elle pas remonter à la source même de l'apprentissage mathématique, la didactique des mathématiques, et questionner les formations (universitaire, continue...) mêmes des enseignants ?

APPENDICE A

QUESTIONNAIRE D'EXPÉRIMENTATION

A.1 Questionnaire d'expérimentation 143

QUESTIONNAIRE

Évaluation du niveau de compréhension du concept de fonction

En quelle année avez-vous terminé votre 5e secondaire? ______________
(mois/année)

Quelle est le nom de l'établissement scolaire que vous avez fréquenté en 5e secondaire?

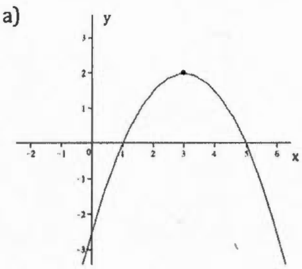
____

Vous devez encercler la séquence d'enseignement que vous avez choisie en 5e secondaire selon l'année d'obtention du diplôme d'études secondaire (DES).

Finissant en juin 2010 → *TECHNICO-SCIENCES* *ou* *SCIENCES NATURELLES*
Finissant avant juin 2010 → *MATHÉMATIQUE 526* *ou* *MATHÉMATIQUE 536*

QUESTION 1- Lesquels, parmi les graphiques suivants, représentent des ***fonctions*** de variable indépendante *x*? Vous devez donner une justification quand le graphique ne représente pas une fonction.

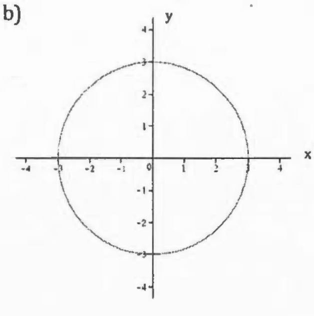
a)



☐ Oui ☐ Non

Pourquoi ?

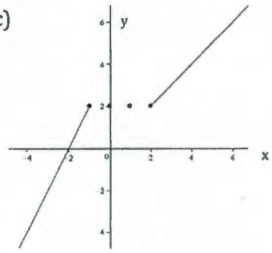
b)



☐ Oui ☐ Non

Pourquoi ?

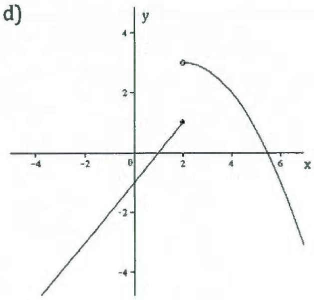
c)



☐ Oui ☐ Non

Pourquoi ?

d)



☐ Oui ☐ Non Pourquoi ?

Pourquoi ?

QUESTION 2- Les expressions algébriques suivantes représentent-elles une **fonction** de variable indépendante x? Vous devez donner une justification quand l'expression algébrique ne représente pas une fonction.

a) $x^2 + y^2 = 4$ ☐ Oui ☐ Non

Pourquoi ?

b) $x^2 + 2x - y = 3$ ☐ Oui ☐ Non

Pourquoi ?

c) $f(x) = \begin{cases} x+2 & si\ x < 0 \\ 3 & si\ x \geq 0 \end{cases}$ ☐ Oui ☐ Non

Pourquoi ?

d) $y = \frac{x+5}{x-4}$ ☐ Oui ☐ Non

Pourquoi ?

QUESTION 3- Les deux expressions suivantes représentent-elles la même fonction ?

1) $f(x) = \frac{x+2}{x-5}$ 2) $g(x) = 1 + \frac{7}{x-5}$

☐ Oui ☐ Non

Justification

QUESTION 4- Les deux expressions suivantes représentent-elles la même fonction ?

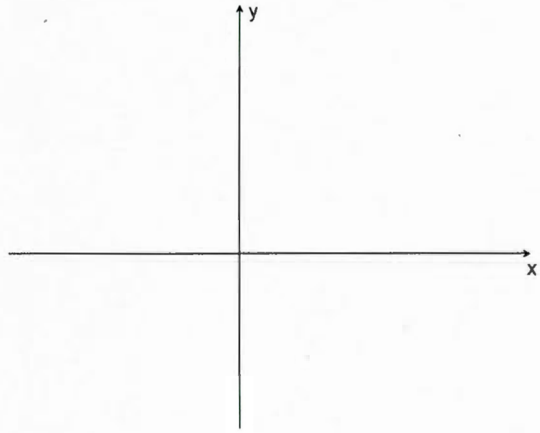
1) $f(x) = x - 3$ 2) $g(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1}$

