Universidade de Aveiro Departamento de Educação e Psicologia
2016

Joana Margarida da Silva Armindo

O contributo do GeoGebra para a aprendizagem da Geometria Analítica no espaço

Universidade de Aveiro Departamento de Educação e Psicologia
2016

Joana Margarida da Silva Armindo

O contributo do GeoGebra para a aprendizagem da Geometria Analítica no espaço

Relatório de Estágio apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, realizado sob a orientação científica da Doutora Isabel Cabrita, Professora Auxiliar do Departamento de Educação e Psicologia da Universidade de Aveiro.

À minha mãe…

o júri

presidente

Professora Doutora Maria Teresa Bixirão Neto
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Professor Doutor Floriano Augusto Veiga Viseu
Professor Auxiliar da Universidade do Minho

Professora Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

À minha orientadora, Professora Doutora Isabel Cabrita, por toda a orientação, ajuda, conselhos, paciência e, acima de tudo, pela disponibilidade ao longo deste trabalho.

À minha mãe, a quem dedico este trabalho, por me ter ensinado que com esforço e dedicação tudo se alcança, mesmo quando surgem obstáculos no caminho. Pelo seu amor incondicional e por ser um exemplo para a minha vida.

Ao meu pai, pelas palavras de conforto e carinho, pela preocupação, ajuda e incentivo.

Um agradecimento especial à Fernanda, pelo apoio prestado nos momentos mais difíceis.

Aos meus amigos e restante família, pela compreensão da minha ausência em muitos momentos.

palavras-chave

Aprendizagem construtivista, Tecnologias, *GeoGebra*, Geometria Analítica no espaço.

resumo

O insucesso escolar a Matemática é uma realidade que tem preocupado a comunidade em geral, sendo mais acentuado no âmbito da Geometria. De acordo com a literatura, algumas das principais dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem deste tema são a visualização de objetos a três dimensões e o estabelecimento de conexões entre a representação gráfica desses objetos e a sua representação algébrica. Dados os benefícios da sua integração em sala de aula, os Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica, e o *GeoGebra* em particular, poderão constituir uma forma de superar as dificuldades enunciadas.
Neste contexto, formulou-se a seguinte questão de investigação: em que medida é que uma adequada exploração do *GeoGebra*, tirando partido de várias representações de entes matemáticos que o *software* permite e como complemento de ferramentas de 'papel e lápis', contribui para uma aprendizagem mais sólida da Geometria Analítica no espaço?
No seguimento da questão anterior, este estudo tem por objetivo: analisar a influência de uma adequada exploração, ao nível do 10.º ano de escolaridade, do *GeoGebra*, tirando partido das folhas gráfica 3D e algébrica e como complemento de ferramentas de 'papel e lápis', numa aprendizagem mais sólida relacionada com: (i) o ponto médio de um segmento de reta no espaço; (ii) o plano mediador de um segmento de reta e (iii) a superfície esférica.
Para tentar dar resposta à questão de investigação e cumprir os objetivos propostos optou-se por um estudo de caso múltiplo de natureza qualitativa. O estudo empírico decorreu numa escola do concelho da Horta, nos Açores, numa turma do 10.º ano de escolaridade. A análise de dados foi, fundamentalmente, qualitativa, tendo-se privilegiado como técnicas de recolha a observação e a recolha documental.
Os resultados obtidos sugerem que, de uma forma geral, o *GeoGebra*, usado como complemento de ferramentas de 'papel e lápis', contribuiu para a aprendizagem dos tópicos referidos pelos casos de estudo.

keywords

Constructivist learning, technologies, *GeoGebra*, Analytic Geometry in space.

abstract

The academic failure in Mathematics is an issue which has been concerning the community in general, being more significant in the scope of Geometry. According to literature, some of the main difficulties experienced by the students during the learning process of this subject are visualization of objects in three dimensions and making connections between the graphic representation of such objects and their algebraic representation. Given the benefits of its integration in classroom context, the Dynamic Geometry Environments, and *Geogebra* in particular, could provide a way of overcoming the difficulties mentioned above.
In this context, the following investigation question was formulated: taking advantage of several representations of the mathematical entities the software allows and as a complement of 'pencil and paper' tools, to which extent does an adequate exploration of *Geogebra* contribute to a more solid learning process of Analytic Geometry of space?
Following the previous question, the purpose of this study is to analyse the influence of an adequate exploration, at 10^{th} grade level, of *Geogebra*, taking advantage of the 3D graphic and algebraic sheets and, as a complement to the 'pencil and paper' tools, in a more solid learning process related to: (i) the midpoint of a line segment in space; (ii) the mediator plan of a line segment and (iii) the spherical surface.
A qualitative nature multiple case study was chosen in order to attempt an answer to the investigation question and to meet the proposed objectives. The empirical study took place at a school in the parish of Horta, Azores, with a 10^{th} grade class. The data analysis was, fundamentally, qualitative, being observation and documental gathering the main data collection techniques.
The results obtained suggest that, in a general way, Geogebra, used as a complement to 'pencil and paper' tools, contributes to the learning process of the topics mentioned by the study cases.

Índice geral

Índice de figuras

Índice de tabelas

Abreviaturas

ADGD - Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica

APM - Associação de Professores de Matemática

CEB – Ciclo do Ensino Básico

ME – Ministério da Educação

NTCM - National Council of Teachers of Mathematics

PES - Prática de Ensino Supervisionada

PP – Parte Prática

PT – Parte Teórica

TI – Teste Inicial

TF – Teste Final

ZDP – Zona de Desenvolvimento Próximo

Introdução

No presente capítulo, explicita-se a problemática que deu origem a este estudo, bem como a sua pertinência num contexto de sala de aula da disciplina de Matemática. Dão-se a conhecer as questões de investigação, que se constituíram o fio condutor deste trabalho, e ainda os objetivos delas decorrentes. A última parte do capítulo é dedicada à explicitação sumária da organização do trabalho.

Problemática

O insucesso escolar a Matemática é uma realidade que tem preocupado a comunidade em geral, sendo mais visível na transição dos alunos do Ensino Básico para o Ensino Secundário, razão pela qual se registam, habitualmente, elevados índices de insucesso nesta disciplina no 10.º ano de escolaridade (Rodrigues, 2012; Viveiros & Lopes, 2008).

Segundo Rodrigues (2012) e Bhagat & Chang (2015), este insucesso é ainda mais acentuado no âmbito da Geometria já que este é um tema "particularmente delicado para os alunos do 10.º ano numa fase em que enfrentam uma adaptação a um nível de ensino com um diferente grau de exigência do que o experimentado no 3º ciclo" (Rodrigues, 2012, p. 11).

Algumas das principais dificuldades sentidas pelos alunos na aprendizagem da Geometria identificadas na literatura (Breda, Trocado, & Santos, 2013; Costa, 2000; Duval, 2012; Rodrigues, 2012) são a visualização de objetos a três dimensões e o estabelecimento de conexões entre a representação gráfica desses objetos e a sua representação algébrica. De acordo com Costa (2000), alguns estudantes são incapazes de "ver" um diagrama de diferentes perspetivas e não distinguem uma figura geométrica do desenho que a representa. Igualmente, para Breda, Trocado & Santos (2013, p. 64), "no tema da geometria, a tridimensionalidade dos objetos em estudo é, para os alunos, uma fonte acrescida de dificuldades, ainda mais quando se pensa em conexões envolvendo a álgebra". Além disso, as dificuldades sentidas pelos alunos na visualização no espaço interferem na interpretação de enunciados de problemas e, consequentemente, na sua resolução (Rodrigues, 2012).

A integração de tecnologia na sala de aula poderá constituir uma forma de superar as dificuldades enunciadas, considerando-se hoje que uma educação em matemática moderna assenta no recurso ao computador e a *software* educacional (Ljajko & Ibro, 2013; Mehanovic, 2009). Assim, tirando proveito da apetência natural dos jovens de hoje para as tecnologias (Rodrigues, 2012), o professor deve incorporar as novas ferramentas à sua disposição para captar a atenção dos alunos e motivá-los para a aprendizagem, incentivando-os a terem um papel ativo no processo de construção do seu conhecimento (Isotani & Brandão, 2006; Ljajko & Ibro, 2013; ME, 2001; Rodrigues, 2012).

As orientações curriculares para a disciplina de Matemática recomendam o recurso à tecnologia em sala de aula. A nível internacional, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) refere que o uso da tecnologia permite "esbater algumas das fronteiras artificiais existentes entre os diversos tópicos da álgebra, da geometria e da análise de dados, possibilitando que os alunos utilizem as suas ideias sobre uma determinada área para melhor compreenderem uma outra área da matemática" (NCTM, 2007, p. 28).

A nível nacional, o programa de Matemática A para o 10.º ano de escolaridade (ME, 2001), incentiva a utilização das tecnologias como recurso metodológico em todos os domínios do programa e, em particular, de *softwares* de geometria dinâmica no âmbito da Geometria. Este tema assume um papel de destaque no currículo por ser considerado "um tema formativo no sentido mais amplo do termo que, pela resolução de problemas apropriados desenvolve variadas capacidades" (ME, 2001, p. 7).

Apesar do recurso às tecnologias ser recomendado pela comunidade científica no ensino e aprendizagem da Matemática, e da Geometria em particular, constatou-se, no contexto de estágio, que a sua integração em sala de aula ocorria frequentemente mas de forma pouco exploratória, não permitindo aos alunos o manuseamento dessas ferramentas. Assim, a observação de práticas letivas no contexto da Prática de Ensino Supervisionada da investigadora contribuiu para reforçar o interesse por esta temática.

Alguns autores (Abar, 2012; Borrões, 1998; Ljajko & Ibro, 2013; Martins, 2012) referem que, apesar da introdução da tecnologia e dos ambientes de geometria dinâmica em sala de aula ser vantajosa, não se deve descurar uma abordagem analítica na apropriação dos conceitos geométricos, já que a utilização de ferramentas tradicionais, como papel e lápis, proporciona uma simplicidade e comodidade que não podem ser excluídas da sala de aula. Além disso, "o uso inapropriado das tecnologias pode bloquear o processo de ensino e de aprendizagem (…) ou talvez criar obstáculos cognitivos à compreensão" (Martins, 2012, p. 17). Assim sendo, deve ser efetuada uma combinação de estratégias, uma vez que existem vantagens e desvantagens em ambas as utilizações (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa, & Oliveira, 2011; Lu, 2008; Valente, 2014).

No que toca aos benefícios decorrentes da introdução de tecnologias no contexto educativo, em particular no ensino e aprendizagem da Geometria, os Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica (ADGD) têm-se verificado uma mais-valia (Candeias & Ponte, 2008; Carvalho, Andrade, & Cardoso, 2009; Isotani & Brandão, 2006; Laborde, Kynigos, Hollebrands, & Strasser, 2006; Piteira & Matos, 2000; Silveira & Cabrita, 2013). Os ADGD consideram-se "dinâmicos" por oposição à estrutura "estática" das construções da geometria tradicional, suportadas pela régua, compasso e esquadro. O que trazem de inovador é a possibilidade do aluno alterar os objetos iniciais da construção e visionar as modificações quer em termos gráficos quer algébricos, já que o programa redesenha a construção, preservando as suas propriedades originais (Carvalho et al., 2009; Hohenwarter & Preiner, 2007).

Além das vantagens enunciadas, os ADGD possibilitam o visionamento de uma dada construção de diversas perspetivas, a modificação de objetos geométricos e a generalização de conceitos, abrindo caminho a um conhecimento mais abstrato no âmbito da Geometria (Isotani & Brandão, 2006).

Diversas investigações (Bhagat & Chang, 2015; Candeias & Ponte, 2008; Denbel, 2015; Laborde et al., 2006; Piteira & Matos, 2000; Ribeiro, 2005; I. Santos, 2011; Silveira & Cabrita, 2013) comprovam os benefícios da utilização dos ADGD como metodologia de ensino e aprendizagem na construção de um conhecimento geométrico mais sólido.

No domínio dos ADGD, um dos mais recentes e multifacetados *softwares* de apoio ao ensino e à aprendizagem da Geometria é o *GeoGebra,* sendo considerado na literatura como um recurso metodológico vantajoso no processo de ensino e aprendizagem dos alunos (Breda et al., 2013; Choi, 2010; Hohenwarter & Jones, 2007; Hohenwarter & Preiner, 2007; Ljajko & Ibro, 2013; Mehanovic, 2009; I. Santos, 2011; Silveira & Cabrita, 2013).

O *GeoGebra* constitui uma mais-valia para a aprendizagem quando comparado com outros ADGD por aliar a manipulação gráfica de objetos matemáticos às representações algébrica e de cálculo (Gaspar & Cabrita, 2014). Atendendo a estas funcionalidades, possibilita aos alunos o estabelecimento de conexões mais fortes entre diferentes ramos da Matemática - a Geometria, a Álgebra e o Cálculo (Hohenwarter & Preiner, 2007). Em particular, permite a coordenação entre o registo de representação gráfico e algébrico de um mesmo conceito através das folhas gráficas (2D e 3D) e da folha algébrica (Hohenwarter & Preiner, 2007). Por estas razões, o *GeoGebra* torna-se propício ao estudo da Geometria, já que o recurso a múltiplas representações facilita a apropriação de conceitos geométricos pelos estudantes (Denbel, 2015).

Questões e objetivos de investigação

É neste contexto que surge esta investigação, norteada pela seguinte questão:

QI: Em que medida é que uma adequada exploração do *GeoGebra*, tirando partido de várias representações de entes matemáticos que o *software* permite e como complemento de ferramentas de 'papel e lápis', contribui para uma aprendizagem mais sólida da Geometria Analítica no espaço?

Como objetivo de investigação a perseguir formulou-se o seguinte:

OI: Analisar a influência de uma adequada exploração, ao nível do 10.º ano de escolaridade, do *GeoGebra*, tirando partido das folhas gráfica 3D e algébrica e como complemento de ferramentas de 'papel e lápis', numa aprendizagem mais sólida relacionada com:

- o ponto médio de um segmento de reta no espaço;
- o plano mediador de um segmento de reta e
- a superfície esférica.

Espera-se, com este estudo, contribuir para o desenvolvimento pessoal e profissional da autora e ainda contribuir um pouco para a investigação na área da educação matemática, em particular ao nível do ensino e aprendizagem de tópicos da Geometria Analítica no espaço tirando partido do *GeoGebra*.

Organização do estudo

Este trabalho divide-se em seis partes principais: Introdução, O ensino e aprendizagem da Geometria, Método, Apresentação e análise de resultados, Considerações finais e Referências bibliográficas.

Na Introdução, define-se a problemática que esteve na origem deste estudo, bem como as questões e os objetivos da investigação. Além disso, descreve-se como este está estruturado.

No primeiro capítulo, O ensino e aprendizagem da Geometria, apresenta-se a fundamentação teórica que suportou este estudo, centrada no recurso às tecnologias no ensino e aprendizagem da Geometria.

No segundo capítulo, descrevem-se e fundamentam-se as opções metodológicas tomadas, caraterizam-se os participantes e as técnicas e os instrumentos de recolha de dados, descreve-se brevemente como foi efetuada a investigação, como foram tratados os dados recolhidos e como serão apresentados os resultados.

No terceiro capítulo, procede-se à análise de resultados, com a descrição e algumas interpretações dos mesmos para alguns casos de estudo.

No quarto capítulo, Considerações finais, apresentam-se as principais conclusões, os constrangimentos do estudo e as sugestões para investigações futuras.

Este trabalho é complementado por uma lista de Referências bibliográficas e por alguns Apêndices que apoiaram e fundamentaram o desenvolvimento da investigação.

1. O ensino e aprendizagem da Geometria

No presente capítulo, apresentam-se alguns apontamentos resultantes da revisão de literatura que suportou este estudo. Os tópicos aprofundados incidem sobre a teoria construtivista da aprendizagem, o contributo das tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática, a aprendizagem da Geometria mediada por ADGD, com particular enfoque sobre o *GeoGebra*, e o papel da Geometria no currículo de Matemática, aprofundando-se alguns aspetos teóricos e curriculares da Geometria Analítica no espaço.

1.1 Aprendizagem construtivista

> (…) learning, especially today, is much less about acquiring information or submitting to other people's ideas or values, than it is about putting one's own words to the world, or finding one's own voice, and exchanging our ideas with others. (Ackermann, 2001, p. 2)

Durante vários anos, considerou-se que o sucesso ou insucesso escolar dos alunos resultava principalmente das suas capacidades intelectuais (Aquino, 2013), no entanto, diversas investigações têm mostrado que a aprendizagem é afinal um processo de construção de significados (Leandro, 2006; Miras, 2001; Solé & Coll, 2001; Valente, 2014) pessoal e singular para cada aluno (Almeida & Grubisich, 2011; Mergel, 1998).

Ao longo do último século, o conceito de aprendizagem foi evoluindo de uma visão "mecanicista", segundo a qual a aprendizagem se resumia à aquisição de respostas, para conceções mais dinâmicas. A partir das últimas duas décadas do século XX, ganhou relevo a teoria construtivista da aprendizagem segundo a qual o aluno é desafiado a abandonar o seu papel de recetor passivo de informação para passar a desempenhar um papel central na construção do seu próprio conhecimento (Aquino, 2013; Rosário, 2001).

Assente nesta teoria está a ideia de que o ser humano não tem acesso a uma realidade objetiva que lhe pré-existe, já que cada um constrói de forma única o seu próprio conhecimento do mundo que o rodeia (a sua própria realidade) a partir da reflexão sobre as suas experiências pessoais (Ackermann, 2001; Aquino, 2013; Fosnot, 2005; Leandro, 2006; Mergel, 1998). Nesta perspetiva, o conhecimento é construído ativamente pelo aluno, fruto, designadamente, da experimentação, da pesquisa, do estímulo à dúvida e do desenvolvimento do raciocínio (Ribeiro, 2005).

Segundo Solé & Coll (2001, p. 9), “a concepção construtivista não é um livro de receitas, mas um conjunto articulado de princípios” pelo que não possui uma definição rigorosa. Contudo, são mencionados na literatura vários pressupostos que lhe são subjacentes.

Um desses pressupostos diz que o conhecimento não é algo que possa ser concebido como terminado, pronto e acabado, antes pelo contrário, é temporário, não objetivo e possível de desenvolvimento (Feltrin, 2015; Leão, 1999; Pereira, 2010). Assim sendo, a aprendizagem constitui-se como um processo de construção de conhecimento interpretativo, recursivo e não linear, que resulta da interação dos alunos com o meio que os rodeia, tanto o físico como o social (Fosnot, 2005; Leão, 1999).

Parafraseando Leandro (2006, p. 13), o construtivismo “é uma procura *activa* de significado; o acesso ao significado requer a compreensão do todo e das partes, devendo estas ser compreendidas no contexto do todo”.

Apesar do construtivismo não ser uma teoria de ensino, ele sugere uma abordagem educativa diferente daquela que é utilizada na maioria das escolas. Segundo Fosnot (2005) e Pereira (2010), os professores devem proporcionar aos alunos a oportunidade de fazerem parte da construção do seu próprio conhecimento permitindo-lhes: (i) levantar as suas próprias questões; (ii) formularem as suas hipóteses, testá-las e discutirem-nas com os outros e (iii) construírem por eles próprios conceitos, significados e estratégias. Fosnot (2005) refere ainda que os alunos (e não o professor) devem responsabilizar-se por defender, provar, justificar e comunicar as suas ideias aos outros. Nesta conceção, a finalidade do ensino não é levar o aluno a memorizar mecanicamente respostas “certas” mas orientá-lo na construção do seu conhecimento e, principalmente, dar-lhe espaço para construir as suas próprias aceções e significados acerca dos conceitos que deve aprender.

