Boutat, D., Busawon, K., Guillot, J. C. and Benali, A. (2010) 'Quelques commentaires sur la linéarisation de l'erreur de l'observation multi-sorties', CIFA 2010: Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique. Domaine de l'Asne, Nancy, France, 2-4 June.

This paper was originally presented at a conference arranged by the Conférence Internationale Francophone d'Automatique:

http://cifa2010.cran.uhp-nancy.fr/

Quelques commentaires sur la linéarisation de l'erreur de l'observation multi-sorties

Driss Boutat[1], Krishna Busawon[2], Jean-Claude Guillot[3] et Abderraouf Benali[1]

[1]ENSI de Bourges,
Institut PRISME
88, Boulevard Lahitolle 18020 Bourges Cedex, France
driss.boutat@ensi-bourges.fr

[2] Northumbria University, School of Engineering and Information Sciences,
Newcastle upon Tyne NE1 8ST, U.K.
krishna.busawon@northumbria.ac.uk

[3] Faculté des sciences, Université d'Orléans,
Rue Gaston Berger, BP 4043, 18028 Bourges cedex. France
jean-claude.guillot@univ-orleans.fr

Résumé— **Ce papier donne quelques idées et commentaires sur les conditions géométriques qui permettent de dire si un système non linéaire multi sorties possède, à un changement de coordonnées près, une erreur d'observation linéaire. Plus précisément, nous allons concentrer notre point de vu sur les travaux de Krener et Respondek d'une part et ceux de Xia et Gao d'autre part. Nous allons aussi commenter le contre exemple de Xia et Gao. Puis, nous allons présenter l'algorithme de la linéarisation de l'erreur de l'observation par extension dynamique.**

Mots-clés— **Systèmes non linéaires, Erreur d'observation linéaire, Multi sorties, Immersion.**

I. Introduction

Il est établi que le problème de linéarisation est un problème résolu. Il consiste en la mise sous forme normale de Brunovsky commandable, autour d'un point de fonctionnement d'un système dynamique multi entrées, via un changement de coordonnées et un retour d'état statique ou dynamique ([16], [18], [20], [21],[24], [25], [26], [27], [29],[30], [31], [27]). En outre, une généralisation de cette linéairisation se trouve dans le concept de la platitude ([22], [23], [4],[36], [35], [34], [28]).
Cependant, jusqu'à nos jours, le problème de la mise sous forme de Brunovsky observable modulo une injection de sortie est un problème non entièrement résolu. Ce problème connu aussi sous le nom de forme canonique d'observabilité non linéaire (FCON) a rencontré une discontinuité des idées lors de la recherche d'une solution complète.

Plus précisément, il s'agit de caractériser les systèmes non linéaires écrit sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$
$$y = h(x), \qquad y \in \mathbb{R}^m \tag{2}$$

Ces systèmes sont transformable via un changement de coordonnées $z = \phi(x)$ sous la forme canonique d'observabilité non linéaire suivante (FCON) :

$$\dot{z} = (\phi_* f)(z) = Az + \beta(\bar{y}) \tag{3}$$
$$\bar{y} = \Gamma(y) = Cz \tag{4}$$

où $z \in \mathbb{R}^n$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, A et C sont les formes de Brunovsky ou companion d'observablité , $\Gamma(y)$ est un difféomorphisme (local) sur les sorties et $(\phi_* f)(z) = d\phi(\phi^{-1}(z)).f(\phi^{-1}(z))$. Sous la forme (3)-(4) nous pouvons appliquer l'observateur robuste suivant :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \beta(\bar{y}) + (\bar{y} - \hat{\bar{y}}) \tag{5}$$

de sorte que la dynamique de l'erreur de l'observation $e = z - \hat{z}$ soit linéaire :

$$\dot{e} = (A - KC)e. \tag{6}$$

Grâce à cette dernière équation le problème de la mise sous forme FCON s'appelle aussi le problème de la linéarisation de l'erreur d'observation.
En 1983 dans ([10]), la forme (3)-(4) a été introduite et traité par Krener et Isodori pour les systèmes **mono sortie** avec $\Gamma = Id$ c'est-à-dire en gardant la même sortie. Les auteurs ont donné des conditions nécessaires et suffisantes que doit satisfaire un système dynamique non linéaire mono sortie pour pourvoir le mettre, à l'aide d'un changement de coordonnées sous la forme FCON. Même si la classe des systèmes non linéaires concernée par ces conditions est petite, ce résultat a trouvé plusieurs applications en automatique, en électronique, en électrotechnique et en robotique. A l'époque[1] ce résultat constituait l'un des concepets de la théorie de l'observation qui permettait d'appliquer un observateur robuste pour les systèmes non linéaires (observateur de Leunberger [38], [39]).

En 1985 dans [11], Krener et Respondek ont traité le problème des systèmes multi-sorties sous une forme plus générale que celle présentée dans (3)-(4). Comme nous pouvons le constater ce travail a apporté plus qu'une généralisation des formes mono-sortie aux formes multi-sorties. En effet, il a mis en évidence le fait d'avoir une erreur d'observation linéaire même avec changement (un

[1]On ne discutera pas ici les travaux sur les grands gains introduit par Bornard, Gautier et Hammouri (pour d'autres références voir [40], [41]). Nous ne discuterons pas aussi les méthodes de transformation directes introduites par Glumineau, Moog, Plestan, Lopez (voir [42], [44], [49])

difféomorphisme) sur les sorties : $\Gamma \neq Id$.
Néanmoins, en 1987 ce travail a connu une contre "publicité" avec l'apparition du travail ([15]) de Xia et Gao sur les formes FCON. Ce dernier a en effet mis en évidence un manque dans les conditions suffisantes énoncées dans le premier mais avec $\Gamma = id$ (voir aussi [47], [9], [33]) c'est-à-dire sans faire allusion au cas du difféomorphisme sur les sorties qui est une hypothèse fondamentale dans le développement des formes FCON.

Nous pensons que ce fut peut être le tournant dans la recherche sur les formes FCON. En effet, depuis le papier ([15]) la recherche sur les formes (3)-(4) a pris deux autres directions. L'une s'intéressait aux formes dépendantes des sorties ce qui signifie que la matrice A dans (3)-(4) dépend des sorties y ([48], [45], [46]). L'autre direction est basée sur l'idée de l'immersion introduite en 1983 par Fliess et Kupka ([3]). Il s'agit de caractériser les systèmes non linéaires qui peuvent se linéariser (sans terme d'injection de sortie) dans un espace d'état de dimension plus grand que celui où le système dynamique original est défini.