☐ Oui ☐ Non

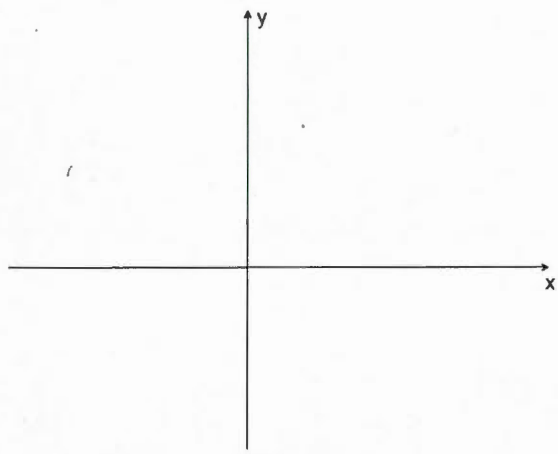
Justification

QUESTION 5- Vous devez esquisser le graphique de chacune des fonctions de variable indépendante x.

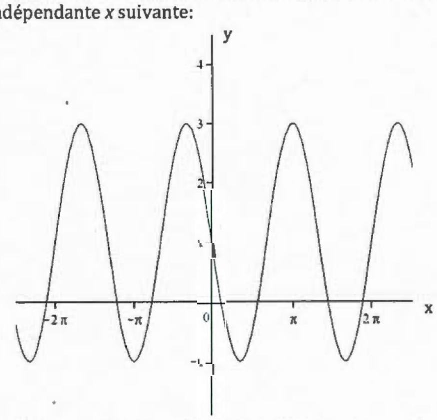
a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$



b) $f(x) = \sqrt{x-1}$



QUESTION 6- À partir de la représentation graphique de la fonction de variable indépendante x suivante:



a) Vous devez indiquer par un crochet ✓ les nombres qui appartiennent au domaine de cette fonction;

☐ 3	☐ π
☐ $-2/3$	☐ $17/16$
☐ 0	☐ $-\pi/2$
☐ -1	☐ 7,327

b) Vous devez indiquer par un crochet ✓ les nombres qui appartiennent à l'ensemble image de cette fonction;

☐ π	☐ $\pi/4$
☐ $-1/2$	☐ $\sqrt{7}$
☐ 5,742	☐ 0
☐ -1	☐ $-\pi/4$

c) Vous devez identifier par un crochet ✓ les couples qui appartiennent à cette fonction.

☐ $(0,1)$	☐ $(3, \pi)$
☐ $(\pi,3)$	☐ $(2\pi/3,-1)$
☐ $(-\pi, -1)$	☐ $(7\pi/3,3)$

QUESTION 7- À partir de la fonction suivante :

$$f: \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$$
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

a) Vous devez indiquer par un crochet ✓ les nombres qui appartiennent au domaine de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

- [ ] 0,765
- [ ] $-7/3$
- [ ] $\sqrt{2}$
- [ ] π
- [ ] $-1,345$
- [ ] $5/6$
- [ ] -6
- [ ] 1

b) Vous devez indiquer par un crochet ✓ les nombres qui appartiennent à l'ensemble image de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

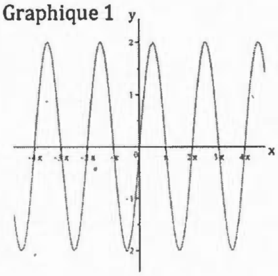
- [ ] $-\pi$
- [ ] 0
- [ ] $3/2$
- [ ] $2,\bar{6}$
- [ ] -2
- [ ] $-\sqrt{3}$
- [ ] $1/6$
- [ ] $-3,67$

c) Vous devez identifier par un crochet ✓ les couples de coordonnées cartésiennes qui appartiennent à la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

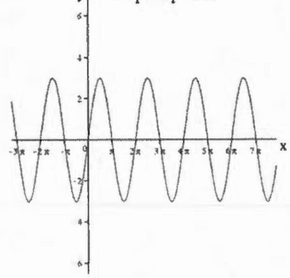
- [ ] $(-2, 3)$
- [ ] $(-1, 0)$
- [ ] $(-6, \sqrt{35})$
- [ ] $(-1, -2)$
- [ ] $(7, 2\sqrt{3})$
- [ ] $(0, -1)$

QUESTION 8- Si possible, associer les graphiques qui représentent la même fonction sinusoïdale. *(Il peut y avoir plusieurs associations)*