Para Merrill (1991), citado por Mergel (1998), os pressupostos subjacentes ao construtivismo são:

1. O conhecimento é construído através da experiência;
2. A aprendizagem é uma interpretação pessoal do mundo;
3. A aprendizagem é um processo ativo no qual os significados são desenvolvidos através da experiência;
4. O crescimento concetual decorre da negociação de significados, da partilha de múltiplas perspetivas e da mudança de representações internas do sujeito através da aprendizagem colaborativa;

5. A aprendizagem deve decorrer em contextos reais. O processo de verificação das aprendizagens deve ser integrado nas tarefas e não uma atividade separada.

Das conceções consideradas, pode-se depreender que, contrariamente à ideia da escola tradicional, segundo a qual a aprendizagem poderia resultar da simples apresentação e receção de informação, o construtivismo pressupõe que a aprendizagem é um processo ativo e internamente construído pelo aluno, razão pela qual o conhecimento, ao constituir-se como um produto pessoal, não pode ser transmitido (Pereira, 2010; Ribeiro, 2005).

Esta ideia já estava patente em Ackermann (2001, p. 7), segundo a qual "Knowledge is not merely a commodity to be transmitted, encoded, retained, and re-applied, but a personal experience to be constructed".

Do mesmo modo, Solé & Coll (2001) e Pereira (2010) referem que a aprendizagem é um processo autorregulador, no qual o aluno aprende ao construir uma representação pessoal sobre um objeto da realidade ou sobre um conteúdo que pretende aprender.

O conhecimento construído desta forma assume duas caraterísticas: é relativo, uma vez que depende da reflexão de cada um sobre as suas experiências, e é falível, pois nada pode ser assumido como garantido. Cada indivíduo produz regras e estruturas mentais que mobiliza para interpretar e atribuir significado às suas experiências, razão pela qual a aprendizagem se resume ao ajustamento dos modelos mentais do sujeito e à integração de novas experiências na sua estrutura mental (Aquino, 2013; Miras, 2001; Pereira, 2010). Parafraseando Pozo (1996, p. 128), "aprender es esencialmente construir representaciones o esquemas de la realidad y que conocer es manipular esas representaciones".

No entanto, a atribuição de sentido e construção de significados que ocorrem no processo de aprendizagem não se faz a partir do nada, já que o aprendiz constrói pessoalmente um significado baseando-se nos significados de que já dispõe. Citando Miras (2001):

> Aprender um determinado conteúdo escolar supõe, do ponto de vista da concepção construtivista, atribuir um sentido e construir significados implicados nesse conteúdo. Ora, esta construção não se faz a partir do zero, nem sequer nos momentos iniciais da escolaridade. O aluno constrói pessoalmente um significado

> (ou reconstrói-o do ponto de vista social) com base nos significados que já conseguiu construir previamente. (p.54)

Segundo alguns autores, como Coll (1990, referenciado por Miras, 2001), Leandro (2006) e Rosário (2001), quando o aluno entra em contacto com o novo conteúdo a aprender mobiliza uma série de conceitos, conceções, representações e conhecimentos adquiridos através das suas experiências anteriores para ler e interpretar informação nova. Deste modo, parte do que já sabe para fazer uma primeira leitura do novo conteúdo, atribuir-lhe um primeiro nível de significado e iniciar o processo de aprendizagem do mesmo.

Na mesma perspetiva, Solé & Coll (2001) e Feltrin (2015) afirmam que cada indivíduo constrói o seu próprio conhecimento experimentando ideias e aproximações baseadas nos seus significados prévios, aplicando-os a situações novas e integrando o novo conhecimento no pré-existente. Assim, o processo de aprendizagem leva ao desenvolvimento de estruturas, contudo, a constituição destas estruturas exige muitas vezes a reorganização de conceções anteriores. Neste sentido, Fosnot (2005) considera que a aprendizagem resulta da auto-organização das estruturas mentais do indivíduo.

Quando a aprendizagem ocorre desta forma, envolvendo a "integração, modificação e o estabelecimento de relações e coordenação entre esquemas de conhecimento que já possuímos" (Solé & Coll, 2001, p. 19), diz-se que ocorreu uma aprendizagem significativa. Além disso, a aprendizagem é tanto mais significativa quanto maior for o número de relações com sentido estabelecidas entre os conhecimentos prévios (aquilo que já se conhece) e o novo conteúdo que é apresentado como objetivo de aprendizagem (Miras, 2001), pelo que não se trata de uma simples acumulação de novos conhecimentos. Deste modo, uma parte essencial da atividade mental do aluno ao construir conhecimento consiste em mobilizar e atualizar os seus conhecimentos prévios, de modo a entender as relações que eles mantêm com o novo conteúdo.

O construtivismo tem contribuído para o desenvolvimento de práticas de ensino e aprendizagem que promovem um maior sucesso educativo. Tal como afirma Pozo (1996, p. 133), "el aprendizaje constructivo produce resultados más sólidos y significativos que otras formas de aprendizaje. Es en definitiva un aprendizaje más eficaz (…)".

Segundo Leandro (2006), as repercussões do construtivismo no currículo manifestaram-se pela valorização dos conhecimentos prévios dos alunos e na ênfase na resolução de problemas, devendo o professor orientar a sua ação de modo a focar as conexões entre factos, colocar questões semiabertas e promover o diálogo entre os estudantes.

Aquino (2013) acrescenta que praticar um ensino assente na teoria construtivista significa minimizar as aulas expositivas que têm em vista a repetição e a memorização dos conteúdos lecionados, propondo, em vez disso, atividades direcionadas para ajudar na construção de conhecimento e não na transmissão de informação. Assim, a perspetiva construtivista da aprendizagem implica uma mudança de ênfase da atividade *ensino* para a *aprendizagem*, assumindo o professor um papel de mediador das atividades desenvolvidas pelos aprendizes.

Nesta perspetiva, os estudantes devem ser encorajados: (i) a explorar e manipular ativamente objetos e ideias; (ii) analisar, interpretar e predizer informação e (iii) procurar autonomamente (com a orientação do professor) as suas próprias respostas aos problemas que lhes são colocados (Aquino, 2013; Leandro, 2006). É desta forma que a aprendizagem se torna mais duradoura e eficaz, uma vez que "é feita pelo próprio aluno com autonomia e independência" (Ribeiro, 2005, p. 62).

Apesar da aprendizagem resultar de um percurso pessoal no qual o aluno constrói autonomamente o seu conhecimento, não o faz de forma isolada. É um processo orientado e coletivo, baseado na partilha e interajuda (Casal, 2013). Assente nesta máxima, encontra-se o socioconstrutivismo ou construtivismo social, cujo principal representante foi Vygotsky. Para o psicólogo, o desenvolvimento humano resulta de um processo sóciohistórico, no qual intervêm a linguagem e a comunicação. Partilhando os ideais construtivistas, o autor defende que a construção de conhecimento depende da interação do sujeito com o meio, contudo salienta o papel mediador da cultura na aquisição e construção de conceitos pelo indivíduo (Ribeiro, 2005; Solé & Coll, 2001). O desenvolvimento humano é então um desenvolvimento cultural contextualizado (Vygotsky, 1979, referenciado por Solé & Coll, 2001).

Onrubia (2001, p. 124) carateriza a perspetiva vygotskyana como "uma posição teórica global que defende a importância do relacionamento e interação com outras pessoas como origem dos processos de aprendizagem e desenvolvimento humanos". Deste modo, o conhecimento não resulta apenas da experiência mas das interações sociais que o aprendiz estabelece com os outros.

Existem pelo menos dois níveis de desenvolvimento do ser humano identificados por Vygotsky – um *real* e um *potencial*. O nível *real*, estabelecido *à priori*, "determina o que a criança já é capaz de fazer por si própria" enquanto o *potencial* estabelece "a capacidade de aprender com outra pessoa" (Ribeiro, 2005, p. 71). Consequentemente, é nas relações intra e interpessoais estabelecidas com os outros e consigo própria que a criança interioriza conhecimentos, papéis e funções sociais, o que possibilita a formação de conhecimentos e da própria consciência. Deste modo, a construção de conhecimento é um processo que se direciona da esfera social para a esfera individual.

Os modelos pedagógicos emergentes da perspetiva socioconstrutivista de Vygotsky determinam que o professor é um dos sujeitos que interfere deliberadamente no processo de aprendizagem, com o objetivo de provocar avanços no aluno ao interferir na sua Zona de Desenvolvimento Próximo (ZDP). Segundo Vygotsky (1979), referenciado por Onrubia (2001), a ZDP consiste na diferença entre o nível de resolução de uma tarefa quando realizada de forma independente e o nível alcançado quando concretizada com intervenção de outros, mais competentes ou mais bem preparados nessa tarefa. Como consequência desta definição, considera-se que intervir na ZDP pode ajudar o aprendiz a encontrar novas formas de entender e resolver as tarefas, fruto do processo interativo estabelecido com os outros membros do seu grupo social (professor, colegas, pais/encarregados de educação, entre outros).

Analisando as considerações anteriores, torna-se imprescindível ter em conta o contexto social e cultural do indivíduo na construção do seu conhecimento, razão pela qual, na perspetiva construtivista, os conteúdos de aprendizagens são tidos como produtos sociais e culturais, o aluno como aprendiz social e o professor como mediador entre o indivíduo e a sociedade.

Para além do construtivismo social, a teoria construtivista deu origem a outras perspetivas de desenvolvimento humano, entre elas, o construcionismo. Nesta abordagem, aprofundada por Seymour Papert, o aprendiz constrói o seu conhecimento mediado pelo computador já que este acrescenta motivação e independência ao processo de aprendizagem (Papert, 1986, referido por Valente, n.d.).

Segundo Papert e Harel (1991), a ideia subjacente ao construcionismo pode ser facilmente descrita como *aprender-fazendo* ("learning-by-making"). Partilhando o ideal construtivista de aprendizagem como construção de estruturas de conhecimento, o construcionismo acrescenta que o envolvimento afetivo do aluno com o conteúdo a aprender torna a aprendizagem mais significativa (Valente, n.d.). Deste modo, o aluno manifesta uma maior predisposição para aprender quando está envolvido na construção de algo do seu interesse e o objeto abordado contém algum significado pessoal, ou seja, quando a aprendizagem assenta num processo interativo entre o aluno e o computador (Papert & Harel, 1991). Nas palavras do próprio Papert (Papert & Harel, 1991):

> Constructionism – the N word as opposed to the V word – shares constructivism's connotation of learning as 'building knowledge structures' irrespective of the circumstances of the learning. It then adds the idea that this happens especially felicitously in a context where the learner is consciously engaged in constructing a public entity.

A aprendizagem mediada pelo computador e por outras ferramentas tecnológicas é ainda hoje, e cada vez mais, defendida por vários autores (Borrões, 1998; Casal, 2013; Coelho & Saraiva, 2000; Laborde, 2000; Pereira, 2010; Ricoy & Couto, 2011; Silveira & Cabrita, 2013). Assim, no contexto desta investigação, interessa averiguar em que medida é que o recurso às tecnologias contribui para a aprendizagem da Matemática.

1.2 Tecnologias e a Matemática

O recurso às tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática é incentivado por diversos autores a nível internacional, veja-se alguns exemplos.

Noss e Hoyles (1996), citados por Karrer e Barreio (2013), defendem que a aprendizagem Matemática deve ser mediada por ferramentas computacionais de forma a favorecer o desenvolvimento do pensamento matemático e que os benefícios decorrentes da sua utilização não seriam possíveis noutros ambientes de ensino.

Na mesma linha de pensamento, Laborde (2000) salienta a crescente evolução da sociedade atual, cada vez mais tecnológica. Para a autora, menosprezar esta realidade significaria promover uma aprendizagem Matemática descontextualizada do mundo real. Laborde (2000) prossegue, evidenciando a utilidade das ferramentas tecnológicas ao permitirem aos alunos visionar fenómenos matemáticos, fazer conexões, manipular parâmetros e realizar experiências:

> This ability before the era of technology was restricted to gifted students who were able to imagine in their head the mathematical objects and relations, to play with them in thought. The possibility of real manipulation allowed by technology offers an access to mathematics to more students. (p.11)

Também as orientações curriculares internacionais para a disciplina recomendam o recurso à tecnologia em sala de aula. Para o NCTM (2007), o recurso às tecnologias, em particular aos computadores, é fundamental para o ensino da Matemática. No entanto, as tecnologias não deverão substituir uma compreensão e intuição desta ciência, mas sim servir-lhes de estímulo. Neste sentido, vários autores afirmam que as tecnologias por si só não podem melhorar a aprendizagem (Feltrin, 2015; Ljajko & Ibro, 2013; Lu, 2008; Valente, 2014). Os benefícios da tecnologia para a aprendizagem dependem, em grande parte, de uma exploração adequada pelo professor. Assim, a tecnologia deverá ser utilizada para melhorar as oportunidades de aprendizagem dos alunos através da seleção e/ou criação de tarefas matemáticas que tirem proveito das suas potencialidades (Isotani & Brandão, 2006; NCTM, 2007; Ricoy & Couto, 2011). Para o NCTM, uma dessas potencialidades diz respeito ao visionamento de objetos matemáticos, já que "o poder gráfico das ferramentas tecnológicas possibilita o acesso a modelos visuais que são poderosos, mas que muitos alunos são incapazes ou não estão dispostos a realizar de modo independente" (2007, p. 27).

Segundo Lu (2008), tem havido uma consciência crescente de que as interações entre os seres humanos e as tecnologias podem facilitar o ensino e a aprendizagem. A implementação de tecnologias na educação matemática promove uma comunicação e manipulação matemáticas mais eficientes, assim como uma maior interação entre docentes, alunos e a própria disciplina (Hershkovitz, et al, 2002, citado por Lu, 2008).

O ensino e aprendizagem da Matemática mediado por ferramentas tecnológicas também é defendido por vários autores a nível nacional (Borrões, 1998; Casal, 2013; Sampaio & Coutinho, 2014). De entre as várias ferramentas tecnológicas, Borrões (1998, p. 34) salienta o contributo do computador caraterizando-o como "um instrumento de apoio à (re)descoberta de conceitos e à resolução de problemas" pelo que devem ser aproveitadas as suas potencialidades de cálculo (numérico e algébrico) e de representação gráfica.

Ao nível do currículo, o programa de Matemática A do 10.º ano (ME, 2001) também prevê a utilização de tecnologias em sala de aula, salientando que o seu usufruto facilita a participação ativa do aluno na própria aprendizagem e que a dimensão gráfica destas ferramentas é indispensável ao desenvolvimento das competências previstas.

Outros estudos mais recentes (Abar, 2012; Bhagat & Chang, 2015; Ricoy & Couto, 2011; Rocha, 2015) continuam a reconhecer o potencial das tecnologias no ensino e aprendizagem da Matemática, considerando que estas "podem ser extremamente úteis como ferramentas cognitivas" (Valente, 2014, p. 144). As ferramentas tecnológicas são ainda consideradas propícias ao desenvolvimento de tarefas de natureza investigativa e exploratória, permitindo aos alunos experimentar diferentes relações matemáticas, refletir sobre elas, identificar regularidades e formular conjeturas (Rocha, 2015), o que vai ao encontro da teoria construtivista da aprendizagem.

Apesar das tecnologias possibilitarem a realização de atividades "muito mais interessantes e significativas do que simplesmente aplicar fórmulas e calcular parâmetros" (Valente, 2014, p. 151), outros autores como Borrões (1998), Abar (2012) e Martins (2012) referem que uma abordagem analítica não deve ser descurada, pelo que o recurso a ferramentas como papel e lápis não pode ser descartado por completo. Segundo Martins (2012), a realização de tarefas recorrendo a papel e lápis é dotada de uma simplicidade e comodidade que não pode ser excluída da sala de aula. Deste modo, deve ser efetuada uma combinação de estratégias, uma vez que existem vantagens e desvantagens em ambas as utilizações (Breda et al., 2011; Lu, 2008; Valente, 2014).

A este propósito, Ponte, Branco & Matos (2009) questionam-se:

> Devem aprender primeiro os conceitos e processos pelos "métodos tradicionais", baseados no papel e lápis, ou devem aprendê-los, desde o início, usando estes instrumentos? E com que propósito devem usar a tecnologia – para confirmar os resultados já obtidos com métodos de 'papel e lápis' ou como instrumento de exploração? (p.17)

Em forma de resposta, os mesmos autores referem que a abordagem a utilizar depende de vários fatores: a familiaridade dos alunos com as ferramentas tecnológicas; o seu meio cultural; os respetivos interesses e preferências; os recursos existentes na escola e ainda da experiência do professor (Ponte et al., 2009).

Apesar do investimento financeiro realizado em alguns países e das vantagens da utilização de tecnologias na educação matemática reconhecidas em diversas investigações, tanto nacionais como internacionais, a sua implementação em sala de aula continua a ser limitada (Lu, 2008; Valente, 2014).

Da revisão de literatura efetuada, verifica-se que é relevante continuar a investigar em que medida o recurso às tecnologias pode facilitar uma sólida apropriação de conceitos matemáticos, nomeadamente de conceitos geométricos.

1.3 Aprendizagem da Geometria mediada por ADGD

Tal como foi abordado anteriormente, a utilização das tecnologias é atualmente indispensável quando nos referimos ao ensino e à aprendizagem da Matemática e, em particular, da Geometria (Breda et al., 2011).

Para Laborde et al. (2006), a contribuição da tecnologia para o ensino e aprendizagem da Geometria está intimamente ligada às representações que permite "The contribution of technology in the teaching and learning of geometry is now mainly perceived as strongly linked with dynamically manipulable interactive graphical representations" (Laborde et al., 2006, p. 278).

Nesta linha de pensamento, vários autores recomendam a dinamização de aulas com recurso aos Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica (ADGD) por serem uma mais-valia para a aprendizagem (Candeias & Ponte, 2008; Carvalho et al., 2009; Isotani & Brandão, 2006; Lu, 2008; Raposo, 2011; Silveira & Cabrita, 2013).

De uma forma muito genérica, um ADGD é um *software* que permite construir e manipular objetos geométricos no ecrã do computador. Uma das suas caraterísticas principais é a possibilidade de se arrastar um elemento do diagrama construído, isto é, manipulá-lo, preservando as propriedades geométricas da construção inicial (Laborde et al., 2006). Silveira & Cabrita (2013, p. 151), baseando-se em vários autores, referem que esta caraterística dos ADGD torna-os potenciadores de contextos de ensino e aprendizagem "efetivos, estimulantes e inovadores".

É frequente, na literatura, a utilização do termo Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) para designar os *softwares* referidos. No entanto, Piteira & Matos (2000) consideram que o termo Ambientes Dinâmicos de Geometria Dinâmica é mais apropriado, uma vez que estas aplicações permitem, por um lado, uma ação entre a *interface* e o utilizador e, por outro, tornam dinâmica a abordagem da Geometria euclidiana.

Segundo Laborde (2000), as razões pelas quais o recurso aos ADGD é tão importante na construção de conhecimento são: (i) o *software* oferece um visionamento global de fenómenos que enriquecem as imagens mentais dos alunos; (ii) o seu poder gráfico e a possibilidade de manipulação direta facilitam o recurso a representações geométricas que os alunos não fariam em ambientes de papel e lápis e (iii) permitem uma variação contínua de parâmetros e contribuem para fomentar o estudo de problemas gerais e não apenas de situações específicas. Esta questão é muito importante uma vez que os estudantes devem aprender a lidar com um problema geral, manipulando os dados e considerando casos particulares mas, por outro lado, também devem ser capazes de considerar uma situação específica como um caso particular de um problema geral.