En 2004 l'idée de l'immersion est reprise en la mixant avec l'idée de l'injection de sortie. Plus précisément, il s'agit de caractériser les systèmes dynamiques (1)-(2) que s'ils sont augmentés d'une dynamique auxiliaire de type $\dot{w} = \eta(w, y)$ qui ne dépendent que des sorties y et de nouvelles variables $w \in \mathbb{R}^d$, peuvent être transformés sous la forme FCON étendue (FCONE) (see [2], [1], [8], [5]). De sorte qu'il existe un difféomorphisme $z = \phi(x, w)$ sur l'espace étendu $\in \mathbb{R}^{n+d}$ de coordonnées (x, w) qui donne une dynamique sous la forme :

$$\dot{z} = Az + \beta(y, w) \tag{7}$$

où $z = (z_1, .., z_{n+d})^T \in \mathbb{R}^{n+d}$, et A et C sont les matrices companion observable $(n+d)\times(n+d)$ et $1\times(n+d)$ et w les variables auxiliaires qui avec les sorties y sont considérées comme des nouvelles sorties du système (7).

Ce papier va reprendre le contre exemple de Xia et Gao et montrer qu'avec une bonne lecture du papier de Kerner et Respondek permet de voir que, fondamentalement, il en ait pas un. Puis, montrer comment ce contre exemple a modifié la manière de résoudre le problème de la mise sous forme FNOC en omettant l'étape fondamentale des difféomorphismes sur les sorties.
Nous allons aussi donner l'algorithme de la mise sous forme étendue FNOCE.

Le paragraphe qui suit sera consacré à introduire les outils nécessaires à la comprehension de ce papier. Il posera aussi le problème de la mise sous forme FCON . Le paragraphe 3 sera dédié aux commentaires sur le contre exemple de Xia et Gao. Le paragraphe 4 présentera l'algorithme de la méthode dites de la mise sous forme canonique d'observabilité non linéaire étendue où en d'autre terme l'immersion.

A. Notations, définitions et hypothèses

Cette section est dédiée aux notations, aux hypothèses et un résultat fondamental qui permet une bonne analyse du problème des formes FCON traitées dans ce papier.
On considère un système dynamique non linéaire décrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) & (8)\\ y &= h(x) & (9) \end{aligned}$$

où $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $h : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Sans perte de généralité, on suppose que $0 \in \mathcal{X}$ et que $f(0) = 0$ et $h(0) = 0$. En outre, on suppose que les composantes $y_1 = h_1$, ..., $y_m = h_m$ de la sortie h sont indépendantes.

On notera par $r_1, ..., r_m$ les indices d'observabilité de la paire $(f(x), h(x))$; c'est-à-dire que $(r_1, ..., r_m)$ est un m-uplet d'entiers donnés par : r_i =card$\{m_j \geq i,\ j \geq 0\}$ avec $m_j = rang(D_j) - rang(D_{j-1})$ où D_k =Eng$\left\{dL_f^j h_i\,;\, 1 \leq i \leq m,\, 0 \leq j \leq k\right\}$ et $m_0 = m =$ rang(D_0).

Tout au long de ce travail nous considérerons les hypothèses suivantes :

Hypothèses 1 : H1) les indices d'observabilité $(r_i)_{1\leq i\leq m}$ du système dynamique (8-9) sont constants sur $\mathcal{X}$.

H2) La paire (f, h) satisfait la condition du rang d'observabilité. Plus précisément , le rang de la codistribution

$$\Delta = \text{span}\left\{dL_f^{k-1} h_j\,;\, j = 1, ..., m,\, k = 1, ..., r_j\right\} \tag{10}$$

est égal à $n = \sum_{i=1}^m r_i$.
En posant :

$$\theta_{j,k} = dL_f^{k-1} h_j \tag{11}$$

On peut définir la famille des champs de vecteurs suivants $(\tau_{i,1})_{1\leq i\leq m}$ tels que :

$$\begin{aligned} \theta_{i,r_i}(\tau_{i,1}) &= 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq m & (12)\\ \theta_{i,k}(\tau_{i,1}) &= 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq r_i - 1 & (13)\\ \theta_{j,k}(\tau_{i,1}) &= 0 \text{ pour } j < i \text{ et } 1 \leq k \leq r_i & (14)\\ \theta_{j,k}(\tau_{i,1}) &= 0 \text{ pour } j > i \text{ et} 1 \leq k \leq r_j. & (15) \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse du rang d'observabilité H2), la famille de champs de vecteurs $(\tau_{i,1})_{1\leq i\leq m}$ donnée ci-dessus par les équations (12-15), fournit un repère, $\tau = (\tau_{i,j}\ ;\ 1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq r_i)$ du fibré tangent $T\mathcal{X}$ de $\mathcal{X}$, où

$$\tau_{i,k} = -\text{ad}_f \tau_{i,k-1} \text{ pour } 1 \leq i \leq m \text{ et } 2 \leq k \leq r_i. \tag{16}$$

Pour énoncer un résultat utile pour le reste de ce papier nous allons considerer pour $1 \leq j, i \leq m$ et $1 \leq k \leq r_j, 1 \leq l \leq r_i$ les matrices suivantes :

$$\Lambda = \theta\tau = \theta_{j,k}(\tau_{i,l})$$

$$= \begin{pmatrix} \theta_{1,1}(\tau_{1,1}) & \cdots & \theta_{1,1}(\tau_{1,r_1}) & \theta_{1,1}(\tau_{2,1}) & \cdots & \theta_{1,1}(\tau_{m,r_m})\\ \theta_{1,2}(\tau_{1,2}) & \cdots & \theta_{2,1}(\tau_{1,r_1}) & \theta_{2,1}(\tau_{2,1}) & \cdots & \theta_{2,1}(\tau_{m,r_m})\\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ \theta_{1,r_1}(\tau_{1,1}) & \cdots & \theta_{1,r_1}(\tau_{1,r_1}) & \theta_{1,r_1}(\tau_{2,1}) & \cdot\cdot & \theta_{1,r_1}(\tau_{m,r_m})\\ \theta_{2,r_1}(\tau_{1,1}) & \cdots & \theta_{2,r_1}(\tau_{1,r_1}) & \theta_{2,r_1}(\tau_{2,1}) & \cdots & \theta_{2,r_1}(\tau_{m,r_m})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \theta_{m,r_m}(\tau_{1,1}) & \cdots & \theta_{m,r_m}(\tau_{1,r_1}) & \theta_{m,r_m}(\tau_{2,1}) & \cdots & \theta_{m,r_m}(\tau_{m,r_m}) \end{pmatrix}$$

Grâce à la condition du rang d'observabilité cette matrice est inversible. Il est important de noter que cette matrice contient des sous matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \theta_{i,1}(\tau_{i,1}) & \theta_{i,1}(\tau_{i,2}) & \cdots & \theta_{i,1}(\tau_{i,r_i})\\ \theta_{i,2}(\tau_{i,1}) & \theta_{i,2}(\tau_{i,2}) & \cdots & \theta_{i,2}(\tau_{i,r_i})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \theta_{i,r_i}(\tau_{i,1}) & \theta_{i,r_i}(\tau_{i,2}) & \cdots & \theta_{i,r_i}(\tau_{i,r_i}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & * \\ \dots & 1 & * & \dots \\ 1 & * & * & * \end{pmatrix}$$