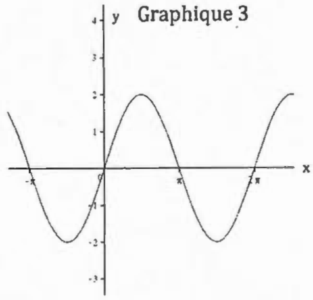
Graphique 1



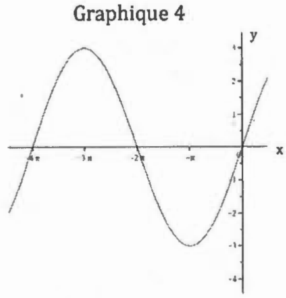
Graphique 2



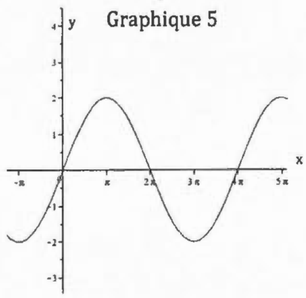
Graphique 3



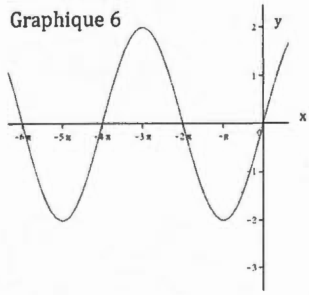
Graphique 4



Graphique 5

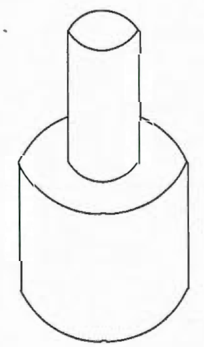


Graphique 6



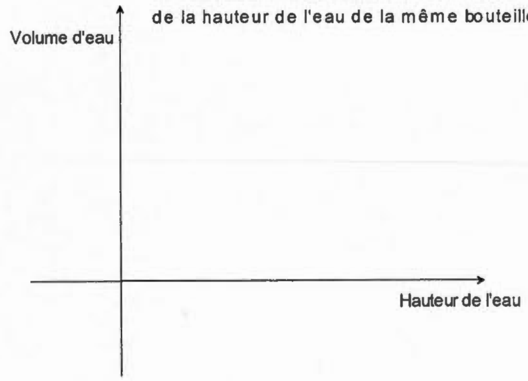
RÉPONSE→______________________________________

QUESTION 9- Nous voulons remplir d'eau la bouteille représentée ci-dessous. Nous nous intéressons à deux grandeurs, le volume d'eau de la bouteille et la hauteur d'eau dans cette même bouteille. Dessiner le graphique du volume d'eau en fonction de la hauteur de l'eau.



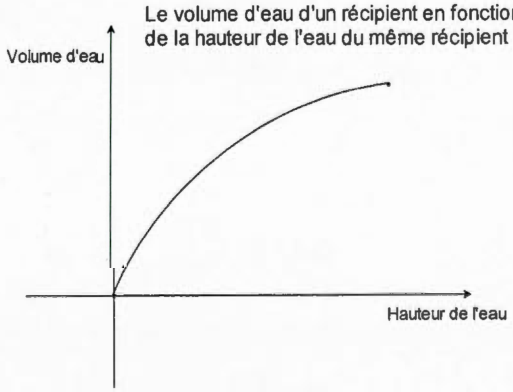
Deux cylindres superposés

Le volume d'eau de la bouteille en fonction de la hauteur de l'eau de la même bouteille



QUESTION 10- Voici le graphique du volume d'eau d'un récipient en fonction de la hauteur de l'eau de ce même récipient dont on ne connaît pas la forme. Sachant que le graphique est le suivant, esquisser la forme que pourrait avoir le récipient.

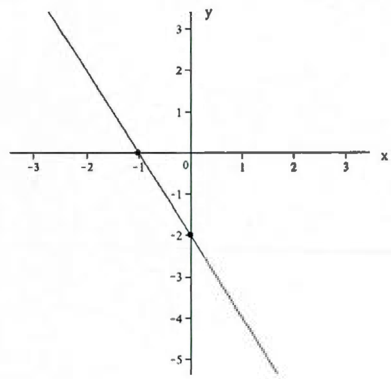
Le volume d'eau d'un récipient en fonction de la hauteur de l'eau du même récipient



Esquisse du récipient

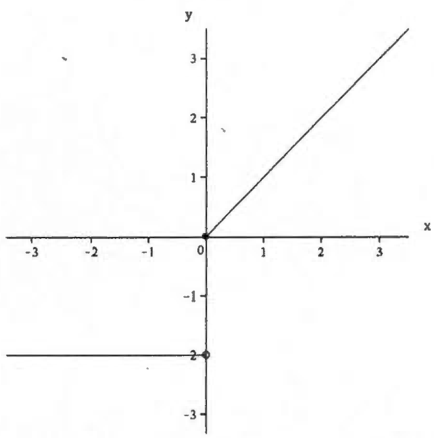
QUESTION 11- Vous devez trouver l'expression algébrique **correspondant** à chacune des représentations graphiques.

a)



Expression algébrique : ____________________

b)



Expression algébrique : ____________________

QUESTION 12- Vous devez trouver le ou les zéros de la fonction sinusoïdale suivante:

$$y = 2\sin(\frac{x}{2})$$

QUESTION 13- À partir de la table de valeurs ci-dessous, vous devez trouver l'expression algébrique associée à cette fonction.

x	f(x)
2	2
4	14
6	34
8	62
10	98
12	142

Démarche

Expression algébrique →____________________________

QUESTION 14- Quelle est la définition d'une fonction?