Corroborando Laborde quanto ao suporte visual de fenómenos, outros autores como Ribeiro (2005) e Gaspar & Cabrita (2014) afirmam que estes ambientes ajudam os alunos a construir modelos mentais dos objetos geométricos mais sofisticados, o que desencadeia fenómenos visuais muito ricos. Deste modo, os ADGD favorecem a compreensão de conceitos e de relações geométricas o que, por consequência, conduz ao progresso intelectual dos alunos.

Para além disso, a facilidade em manipular representações geométricas descritas por Laborde faz com que os ADGD se tornem propícios à descoberta das propriedades e relações entre os entes geométricos pelos alunos (Ribeiro, 2005).

Lu (2008) também se manifesta sobre as oportunidades decorrentes dos ADGD em contexto educativo. Para a autora, as suas vantagens são: (i) a interação direta com as ferramentas que permitem a construção, manipulação e exploração de figuras e a descoberta de relações entre as suas múltiplas representações; (ii) a eficiência na manipulação Matemática; (iii) a conexão entre a representação visual e outras formas de representação e (iv) a melhoria da aprendizagem devido à maior interatividade entre os estudantes e a Matemática.

Silveira & Cabrita (2013) acrescentam que a análise de alterações e invariantes nas propriedades de uma figura potenciada por um ADGD, para além de contribuir para o desenvolvimento da visualização, promove capacidades de raciocínio e imaginação.

É unanimemente reconhecida a importância de representações externas (desenhos, gráficos, diagramas, esquemas) na aprendizagem da Geometria uma vez que estas podem servir de suporte à conceptualização de conceitos (Coelho & Saraiva, 2000; Denbel, 2015). Por esta razão, uma das grandes potencialidades dos ADGD na aprendizagem passa pelo suporte visual de representação de entes abstratos que permitem (Ribeiro, 2005).

Esta vantagem está patente no estudo levado a cabo por Piteira & Matos (2000) com o objetivo de compreender a atividade Matemática dos alunos na sala de aula, quando é mediada por ADGD, e o papel dessa atividade numa aprendizagem mais sólida da Geometria. Nesta investigação, os autores verificaram que os processos que os alunos seguiam na resolução de problemas no âmbito da Geometria eram essencialmente dois: "(i) primeiro, a percepção natural das construções, olhando para os seus elementos fixos ou invariantes; (ii) segundo, a pesquisa das relações invariantes e a realização de inferências em relação à informação visual anterior" (Piteira & Matos, 2000, p. 67). De acordo com os autores, estes passos obrigam a sucessivas transições entre o mundo dos objetos teóricos (Geometria) e o espaço gráfico (de representação dos objetos teóricos) onde estão representados esses objetos, neste caso, os ADGD. Estas transições devem-se à natureza dual da Geometria e ao facto dos entes geométricos serem perspetivados ora como objetos da teoria, ora como os respetivos modelos (Coelho & Saraiva, 2000; Laborde et al., 2006). Neste sentido, um dos objetivos do seu ensino é fazer com que os alunos compreendam a distinção entre o objeto teórico e a sua representação gráfica.

Outro estudo foi levado a cabo por Candeias & Ponte (2008), numa turma do 8.º ano de escolaridade, para averiguar como os alunos desenvolviam a sua competência geométrica utilizando o *The Geometer's Sketchpad*. Os autores concluíram que a utilização de um ADGD permitiu um maior envolvimento dos alunos na realização das tarefas propostas e contribuiu para melhorarem a sua aptidão na construção de figuras, na análise das suas propriedades, na procura de padrões, na realização de investigações e na resolução de problemas geométricos, tendo o *software* tido um grande impacto na sua aprendizagem.

Tendo em conta as vantagens enumeradas pelas diversas investigações no recurso aos ADGD para um conhecimento geométrico mais sólido, torna-se pertinente averiguar o seu contributo na aprendizagem da Geometria Analítica no espaço. Deste modo, na abordagem didática implementada nesta investigação procurou-se incentivar os alunos a terem parte ativa na construção do seu conhecimento através da interação com os outros (socioconstrutivismo) e utilizando o computador como artefacto para promover a aprendizagem (construcionismo). Neste contexto, o ADGD escolhido foi o *GeoGebra*.

De acordo com Silveira & Cabrita (2013), este *software* possui um cariz predominantemente construtivista, constituindo uma ferramenta tecnológica com grande potencial no estudo da Geometria, razão pela qual se considerou adequado aos objetivos formulados nesta investigação.

A integração do *GeoGebra* no ensino e aprendizagem da Matemática tem sido recomentada por diversos autores em todo o mundo (Choi, 2010; Denbel, 2015; Hohenwarter & Jones, 2007; Raposo, 2011; Roteiro, 2016; Silveira & Cabrita, 2013). Como tal, encontra-se traduzido atualmente em 58 idiomas e é utilizado em 190 países (Nascimento, 2012). Uma vez que foi criado com propósitos educacionais, encontra-se disponível gratuitamente *online* (www.geogebra.org), o que permite aos alunos terem acesso ao programa tanto em casa como na escola.

O *GeoGebra* resulta de um projeto desenvolvido pelo professor Markus Hohenwarter na University of Salzburg, na Áustria, iniciado em 2001 (Hohenwarter & Preiner, 2007). Este *software* combina as possibilidades de um sistema CAS (*computer algebra systems*), que integra a manipulação de expressões simbólicas, com um DGS (*dynamic geometry software*), que permite a manipulação dinâmica de objetos geométricos como pontos, vetores, segmentos de reta e seções cónicas (Hohenwarter & Jones, 2007). Devido a estas valências, Hohenwarter & Preiner (2007) caraterizam-no como um "*Dynamic Mathematics Software* (DMS) for geometry, algebra and calculus".

O programa dispõe, entre outras, de duas janelas: a folha algébrica, que funciona através do sistema CAS e a folha gráfica 2D, que trabalha com o sistema DGS. Estas duas folhas estão interligadas de forma a que cada objeto representado na folha gráfica corresponde a outro representado na folha algébrica e vice-versa. Assim, para Hohenwarter & Preiner (2007), a ideia básica do *GeoGebra* é provir, pelo menos, duas representações de cada objeto matemático nas suas janelas algébrica e gráfica.

Desde a sua criação, o *GeoGebra* tem sido alvo de constantes melhorias. Em dezembro de 2014, surgiu a versão 5.0 que inclui a folha gráfica 3D e permite a construção de representações algébricas e geométricas de objetos tridimensionais (Breda et al., 2013; Roteiro, 2016).

As vantagens decorrentes da integração deste *software* em educação matemática são enumeradas em diversas investigações.

Segundo Hohenwarter & Jones (2007), a dualidade entre a folha algébrica e a folha gráfica, possibilita ao utilizador, por um lado, investigar os parâmetros da equação de uma curva arrastando-a com o rato e observando a sua equação mudar ou, por outro lado, modificar a equação diretamente e visionar a forma como os objetos na folha gráfica mudam.

De acordo com Mehanovic (2009), esta caraterística do *GeoGebra* ajuda a estabelecer a ligação entre a manipulação algébrica de objetos e a sua representação gráfica.

Do mesmo modo, Raposo (2011) menciona que a dualidade entre as folhas algébrica e gráfica é uma mais-valia, na medida em que "as duas janelas possibilitam a exploração de conceitos matemáticos em duas vertentes, descompartimentando a matemática curricular, o que permite uma visão globalizante" (2011, p. 38). Para Raposo, esta valência ajuda a uma melhor compreensão de conceitos matemáticos, pois permite a manipulação de parâmetros e a observação gráfica dessas alterações.

Corroborando os autores anteriores, Gaspar & Cabrita (2014) referem que o *GeoGebra* torna-se vantajoso comparativamente a outros ADGD por aliar a manipulação gráfica às representações algébrica e de cálculo.

Atendendo às suas caraterísticas, o *GeoGebra* tem a vantagem didática de apresentar, simultaneamente, múltiplas representações de um mesmo objeto que interagem entre si (Bhagat & Chang, 2015; Nascimento, 2012; Silveira & Cabrita, 2013). Como tal, torna-se propício ao estudo da Geometria, já que o recurso a múltiplas representações facilita a apropriação de conceitos geométricos pelos estudantes (Denbel, 2015).

De acordo com os objetivos formulados nesta investigação, ir-se-á tirar partido das folhas algébrica e gráfica 3D, com o propósito de analisar o contributo do *GeoGebra* numa aprendizagem mais sólida de alguns tópicos da Geometria Analítica no espaço.

1.4 A Geometria no currículo de Matemática

É impossível compreender o papel da Matemática na construção da nossa sociedade sem refletir sobre a história da geometria no seu ensino (Veloso, 1998). Como tal, nesta secção, descreve-se de forma genérica a evolução da Geometria no currículo do ensino secundário, fazendo-se referência aos períodos antes, durante e após o movimento da Matemática Moderna no estrangeiro e com maior ênfase em Portugal.

A Geometria tem sofrido alterações nos currículos de Matemática ao longo dos anos. Antes do chamado movimento da Matemática Moderna, o seu ensino baseava-se em duas componentes principais: as construções geométricas e o estudo da Geometria Euclidiana no plano e no espaço, recorrendo-se a uma abordagem exclusivamente formal e demonstrativa. A ideologia vigente tinha a Geometria como "o campo ideal para os alunos aprenderem a demonstrar e também a apreciar a matemática como uma construção lógica, perfeita" (Veloso, 1998, p. 19). Nesta altura, a ênfase era atribuída à demonstração, aos axiomas e aos teoremas, procurando levar os alunos a adquirir hábitos de raciocínio rigoroso.

No final da década de 50, começou a ganhar terreno a nível internacional um movimento que provocou a reformulação dos currículos de Matemática - o movimento da Matemática Moderna (Almeida & Matos, 2011). Como tal, foram introduzidas as Estruturas Algébricas, a Álgebra Linear, a Teoria de Conjuntos e noções rudimentares de Estatística e de teoria das Probabilidades (Fischer & Fischer, 2011). A Trigonometria passou a ser incluída na iniciação à Análise Infinitesimal, tendo a sua abordagem deixado de ser geométrica para passar a ser algébrica, e a Geometria Analítica praticamente desapareceu do currículo. O grande objetivo deste movimento, ao introduzir novos temas e novas abordagens, era proporcionar aos alunos uma compreensão mais profunda das ideias matemáticas e, simultaneamente, desenvolver as suas competências de cálculo (Ponte, Boavida, Graça, & Abrantes, 1997). Além disso, a inclusão de novos temas no ensino secundário prendia-se com a preparação dos alunos para o ensino superior (Fischer & Fischer, 2011; Veloso, 1998).

Apesar das mudanças implementadas, os objetivos propostos pelo movimento da Matemática Moderna não foram cumpridos. O formalismo excessivo e a ênfase em estruturas abstratas revelaram-se de difícil compreensão para os alunos e as suas competências no raciocínio, na resolução de problemas e no domínio do cálculo não mostraram os progressos desejados (Ponte et al., 1997).

Em Portugal, a Matemática Moderna vingou durante dois períodos distintos. Durante os anos 60, teve uma fase experimental, orientada por José Sebastião e Silva, conduzida apenas em turmas do 3.º ciclo do antigo ensino liceal (atuais 10.º e 11.º anos de escolaridade) (Almeida & Matos, 2011; Ponte et al., 1997). José Sebastião e Silva defendia a importância da visualização e do desenvolvimento da intuição geométrica dos alunos (Veloso, 1998), evidenciando preocupação em renovar os métodos de ensino

(Ponte et al., 1997). No entanto, as repercussões do movimento da Matemática Moderna em Portugal não foram relevantes nesta época.

A partir do início dos anos 70, este movimento generalizou-se aos alunos de todos os níveis de escolaridade e foram elaborados novos programas que vigoraram até 1991. Com esta generalização e com a morte de Sebastião e Silva, o ensino da Matemática foi-se degradando, em particular o ensino da Geometria, que foi relegada a um "subproduto ou "parente pobre" da álgebra linear" (Veloso, 1998, p. 22). As atividades envolvendo construções geométricas foram consideradas matérias de outras disciplinas, como a Educação Visual (Abrantes, 1999), onde eram encaradas sem qualquer perspetiva matemática. Para Veloso (1998), a Geometria foi mesmo remetida para um lugar secundário no ensino da Matemática:

> (…) a geometria foi na prática desaparecendo do currículo implementado pelos professores. Esse desaparecimento não se tornava notado, pois nos estudos subsequentes, e em particular no secundário, ou mesmo no ensino superior, "a geometria não fazia falta para nada". Em consequência, gerações de alunos – muitos deles actuais professores de Matemática – atravessaram o ensino de Matemática tendo como únicos contactos com a geometria elementar o teorema de Pitágoras e algumas fórmulas para o cálculo de áreas e volumes. (p. 23)

Deste modo, as capacidades de observação e visualização, a experimentação e a construção, aspetos indutivos da Geometria, praticamente desapareceram do seu ensino. Este processo de desvalorização da Geometria no ensino da Matemática em Portugal decorreu principalmente nos anos 70 e 80 (Veloso, 1998).

Entretanto, noutros países, algumas experiências e reflexões sobre o ensino da Geometria começaram a preparar o seu regresso à Matemática escolar. Foi Freudenthal, com as suas preocupações quanto ao estado do ensino da Matemática, quem maior influência teve na revalorização da Geometria no currículo (Abrantes, 1999; Veloso, 1998). Na sua obra *Mathematics as an Educational Task*, publicada em 1973, apresenta, através de diversos exemplos e de comentários, algumas das principais orientações que propõe para a renovação do ensino da Geometria. Para o autor, a Geometria não é apenas dedução, é fundamentalmente "grasping that space in which the child lives, breathes and moves. The space that the child must learn to know, explore, conquer, in order to live, breathe and move better in it" (Freudenthal, 1973, p. 403). De acordo com a sua perspetiva, a Geometria proporciona uma excelente oportunidade para a aprendizagem da matematização da realidade e para a realização de descobertas que, ao serem concretizadas "by ones's own eyes and hands are more convincing and surprising" (Freudenthal, 1973, p. 407).

Durante os anos 80, surgiram outras publicações a nível internacional que vieram apoiar o movimento de reforma do ensino da Matemática, através das quais começou a ganhar a consideração da comunidade educativa outro tipo de competências para além do domínio do cálculo, como a resolução de problemas. Uma dessas publicações foi a *Agenda for action* do NCTM, que foi considerada um "manifesto onde se proclama que a resolução de problemas deve ser o foco da Matemática escolar" (Ponte et al., 1997, p. 54).

Outro marco essencial para a recuperação da Geometria como tema relevante no ensino da Matemática foi a publicação, em 1989, do *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* do NCTM, traduzido para português em 1991, com o título *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Este documento traduz as novas tendências curriculares e propõe, em particular na Geometria, a alteração dos programas vigentes à data no sentido de dar maior ênfase a aspetos como: (i) o estudo dos objetos geométricos e das suas relações, utilizando a geometria na resolução de problemas; (ii) a integração da Geometria através de todos os temas, em todos os anos de escolaridade; (iii) a exploração em computador de figuras bi e tridimensionais; (iv) o estudo da Geometria no espaço; (v) a modelação e aplicação ao mundo real; (vi) o estudo da Geometria através de abordagens por coordenadas e por transformações geométricas; (vii) o desenvolvimento de curtas sequências de teoremas e (viii) investigações conducentes a argumentos dedutivos expressos oralmente ou por escrito (NCTM, 1991).

As publicações anteriores, assim como o surgimento de novos materiais e *software* para o ensino da Geometria, constituíram uma referência para o seu regresso aos currículos de Matemática e colocaram-na num lugar de destaque (Rodrigues, 2012).

Em Portugal, a recuperação da Geometria no currículo também se deu com o aparecimento do computador e da sua utilização no ensino (Veloso, 1998). O surgimento do programa *LOGO*, de Seymour Papert, desencadeou um interesse crescente pelas questões da Geometria Plana, interesse esse que veio a ampliar-se com o desenvolvimento do projeto Minerva e com a realização das semanas *LOGO*. A par disto, a criação da

Associação de Professores de Matemática (APM), em 1986, trouxe um novo impulso à Geometria, através da publicação de artigos na revista *Educação e Matemática*, da realização de conferências e encontros anuais de professores e educadores. Teve um grande impacto a publicação pela APM de *O Geoplano na sala de aula* de Lurdes Serrazina e José Manuel Matos em 1988. Além de fomentar a utilização do geoplano, esta obra propunha uma metodologia inovadora no ensino da Geometria, sugerindo atividades de investigação e problemas onde os alunos deixavam de ser recetores passivos da informação transmitida pelo professor, para se tornarem participantes ativos na construção do seu conhecimento.

No final dos anos 80, aquando da reforma dos programas de Matemática, estavam lançadas algumas condições favoráveis para que a Geometria recuperasse o lugar que há muito lhe competia no currículo. No entanto, no novo programa de Matemática para o ensino secundário, generalizado desde 1993, permanecia a tradição de utilizar a Geometria para mostrar a Matemática na sua perspetiva hipotético-dedutiva (Veloso, 1998). Nas considerações relativas aos conteúdos podia ler-se "A Geometria assume um papel de relevo, considerando o seu poderoso contributo para a estruturação do pensamento e para a compreensão do meio" (Veloso, 1998, p. 34). Apesar dos autores deste programa sugerirem uma aproximação entre a Geometria no espaço e a realidade, esta primeira parte do programa raramente foi abordada pelos professores, restando a Geometria Analítica e a Trigonometria, que eram abordadas de acordo com a tradição, embora evitando a formalização relativa aos espaços vetoriais. O programa de Matemática continuava então a ignorar as recomendações recentes sobre o ensino da Geometria, principalmente as das *Normas* do NCTM, apostando na abordagem hipotético-dedutiva e na apresentação da Geometria Analítica como um tópico isolado no ensino secundário, pelo que houve a necessidade de realizar uma revisão curricular.

Ao longo de 1995, foram feitos vários ajustamentos ao novo programa tendo a versão final sido publicada em janeiro de 1997. Mas esta publicação, apesar de mostrar um esforço na direção certa, não permitia alterações de fundo no ensino da Geometria no ensino secundário. Como tal, havia ainda alterações relevantes a fazer:

> Assim, mantêm-se deficiências graves no programa de geometria do ensino secundário: - Apesar dos esforços feitos no ajustamento para procurar "um

equilíbrio entre a Geometria por via intuitiva com a Geometria Analítica" o peso desta no programa continua avassalador (Veloso, 1998, p. 35).

Os objetivos inerentes ao programa antes dos ajustamentos permaneceram intactos, continuando-se a perspetivar o ensino da Matemática no secundário como preparação para o prosseguimento de estudos e, sendo assim, privilegiava-se a Análise e a Álgebra em detrimento da Geometria que não estivesse ao serviço daquelas (Veloso, 1998), como as transformações geométricas e a geometria sintética.

Contudo, o ajustamento também trouxe algo positivo para o ensino da Geometria (Veloso, 1998), nomeadamente:

- "Foi dada uma posição de destaque à geometria, por ser o tema tratado em primeiro lugar tanto no 10º como no 11º anos, e são dadas indicações que permitem que seja retomada em praticamente todos os outros temas;
- Uma parte da geometria do 10º ano é dedicada à Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço, e aí os professores têm ocasião de levar os alunos a construir e manipular modelos, (…) resolver problemas e actividades de investigação em geometria, nomeadamente com a utilização de computadores;
- Mesmo na parte do programa dedicada à geometria analítica, que como dissemos é predominante, existem abundantes recomendações contra a referida redução da geometria analítica à álgebra" (p.36).