Cette forme particulière permet de calculer facilement son inverse. Posons $\Lambda^{-1} = (b_{i,j})$ son inverse et définissons les n-formes différentielles suivantes :

$$\omega = \Lambda^{-1}\theta := (\omega_{i,j}).$$

où pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq r_i$

$$\omega_{i,j} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{r_k} b_{i,s}\theta_k, s$$

La démonstration de ce résultat peut être consultée dans ([6], [7]) :

Lemme 1 : Si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite

i) Les champs de vecteurs du repère τ commutent c'est-à-dire :

$$[\tau_{i,k}, \tau_{j,s}] = 0 \tag{17}$$

pour $1 \leq i, j \leq m$ et $1 \leq k \leq r_i$ et $1 \leq s \leq r_j$

ii) si les formes différentielles $\omega_{i,j}$ sont fermées c'est-à-dire :

$$d\omega_{i,j} \quad = \quad 0 \tag{18}$$

ce qui s'écrit aussi $d\omega = 0$,

alors, il existe un changement de coordonnées qui transforme le système dynamique (8)-(9) sous la forme de m blocs suivants :

$$\dot{z}_{i,j} = A_i z_i + \beta_i(z_{1,r_1}, .., z_{m,r_m}) \tag{19}$$

où $z_i = (z_{i,1}, ..., z_{i,r_i})^T$, la matrice A_i est la matrice compagnon $r_i \times r_i$ $\beta_i = (\beta_{i,1}, ..., \beta_{i,r_i})^T$ est un champ de vecteurs $r_i \times 1$ qui ne dépend que des dernières variables de chaque vecteur z_i pour $1 \leq i \leq m$

les sorties s'écrivent dans les nouvelles coordonnées comme suit :

$$\begin{aligned} y_1 &= z_{1,r_1} & (20) \\ y_i &= z_{i,r_i} + R_i\left(\xi_1, .., \xi_{i-1}\right) & (21) \end{aligned}$$

$$\xi_j = \begin{pmatrix} z_{j,r_j-r_i+1} & \dots & z_{j,r_j} \end{pmatrix}^T, \; 1 \leq j \leq i-1 \tag{22}$$

On note que si $r_{i-1} = r_i$, on pose $\xi_{i-1} = \emptyset$.

Faisons quelques remarques sur le lemme 1 :

Remarques 1 : 1. Les différentielles des nouvelles coordonnées $z_{i,j}$ sont données par :

$$dz_{i,j} = \omega_{i,j}$$

de sorte que le changement de coordonnées dans le lemme 1 est donné par :

$$z_{j,k} = \phi_{j,k}(x) = \int_\gamma \omega_{j,k} \tag{23}$$

pour tout $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq k \leq r_j - 1$, où γ $[0,1] \to \chi$ est une courbe telle que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = x$.

2. Il convient de voir les nouvelles sorties du système (19) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \overline{y}_1 &= z_{1,r_1} = y_1 & (24) \\ \overline{y}_i &= z_{i,r_i} = y_i - R_i\left(\xi_1, .., \xi_{i-1}\right) & (25) \end{aligned}$$

3. Notons aussi que dans la forme (21) de y_i les dérivées y_j pour $j < i$ peuvent être présentes.

4. On pourrait croire que les termes d'injections de sorties β_i et les fonctions R_i sont des objets à rechercher à part. En fait, dès que l'on choisi le repère τ et que ce dernier satisfait aux conditions de commutativité (17) alors la forme du système dynamique ainsi que ses sorties sont données par un seul difféomorphisme à savoir ϕ.

5. Pour avoir un lien direct entre les sorties (sans la présence des dérivées des sorties) et les variables z_{i,r_i} qui apparaissent dans les termes d'injections de sorties β il faut que d'autres conditions dites d'indépendances d'une sortie donnée par rapport aux dérivées des autres sorties. Ces conditions sont les suivantes :

$$dh_i\left(\tau_{j,r_i+k}\right) = 0 \tag{26}$$

pour $2 \leq j < i \leq m$ tels que $r_j - r_i > 1$ et ceci pour tout $1 \leq k \leq r_j - r_i - 1$.

6. La dernière condition (26) est d'une importance primordiale puisqu'elle implique que la $i^{ème}$ sortie y_i ne dépend pas des dérivées $y_j^{(k)}$ $k > 1$ des sorties y_j with $j < i$. Pour $r_j = r_i$ ou $r_j - r_i = 1$ ces conditions sont données par construction des τ_{ij}

Ceci permet de comprendre l'oubli dans l'article de Kerner et Respondek sur l'éventuelle dépendance d'une sortie des dérivées des autres.

Dans ce travail on s'intéresse que système dynamique dont le repère τ vérifie les conditions ci-dessus (26) de non indépendances des dérivées. Par conséquent, sous les conditions de commutativité (17) et les conditions d'indépendances (26) des sorties (20-20)des dérivées d'autres sorties dans le lemme 1 s'écrivent :

$$\begin{aligned} y_1 &= z_{1,r_1} \\ y_i &= z_{i,r_i} + R_i\left(y_1, .., y_{i-1}\right) \end{aligned}$$

De sorte que, les nouvelles sorties dans (24-25) deviennent : $\overline{y}_i = z_{i,r_i} = y_i - R_i\left(y_1, .., y_{i-1}\right)$. Avec ces nouvelles sorties la dynamique (19) supporte un observateur de type (5).

II. Quelques commentaires : Krener-Respondek & Xia-Gao

Cette section est consacrée à deux exemples afin de clarifier l'un des objectifs de ce papier. Elle commence par un exemple de Xia et Gao, puis un exemple de même nature donné par Chaisson et Novotnak ([43]). Puis, ces deux exemples seront formalisés dans un résultat plus général. Elle conclut par un exemple qui expliquera les apports de Xia et Gao.

Exemple 1 : Soit le système dynamique défini sur $X = \mathbb{R}^3$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 \quad \text{et } \dot{x}_3 = x_1 \\ y_1 = x_2 \quad \text{et} \quad y_2 = x_3 \end{array} \right. \tag{27}$$

les 1-forme d'observabilité qui lui sont associées sont :

$$\theta_{1,1} = dx_2, \quad \theta_{1,2} = dx_1 \text{ et } \theta_{2,1} = dx_3$$

les champs de vecteurs qui forment le repère τ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \tau_{1,1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \tau_{1,2} = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \tau_{2,1} &= \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Un calcul simple montre que $[\tau_{i,j}, \tau_{k,s}] = 0$ et comme les indices d'observabilté sont tels que $r_1 - r_2 = 1$ les conditions (26) d'indépendance des dérivées sont automatiquement satisfaites. Alors, on a :

$$dy_2(\tau_{11}) = 0 \text{ et } dy_2(\tau_{12}) = 1.$$

La dernière équation montre que y_2 dépend linéairement de y_1. Par conséquent, il existe un difféomorphisme qui transforme (27) sous une forme FCON. En effet, on considère

$$\begin{aligned} \Lambda \quad &: \; = \theta\tau = (\theta_{i,k}(\tau_{j,l})) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, la différentielle du difféomorphisme est donnée par :

$$\phi_* = \Lambda^{-1}\theta = \begin{pmatrix} -x_2 dx_2 + dx_1 \\ dx_2 \\ -dx_2 + dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dz_{11} \\ dz_{12} \\ dz_{21} \end{pmatrix}$$

D'où $z_{11} = x_1 - \frac{1}{2}x_2^2$, $z_{12} = x_2$ et $z_{21} = x_3 - x_2$ transforme le système dynamique ci-dessus sous la forme suivante :

$$\dot{z}_{1,1} = 0, \quad \dot{z}_{1,2} = z_{1,1} + \frac{1}{2}z_{1,2}^2, \quad \text{et} \quad \dot{z}_{2,1} = 0 \qquad (28)$$

avec les nouvelles sorties suivantes : $\bar{y}_1 = z_{1,2} = y_1$ et $\bar{y}_2 = z_{2,1} = y_2 + y_1$.