APPENDICE B

PROGRAMME TYPE EXCEL POUR LA COMPILATION DES DONNÉES

B.1 Fichier *Excel* de compilation de données sur CD 154

RÉFÉRENCES

Charbonneau, Louis. 1987. «Première partie: Fonction : Statisme Grec au dynamisme du début du XVIII^e siècle». *Bulletin AMQ*, mai 1987, p. 5-10.

Charbonneau, Louis. 1987. «Fonction (III): En état de crise, sa personnalité se dévoile». *Bulletin AMQ*, décembre 1987, p. 5-9.

Duval, Raymond. 1988. «GRAPHIQUES ET ÉQUATIONS: L'articulation de deux registres». *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1*, IREM de Strasbourg, p. 235-253.

Duval, Raymond. 1993. «Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée». *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, vol. 5, pp. 37-65.

Dreyfus, Tommy & Eisenberg, Theodore. 1985. «A graphical approach to solving inequalities». *School Science and Mathematics*, 85, 651-662.

Dreyfus, Tommy & Eisenberg, Theodore. 1986. «On visual versus analytical thinking in mathematics». In C. Hoyles, R. Noss, & R Sutherland (Eds.), *Proceedings of the Tenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 153-158). London, U.K: Institute of Education

Dreyfus, Tommy & Eisenberg, Theodore. 1991. «On the Reluctance to Visualize in Mathematics». In *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (Zimmermann W. & Cunningham S. Editors), MAA, no 19.

Dufour Andrée, *Histoire de l'éducation au Québec*, Édition Boréal Express, Cap-Saint-Ignace, Québec, 1997, 123 p.

Groupe de travail *Arrimage secondaire collegial en mathématiques*, Collège Édouard-Montpetit et les Commissions scolaires Marie-Victorin et des Patriotes, Janvier 2008, 12 p.

Guzmán, José, Fernando Hitt et Rosa Paez. 2001. *Que signifie être compétent dans une théorie des représentations des concepts mathématiques?: Actes du Colloque Annuel du Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec* (Montréal, 2001). p. 173-187.

Janvier, Claude. 1987. Representation and Understanding : The notion of function as an example. *In Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (Janvier C. Editor) London: Lawrence Erlbaum Associates, p. 19-26.

Karsenty, Ronnie and Vinner, Shlomo. 1996. «To have or not to have mathematical ability, and what is the question», *Proceedings of the 20th International Conference, Psychology of Mathematics Education,* vol. 3, University of Valencia, Valencia, p. 177–184.

Karsenty, Ronnie and Vinner, Shlomo. 2000. «What do we remember when it's over? Adults recollections of their mathematical experience», *Proceedings of the 24th international Conference, Psychology of Mathematics Education,* vol. 3, Hiroshima University, Hiroshima, p. 119–126.

Karsenty, Ronnie. 2003. «What do adults remember from their high school mathematics? The case of linear function». *Educational Studies in Mathematics,* 51, p. 117-144.

Kleiner, Israel. 1989. «Evolution of the Function Concept: A brief survey». *The College Mathematics Journal,* vol. 20, no 4, p. 282-300.

Kleiner, Israel. 1993. «Functions: Historical and Pedagogical Aspect». *Science & Education 2,* York University, Canada, p. 183-209.

Hitt, Fernando. 1994. «Teachers' Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions». *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 16, no 4, p. 10-20

Hitt, Fernando. 1998. Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. Special Issue: Representations and the Psychology of Mathematics Education (Goldin G. & Janvier C. Editors). *Journal of Mathematical Behavior*. vol. 17, no 1 (in press).

Québec, ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. 2007. *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire, deuxième cycle.* Québec: Les Publication du Québec, chapitre 1-2 et 6.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. *Répartition des programmes d'études dans l'ensemble des établissements d'enseignement collégial* [**en ligne**]. Disponible sur : <http://www.mels.gouv.qc.ca/ens-sup/ens-coll/Cahiers/treparti.asp >. (consulté le 18.07.2009).

Ponte, João Pedro. 1990. «The history of the concept of function and somme educational implications». *The Mathematics Educator,* no 3, p. 3-9.

Tétu de Labsade, Françoise, *Le Québec un pays une culture*, Édition du Boréal, Cap-Saint-Ignace, Québec, 1995, 458 p.

Vinner, Shlomo. 1989. «The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students». *Focus: On Learnig Problems in Mathematics*, vol. 11, p. 149-156.

Youschkevitch, Adolf P. 1976. The concept of function up to the middle of 19th century ». *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 16, p. 36-85.