Em 2001, foi homologado o novo programa de Matemática A para o 10.º ano, cuja principal diferença em relação aos programas anteriores consistia na introdução de um Módulo Inicial. Este módulo tinha por objetivo minimizar os problemas de transição entre o 3.º CEB e o ensino secundário. Neste módulo, eram dadas indicações para que as tarefas a tratar incidissem essencialmente nos temas Números, Geometria e Álgebra e para que os problemas ou atividades propostas "ponham em evidência o desenvolvimento de capacidades de experimentação, o raciocínio matemático (com destaque para o raciocínio geométrico) e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjeturas e à sua verificação" (ME, 2001, p. 23).

Este programa reservava à Geometria um lugar de destaque relativamente a outros temas da Matemática, permitindo que os alunos desenvolvessem atividades interessantes no plano e no espaço e proporcionando-lhes o desenvolvimento de capacidades como a intuição geométrica, o raciocínio espacial, a visualização e a resolução de problemas. De acordo com este documento, deviam ser propostos aos estudantes:

> (…) problemas que possam ser resolvidos por vários processos (perspetiva sintética, geometria analítica, transformações geométricas, utilização de programas de geometria dinâmica, perspetiva vetorial). Devem explorar-se sempre que possível as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento deve prolongar-se noutros temas. (ME, 2001, p. 24)

Procurando colocar Portugal num nível de conhecimento matemático elevado e incentivando um ensino da Matemática rigoroso foi implementado, no ano letivo 2015/2016, durante o qual decorreu esta investigação, o Programa e Metas Curriculares de Matemática A para o ensino secundário (ME, 2013a). Este programa surgiu no âmbito da revisão curricular iniciada em 2011 e como consequência da alteração do programa de Matemática para o Ensino Básico (ME, 2013b).

Aquele documento estabelece os objetivos gerais a atingir pelos alunos em cada ano de escolaridade através de Metas Curriculares, fazendo referência apenas aos conteúdos que devem ser abordados dentro de cada tema e deixando de lado orientações metodológicas que ficam a cargo do professor. No referido programa, pode ler-se "este documento pretende definir um padrão coerente que imprima rigor ao que é ensinado nas escolas, garantindo simultaneamente aos professores autonomia pedagógica e liberdade de usar conhecimentos e experiência acumulada para auxiliar os alunos a atingir o seu melhor desempenho" (ME, 2013a, p. 3).

No que diz respeito ao 10.º ano de escolaridade, os domínios de conteúdos abordados são cinco: Lógica e Teoria dos Conjuntos, Álgebra, Geometria Analítica, Funções Reais de Variável Real e Estatística.

Tal como já foi referido, esta investigação debruça-se sobre a aprendizagem de alguns tópicos da Geometria Analítica no espaço.

1.4.1 Aspetos teóricos e curriculares da Geometria Analítica no espaço

Neste ponto, explicitam-se definições dos tópicos que serão trabalhados nesta investigação e o seu enquadramento no currículo de Matemática.

Ponto médio:

Num referencial ortonormado do espaço, as coordenadas do ponto médio, M, de um segmento de reta $[AB]$, em que $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$, são:

$$M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$$

(adaptado de Edwards & Penney, 1994, p. 690)

Plano mediador:

O plano mediador de um segmento de reta [AB] é o conjunto dos pontos do espaço equidistantes de A e de B. Como tal, a equação cartesiana do plano mediador de um segmento de reta [AB] em que $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ é:

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + (z - b_3)^2$$

(adaptado de Andrade, Pereira, & Pimenta, n.d., p. 88)

Superfície esférica:

A superfície esférica é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao centro, A, é igual ao raio r $(r > 0)$. Deste modo, a equação cartesiana da superfície esférica de centro em $A(a_1, a_2, a_3)$ e raio r $(r > 0)$ é dada por:

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = r^2$$

(adaptado de Andrade et al., n.d., p. 90)

Em seguida, faz-se o enquadramento curricular dos tópicos que serão trabalhados nesta investigação referindo não só o atual programa do Ensino Básico como o programa anterior pois, tendo ela decorrido no ano letivo 2015/2016, numa turma do 10.º ano de escolaridade, os alunos em questão não contactaram com o programa do Ensino Básico presentemente em vigor.

No atual programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013b), mais propriamente no 9.º ano de escolaridade, no domínio *Geometria e medida*, está incluído, entre outros tópicos, o estudo do *Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos*. Neste subdomínio, os alunos devem "designar por "plano mediador" de um segmento de reta [AB] o plano normal à reta suporte do segmento de reta no respetivo ponto médio e reconhecer que é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de A e de B" (ME, 2013b, p. 74). Além disso, no subdomínio *Medida*, os estudantes devem aprender a distinguir a superfície esférica da esfera e a calcular a medida da área da primeira e a medida do volume da segunda.

O programa de Matemática do Ensino Básico anterior ao atualmente em vigor (ME, 2007) distingue, para cada tema e capacidade Matemática, tópicos e objetivos específicos a atingir em cada ciclo de estudos. No 3.º ciclo do Ensino Básico, no tema *Geometria*, um dos tópicos introduzidos é o de *Lugares geométricos*. Neste âmbito, os objetivos específicos são dois: "identificar e construir circunferência, círculo, bissetriz e mediatriz" e "identificar superfície esférica e plano mediador" (p.53). Assim, tal como no atual programa, os conceitos de plano mediador de um segmento de reta e de superfície esférica são introduzidos no 3.º CEB.

No ensino secundário (ME, 2013a), no 10.º ano de escolaridade, os alunos aprofundam os conceitos abordados no 3.º CEB no domínio da *Geometria Analítica*. A este nível, trata-se, em primeiro lugar, a Geometria Analítica no plano e, depois, generalizam-se algumas das noções estudadas no plano para o espaço. No âmbito da *Geometria Analítica no plano*, os conteúdos previstos no programa são (ME, 2013a):

- "Referenciais ortonormados;
- Fórmula da medida da distância entre dois pontos no plano em função das respetivas coordenadas;
- Coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta;
- Equação cartesiana da mediatriz de um segmento de reta;
- Equações e inequações cartesianas de um conjunto de pontos;
- Equação cartesiana reduzida da circunferência;
- Definição de elipse e respetiva equação cartesiana reduzida; relação entre eixo maior, eixo menor e distância focal;
- Inequações cartesianas de semiplanos;
- Inequações cartesianas de círculos;
- Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do plano;
- Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do plano" (p.12).

No seguimento destes conteúdos, os previstos no estudo da Geometria Analítica no espaço são:

- "Referenciais cartesianos ortonormados do espaço;
- Equações de planos paralelos aos planos coordenados;
- Equações cartesianas de retas paralelas a um dos eixos;
- Distância entre dois pontos no espaço;
- Equação do plano mediador de um segmento de reta;
- Equação cartesiana reduzida da superfície esférica;
- Inequação cartesiana reduzida da esfera;
- Resolução de problemas envolvendo a noção de distância entre pontos do espaço;
- Resolução de problemas envolvendo equações e inequações cartesianas de subconjuntos do espaço" (p.12).

Aprofundando as orientações curriculares deste programa quanto aos tópicos que serão trabalhados neste estudo, as Metas Curriculares para o Ensino Secundário definem que, no domínio da *Geometria Analítica no espaço*, os estudantes devem aprender a determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta e a equação do plano mediador de um segmento de reta na forma:

$$ax + by + cz + d = 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Espera-se ainda, neste nível de ensino, que os alunos saibam justificar que:

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = r^2$$

é a equação cartesiana de uma superfície esférica de centro em $A(a_1, a_2, a_3)$ e raio r $(r > 0)$.

Assim, o que o programa do ensino secundário exige aos alunos do 10.º ano de escolaridade relativamente ao que já conhecem do 3.º CEB é aplicação dos conceitos a um referencial o.n., incentivando uma conexão mais profunda entre a Geometria e Álgebra.

2. Método

Recorde-se que a presente investigação tem como principal objetivo analisar a influência de uma adequada exploração, ao nível do 10.º ano de escolaridade, do *GeoGebra*, tirando partido das folhas gráfica 3D e algébrica e como complemento de ferramentas de 'papel e lápis', numa aprendizagem mais sólida relacionada com: o ponto médio de um segmento de reta no espaço, o plano mediador de um segmento de reta e a superfície esférica.

Neste capítulo, apresentam-se e fundamentam-se as opções metodológicas utilizadas neste trabalho tendo em conta os objetivos de investigação definidos. Procede-se à caracterização dos participantes e das técnicas e instrumentos de recolha de dados. Finalmente, após uma breve descrição do modo como decorreu a investigação, descreve-se o processo de tratamento dos dados e a forma como os resultados serão apresentados.

2.1. Opções metodológicas

Este tópico incide na fundamentação das opções metodológicas tomadas nesta investigação. Inserindo-se num paradigma interpretativo, a abordagem escolhida é qualitativa e com um *design* de estudo de caso.

Segundo Coutinho (2011, p. 9), um paradigma de investigação consiste num "conjunto articulado de postulados, de valores conhecidos, de teorias comuns e de regras" aceites universalmente pelos elementos de uma comunidade científica. A mesma autora define como paradigma interpretativo ou construtivista, aquele que adota uma posição relativista e subjetivista relativamente ao seu objeto de estudo, valorizando o papel do investigador na compreensão do mundo pelos sujeitos alvo da investigação.

2.1.1. Investigação qualitativa

Este estudo assume-se como uma investigação qualitativa que, apesar de não dispor de uma definição unívoca na comunidade científica (Coutinho, 2011), se carateriza por agrupar "diversas estratégias de investigação que partilham determinadas caraterísticas" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 16). Para Bogdan & Biklen (1994), nem todos os estudos qualitativos revelam estas caraterísticas com a mesma profundidade podendo, inclusive, excluir uma ou mais. Como tal, apresentam-se em seguida as cinco caraterísticas enunciadas pelos autores e em que medida são adequadas ao estudo em causa:

- "A fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal" (p.47).

  A fonte direta dos dados é uma turma do 10.º ano de escolaridade onde foi desenvolvida a Prática de Ensino Supervisionada (PES) I e II e os dados recolhidos correspondem às notas de campo da investigadora, ao registo em vídeo de uma aula e aos documentos produzidos pelos alunos em sala de aula;
- " A investigação qualitativa é descritiva" (p.48).

  Atendendo ao caráter qualitativo desta investigação, a forma de apresentação dos dados recolhidos será uma descrição do que foi ocorrendo nos diferentes momentos da investigação, em particular, nos momentos em que se procedeu à recolha de dados para que melhor se possam substanciar as afirmações realizadas durante a análise de resultados;
- "Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos" (p.49).

  Com o presente estudo, pretende-se compreender de que forma o *GeoGebra*, aliado a ferramentas de 'papel e lápis', poderá contribuir para a aprendizagem de conceitos da Geometria Analítica no espaço. Deste modo, não interessará só a aplicação daqueles conceitos no final da abordagem didática (produto) mas sim a forma como os alunos se apropriaram deles, as dificuldades sentidas durante o seu processo de aprendizagem e as dúvidas colocadas;
- "Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva" (p.50).

  Neste estudo, não se pretende confirmar ou rejeitar qualquer hipótese formulada previamente. Apesar de existirem diversas investigações que fundamentam o contributo do *GeoGebra* para a aprendizagem, devidamente complementado por outras ferramentas, interessa averiguar a adequabilidade da abordagem didática implementada para os alunos e tópicos em causa;
- "O significado é de importância vital na abordagem qualitativa" (p.50);

  Relativamente aos resultados decorrentes do tratamento e análise dos dados recolhidos, a investigadora tentará atribuir-lhes os significados possíveis fruto da sua vivência com os alunos enquanto sua professora.

2.1.2. Estudo de caso múltiplo

O estudo de caso qualitativo é uma estratégia de investigação que tem vindo a ganhar reconhecimento crescente na comunidade educativa, sendo muito frequente, em particular, nas investigações em educação Matemática (Ponte, 2006). Neste âmbito, "os estudos de caso têm sido usados para investigar questões de aprendizagem dos alunos", pelo que se considerou uma estratégia adequada aos objetivos desta investigação (Ponte, 2006, p. 3).

Segundo Coutinho (2011) e Ponte (2006), o estudo de caso é uma investigação cujo principal objetivo consiste em compreender em profundidade uma entidade bem definida, o caso, preservando o seu caráter único, particular e distinto. Esta estratégia revela-se adequada quando o investigador procura perceber o "como" e o "porquê" de determinados acontecimentos e o foco de investigação incide sobre fenómenos contemporâneos que decorrem no seu ambiente natural (Coutinho, 2011; Yin, 2003).

Ponte (2006) define um estudo de caso como uma investigação cujo objetivo é:

> compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade [caso], evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador. É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, (…) procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse. (p.2)

Yin (2003) carateriza o estudo de caso como uma investigação empírica na qual os limites entre o fenómeno em estudo e o respetivo contexto não se encontram definidos de forma precisa. Para além disso, o autor refere que o estudo de caso desenvolve-se com base num quadro teórico que orienta a recolha e análise de dados, devendo estes provir de múltiplas fontes de evidências.

Este trabalho insere-se num *design* de estudo de caso uma vez será analisado um fenómeno - a influência de uma adequada exploração do *GeoGebra*, como complemento de ferramentas de 'papel e lápis', numa aprendizagem mais sólida de alguns tópicos da Geometria – sendo do interesse da investigadora compreender *como* e *por que* razão o *software* terá contribuído ou não para a aprendizagem dos alunos. Mais ainda, o estudo decorreu num contexto de sala de aula, isto é, dentro do seu contexto de vida real. Além disso, a recolha e análise dos dados basearam-se em estudos teóricos preexistentes, efetuada com recurso a diversas fontes de evidências: notas de campo produzidas pela investigadora, registo em vídeo de uma aula e documentos produzidos pelos alunos. A opção por um estudo de caso qualitativo prendeu-se com a necessidade de compreender um fenômeno social complexo (Yin, 2003), a aprendizagem.

De acordo com o mesmo autor, existem três tipos de estudos de caso, distinguíveis relativamente aos seus propósitos: os estudos de caso analíticos (que procuram problematizar o seu objeto, construir ou desenvolver nova teoria ou confrontá-la com teoria já existente), os exploratórios (que têm como objetivo obter informação preliminar acerca do respetivo objeto de interesse) e os descritivos (cujo propósito essencial é descrever o caso em questão). O autor salienta ainda que "embora cada estratégia tenha suas caraterísticas distintas, há grandes áreas de sobreposições entre elas", pelo que os seus limites não são, necessariamente, claros e bem delimitados (Yin, 2003, p. 23).

Uma vez que existem na atualidade diversas investigações centradas no contributo do *GeoGebra* para a aprendizagem, considerou-se que o estudo de caso realizado é predominantemente exploratório mas devido à sua reduzida dimensão e à inexperiência da própria investigadora. Por outro lado, enquadra-se num estudo descritivo na medida em que se centra na descrição do caso em apreço (Ponte, 2006).

Yin (2003) faz ainda uma distinção entre estudos de caso únicos (quando dispomos de um caso *decisivo* para testar uma teoria bem formulada) e estudos de caso múltiplos (quando um mesmo estudo possui mais do que um caso único). Ponte (2006, p. 5) acrescenta que os estudos de caso múltiplos consistem em "diversos estudos de caso de algum modo comparáveis", cuja finalidade não é fazer generalizações para uma população, mas sim conhecer em maior profundidade as diferenças existentes dentro de um certo grupo e produzir conhecimento sobre casos particulares.

O presente estudo insere-se num estudo de caso múltiplo, uma vez que se pretende compreender com maior detalhe a influência de uma adequada exploração do *GeoGebra*, como complemento de ferramentas de 'papel e lápis', numa aprendizagem mais sólida de alguns tópicos da Geometria por alguns pares/trios de alunos, que constituem as unidades de análise. Os vários grupos que participaram na investigação consideraram-se casos comparáveis na medida em que estiveram nas mesmas condições durante o estudo empírico (tiveram a mesma professora e experienciaram a mesma abordagem didática).

2.2. Participantes no estudo

Neste tópico, caracterizam-se os participantes envolvidos nesta investigação e descreve-se o processo de seleção dos casos de estudo.

A investigação foi implementada numa escola da Horta que engloba o 3.º CEB e o Ensino Secundário, numa turma do 10.º ano de escolaridade. Foram considerados como participantes no estudo a professora/investigadora e os alunos da turma mencionada. Para além destes participantes (diretos), também esteve envolvida na recolha de dados a professora responsável pela turma (orientadora cooperante de estágio). A breve caracterização da escola e turma apresentadas em seguida constituem uma parte da que integra o *portfólio reflexivo* entregue à Universidade de Aveiro para efeitos de avaliação da PES da investigadora.

2.2.1. A professora

No ano letivo em que decorreu este estudo, a professora, que assumiu também o papel de investigadora, era a única aluna do mestrado em ensino de Matemática no 3.º CEB e no Ensino Secundário residente nos Açores e, por isso, tinha especial interesse em concorrer para aquela Região Autónoma quando terminasse o referido mestrado. Uma vez que a frequência de um estágio profissionalizante numa escola da Região Autónoma dos Açores influencia a ordenação dos candidatos ao concurso de pessoal docente[1], a Universidade de Aveiro autorizou a investigadora a realizar a PES na sua área de residência. Para o efeito, foi estabelecido, previamente, um protocolo entre a Secretaria Regional de Educação e Cultura da Região Autónoma dos Açores e a Universidade de Aveiro, onde foram estabelecidas as condições de realização do referido estágio. Por esta razão, a investigadora era a única aluna estagiária pertencente ao seu núcleo.

A professora/investigadora tinha, à data do estudo, 23 anos e é licenciada em Matemática pela Universidade de Aveiro (com um *menor* em Gestão), tendo concluído aquele curso em 2014. No ano letivo em que decorreu a investigação, encontrava-se a frequentar o 2º ano do mestrado anteriormente referido. No âmbito da unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada, entre outras atividades, assistia, planificava e implementava aulas em duas turmas, no 7.º e 10.º anos de escolaridade.

[1] Decreto Legislativo Regional n.º17/2015/A de 17 de abril. (2015). *Diário da República, 1.ª Série, N.º 119*. Região Autónoma dos Açores.

2.2.2. A escola

Este estudo foi realizado numa escola pública da Horta que serve uma população com cerca de 15 mil habitantes repartidos por três freguesias urbanas e dez freguesias rurais.

De acordo com o seu projeto educativo, a missão relativa ao triénio 2013/2016 consiste em "motivar os alunos para a escola e para o conhecimento, de modo a que se tornem cidadãos responsáveis e participativos". Como tal, aquele documento define como objetivos a atingir, entre outros: (i) desenvolver e aplicar um vasco reportório de metodologias e estratégias didáticas e (ii) ajudar os alunos a criar hábitos de trabalho e técnicas de estudo eficazes. Considera-se, assim, que os objetivos definidos nesta investigação adequam-se aos definidos pela escola, na medida em que a abordagem didática implementada, com características inovadoras, contribuirá para que os alunos criem hábitos de trabalho e estudo, incentivando-os a participarem na sua própria aprendizagem.

Para além dos cursos gerais do Ensino Secundário, a escola oferece também uma vertente de ensino tecnológico.

Quanto ao espaço físico, as instalações adequavam-se à oferta educativa contendo laboratórios de Biologia, Geologia, Física, Química, Matemática e Informática, salas de Artes Visuais, de Informática e Oficinas e um espaçoso complexo desportivo. O complexo desportivo era constituído por um pavilhão, um polidesportivo coberto, uma sala de combate, uma sala de ginástica, uma piscina, um campo de futebol e um corredor de salto em comprimento.