On peut donc écrire le système (28-**??**) sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + \beta(\bar{y}) \\ \bar{y} &= Cz \end{aligned}$$

où $z = (z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1})^T$ et

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \beta(\bar{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\bar{y}_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme conséquence immediate, on peut concevoir un observateur qui linéairise l'erreur d'observation du système (28-**??**) comme suit :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \beta(\bar{y}) + K(\bar{y} - \widehat{\bar{y}})$$

Bien sûr si Xia et Gao parlaient de la forme FCON avec $\Gamma = Id$, alors le système (27) ne peut pas se mettre sous cette forme. Par contre, si l'objectif est de linéariser l'erreur de l'observation alors il est atteint avec les résultats de Krener et Respondek.
Donnons un autre exemple pratique qui est dû Chaisson et Novotnak en 1993. Comme on va le voir, cet exemple a la même propriété que celui de Xia et Gao. Le fait que les auteurs ont pu calculer le difféomorphisme sans faire allusion ni au repère τ ni aux conditions de commutativité (26), leur a permet de ne pas faire attention à l'exemple de Xia et Gao et à ses conséquences.

Exemple 2 : On considère la dynamique d'un moteur pas à pas donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 x_3 \sin(N_r x_4) + u_1 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_2 - k_2 x_3 \cos(N_r x_4) + u_2 \\ \dot{x}_3 &= -k_4 x_3 - k_3 x_1 \sin(N_r x_4) - K_3 x_2 \cos(N_r x_4) \\ \dot{x}_4 &= x_3 \end{cases}$$

les sorties sont :

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 \text{ et } y_3 = x_4.$$

où les variables $x_1 = i_a$, $x_2 = i_b$ désignent les courants dans les phases A et B, $x_4 = \theta$, $x_3 = \omega$ désignent respectivement l'angle et l'accélération angulaire et $u_1 = v_1$
$u_2 = v_2$ sont les tensions appliquées aux phases A et B.
Les 1-formes d'observabilité sont données par : $\theta_{1,1} = dx_4$, $\theta_{1,2} = dx_3$, $\theta_{2,1} = dx_2$, $\theta_{3,1} = dx_1$ Les champs de vecteurs qui forment le repère τ sont donnés comme suit :

$$\begin{gathered} \tau_{1,1} = \tfrac{\partial}{\partial x_3}, \\ \tau_{1,2} = \tfrac{\partial}{\partial x_4} + K_2 \sin(N_r x_4)\tfrac{\partial}{\partial x_1} - K_2 \cos(N_r x_4)\tfrac{\partial}{\partial x_2} - K_4 \tfrac{\partial}{\partial x_3}, \\ \tau_{2,1} = \tfrac{\partial}{\partial x_2}, \quad \tau_{3,1} = \tfrac{\partial}{\partial x_1} \end{gathered}$$

Il est facile de voir que les conditions de commutativité $[\tau_{i,j}, \tau_{k,s}] = 0$ sont satisfaites et que les directions de commandes g_s sont indépendantes de $\dot{y}$, car $[\tau_{1,1}, g_s] = 0$.
Maintenant, un calcul direct donne :

$$\Lambda = \theta\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -k_4 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2\cos(N_r x_4) & 1 & 0 \\ 0 & k_2 \sin(N_r x_4) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui fournit la différentielle du difféomorphisme :

$$d\begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{1,2} \\ z_{2,1} \\ z_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 \cos x_4 N_r & 0 & 1 & 0 \\ -k_2 \sin x_4 N_r & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_4 \\ dx_3 \\ dx_2 \\ dx_1 \end{pmatrix}$$

$$d\begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{1,2} \\ z_{2,1} \\ z_{3,1} \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} k_4 x_4 + x_3 \\ x_4 \\ x_2 + k_2 \sin x_4 N_r \\ x_1 + k_2 \cos x_4 N_r \end{pmatrix}$$

D'où, la dynamique sous la forme FCON suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_{1,1} &= -k_3 y_1 \sin(N_r y_3) - K_3 y_2 \cos(N_r y_3) \\ \dot{z}_{1,2} &= z_{1,1} - k_4 y_3 \\ \dot{z}_{2,1} &= -k_1 y_2 + u_2 \\ \dot{z}_{3,1} &= -k_1 y_1 + u_1 \end{cases}$$

Donnons les nouvelles sorties $\overline{y}_3 = y_3 = z_{1,2}$ $\overline{y}_2 = y_2 + \frac{k_2}{N_r}\sin(N_r y_3) = z_{2,1}$ et $\overline{y}_1 = y_1 + \frac{k_2}{N_r}\cos(N_r y_3) = z_{3,1}$
On remarque que les deux dernières sorties dépendent cette fois-ci non linéairement de la première. Notons que la forme compact du système est : $\dot{z} = Az + \beta(y,u)$. Encore une fois, cette exemple possède à un difféomorphisme près une erreur d'observation linéaire. Il serait intéressant de consulter le papier ([43]) pour voir que le calcul de ce difféomorphisme est facile.
Les deux premiers exemples peuvent être formalisés dans le résultat plus général suivant.

Proposition 1 : On suppose que les indices d'observabilité sont tels que $|r_i - r_j| \leq 1$ pour tout $\leq i,j \leq m$, alors les conditions de commutativité (26) sont nécessaires est suffisantes pour que l'erreur du système dynamique soit linéaire.

Remarque 1 : Un cas particulier de la proposition est donné par $r_i = r_j$ pour tout $1 \leq i,j \leq m$. Dans ce cas les conditions du lemme sont suffisantes et nécessaires ($R_i = 0$). Ce résultat est obtenu par Krener et Respondek.

Pour finir cette section, donnons un exemple qui vérifie les conditions de commutativité (26) du lemme mais pas les conditions de l'indépendances. Il reflète ainsi l'un des apports du travail de Xia et Gao.

Exemple 3 : on considère le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,\ \dot{x}_2 = x_1,\ \dot{x}_3 = x_2,\ \dot{x}_4 = x_3 \\ \dot{x}_5 = 0,\ \dot{x}_6 = x_5 + x_3^2 + x_4 x_2 \\ y_1 = x_4 \text{ et } y_2 = x_6 \end{cases}$$

On montre que les conditions du lemme 1 sont satisfaites et qu'il existe un difféomorphisme (par la seule coordonnée $z = x_6 - x_4 x_3$) qui transforme ce système sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,\ \dot{x}_2 = x_1,\ \dot{x}_3 = x_2,\ \dot{x}_4 = x_3 \\ \dot{x}_5 = 0,\ z = x_5 \\ y_1 = x_4 \text{ et } y_2 = z + x_3 x_4 = z + \frac{1}{2}\hat{\dot{y}}_1^2 \end{cases}$$

On voit clairement la présence de la dérivée seconde de la sortie y_1 dans la nouvelle variable de sortie $z = \overline{y}_2 = y_2 - \frac{1}{2}\hat{\dot{y}}_1^2$ ce qui ne permet pas d'adopter l'observateur (5).

Dans un travail intéressant de Noh, Jo & Seo ([2]), les auteurs ont traité l'exemple de Xia et Gao par la méthode de l'immersion. Comme on vient de le montrer il n'est pas nécessaire d'étendre l'espace d'état pour linéairiser l'erreur de l'observation de cet exemple. En outre, leur construction sur cette exemple est un peu artificielle. Ceci n'enlève rien à la qualité de leur travail dans lequel on trouve d'autres exemples intéressants.
Le travail ([2]) fournit des conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir la forme (7). Ces conditions sont basées sur un calcul de codistrubtions, qui est un prolongement des conditions de Xia et Gao à l'espace étendu. Cependant, comme les auteurs le précisent l'algorithme proposé est difficile à mettre en oeuvre et comme nous l'avons déjà signalé il ne prend pas en compte l'étape de l'éventuelle linéarisation de l'erreur par un difféomorphisme sur les sorties. Dans la section qui suit nous allons exposer cette étape.

A. Difféomorphisme sur les sorties

Cette section présente les conditions nécessaires et suffisantes qui permettent de savoir si un système non linéaire peut se mettre sous la forme FCON.
Sous la condition d'indépendance des sorties et de ses dérivées, le lemme introduit déjà la notion du difféomorphisme sur les sorties avec une écriture particulière $\overline{y_i} = z_{i,r_i} = y_i + R(y1, ..., y_{i-1})$.
Par contre, si les conditions du lemme ne sont pas satisfaites : certaines conditions de commutativité (26) ne sont pas vérifies, alors on doit vérifier si elles peuvent éventuellement être satisfaites en considérant un nouveau repère τ^1 en posant pour tout $1 \leq i \leq m$:

$$\tau_{i,1}^1 = l_i(y_1, ..., y_i)\tau_{i,1} \tag{29}$$

où $l(y_1, ..., y_i)$ sont des fonctions des sorties non nulles. Puis, on définit le reste des champs de vecteurs de τ^1 par induction comme suit :

$$\tau_{i,j}^1 = -ad_f \tau_{i,j-1} \tag{30}$$

pour tout $1 \leq i \leq m$ et $2 \leq j \leq r_i$.

Les développements détaillés du résultat qui suit peuvent être consultés dans ([7]). Une autre version de ce résultat se trouve dans le papier qui a introduit pour la première fois la notion de difféomorphisme sur les sorties ([11]).

Théorème 1 : il existe un difféomorphisme qui transforme le système dynamique sous la forme FCON si et seulement si il existe des fonctions $(l_i)_{1 \leq 1 \leq m}$ telles que les champs de vecteurs du nouveau repère τ^1 satisfont les conditions de commutativité.

Remarques 2 : 1. La structure triangulaire des fonctions l_i est imposée par la construction des premières éléments $\tau_{1,i}$. Mais il est facile de traiter le problème d'une manière plus générale.

2. Les fonctions l_i sont déterminées en imposant les conditions de commutativité.

3. Il existe un lien entre les composantes du difféomorphisme $\Gamma = (\Gamma_i)_{1 \leq i \leq m}$ et les fonctions l_i données par :

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial y_i} = \frac{1}{l_i}. \tag{31}$$

4. Comme nous l'avons signalé dans la remarque, le difféomorphisme Γ sur les sorties est une partie du difféomorphisme général $z = \phi$ dont la différentielle est donnée par :

$$d\phi = \Lambda_1^{-1}\theta \tag{32}$$

où $\Lambda_1 = \theta(\tau_1)$ est l'évaluation de θ sur le nouveau repère τ^1.
Donnons un exemple simple pour illustrer le théorème. Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = x_1 + x_2 x_3, \dot{x}_3 = x_2 \\ \dot{x}_4 = 0, \dot{x}_5 = x_4 \\ y_1 = e^{x_3} - 1 = h_1 et y_2 = e^{x_5} + e^{x_3}e^{x_5} - 2 = h_2 \end{cases} \tag{33}$$

Un calcul direct donne les champs de vecteurs du repère par :

$$\begin{aligned}
\tau_{1,1} &= e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \tau_{1,2} = e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_2} + e^{-x_3}x_2\frac{\partial}{\partial x_1} \\
\tau_{1,3} &= e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial x_3} + e^{-x_3}(2x_2+x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + e^{-x_3}x_2^2\frac{\partial}{\partial x_1} \\
\tau_{2,1} &= \eta\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad \tau_{2,2} = \eta\frac{\partial}{\partial x_5} - (x_4\eta_{x_5} + x_2\eta_{x_3})\frac{\partial}{\partial x_4}
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que l'on a :

$$[\tau_{1,1}, \tau_{1,2}] = 0, \quad [\tau_{1,2}, \tau_{1,3}] \neq 0 \quad \text{et}\, [\tau_{2,1}, \tau_{2,2}] \neq 0$$

Donc, les conditions de commutativité ne sont pas toutes vérifiées.
Maintenant en posant $\tau^1_{1,1} = l_1(y_1)\tau_{1,1}$ et $\tau^2_{2,1} = l(y_1, y_2)\tau_{2,1})$, puis par induction sur $\tau^1_{1,2}$, $\tau^1_{1,3}$ et $\tau^1_{2,2}$, on montre que les équations :

$$[\tau_{1,2}, \tau_{1,3}] = 0 \text{ et } [\tau_{2,1}, \tau_{2,2}] = 0.$$

sont satisfaites pour :

$$l_1 = 1 + y_1 = e^{x_3} \text{ et } \; l_2 = \ln(y_2+2) - \ln(y_1+2).$$

Par conséquent , dans ce nouveau repère on a : $z_{1,1} = x_1$, $z_{1,2} = x_2 - \frac{1}{2}x_3^2$, $z_{1,3} = x_3$, $z_{2,1} = x_4$ et $z_{2,2} = x_5$. La partie de (32) qui fournit le difféomorphisme sur les sorties est donnée par :

$$\begin{pmatrix} dz_{1,3} \\ dz_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{e^{x_3}} & 0 \\ -\dfrac{1}{e^{x_3}+1} & \dfrac{1}{e^{x_5}+e^{x_3}e^{x_5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dh_1 \\ dh_2 \end{pmatrix}.$$