A escola funcionava num único edifício de três pisos e possuía 51 salas destinadas à prática letiva, todas elas equipadas com quadro interativo e um posto de trabalho para o professor com computador integrado, permitindo não só a interação com o quadro mas também o acesso à *Internet*, possibilitando a utilização de meios inovadores na prática pedagógica.

Relativamente às salas de Informática, existiam apenas três, equipadas com um total de 94 computadores e destinavam-se prioritariamente às disciplinas lecionadas por aquele departamento. Para além dos 94 computadores (fixos), a escola possuía 46 computadores portáteis que podiam ser requisitados para serem usados pelos alunos em sala de aula. Uma vez que a disponibilidade das salas de Informática era muito limitada, foram selecionados 8 dos computadores portáteis existentes na escola para a implementação da investigação, nos quais foi instalado previamente o *GeoGebra*. Durante a fase de recolha de dados, apenas a turma-alvo da investigação e a professora/ investigadora tiveram acesso aos computadores mencionados.

2.2.3. A turma

A turma-alvo do estudo era do Curso Científico-Humanístico de Ciências e Tecnologias sendo constituída por 22 alunos mas, na fase de recolha de dados, apenas 21 frequentaram as aulas. Dos 22 alunos, 14 são do sexo masculino e 8 do sexo feminino, havendo apenas um aluno retido. Em setembro de 2015 a média de idades dos alunos era de 14,8 anos.

Globalmente, a turma incluía alunos muito heterogéneos, quer em termos do seu desempenho escolar, quer ao nível dos seus objetivos e aspirações profissionais. Neste aspeto, 6 discentes ainda não sabiam o que desejavam desempenhar no futuro quando foram recolhidos os seus dados biográficos mas os restantes indicaram opções muito variadas desde a medicina, fisioterapia, farmácia, pediatria, veterinária, engenharia informática e agropecuária.

No que toca à zona de residência, 11 alunos viviam na cidade da Horta e 11 nas freguesias rurais.

Relativamente à presença de tecnologias em casa, 21 alunos tinham computador com *internet* e 1 não tinha nenhum deles.

As disciplinas mais mencionadas pelos discentes como suas favoritas foram Matemática e Educação Física e a que lhes causava maiores dificuldades era o Português.

No final do 1.º período do ano letivo 2015/2016, a média das classificações da turma na disciplina de Matemática A foi de 11,9 valores.

Os dados descritos sobre os alunos baseiam-se nas informações socioeconómicas fornecidas pela sua diretora de turma e no conhecimento, relativamente reduzido, da investigadora sobre eles. Tal como afirma Stake (2012, p. 20), "o nosso tempo e o acesso ao trabalho de campo são quase sempre limitados" e, neste caso, o contacto entre a investigadora e a turma resumiu-se às aulas de Matemática onde desenvolveu a PES, pelo que não foi possível recolher mais dados relevantes sobre estes alunos para a investigação.

2.2.4. Os casos

Como já foi referido anteriormente, o objetivo de um estudo de caso não é a generalização para uma população, mas sim compreender em maior profundidade o(s) caso(s) selecionado(s). Deste modo, surgiu a questão de que casos selecionar para esta investigação.

Segundo Stake (2012, p. 20), “o primeiro critério deverá ser maximizar o que podemos aprender”. Assim, devem-se escolher casos que permitam ao investigador fazer inferências e interpretações através de uma análise detalhada do trabalho por eles efetuado.

Além disso, poderia ser vantajoso tentar selecionar casos típicos ou representativos de outros (Stake, 2012). Contudo, existem poucas probabilidades de os casos selecionados serem fortemente representativos dos restantes, uma vez que, no âmbito de uma investigação em ciências sociais e humanas, os objetos de estudo são pessoas, dotadas de individualidade e caraterísticas próprias.

Atendendo aos objetivos desta investigação e aos recursos informáticos disponíveis, começou-se por agrupar os alunos da turma em trios e pares de forma a serem distribuídos pelos 8 computadores portáteis. A formação dos grupos não foi aleatória, sendo uma das preocupações da investigadora a constituição de grupos heterogéneos para que os alunos que revelavam mais capacidades e empenho ajudassem os menos motivados ou com dificuldades. A turma foi, assim, dividida em 8 grupos (tabela 1) que permaneceram juntos durante toda a investigação. Note-se que os nomes apresentados são fictícios uma vez que foi garantido o anonimato aos encarregados de educação aquando do pedido de autorização para a participação neste estudo.

Grupo	Alunos
1	Guilherme – Cláudio
2	Iara – Manuel – António
3	Leandro – Andreia – Daniel
4	Helena – Maria
5	Tomás – Paulo – Filipe
6	Gonçalo – Frederico – Susana
7	Beatriz - Joaquim
8	Jorge – Júlio - Rita

Tabela 1 - Grupos de trabalho.

Para a seleção dos casos de estudo, começou-se por excluir os grupos 7 e 8, dos quais não se dispunha das resoluções de todas as tarefas propostas. Atendendo à reduzida dimensão da investigação, a falta de alguns dados podia comprometer o entendimento dos casos de estudo. De entre os grupos que não foram eliminados escolheram-se três, os grupos 3, 4 e 5. Esta seleção foi demarcada pela singularidade dos casos, pelo interesse revelado durante o estudo empírico na resolução das tarefas propostas e, ainda, pela particularidade das respostas àquelas tarefas. Esta decisão foi difícil e exigiu bastante ponderação uma vez que a escolha dos casos de estudo pode alargar ou restringir as conclusões da investigação (Stake, 2012).

No capítulo de apresentação e análise de resultados, encontra-se uma caracterização mais pormenorizada dos casos selecionados e de cada um dos alunos que os integram.

2.3. Técnicas e instrumentos de recolha de dados

Atendendo à natureza desta investigação, os dados recolhidos foram maioritariamente qualitativos. Na aceção de Bogdan & Biklen (1994) os dados constituem os materiais em bruto recolhidos pelos investigadores no contexto natural do fenómeno que pretendem analisar.

Existem três principais técnicas de recolha de dados num estudo qualitativo: a observação, a recolha documental e a inquirição (Bogdan & Biklen, 1994; Coutinho, 2011; Quivy & Campenhoudt, 2005). Apesar de alguns estudos qualitativos assentarem exclusivamente num tipo de dados, os investigadores optam frequentemente por analisar material empírico proveniente de múltiplas fontes (Bogdan & Biklen, 1994). O recurso a várias fontes de evidências permite uma compreensão mais profunda do fenómeno em análise (Coutinho, 2011) e o surgimento de “linhas convergentes de investigação” (Yin, 2003, p. 121). O cruzamento destas “linhas”, designado na literatura por triangulação, atribui maior rigor ao estudo em causa e possibilita a validação dos seus resultados (Coutinho, 2011).

Nesta investigação, as principais técnicas de recolha de dados foram a observação (direta e participante) e a recolha documental, mais propriamente, das resoluções dos alunos a tarefas diversas e de outros documentos por eles produzidos, designadamente, no *GeoGebra*. Como tal, os instrumentos de recolha de dados incluem as notas de campo produzidas pela investigadora, o registo em vídeo de uma aula e as produções dos alunos em formato escrito e digital.

2.3.1. Notas de campo

Para Bogdan & Biklen (1994, p. 150) as notas de campo são "o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e reflectindo sobre os dados de um estudo qualitativo", no entanto, nem sempre é possível tomar essas notas no momento da observação (Quivy & Campenhoudt, 2005).

As notas de campo, realizadas pela investigadora, decorreram da observação direta e da análise detalhada do registo em vídeo de uma das aulas em que foi implementado o estudo. Estas permitiram ter acesso a alguns comportamentos dos alunos durante a abordagem didática que não ficaram registados nos documentos por eles produzidos.

2.3.2. Registo em vídeo

Uma das aulas em que decorreu o estudo empírico foi registada em suporte vídeo. Dado o contexto de estágio da investigadora e a distância geográfica entre a Universidade de Aveiro e a escola onde o mesmo decorreu, a orientadora da universidade avaliava o desempenho da investigadora na implementação de aulas via *Skype*. Contudo, atendendo às falhas de ligação que habitualmente se verificavam, as aulas assistidas por aquela orientadora eram ainda gravadas em suporte vídeo. Assim, como uma das aulas em que decorreu o estudo empírico coincidiu com as aulas assistidas, ficou registada no referido suporte.

Devido à fraca qualidade da gravação, não foi possível aceder aos diálogos entre os grupos de trabalho durante a realização das tarefas propostas. Contudo, esta permitiu ter acesso aos diálogos estabelecidos entre a investigadora, a professora responsável pela turma e os alunos durante a formalização dos conceitos abordados. Em particular, possibilitou a análise das dúvidas levantadas pelos estudantes nesse momento, proporcionando uma melhor compreensão das dificuldades sentidas na resolução das tarefas propostas.

Para além do que já foi referido, este registo serviu ainda de suporte às notas de campo produzidas pela investigadora, constituindo um instrumento de apoio à observação.

2.3.3. Documentos produzidos pelos alunos

Parafraseando Bogdan & Biklen (1994, p. 176), “os dados produzidos pelos sujeitos são utilizados como parte dos estudos em que a tónica principal é a observação participante ou a entrevista”. É o caso deste estudo.

Durante a implementação da sequência didática, os alunos resolveram várias tarefas e um teste. Em algumas das tarefas e partes do teste foram utilizadas exclusivamente ferramentas de ‘papel e lápis’ e noutras recorreu-se a essa estratégia em conjunto com o *GeoGebra*. Todas as produções dos alunos tanto em formato escrito como digital foram recolhidas pela investigadora. Estas resoluções permitiram obter evidências de compreensão, dúvidas e dificuldades com que os alunos se depararam durante a resolução das tarefas propostas.

2.4. Descrição do estudo

Este estudo decorreu entre setembro de 2015 e outubro de 2016, dividindo-se em três grandes etapas: (1) planificação das aulas e construção dos materiais a utilizar; (2) implementação do estudo empírico e recolha de dados e (3) análise de dados.

Na primeira, procedeu-se à revisão de literatura que serviu de suporte teórico à planificação das aulas (ver apêndices 1 e 2) e à construção dos recursos didáticos a utilizar.

Para a implementação do estudo empírico e recolha de dados planificaram-se três aulas. De uma forma genérica, essas aulas foram planificadas de forma a incentivar uma construção de conhecimento mediada por um ADGD, neste caso, o *GeoGebra*. Além disso, propunha-se uma dinâmica de trabalho em grupo, incitando os alunos a intervir ativamente na construção do seu próprio conhecimento interagindo com os colegas.

De acordo com alguns autores, no âmbito da educação matemática recomenda-se a utilização de tarefas exploratórias, dadas as suas vantagens para a aprendizagem dos alunos (Canavarro, 2011; Ponte, 2005). Em conformidade com estes autores, procurou-se formular tarefas desta natureza, deixando “uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção de conhecimento para os alunos realizarem” (Ponte, 2005, p. 13).

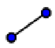
Os mesmos autores incentivam também a reflexão e discussão coletiva sobre o trabalho realizado posteriormente à concretização das tarefas propostas, dado que esta discussão pode favorecer uma apropriação mais sólida de conceitos e o desenvolvimento de capacidades matemáticas, nomeadamente, de comunicação (Canavarro, 2011).

Atendendo aos objetivos desta investigação, construiu-se ainda um teste de avaliação das aprendizagens. O teste é constituído por duas partes: uma teórica (apêndice 3), a ser resolvida com recurso ao papel e lápis, e uma prática (apêndice 4), a ser resolvida com recurso ao *GeoGebra*.

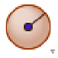
A parte teórica (PT) é composta por duas questões, com um total de três alíneas. A primeira questão é um problema inserido num contexto da vida real. Na alínea 1.1, os alunos tinham de determinar a distância percorrida pela mosca até à aranha (aplicação do conceito da distância entre dois pontos no espaço) e as coordenadas do ponto onde se encontra a aranha (aplicação do conceito ponto médio de um segmento de reta no espaço). Na alínea 1.2, é pedido para definir analiticamente o plano mediador de um segmento de reta.

A segunda questão é um exercício adaptado de um Teste Intermédio de Matemática A de 2010, versão 1, no qual é dado um prisma quadrangular regular representado num referencial o.n. $Oxyz$. É dito que a base inferior do prisma, $[OPQR]$, está contida no plano xOy e são fornecidas as coordenadas do ponto P. Como o prisma é quadrangular regular, os alunos deveriam determinar as coordenadas do ponto Q e, a partir daí, indicar a condição que define a superfície esférica de centro no ponto Q e que passa no ponto O (origem do referencial).

Relativamente à parte prática (PP), a estrutura é a mesma da parte teórica, sendo composta por duas questões com um total de três alíneas. Para responder ao teste, os alunos poderiam efetuar cálculos mas tinham de recorrer ao *GeoGebra* em todas as alíneas.

A primeira questão é composta por duas alíneas. Em relação à 1.1, os alunos tinham de determinar as coordenas do ponto médio de um segmento de reta, com recurso à ferramenta  e, em seguida, a distância entre um ponto e o ponto médio calculado, usando a ferramenta .

Na alínea 1.2, os discentes tinham de determinar a equação que define o plano mediador de um segmento de reta com recurso à ferramenta  (plano perpendicular).

Na segunda questão, dados os extremos do segmento de reta $[AB]$ que define o diâmetro de uma superfície esférica, pretendia-se que os alunos determinassem a equação reduzida que carateriza essa superfície esférica. Para responder, os discentes poderiam usar duas ferramentas: a Esfera  (dados o centro e o raio) ou a Esfera  (dados o centro e um ponto).

O teste seria implementado em dois momentos distintos do estudo empírico, no início e no final. Como tal, abrange duas modalidades: teste inicial (TI) e teste final (TF).

A modalidade teste inicial teve como objetivos: compreender se os alunos seriam capazes de, autonomamente, transpor os conhecimentos adquiridos no âmbito da Geometria Analítica no plano para a Geometria Analítica no espaço e diagnosticar a sua destreza na utilização do *GeoGebra*.

A modalidade teste final teve como propósito avaliar a evolução do desempenho dos alunos após a intervenção didática através da comparação das respostas dadas no teste inicial.

Quanto à sequência de tarefas, optou-se por estruturá-la em cinco tarefas de complexidade e abertura variadas, cada uma delas incidindo num dos tópicos previstos: distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento de reta, equação cartesiana do plano mediador de um segmento de reta, equação cartesiana reduzida da superfície esférica e inequação cartesiana reduzida da esfera. Para além das tarefas anteriores, a partir das quais se exploravam os conceitos de Geometria Analítica no espaço a abordar, selecionaram-se outras do manual para a aplicação e consolidação dos mesmos.

Apesar de variarem quanto ao grau de complexidade e abertura, as cinco tarefas principais seguem uma estrutura semelhante. Em primeiro lugar, recordam-se os conceitos prévios relacionados com o novo conteúdo a aprender na secção *Recorda*. Em seguida, surgem perguntas relacionadas com uma situação particular envolvendo o tópico da tarefa. No final, os alunos são incentivados a generalizar a situação.

Na tarefa 0 (apêndice 5), é trabalhada a expressão analítica que permite determinar a distância entre dois pontos no espaço usando exclusivamente papel e lápis. Esta tarefa está formulada num contexto de realidade.

Na tarefa 1 (apêndice 6), são trabalhadas as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta no espaço, usando métodos analíticos em simultâneo com o *GeoGebra*. Esta tarefa está formulada num contexto matemático.

Na tarefa 2 (apêndice 7), é trabalhada a equação cartesiana do plano mediador de um segmento de reta no espaço usando métodos analíticos em simultâneo com o *GeoGebra*. Esta tarefa também está formulada num contexto matemático.

Na tarefa 3 (apêndice 8), é trabalhada a equação cartesiana da superfície esférica usando métodos analíticos em simultâneo com o *GeoGebra*. Esta tarefa está formulada num contexto de semirrealidade.

Na tarefa 4 (apêndice 9), é trabalhada a inequação cartesiana da esfera usando exclusivamente métodos analíticos. Esta tarefa também está formulada num contexto de semirrealidade.

Na tabela 2 encontra-se discriminada, por cada uma das aulas em que se planificou a implementação do estudo empírico, a duração prevista para cada tarefa a implementar e os recursos envolvidos.

<table>
<tr><th>Data</th><th colspan="2">Tarefas</th><th>Recursos</th><th>Duração</th></tr>
<tr><td rowspan="4">21 de janeiro</td><td rowspan="4">Aula 1</td><td>Teste inicial (PT+PP)</td><td>Papel e Lápis
GeoGebra</td><td>20 min</td></tr>
<tr><td>Tarefa 0 - Distância entre dois pontos no espaço</td><td>Papel e Lápis</td><td>25 min</td></tr>
<tr><td>Tarefa 1 - Ponto médio de um segmento de reta no espaço</td><td>Papel e Lápis
GeoGebra</td><td>20 min</td></tr>
<tr><td>Tarefa 2 - Plano mediador de um segmento de reta</td><td>Papel e Lápis
GeoGebra</td><td>20 min</td></tr>
<tr><td rowspan="3">22 de janeiro</td><td rowspan="3">Aula 2</td><td>Tarefa 3 - Equação cartesiana reduzida da superfície esférica</td><td>Papel e Lápis
GeoGebra</td><td>15 min</td></tr>
<tr><td>Tarefa 4 - Inequação cartesiana reduzida da esfera</td><td>Papel e Lápis</td><td>15 min</td></tr>
<tr><td>Tarefas de consolidação</td><td>Papel e Lápis
GeoGebra</td><td>55 min</td></tr>
<tr><td>26 de janeiro</td><td>Aula 3</td><td>Teste final (PT+PP)</td><td>Papel e Lápis
GeoGebra</td><td>20 min</td></tr>
</table>

Tabela 2 – Planificação do estudo empírico.

Antes da segunda etapa desta investigação ter início, decidiu-se realizar uma aula introdutória do *GeoGebra* uma vez que o *software* era desconhecido dos alunos. O objetivo da aula foi possibilitar um primeiro contacto com o programa e explicar como funcionavam algumas ferramentas básicas tais como: Novo Ponto, Segmento de Reta, Mediatriz, Interseção de dois objetos e Circunferência. Os discentes aprenderam ainda a construir objetos geométricos introduzindo a sua expressão analítica na caixa de entrada.

Nesta sessão, decorrida em dezembro, os alunos exploraram apenas as folhas algébrica e gráfica 2D do *GeoGebra*, pois os conteúdos programáticos lecionados até à data incidiam na Geometria Analítica no plano.

Antes da implementação da abordagem didática planificada, já tinham sido abordados todos os conteúdos relativos à Geometria Analítica no plano (exceto o cálculo vetorial) e iniciado o estudo da Geometria Analítica no espaço. Neste domínio, os alunos aprenderam a determinar as coordenadas de pontos no espaço, definir planos paralelos aos planos coordenados e a definir retas paralelas a um dos eixos coordenados.

Na segunda etapa, deu-se a implementação do estudo empírico e a respetiva recolha de dados. Esta fase decorreu no período referido na tabela anterior. Ao longo das três aulas, os alunos resolveram várias tarefas, algumas utilizando exclusivamente papel e lápis, outras recorrendo a essa estratégia em conjunto com o *GeoGebra*.

A primeira aula implementada iniciou-se, tal como previsto, com a realização do teste. Os alunos resolveram primeiro a parte teórica, individualmente e, em seguida, a parte prática, em grupos. Note-se que os grupos foram os anteriormente referidos e mantiveram-se durante toda a investigação. Os alunos tiveram 10 minutos para resolver cada uma das componentes do teste.