D'où on a : $z_{1,3} = x_3 = \ln(y_1+1)$ et $z_{2,2} = x_5 = \ln\left(\dfrac{y_2+2}{y_1+2}\right)$. Finalement le système dynamique dans les nouvelle coordonnées s'écrit comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{z}_{1,1} = 0, \; \dot{z}_{1,2} = z_{1,1} + \frac{1}{2}(\overline{y}_1)^2 \text{ et } \dot{z}_{1,3} = z_{1,2} \\ \dot{z}_{2,1} = 0 \text{ et } \dot{z}_{2,2} = z_{2,1} \\ \overline{y}_1 = z_{1,3} \text{ et } \overline{y}_2 = z_{2,2} \end{array}\right. \tag{34}$$

B. L'immersion : formes FCONE

Cette section est dédiée à la présentation d'un algorithme de la mise sous forme normale d'observabilité non linéaire étendue (FCONE).
Nous avons vu que les formes FCON avec difféomorphisme sur les sorties s'obtiennent en construisant un nouveau repère τ^1 pour lequel les conditions de commutativité (26) seront éventuellement satisfaites. Néanmoins, si le repère τ^1 lui même ne satisfait pas toutes les conditions (26) on aura sous la main les fonctions l_i. Donc, le difféomorphisme Γ. Par conséquent, on considérera à la place du système (8-9) de départ le nouveau système suivant en gardant la même dynamique et en changeant les sorties :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) && (35) \\ \overline{y} &= \Gamma(y) && (36) \end{aligned}$$

Pour ce dernier système on a moins d'obstructions sur les conditions (26) que sur le système original. Pour soulever ces obstructions on va regarder le nouveau système dans un espace de dimension plus grand. Pour ce faire en rajoute à la dynamique du départ une dynamique auxiliaire de la forme :

$$\dot{w} = \eta(\overline{y}, w) := \eta(y, w), \tag{37}$$

car $\overline{y} = \Gamma(y)$. Cette dynamique ne dépend que des variables auxiliaires $w \in \mathbb{R}$ et des composantes de la sortie y. De sorte, que le système dynamique étendu évolue dans l'espace $\mathbb{R}^{\ltimes+}$ a pour dynamique :

$$\dot{\xi} = F(\xi), \tag{38}$$

où $\xi = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$ et $F(\xi) = \begin{pmatrix} f(x) \\ \eta(w,y) \end{pmatrix}$ Maintenant, on considère un nouveau repère τ^2 défini à partir de τ^1 par $\tau^2_{1,j} = l^1_j(w)\tau^1_{1,j}$, et par induction pour tout $2 \le i \le r_j$ le reste des champs de vecteurs : $\tau^2_{i,j} = -ad_F\tau^1_{i-1,j}$,

Les fonctions l^1_j sont supposées non nulles. ce résultat peut être consulté dans ([5]) :

Théorème 2 : il existe un changement de coordonnées $z = \phi(\xi)$ qui transforme le système dynamique (35-36) sous la forme FCONE suivante :

$$\dot{z} = Az + \beta(y, w),$$

si et seulement si le repère τ^2 satisfait les conditions de commutativité (26).

Remarque 2 : Pour écrire le difféomorphisme dans l'espace étendu, en plus des éléments du repère τ^1, nous avons besoin de construire des champs $T_{k,s}$ (autant que le nombre de variables auxiliaires rajoutées) qui commutent avec les $\tau^1_{i,j}$ et qui forment avec eux la base de l'espace étendu.
Pour illustrer ce résultat, on donne deux exemples :

Exemple 4 : Considérons le système dynamique suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \dot{x}_1 = x_3x_2, \; \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = 0, \; \dot{x}_4 = x_3 \\ y_1 = x_2 \text{ et} y_2 = x_4 \end{array}\right.$$

les 1-formes d'observabilité sont données par :

$$\theta_{11} = dx_4, \quad \theta_{12} = dx_3$$

et

$$\theta_{21} = dx_2, \quad \theta_{22} = dx_1$$

le repère τ est donné par :

$$\tau_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \tau_{12} = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\tau_{21} = \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{et} \quad \tau_{22} = \frac{\partial}{\partial x_4} + x_2\frac{\partial}{\partial x_1}$$

Il est facile de voir que $[\tau_{12}, \tau_{22}] = \dfrac{\partial}{\partial x_1} \neq 0$ et $r_1 = r_2$ donc d'après les résultats de Kerner et Respondek dans [11] et ceux de Xia et Gao (pp.207, corollary 3.5) [15] nous pouvons voir que le système dynamique ne peut pas sous mettre sous la forme canonique FCON.

Un calcul facile montre que si on prend $\dot{w} = y_2$ on a :

$$\tau^1_{11} = l(w)\frac{\partial}{\partial x_1} = e^{-w}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$\tau_{12}^1 = e^{-w}\frac{\partial}{\partial x_2} + x_4 e^{-w}\frac{\partial}{\partial x_1}x_1$$
$$\tau_{21}^1 = \tau_{21}, \tau_{22}^1 = \tau_{22}.$$

Pour déterminer le changement de coordonnées on doit calculer le champ de vecteurs T_{13} indépendant des $\tau_{i,j}^2$ et qui commute avec eux. Un calcul direct donne $T_{13} = \frac{\partial}{\partial w} - x_2\frac{\partial}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial}{\partial x_1}$. Posons :

$$\theta^1 = \begin{pmatrix} d\xi, & \theta_{21}, & ,\theta_{22}, & \theta_{11}, & \theta_{12} \end{pmatrix}$$

et

$$\tau^1 = \left(\tau_{2,1}^1, \tau_{2,2}^1, T_{1,3}, \tau_{1,1}^1, \tau_{1,2}^1\right)$$

On obtient,

$$\begin{aligned}
\Lambda_2 &= \theta^1\tau^1 \\
&= \left(\theta^1(\tau_{2,1}^1), \theta^1(\tau_{2,2}^1), \theta^1(T_{1,3}), \theta^1(\tau_{1,1}^1), \theta^1(\tau_{1,2}^1)\right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_2 & 0 & e^{-w} \\ 0 & x_2 & -x_1 & e^{-w} & x_4 e^{-w} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où le difféomorphisme est donné par sa différentielle comme suit :

$$\phi_* = \Lambda^{-1}\theta = \left(\begin{array}{c} dz_{11} = dx_3, \quad dz_{12} = dx_4, \quad dz_{13} = dw \\ dz_{21} = d\left(e^w\left(x_1 - x_2x_4\right)\right) \quad dz_{22} = d\left(e^w x_2\right) \end{array} \right.$$

En d'autre terme on a : $z_{1,1} = x_3$, $z_{1,2} = x_4$ et $z_{1,3} = w$, $z_{2,1} = e^w\left(x_1 - x_2x_4\right)$ et $z_{2,2} = e^w x_2$.

qui transforme la dynamique étendue sous la forme FCONE suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{z}_{11} = 0, \quad \dot{z}_{12} = z_{11}, \quad \dot{z}_{13} = z_{12} \\ \dot{z}_{21} = -e^w y_1 y_2^2, \quad \dot{z}_{22} = z_{2,1} + \left(e^w + 1\right) y_1 y_2, \quad \dot{w} = y_2 = x_4 \\ y_{1a} = e^w y_1, \quad y_{2a} = y_2 \end{array} \right.$$

Donnons maintenant un exemple où les indices d'observabilité sont différents $r_1 \neq r_2$.

Exemple 5 : Soit le système dynamique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x}_1 = x_1x_3, \; \dot{x}_2 = x_1, \; \dot{x}_3 = x_2 \\ \dot{x}_4 = x_2x_5, \; \dot{x}_5 = x_4 \\ y_1 = x_3 \text{ et } y_2 = x_5 \end{array} \right.$$

Un calcul direct donne les 1-formes d'observabilité :

$$\theta_{1,1} = dx_3, \; \theta_{1,2} = dx_2, \; \theta_{1,3} = dx_1$$

et

$$\theta_{2,1} = dx_5, \; \theta_{1,2} = dx_4,$$

d'où le repère τ :

$$\begin{aligned}
\tau_{11} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \\
\tau_{1,2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_1} \\
\tau_{1,3} &= \frac{\partial}{\partial x_3} + \left(x_3^2 - x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_5\frac{\partial}{\partial x_4}
\end{aligned}$$

et

$$\tau_{21} = \frac{\partial}{\partial x_4}, \; \tau_{22} = \frac{\partial}{\partial x_5}$$

Il facile de voir que : $[\tau_{1,2}, \tau_{1,3}] = -2\frac{\partial}{\partial x_1} \neq 0$ et $[\tau_{1,3}, \tau_{2,2}] = -\frac{\partial}{\partial x_4} \neq 0$.

Donc le système dynamique ne peut pas être transformé sous la forme FCON (3)-(4). Un autre calcul montre que l'on ne peut pas soulever les obstructions de commutativité par difféomorphisme. On considère les variables auxiliaires suivantes w_1 telles que : $\dot{w}_1 = y_1$ avec l_1 et l_2 deux fonctions de w_1. on a : $F = f + x_3\frac{\partial}{\partial w_1}$. On montre que :

$$\begin{aligned}
\tau_{21}^1 &= e^{-w_1}\tau_{21} = e^{-w_1}\frac{\partial}{\partial x_4} \\
\tau_{22}^1 &= e^{-w_1}\frac{\partial}{\partial x_5} + x_3 e^{-w_1}\frac{\partial}{\partial x_4}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\tau_{11}^1 &= e^{w_1}\tau_{11} = e^{w_1}\frac{\partial}{\partial x_1} \\
\tau_{12}^1 &= e^{w_1}\frac{\partial}{\partial x_2} \\
\tau_{13}^1 &= e^{w_1}\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 e^{w_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + e^{w_1}x_5\frac{\partial}{\partial x_4}
\end{aligned}$$

Maintenant on a : $\left[\tau_{i,j}^1, \tau_{s,t}^1\right] = 0$ pour $1 \leq i, s \leq 2$ et $1 \leq j \leq 3$ et $1 \leq s \leq 2$. Maintenant, il est facile de montrer que le sixième champs de vecteurs qui forme la base de l'espace étendu avec τ_{ij}^1 et qui commute avec eux est donné par :

$$\begin{aligned}
T_{14} = &\frac{\partial}{\partial_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} \\
&+ x_3\frac{\partial}{\partial x_3} + \left(x_3x_5 - x_4\right)\frac{\partial}{\partial x_4} - x_5\frac{\partial}{\partial x_5}
\end{aligned}$$

Comme dans l'exemple précèdent on a :

$$\theta^1 = \begin{pmatrix} dw, & \theta_{11}, & \theta_{12}, & \theta_{13}, & \theta_{21}, & \theta_{22} \end{pmatrix}$$

et

$$\tau^1 = \left(\tau_{1,1}^1, \tau_{1,2}^1, \tau_{1,3}^1, T_{1,4}, \tau_{2,1}^1, \tau_{2,2}^1\right)$$

Un calcul direct de $\Lambda^1 = \theta^1\tau^1$ donne le difféomorphisme suivant :

$$\begin{aligned}
z_{14} &= y_{1a} = e^{-w_1}y_1, \quad z_{22} = y_{2a} = e^{w_1}y_2 \\
z_{13} &= e^{-w_1}x_2 + \frac{1}{2}e^{w_1}x \\
z_{12} &= e^{-w_1}x_1, \quad z_{21} = e^{w_1}x_4 - e^{w_1}x_5x_3
\end{aligned}$$

Dans ces nouvelles coordonnées le système dynamique étendu prend la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{z}_{11} = 0, \; \dot{z}_{12} = z_{11} - e^{w_1}y_1^3, \dot{z}_{13} = z_{12} - \frac{3}{2}e^{w_1}y_1^2 \\ \dot{w}_1 = y_1, \dot{z}_{21} = -e^{w_1}y_2y_1^2, \dot{z}_{22} = z_{21} + 2e^{w_1}y_2y_1 \\ y_{1a} = e^{-w_1}y_1, y_{2a} = e^{w_1}y_2 \end{array} \right.$$

III. **Conclusion**

Dans ce papier nous avons tenté de donner une idée sur quelques développements de la théorie de la linéarisation de l'erreur de l'observation. Nous avons aussi mis en évidence une rupture dans les idées de la recherche dans ce domaine. Enfin, nous avons exposé les derniers résultats concernant la mise sous la forme d'observabilité non linéaire étendue connue aussi sous le nom de l'immersion.

Références

[1] J. Back, Y. Kyung T, J.H. Seo, "Dynamic observer error linearization", *IEEE Transactions on Automatica Control*, vol. 42, no12, 2006, pp. 2195-2200

[2] D. Noh, N.H. Jo, J.H. Seo, "Nonlinear observer design by dynamic observer error linearization", I*EEE Transactions on Automatic Control,* 49, 10 1746- 1753, 2004.

[3] M. Fliess and I. Kupka, "A finiteness criterion for nonlinear input-output differential systems", *SIAM Journal of Control and Optimization* 21(5), 721–728, 1983.

[4] R. Hermann and A.J. Krener, "Nonlinear Controllability and Observability Systems", *IEEE Trans. Automatic Control* 22, 728–740, 1977.

[5] D. Boutat and K. Busawon, "Extended Nonlinear Observable Canonical Form for Multi-Output Dynamical Systems", *Proceedings of the IEEE CDC*, 2009.

[6] D. Boutat, A. Benali and H. Hammouri, "Geometrical

[7] D. Boutat, A. Benali, H. Hammouri and K. Busawon "New algorithm for observer error linearization with a diffeomorphism on the outputs", Automatica, 2009.