Como a turma nunca tinha trabalhado na folha gráfica 3D do *GeoGebra*, a professora/investigadora ilustrou, no início da parte prática do teste e a partir do quadro interativo, como ativá-la. Durante a realização desta componente, foi evidente que alguns alunos já não se recordavam como se realizavam alguns procedimentos básicos no *GeoGebra* que tinham sido abordados na sessão introdutória, em dezembro. Alguns discentes questionaram a professora/investigadora sobre como se introduziam pontos no *software* mas acabaram por fazê-lo autonomamente. Foi, também, notória a falta de conhecimentos sobre a folha gráfica 3D. Uma das alunas questionou a professora/investigadora sobre qual seria o eixo das abcissas e qual seria o eixo das ordenadas. Evitando fornecer respostas, a professora sugeriu-lhe que introduzisse um ponto pertencente a um desses eixos e observasse onde o programa o iria desenhar. Apesar de desconhecerem esta folha gráfica, os grupos, de uma forma geral, mostraram interesse na realização desta componente do teste, trocando impressões sobre a tarefa com os seus colegas de grupo.

De seguida, foi proposta a tarefa 0, cuja implementação não correu conforme planeado. Apesar de, genericamente, os grupos não terem tido dificuldades em resolver a pergunta 1, o tempo atribuído para a resolução da tarefa não foi suficiente. Como tal, metade dos grupos não chegou a responder à pergunta 2.

Quanto à tarefa 1, a primeira na qual os alunos trabalharam na folha gráfica 3D do *GeoGebra* com orientação da professora/investigadora, alguns grupos tiveram dificuldade, inicialmente, em variar os extremos do segmento de reta [AB] de forma a obterem coordenadas inteiras de pontos. Considerando que, se os pontos A e B tivessem coordenadas inteiras seria mais intuitivo para os alunos relacioná-las com as coordenadas do ponto médio do segmento respetivo, a professora/investigadora ilustrou, a partir do quadro interativo, como poderiam variar A e B para que as suas coordenadas fossem sempre inteiras.

Quanto à tarefa 2, a maioria dos grupos não teve dificuldade em construir o plano mediador do segmento de reta [AB], acompanhando as indicações da professora/investigadora através da projeção do ficheiro no quadro interativo. Optou-se por orientar a turma na construção do plano que era pedido no *GeoGebra* pois esta nunca tinha trabalhado na folha gráfica 3D. Assim, embora os benefícios pudessem ser consideráveis, era provável que os alunos demorassem muito mais tempo a realizar autonomamente os passos necessários para completar a construção.

Nesta tarefa também houve desvios ao plano. Como não houve tempo suficiente para os grupos construírem o plano mediador e concluírem a resolução da tarefa, responderam à pergunta 2 apenas na aula seguinte. Assim, as suas resoluções foram recolhidas no final da aula do dia 21 e voltaram a ser-lhes entregue na aula seguinte.

A segunda aula implementada iniciou-se, então, com a devolução aos grupos das suas resoluções da tarefa 2 e posterior formalização do conceito de plano mediador que lhe está associado.

Em seguida, foram implementadas as tarefas 3 e 4 cujas resoluções não evidenciaram dificuldades. Em relação à tarefa 3, todos os grupos conseguiram determinar a distância entre o centro da bola insuflável e o ponto marcado na sua superfície, tanto analiticamente como por recurso ao *GeoGebra*.

Relativamente ao plano da segunda aula da abordagem didática, salienta-se que este não foi cumprido por falta de tempo. Assim, no que respeita às tarefas de consolidação planeadas para a sexta parte dessa aula (ver apêndice 2), só foram realizadas até à 153 (inclusive).

Na terceira aula da abordagem didática foi implementado, tal como previsto, o teste final, nos mesmos moldes nos quais foi aplicado o teste inicial.

Todas as produções dos alunos foram recolhidas para efeitos da investigação. Note-se que as resoluções das 5 tarefas que foram realizadas em suporte escrito foram recolhidas antes da formalização dos conceitos que lhes estavam subjacentes e as realizadas no *software* foram guardadas, pelos alunos, no ambiente de trabalho dos seus computadores.

Finalmente, na terceira e última etapa desta investigação procedeu-se à análise dos dados obtidos na etapa anterior.

2.5. Tratamento de dados e apresentação de resultados

Neste ponto, descreve-se a forma como os dados provenientes dos vários instrumentos de recolha foram tratados e os respetivos resultados serão apresentados no capítulo seguinte.

Os dados recolhidos através do teste, nas duas modalidades, foram quantificados, aplicando-se-lhes, em seguida, uma estatística descritiva simples. Para o seu tratamento e apresentação, foram utilizados o programa Excel, tabelas para comparação dos resultados e os ganhos e perdas relativos.

O ganho relativo é uma variável que traduz a evolução de desempenho do aluno em duas provas idênticas ou equivalentes aplicadas em momentos de avaliação distintos. Os seus limites variam entre 0 e 100 e permitem comparações fáceis entre os resultados experimentais (D'Hainaut, 1992). Esta variável calcula-se da seguinte forma:

$$R = 100 \times \frac{S-A}{T-A} \text{ com } S \geq A$$

Com:

S = nota à prova posterior

A = nota à prova anterior

T = máximo comum às duas provas

Atendendo aos instrumentos de recolha de dados utilizados nesta investigação, o ganho relativo foi calculado através dos resultados obtidos no teste aplicado no início e no final do estudo empírico, ou seja, usando os resultados obtidos no teste inicial (TI) e no teste final (TF):

$$R = 100 \times \frac{TF-TI}{T-TI} \text{ com } TF \geq TI$$

D'Hainaut (1992, p. 142) refere que "o ganho relativo é independente do nível do ponto de partida".

Por outro lado, a perda relativa representa a regressão de desempenho do aluno, constituindo um número negativo que varia entre 0 e -100 (D'Hainaut, 1992). Calcula-se através do seguinte quociente:

$$R = 100 \times \frac{S-A}{A} \text{ com } S < A$$

No contexto desta investigação, a expressão acima traduz-se para:

$$R = 100 \times \frac{TF-TI}{TI} \text{ com } TF < TI$$

Através da discriminação dos ganhos e perdas relativos em cada uma das componentes do teste, para cada grupo-caso selecionado, pretende-se proporcionar uma perspetiva global da evolução do conhecimento construído pelos casos de estudo ao longo da abordagem didática. Como tal, o capítulo de seguinte iniciar-se-á pela análise comparativa dos resultados do teste.

Quanto aos dados recolhidos de caráter qualitativo, foram alvo de uma análise de conteúdo orientada por categorias, definidas *a priori*, que decorrem dos objetivos da investigação. Assim sendo, as categorias de análise prendem-se com conhecimentos relativos a:

- Ponto médio;
- Plano mediador;
- Superfície esférica.

Após a análise comparativa dos resultados do teste, o capítulo de apresentação e análise de resultados será estruturado pelos grupos-caso selecionados, com o propósito de dar a conhecer, em maior profundidade, a singularidade de cada um deles. Para cada caso de estudo, analisam-se os resultados obtidos de acordo com as três categorias de análise, seguindo uma dimensão descritiva e, sempre que possível, interpretativa. Os resultados serão, também, apresentados por ordem cronológica. Assim, começa-se pelas produções dos alunos no teste inicial, seguindo-se as resultantes das tarefas implementadas durante a abordagem didática e finaliza-se com os resultados provenientes do teste final. As afirmações feitas serão fundamentadas através de digitalizações das produções dos alunos relativas às diversas tarefas e ao teste. Além disso, serão transcritas algumas notas de campo da investigadora, identificadas como NC_dia_mês_ano, e partes do registo em vídeo da aula, identificadas na forma V_dia_mês_ano.

3. Apresentação e análise de resultados

Neste capítulo, analisam-se e apresentam-se os resultados provenientes dos dados recolhidos pelos diversos instrumentos de recolha já explicitados. Em primeiro lugar, procede-se à análise comparativa dos resultados do teste de avaliação das aprendizagens e, em seguida, apresenta-se e analisa-se, em maior detalhe, o trabalho realizado por cada caso de estudo.

Recorde-se que, ao longo desta investigação, os alunos realizaram diversas tarefas, algumas em grupo e outras individualmente. Os dados provenientes das tarefas realizadas em grupo serão analisados em grupo, enquanto os resultantes das tarefas efetuadas de forma individual serão examinados em conformidade.

3.1. Análise comparativa dos resultados do teste

Neste ponto, apresentam-se os resultados obtidos pelos grupos nos dois momentos de avaliação, teste inicial e teste final. Recorde-se que o teste foi estruturado para que, na questão 1.1, fosse avaliada a compreensão e aplicação dos conceitos ponto médio de um segmento de reta e distância entre dois pontos no espaço, tanto na componente teórica como na componente prática. Do mesmo modo, a questão 1.2 avalia se os alunos compreenderam e são capazes de definir o plano mediador de um segmento de reta e, finalmente, na questão 2 avalia-se o conhecimento construído sobre a superfície esférica.

De uma forma geral, o desempenho da turma no teste inicial (PT) ficou aquém das expetativas, sendo a sua média 5 valores. Quanto aos casos de estudo, a sua média na mesma componente e modalidade do teste foi de 7,2 valores.

Tendo em conta que a componente teórica do teste foi realizada individualmente, apresentam-se, na tabela 3, os resultados obtidos por cada um dos alunos que integram os três casos de estudo. Estes resultados estão expressos em valores absolutos (numa escala de 0 a 20 valores).

Como se pode observar, no teste inicial, o Daniel foi quem obteve a classificação mais baixa (1 valor), por oposição à Maria, que obteve a classificação mais alta (10,8 valores). Evidencia-se, ainda, o facto de, no grupo 5, os três alunos terem obtido a mesma classificação (9 valores).

			Teste Inicial								Teste Final							
			Grupo 3			Grupo 4		Grupo 5			Grupo 3			Grupo 4		Grupo 5		
Questão/Alínea		Cotação	Leandro	Andreia	Daniel	Helena	Maria	Tomás	Paulo	Filipe	Leandro	Andreia	Daniel	Helena	Maria	Tomás	Paulo	Filipe
1	1.1	8	5,5	3	0	0	5	8	8	8	8	8	5,5	6	8	8	8	2
	1.2	6	1	1	1	1	0	1	1	1	5	5,5	4	5,5	6	6	4,5	1
2		6	0	3	0	4,3	5,8	0	0	0	4	6	0	6	6	6	4	5,6
Total		20	6,5	7	1	5,3	10,8	9	9	9	17	19,5	9,5	17,5	20	20	16,5	8,6

Tabela 3 – Resultados da componente teórica do teste (em valor absoluto).

Quanto ao desempenho global da turma no teste final (PT), a média foi de 11,5 valores. Em particular, a média das classificações obtidas pelos casos de estudo na mesma componente e modalidade do teste foi de 16,1 valores.

Em relação a este teste e ao grupo 5 em particular, contrariamente ao que tinha acontecido no teste inicial, os alunos não obtiveram a mesma classificação, algo que será aprofundado durante a análise detalhada deste grupo no ponto 3.4. É de notar, ainda, a ligeira descida do Filipe que obteve 9 valores e 8,6 valores nos testes inicial e final, respetivamente. À exceção deste aluno, todos os outros obtiveram melhores classificações no teste final.

Importa também referir os ganhos e perdas relativos que permitem comparar o desempenho de um indivíduo em momentos de avaliação distintos (D'Hainaut, 1992). Atendendo aos resultados obtidos pela turma na componente teórica do teste aplicado nos dois momentos do estudo empírico a média dos ganhos e perdas relativos foi de 47,7%. Quanto aos casos de estudo, em particular, mostram-se, na tabela 4, os ganhos e perdas relativos de cada aluno em cada uma das alíneas do teste. Pretende-se, assim, analisar a evolução do conhecimento construído nos dois momentos de avaliação relativamente a cada categoria de análise.

		Ganhos e Perdas Relativos (%)							
		Grupo 3			Grupo 4		Grupo 5		
Questão/Alínea		Leandro	Andreia	Daniel	Helena	Maria	Tomás	Paulo	Filipe
1	1.1	100	100	68,8	75	100	0	0	-75
	1.2	80	90	60	90	100	100	70	0
2		66,7	100	0	100	100	100	66,7	93,3
Total (PT) [2]		77,8	96,2	44,7	83	100	100	68,2	-4,4

Tabela 4 – Ganhos e perdas relativos da PT do teste (em percentagem).

Tendo em conta a classificação total obtida no teste inicial, a Maria e o Tomás foram os alunos que mais evoluíram na componente teórica, como se pode observar pelo seu ganho relativo de 100%. Contrariamente, o Filipe foi o único aluno que regrediu, ainda que pouco significativamente, nesta componente do teste, apresentando uma perda relativa de 4,4%.

[2] Ganhos e perdas relativos em relação à classificação total obtida na componente teórica do teste inicial.

Quanto ao grupo 3, o Daniel mostra uma grande evolução na alínea 1.1 com um ganho relativo de 68,8%. Quanto ao Leandro e à Andreia, apresentam ambos um ganho relativo de 100% nesta questão.

Relativamente ao grupo 4, a Helena apresenta um ganho relativo de 75% na questão 1.1. A Maria, por seu lado, apresenta um ganho relativo de 100%.

Analisando agora o grupo 5, o Tomás e o Paulo apresentam um ganho de 0% na questão 1.1, uma vez que apresentaram a resposta correta logo no teste inicial (veja-se a tabela 3). Pelo contrário, o Filipe mostra uma perda de 75%.

Em relação ao plano mediador (questão 1.2), o Filipe é o único que revela um ganho relativo de 0%, por apresentar a mesma resolução tanto no teste inicial como no teste final. Os restantes alunos apresentam ganhos relativos variados, desde os 60% (o Daniel) aos 100% (a Maria e o Tomás).

Relativamente à superfície esférica (questão 2), a Andreia, a Helena, a Maria e o Tomás revelam um ganho relativo de 100%. Por outro lado, o Leandro, o Paulo e o Filipe apresentam ganhos relativos inferiores. O Leandro e o Paulo revelam um ganho relativo de 66,7%, enquanto o Filipe mostra um ganho relativo de 93,3%. Salienta-se, ainda, os resultados obtidos pelo Daniel, que apresenta um ganho relativo de 0% por ter deixado a questão em branco, tanto no teste inicial como no teste final.

Quanto ao desempenho global da turma na PP do teste inicial, a média foi de 3,3 valores (numa escala de 0 a 20). Relativamente aos casos de estudo, a sua média na mesma componente e modalidade do teste foi de 4,7 valores.

Tendo em conta que a componente prática do teste foi realizada em grupos, apresentam-se, na tabela 5, os resultados obtidos por cada um dos grupos-caso selecionados nesta investigação. Estes resultados estão expressos em valores absolutos (numa escala de 0 a 20 valores). Analisando esta tabela em detalhe, observa-se que, no início da sequência didática, os casos tinham pouca destreza no manuseamento do *GeoGebra*, apresentando todos eles classificação negativa no teste inicial.

			Teste Inicial			Teste Final		
Questão/Alínea		Cotação	G3	G4	G5	G3	G4	G5
1	1.1	7	3	4	7	7	7	7
	1.2	6	0	0	0	6	2	6
2		7	0	0	0	7	5	7
Total		20	3	4	7	20	14	20

Tabela 5 - Resultados da componente prática do teste (em valor absoluto).

Todos os grupos no teste inicial responderam apenas à alínea 1.1. Salienta-se que, no teste inicial, o grupo 5 foi o único que obteve a classificação máxima nesta alínea.

Em relação ao desempenho global da turma na PP do teste final, a média foi de 15,2 valores (numa escala de 0 a 20). Em particular, a média das classificações obtidas pelos casos de estudo na mesma componente e modalidade do teste foi de 18 valores.

Focando, agora, o desempenho dos casos de estudo, observa-se uma grande evolução do teste inicial para o teste final, apresentando os grupos 3 e 5 a nota máxima na PP deste teste. Quanto ao grupo 4, atingiu uma classificação de 14 valores no teste final, o que fica um pouco aquém dos seus resultados no mesmo teste na componente teórica.

Considerando os resultados obtidos pela turma na componente prática do teste aplicado nos dois momentos do estudo empírico a média dos ganhos e perdas relativos foi de 79%. Quanto aos casos de estudo, em particular, mostram-se, na tabela 6, os ganhos e perdas relativos de cada grupo-caso selecionado nesta investigação.

Em relação à classificação total obtida no teste inicial, os grupos 3 e 5 foram os que mais evoluíram na componente prática, apresentando, ambos, um ganho relativo de 100%. Por outro lado, o grupo 4, também evoluiu na mesma componente do teste mas apresenta um ganho relativo de apenas 62,5%.

Analisando esta tabela em detalhe, observa-se, ainda, que o grupo 5 apresenta um ganho relativo de 0% na questão 1.1, uma vez que apresentou a resposta correta logo no teste inicial (veja-se a tabela 5). Excluindo esta alínea, o grupo apresenta um ganho relativo de 100% em todas as questões do teste, assim como o grupo 3. Contrariamente, o grupo 4, revela ganhos relativos inferiores aos dos grupos anteriores nas várias alíneas que constituem o teste.

		Ganhos e Perdas Relativos (%)		
Questão/Alínea		G3	G4	G5
1	1.1	100	100	0
	1.2	100	33,3	100
2		100	71,4	100
Total (PP) [3]		100	62,5	100

Tabela 6 - Ganhos e perdas relativos da PP do teste (em percentagem).

[3] Ganhos e perdas relativos em relação à classificação total obtida na componente prática do teste inicial.

3.2. Grupo 3

Recorde-se que o grupo 3 era constituído pelo Leandro, a Andreia e o Daniel. Este grupo era heterogéneo no que diz respeito ao desempenho escolar mas semelhante ao nível das atitudes na sala de aula.

O Leandro era um aluno muito empenhado e trabalhador. Frequentemente, realizava as tarefas propostas à turma e tomava a iniciativa de fazer outras, mostrando uma grande capacidade de trabalho. Com uma personalidade reservada, participava nas aulas apenas quando solicitado. Este aluno obteve a classificação de 19 valores no final do 1.º período.

A Andreia também era igualmente empenhada e trabalhadora mas, pelo contrário, bastante participativa. Mostrava interesse em resolver as tarefas propostas e colocava as suas dúvidas com segurança sempre que estas surgiam. No final do 1.º período, obteve a classificação de 18 valores.

Quanto ao Daniel, era um aluno que revelava algumas dificuldades de aprendizagem e não tinha consolidado alguns conceitos relativos ao 3.º CEB. Apesar das suas dificuldades, mostrou-se empenhado em superá-las. Este aluno era participativo e tinha à vontade em discutir as tarefas propostas com os colegas quando estava concentrado mas distraia-se com alguma facilidade, pelo que beneficiava em ficar junto de colegas mais focados e que o pudessem ajudar. No final do 1.º período, obteve a classificação de 9 valores.

3.2.1. Ponto médio

3.2.1.1. Análise dos resultados do Teste Inicial

Relativamente à questão 1.1 da PT do teste, alguns alunos da turma não souberam determinar o ponto médio do segmento de reta [GB] por não saberem determinar as coordenadas do ponto B. Neste grupo, todos determinaram corretamente as coordenadas de B mas a Andreia foi a única a indicar corretamente as coordenadas do ponto médio (figura 1). Note-se que, apesar de ter determinado autonomamente as coordenadas do ponto médio, indicando a cota do mesmo, no cálculo da distância entre dois pontos, a Andreia trabalhou apenas com a abcissa e ordenada de B e M, razão pela qual esta distância está incorreta.

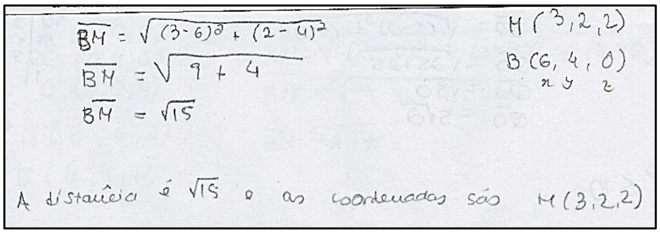


Figura 1 - Resolução da Andreia da questão 1.1. da PT no teste inicial.

Analisando a resposta do Leandro (figura 2), verifica-se que não respondeu à totalidade da pergunta, uma vez que não indicou as coordenadas do ponto onde se encontra a aranha. No entanto, calculou corretamente a distância percorrida pela mosca até à aranha, apesar de não apresentar o resultado na forma simplificada nem ter usado a simbologia matemática correta. Esta resposta ilustra a capacidade de raciocínio deste aluno, que foi capaz de mobilizar os seus conhecimentos prévios para resolver um problema que envolvia conceitos que ainda não tinha aprendido formalmente.

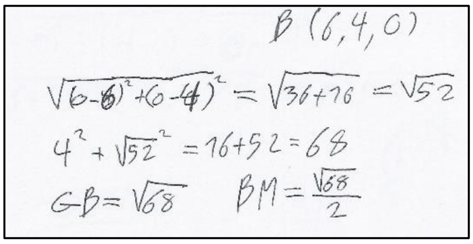


Figura 2 - Resolução do Leandro da questão 1.1. da PT no teste inicial.

Pela resposta do Daniel (figura 3) verifica-se que, no início deste estudo, o aluno apresentava dificuldades em determinar as coordenadas de pontos no espaço, tendo confundido o ponto D com o ponto E.

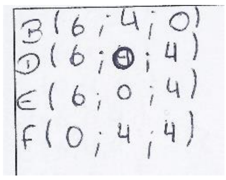


Figura 3 - Resolução do Daniel da questão 1.1 da PT no teste inicial.

Relativamente à questão 1.1 da PP do teste, quatro dos oito grupos foram capazes de determinar o ponto médio do segmento de reta [DE] usando a ferramenta  (Ponto médio). Este grupo foi um dos que não o fez. Durante a componente prática dirigiu-se à professora/investigadora tentando perceber se a sua resolução estava correta (V_21_01_2016).

Andreia: *Professora, nós estamos a fazer os cálculos na folha de respostas.*

Professora: *Podem fazer cálculos mas também têm de usar o GeoGebra para responder às perguntas.*

Andreia: *Então como é que fazemos com o GeoGebra?*

Professora: *(Sorriu…) Explorem, procurem!*

O grupo não determinou o ponto médio através da ferramenta própria, limitando-se a reproduzir a figura do enunciado no *GeoGebra*.

Como se pode ver na figura 4, os pontos que se situam sobre os eixos coordenados foram marcados clicando sobre o respetivo eixo (pontos C, D, E e F), enquanto os pontos A e B foram marcados usando a caixa de entrada. Além disso, a figura não corresponde ao prisma triangular do enunciado. Provavelmente por não saberem ainda como rodar a construção, ao tentarem construir o segmento de reta [DE], criaram, na verdade, o segmento [FE], construindo um novo ponto.

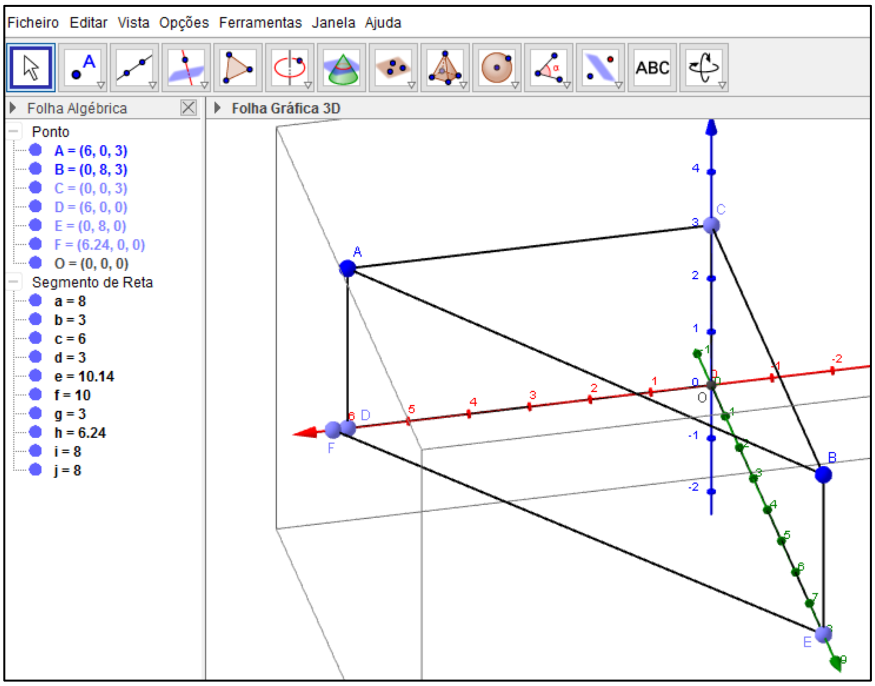
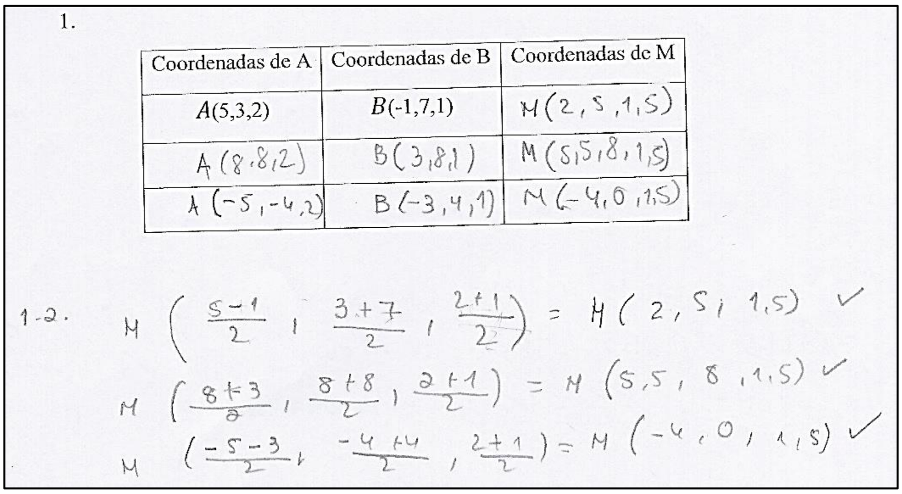


Figura 4 – Resolução do grupo 3 da questão 1 da PP no teste inicial.

3.2.1.2. Análise dos resultados durante a implementação didática

Examinando o desempenho do grupo 3 na tarefa 1 (figura 5), observa-se que foi capaz de determinar o ponto médio de vários segmentos de reta fazendo variar a abcissa e a ordenada dos pontos A e B. No entanto, este grupo, tal como os restantes da turma, não procurou relacionar as coordenadas de M com as coordenadas de A e B, limitando-se a verificar que a expressão fornecida no enunciado da questão 1.2 era válida para os pontos que tinham obtido em 1.1.



1.

Coordenadas de A	Coordenadas de B	Coordenadas de M
$A(5,3,2)$	$B(-1,7,1)$	$M(2,5,1,5)$
$A(8,8,2)$	$B(3,8,1)$	$M(5,5,8,1,5)$
$A(-5,-4,2)$	$B(-3,4,1)$	$M(-4,0,1,5)$

1.2. $M\left(\frac{5-1}{2}, \frac{3+7}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = M(2,5; 1,5)$ ✓

$M\left(\frac{8+3}{2}, \frac{8+8}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = M(5,5, 8, 1,5)$ ✓

$M\left(\frac{-5-3}{2}, \frac{-4+4}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = M(-4, 0, 1,5)$ ✓

Figura 5 – Resolução do grupo 3 da tarefa 1.

Durante o tempo de trabalho autónomo atribuído aos alunos para resolverem a tarefa, o Daniel mostrou-se interessando apenas no *GeoGebra*, revelando-se desinteressado pelas questões nela colocadas. Isto está patente numa das notas de campo da investigadora (NC_21_01_2016).

"*Durante a resolução da tarefa 1, o Daniel colaborou com o grupo manuseando o GeoGebra mas não se envolveu na discussão entre os seus elementos sobre as respostas à tarefa, preferindo continuar a explorar o software*".

Numa futura aplicação desta tarefa, seria interessante explorar, em simultâneo com as folhas algébrica e gráfica 3D, a folha de cálculo do *GeoGebra*. Assim, em vez de terem de preencher uma tabela à mão, os alunos fariam variar A e B e observariam as coordenadas de A, B e M na folha de cálculo, podendo testar a relação entre as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta e as coordenadas dos seus extremos para muito mais casos e com um menor custo de tempo.

3.2.1.3. Análise dos resultados do Teste Final

Quanto à questão 1.1 da PT do teste, no final da sequência didática, a grande maioria dos alunos sabia determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta no espaço corretamente.

Comparando as respostas dadas pela Andreia no teste final em relação ao teste inicial, pode-se observar, através da figura 6, que voltou a indicar corretamente as coordenadas do ponto médio. Além disso, apesar da distância entre dois pontos no espaço não constituir uma das categorias de análise neste estudo, por não ter sido introduzido com recurso ao *GeoGebra*, podemos ver que a aluna aprendeu o conceito e foi capaz de aplicá-lo corretamente.

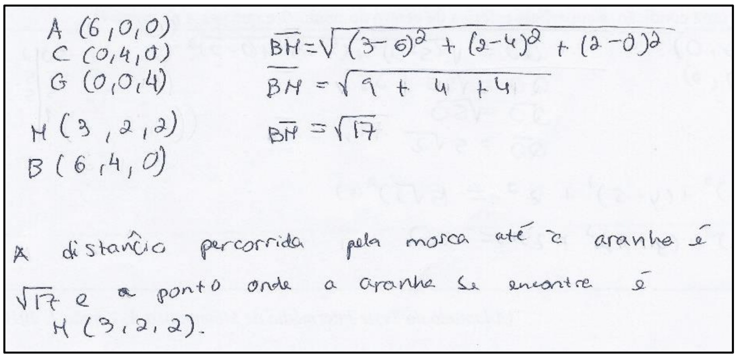


Figura 6 – Resolução da Andreia da questão 1.1. da PT no teste final.

Em relação ao teste inicial, o Leandro determinou o ponto médio do segmento de reta [GB], pelo que se considera que compreendeu e foi capaz de aplicar este conceito. Mais ainda, voltou a calcular corretamente a medida do comprimento do segmento de reta [BM], apresentando, desta vez, o resultado na forma simplificada (figura 7).

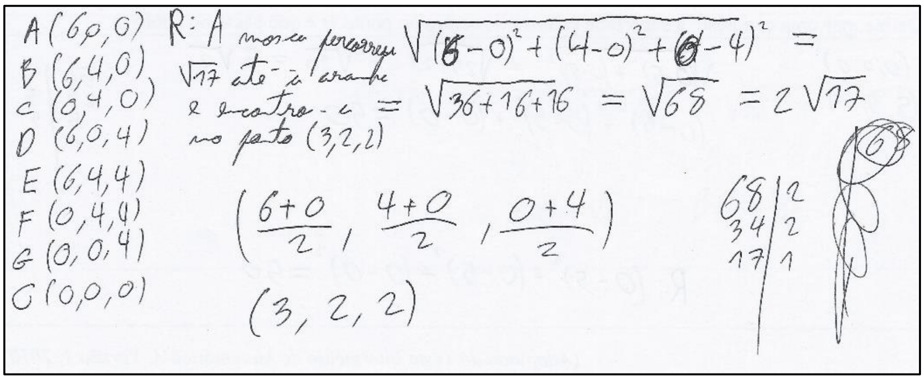


Figura 7 – Resolução do Leandro da questão 1.1. da PT no teste final.

Quanto ao Daniel, verifica-se, na figura 8, que o aluno aprendeu a determinar corretamente as coordenadas de pontos no espaço, o que já representa uma evolução relativamente ao seu desempenho no teste inicial. Para além disso, determinou corretamente $\overline{BG}$, apesar de não indicar que era isso que estava a calcular, mas não respondeu corretamente à pergunta pois não determinou $\overline{BM}$ nem as coordenadas do ponto médio. Tendo em conta as notas de campo da investigadora, segundo as quais o aluno se mostrou desinteressado na resolução da tarefa analiticamente, infere-se que não aprendeu a determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta no espaço.

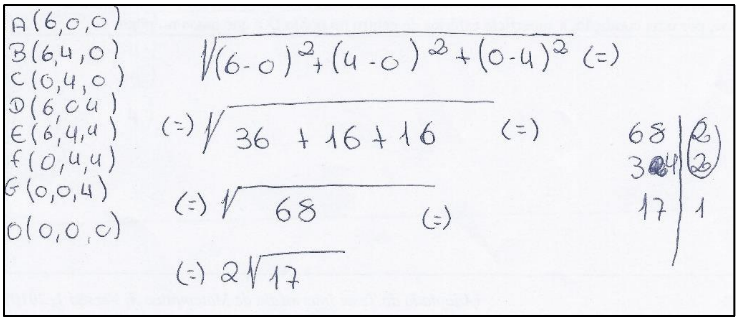


Figura 8 – Resolução do Daniel da questão 1.1. da PT no teste final.

Relativamente à questão 1.1 da PP do teste, no final da abordagem didática, todos os grupos foram capazes de determinar o ponto médio do segmento de reta [DE] usando a ferramenta apropriada. Contudo, nem todos responderam à questão, calculando a distância de C a esse ponto.

Analisando a construção do grupo 3 (figura 9), verifica-se que respondeu corretamente usando a ferramenta Segmento de Reta para determinar $\overline{CM}$. Pela sua resposta, depreende-se que o grupo compreendeu que a informação indicada na folha algébrica, $b = 5.83$, corresponde à medida do comprimento do segmento de reta [CM] e, consequentemente, à distancia entre estes dois pontos.

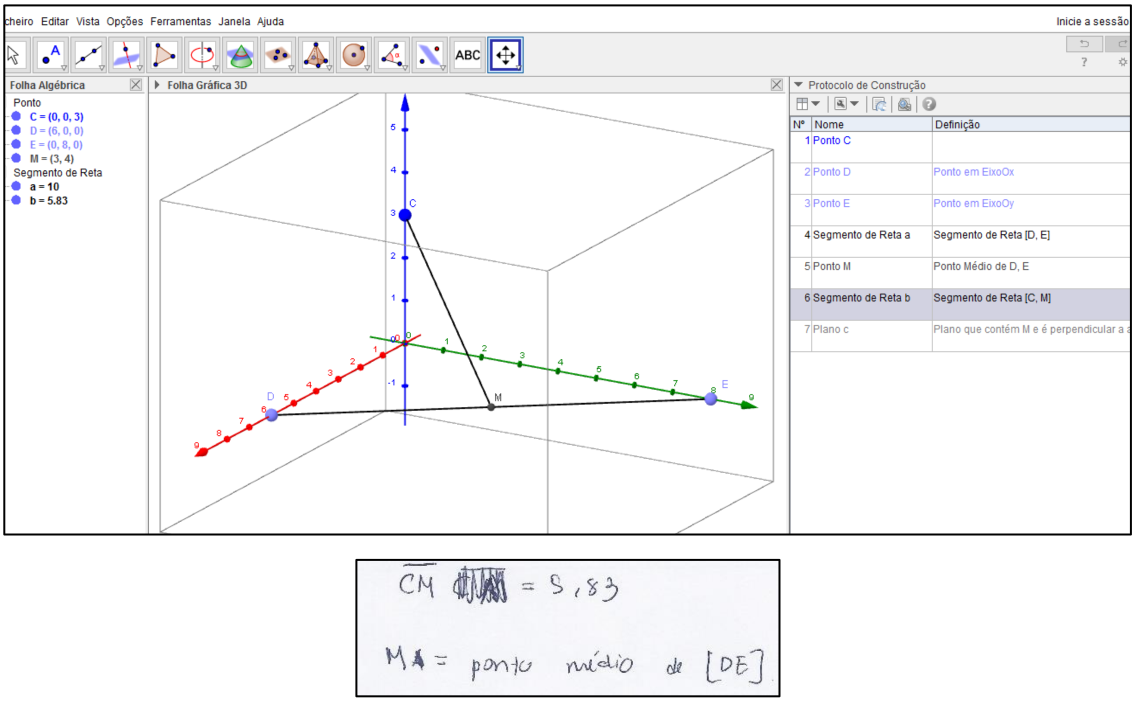


Figura 9 – Resolução do grupo 3 da questão 1.1. da PP no teste final.

3.2.2. Plano mediador

3.2.2.1. Análise dos resultados do Teste Inicial

Relativamente à questão 1.2 da PT do teste, nenhum aluno da turma foi capaz de definir analiticamente o plano mediador, tendo apenas três tentado responder à questão. Analisando o grupo 3 em particular, a Andreia e o Leandro tentaram resolvê-la mas o Daniel deixou-a em branco.

A resposta da Andreia à pergunta não está correta (figura 10). A aluna procurou relacionar as coordenadas de B(6,4,0) com as coordenadas de M(3,2,2), onde M é o ponto médio do segmento de reta [GB]. Tal como na questão 1.1 da PT do teste inicial (ver figura 1), a aluna voltou a trabalhar apenas com a abcissa e a ordenada dos pontos, o que mostra que, no início da sequência didática, raciocinava apenas a duas dimensões, não sendo capaz de extrapolar autonomamente os seus conhecimentos de Geometria Analitica no plano para a Geometria Analítica no espaço.

$a = \frac{(3,2)}{(6,4)} \quad a = \frac{3-6}{2-4} \quad a = \frac{-3}{-2} \quad a = \frac{3}{2}$

Figura 10 – Resolução da Andreia da questão 1.2. da PT no teste inicial.

Analisando agora a resposta do Leandro (figura 11), observa-se que, apesar de incorreta, o aluno sabia que um plano pode ser definido por três pontos. No entanto, o plano [GBC] não corresponde ao plano de equação $y = x$.

GBC $\quad y=x$

Figura 11 – Resolução do Leandro da questão 1.2. da PT no teste inicial.

Relativamente à questão 1.2 da PP do teste, nenhum dos grupos realizou qualquer construção no *GeoGebra*. Provavelmente, a turma necessitava de mais tempo para a realização desta componente do teste, uma vez que nunca tinham manipulado a folha gráfica 3D do *software*.

3.2.2.2. Análise dos resultados durante a implementação didática

Antes de a professora/investigadora ilustrar no quadro interativo os passos necessários para a construção do plano mediador patente na tarefa 2, questionou a turma sobre o que era um plano mediador. A Andreia e o António mostraram-se atentos e empenhados nesta tarefa, salientando-se que a Andreia revelou estar esquecida do conceito de plano medidor abordado no 3.º CEB (V_21_01_2016).