[8] D. Boutat, "Geometrical conditions to linearize observer error via 0,1,...,(n-2)" *7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Nolcos'07*, 2007.

[9] M. Hou and A.C. Pugh, "Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems", *Systems and Control Letters*, 37, 1–9, 1999.

[10] A. J. Krener and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observer", *Systems and Control Letters* 3, 47–52, 1983.

[11] A.J. Krener and W. Respondek, "Nonlinear observer with linearizable error dynamics", *SIAM J. Control and Optimization,* 30, 197–216, 1985.

[12] M.V. Lopez, F. Plestan, A. Glumineau, "Linearization by Completely Generalized Input Ouput Injection", *Kybernetika*, 35, no. 6, 793-802, 1999.

[13] A. Phelps, "On constructing nonlinear observers", SIAM J. Control and Optimization 29, 1991.

[14] F. Plestan and A. Glumineau, "Linearization by generalized input output injection", *System Control Letters*, 31 115–128, 1997.

[15] X. H. Xia and W.B. Gao, "Nonlinear observer with linearizable error dynamics", *SIAM Journal Control and Optimization* 27, 199–216, 1989.

[16] Aranda-Bricaire E. , C. H. Moog, et J. B. Pomet. *A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization.* IEEE Trans. Automat. Control, 40 :127132, 1995.

[17] B. Charlet, J. Lévine. *On dynamic feedback linearization.* Systems Control Lett., 13 :143151, 1989.

[18] B. Charlet, J. Lévine, et R. Marino. *Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization.* SIAM J. Control Optim., 29 :3857, 1991.

[19] E. Delaleau et P. S. Pereira da Silva. *Filtrations in feedback synthesis : Part I systems et feedbacks.* Forum Math., 10(2) :147174, 1998.

[20] J. Descusse et C. H. Moog. Decoupling with dynamic compensation for strong invertible affine nonlinear systems. Internat. J. Control, 42 :13871398, 1985.

[21] M. D. Di Benedetto, J. W. Grizzle, et C. H. Moog. Rank invariants of nonlinear systems. SIAM J. Control Optim., 27 :658672, 1989.

[22] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, et P. Rouchon. *Sur les syst'emes non lin ́eaires diff ́erentiellement plats.* C. R. Acad. Sci. Paris S ́er. I Math., 315 :619624, 1992.

[23] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, et P. Rouchon. *Flatness et defect of non-linear systems : introductory theory and examples.* Internat. J. Control, 61 :13271361, 1995.

[24] M. Guay, P. J. McLellan, et D.W. Bacon. A *condition for dynamic feedback linearization of control-affine nonlinear systems.* Internat. J. Control, 68(1) :87106, 1997.

[25] L. R. Hunt, R. Su, et G. Meyer. *Design for multi-input nonlinear systems.* In R. Brocket, R. Millmann, et H. J. Sussmann, editors, Differential Geometric Methods in Nonlinear Control Theory, pages 268298, 1983.

[26] A. Isidori. Nonlinear Control Systems. Springer Verlag, 3nd edition, 1995.

[27] B. Jakubczyk et W. Respondek. *On linearization of control systems.* Bull. Acad. Pol. Sc., Ser. Sci. Math., 28 :517522, 1980.

[28] P. Martin, R. M. Murray, P. Rouchon. *Flat Systems.* European Control Conference, Plenary Lectures and Mini-Courses, 1997 Brussels.

[29] H. Nijmeijer et W. Respondek. Dynamic input-output decoupling of nonlinear control systems. IEEE Trans. Automat. Control, 33 :10651070, 1988.

[30] P. Rouchon. *Necessary condition and genericity of dynamic feedback linearization.* J. Math. Systems Estim. Control, 5(3) :345358, 1995.

[31] J. Rudolph. *Well-formed dynamics under quasi-static state feedback.* In B. Jackubczyk, W. Respondek, et T. Rzezuchowski, editors, Geometry in Nonlinear Control et Differential Inclusions, pages 349360, Warsaw, 1995. Banach Center Publications.

[32] H. Nijmeijer and A. van der Schaft "Nonlinear dynamical control systems" Springer-Verlag New York, Inc. New York, NY, USA

[33] Marino R. and P. Tomei (1995). *Nonlinear Control Design : Geometric, Adaptive and Robust.* Prentice Hall.

[34] W. M. Sluis. *A necessary condition for dynamic feedback linearization.* Systems Control Lett., 21 :277283, 1993.

[35] W. M. Sluis et D. M. Tilbury. *A bound on the number of integrators needed to linearize a control system.* Systems Control Lett., 29(1) :4350, 1996.

[36] D. Tilbury, R. M. Murray, et S. R. Sastry. *Trajectory generation for the n-trailer problem using Goursat normal form.* IEEE Trans. Automat. Control, 40 :802819, 1995.

[37] M. van Nieuwstadt, M. Rathinam, et R. M. Murray. *Differential flatness and absolute equivalence of nonlinear control systems.* SIAM J. Control Optim., 36(4) :12251239 (electronic), 1998.

[38] C.G. Luenberger. *An introduction to observers.* IEEE Automatica Control, 16 :1971, 596-602.

[39] C.G. Luenberger. *Observing the state on a linear system.* IEEE Trans. Mil. Electron, 8 :1964, 74-80. Systemes Non

[40] Fossard et Normand-Cyrot "Systèmes Non Lineaires T.1 Modelisation Et Estimation" Masson

[41] J.P. Gauthier, I.A.K. Kupka, "Deterministic observation theory and applications", book, Cambridge University Press, October 2001

[42] Plestan F. Glumineau A., Moog CH. "New algebro-geometric conditions for the linearization by input-output injection" IEEE Trans. on Autom. Ctrl., 41(1) :598-603, 1996.

[43] CHIASSON J. N. and NOVOTNAK R. T."Nonlinear speed observer for the PM stepper motor" IEEE transactions on automatic control 1993, vol. 38, no10, pp. 1584-1588

[44] Lopez-M.V, F. Plestan, A. Glumineau (1999). "Linearization by Completely Generalized Input Ouput Injection", Kybernetika, **35**, n° 6, 793-802.

[45] Zheng G., Boutat D., and Barbot J.P. "A Single output dependent observability normal form" SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 46 (6), pp. 2242-2255, 2007.

[46] Zheng G., Boutat D. and Barbot J.P., "Multi-Output Dependent Observability Normal Form" Nonlinear Analysis Series A : Theory, Methods Applications, Vol. 70 (1), pp. 404-418, 2009.

[47] Phelps, A. (1991). "On constructing nonlinear observers." *SIAM J. Control and Optimization* **29**.

[48] Respondek W., A. Pogromsky and H. Nijmeijer (2004). Time scaling for observer design with linearization erro dynamics. *Transactions on Automatic Control* **3**, 199–216.

[49] Plestan F. and A. Glumineau (1997).Linearization by generalized input output injection. *Syst. Contr. Letters*,**31** 115–128.