Professora: *O que é o plano mediador de um segmento de reta [AB]?*

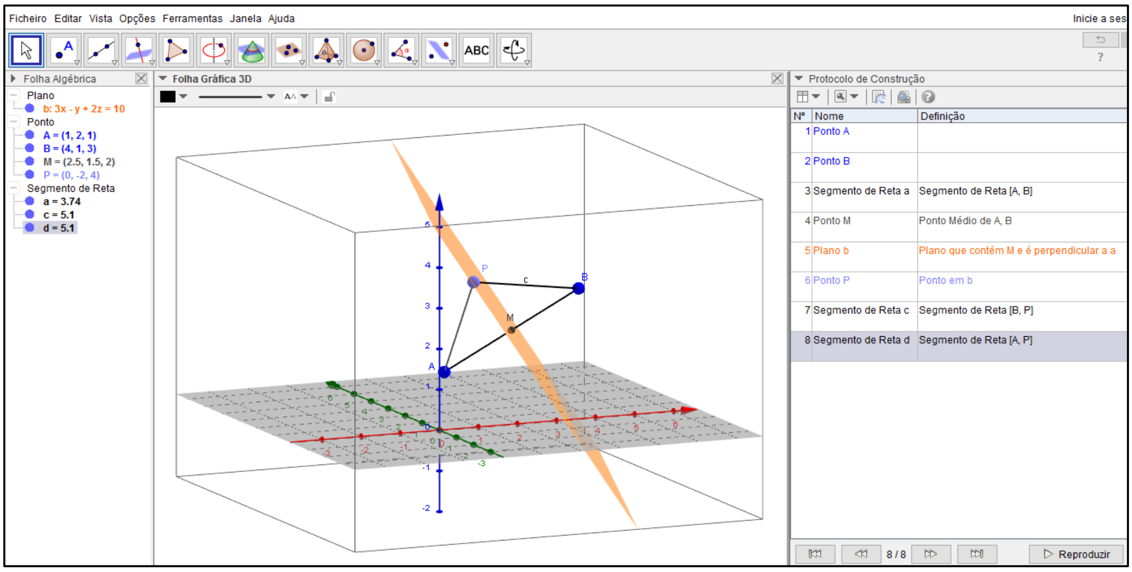
António: *É o conjunto dos pontos que estão à mesma distância da reta.*

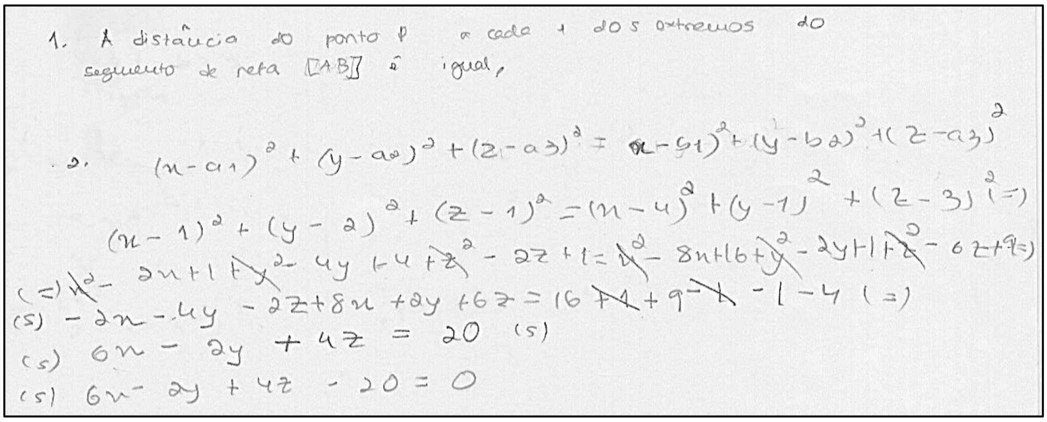
Professora: *É o lugar geométrico dos pontos do espaço que estão à mesma distância de A e B. Vamos agora construir no GeoGebra o plano mediador do segmento de reta [AB].*

Andreia: *(Confusa) Professora pode repetir o que é um plano mediador?*

Na figura 12, é possível observar a construção do grupo 3 no *GeoGebra* e as suas respostas à tarefa 2. Através da resposta à questão 1, verifica-se que o grupo associou a definição de plano mediador de um segmento de reta à construção que tinham acabado de realizar.

Analisando a resposta à pergunta 2, observa-se que o grupo foi capaz de definir analiticamente o plano construído, apesar de não ter simplificado a sua expressão. Salienta-se que a equação cartesiana do plano mediador de um segmento de reta de extremos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ só foi apresentada aos alunos após a recolha das suas respostas a esta tarefa. Como tal, o grupo foi capaz de inferir aquela equação autonomamente.





1. A distância do ponto P a cada + dos extremos do segmento de reta [AB] é igual,

2. $(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2=(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-a_3)^2$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=(x-4)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}-4y+4+\cancel{z^2}-2z+1=\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}-2y+1+\cancel{z^2}-6z+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x-4y-2z+8x+2y+6z=16+1+9-1-1-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x-2y+4z=20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x-2y+4z-20=0$

Figura 12 – Resolução do grupo 3 da tarefa 2.

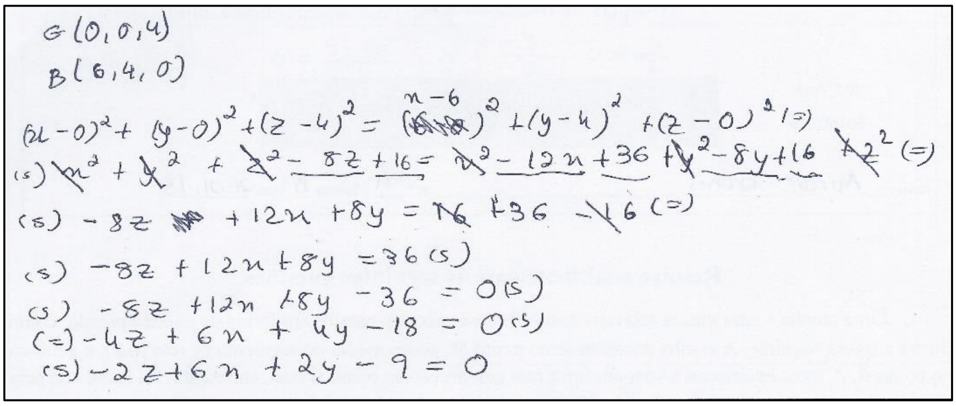
3.2.2.3. Análise dos resultados do Teste Final

A questão 1.2 da PT do teste aparenta ser uma das que causou dificuldades à turma, em geral, sendo que 9 em 21 alunos não foram capazes de definir analiticamente o plano mediador pedido no final da abordagem didática.

Analisando o desempenho do grupo 3 em particular, todos os seus elementos compreenderam que a expressão analítica no plano mediador em questão partia da equação:

$$x^2+y^2+(z-4)^2=(x-6)^2+(y-4)^2+z^2$$

mostrando alguns maior desembaraço em simplificá-la do que outros. A Andreia e o Leandro cometeram pequenos erros ao simplificar a equação (figuras 13 e 14).



G(0,0,4)
B(6,4,0)

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-4)^2=(x-6)^2+(y-4)^2+(z-0)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}-8z+16=\cancel{x^2}-12x+36+\cancel{y^2}-8y+16+\cancel{z^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8z+12x+8y=\cancel{16}+36-\cancel{16} \Leftrightarrow$

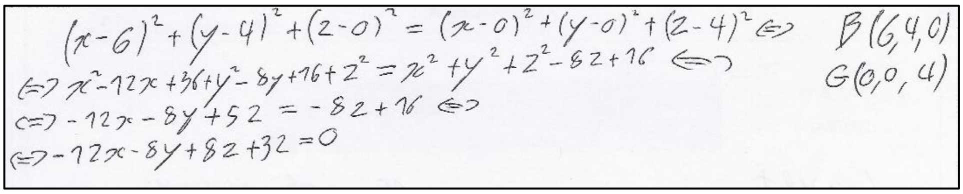
$\Leftrightarrow -8z+12x+8y=36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -8z+12x+8y-36=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4z+6x+4y-18=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2z+6x+2y-9=0$

Figura 13 – Resolução da Andreia da questão 1.2. da PT no teste final.



$(x-6)^2+(y-4)^2+(z-0)^2=(x-0)^2+(y-0)^2+(z-4)^2 \Leftrightarrow$ B(6,4,0)

$\Leftrightarrow x^2-12x+36+y^2-8y+16+z^2=x^2+y^2+z^2-8z+16 \Leftrightarrow$ G(0,0,4)

$\Leftrightarrow -12x-8y+52=-8z+16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -12x-8y+8z+32=0$

Figura 14 – Resolução do Leandro da questão 1.2. da PT no teste final.

Por outro lado, o Daniel apresentou a expressão correta, inicialmente, mas cometeu erros graves no desenvolvimento dos casos notáveis, procedimento que o aluno já deveria ter consolidado no 3.º CEB (figura 15). Note-se o surgimento de três parcelas com valor igual a um que, provavelmente, advirão da confusão que o aluno terá feito com a situação em que qualquer número elevado a zero é um.

Através desta resposta, é ainda possível averiguar que, durante a abordagem didática, o aluno não sabia determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta no plano. Como se pode observar na figura 15, o aluno começou por tentar responder à pergunta 1.1 da PT do teste, apesar de ter riscado a sua resolução para depois responder à questão 1.2.

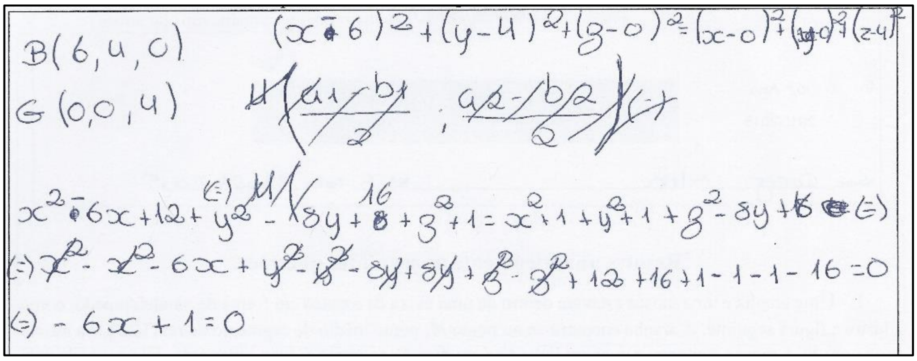
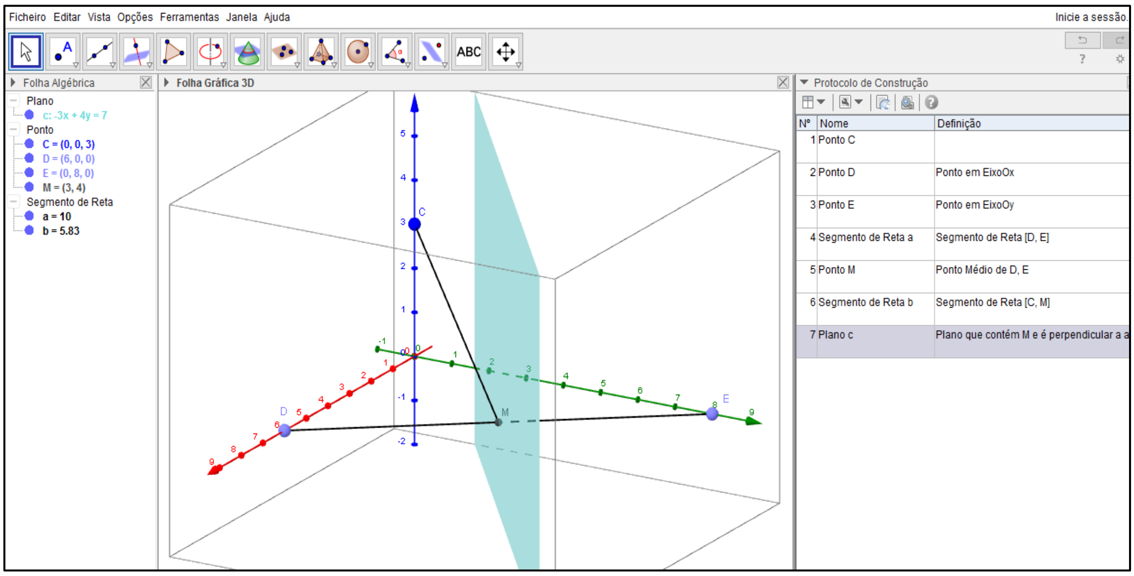


Figura 15 – Resolução do Daniel da questão 1.2. da PT no teste final.

Examinando agora o desempenho do grupo 3 na questão 1.2 da PP do teste (figura 16), verifica-se que construiu o plano mediador utilizando a ferramenta Plano Perpendicular e identificou corretamente a sua expressão analítica na folha algébrica, respondendo, desta forma, à questão.



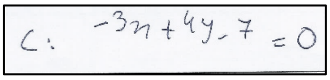


Figura 16 - Resolução do grupo 3 da questão 1.2. da PP no teste final.

3.2.3. Superfície esférica

3.2.3.1. Análise dos resultados do Teste Inicial

Relativamente à questão 2 da PT do teste, nenhum aluno foi capaz de a resolver corretamente no início da sequência didática, apesar de três terem apresentado uma resposta muito próxima da correta. Estes alunos confundiram a superfície esférica com a esfera.

Analisando agora o desempenho do grupo 3, a Andreia e o Leandro foram os únicos que tentaram resolver esta questão. A Andreia foi capaz de determinar as coordenadas do ponto Q e aplicou os seus conhecimento da Geometria Analitica no plano para calcular o raio da superfície esférica. No entanto, na sua resposta (figura 17), apresentou um círculo de centro na origem do referencial, o que reforça, mais uma vez, a ideia de que, no início da abordagem, a aluna raciocinava apenas a duas dimensões. Para além disso, não calculou corretamente $\left(5\sqrt{2}\right)^2$.

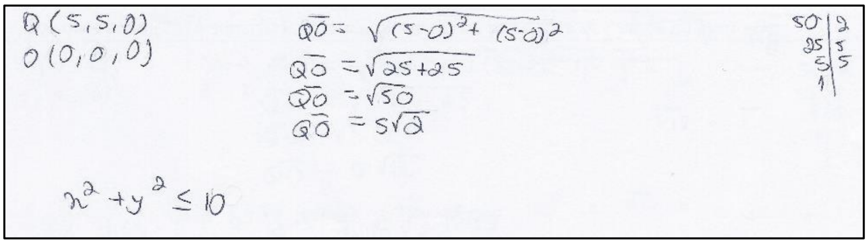


Figura 17 – Resolução da Andreia da questão 2 da PT no teste inicial.

O Leandro não foi capaz de determinar as coordenadas do ponto Q (figura 18). Sendo este um prisma quadrangular regular e tendo em conta que P(5,0,0), as coordenadas de Q eram (5,5,0).

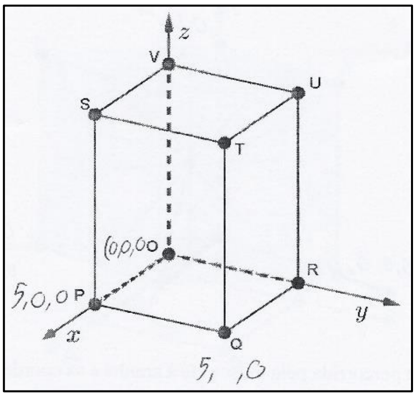


Figura 18 – Resolução do Leandro da questão 2 da PT no teste inicial.

Relativamente à questão 2 da PP do teste aplicado no início desta abordagem, nenhum grupo chegou a fazer qualquer construção no *GeoGebra*.

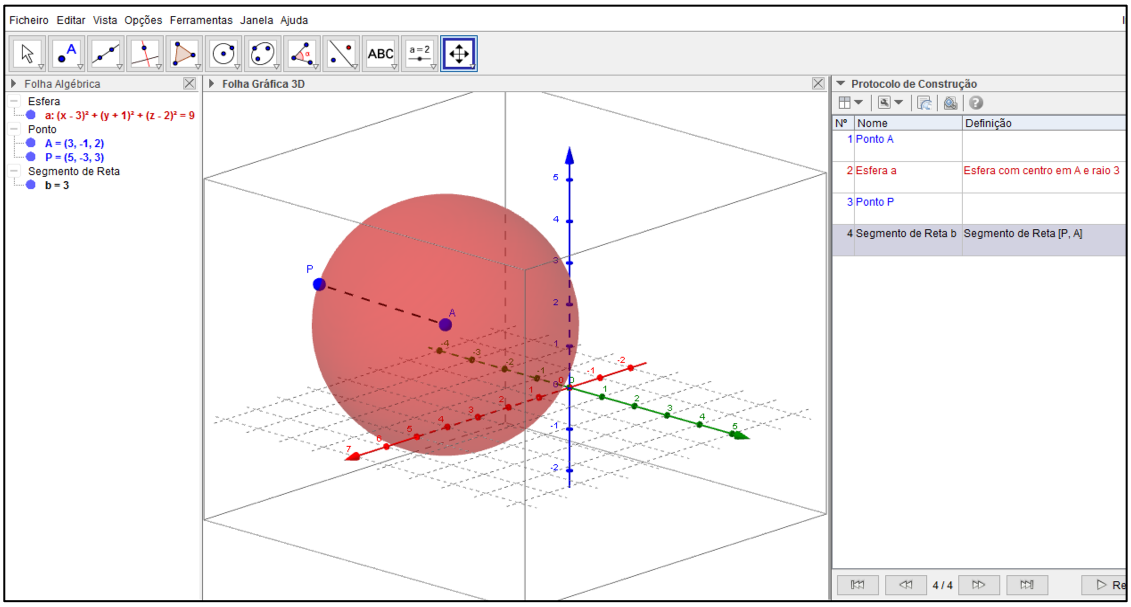
3.2.3.2. Análise dos resultados durante a implementação didática

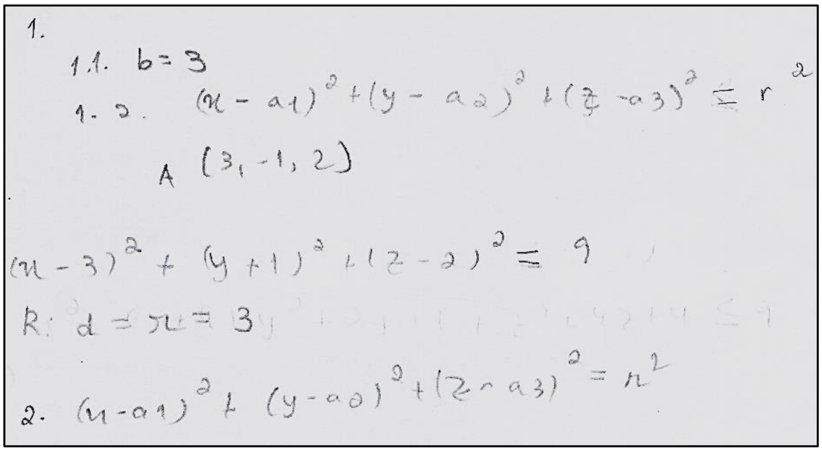
Analisando o desempenho do grupo 3 na questão 1.1 da tarefa 3 (figura 19), verifica-se que compreendeu que o raio da superfície esférica corresponde à medida do comprimento do segmento de reta [PA]. O grupo percebeu, ainda, que o *software* representou esse segmento pela letra b, escrevendo na folha de respostas $b = 3$.

Relativamente à questão 1.2 (figura 19), este grupo respondeu de forma diferente de todos os outros. Começou por apresentar a resposta à questão 2, indicando a equação cartesiana reduzida de uma superfície esférica de centro em $A(a_1, a_2, a_3)$ e raio r. Em seguida, associou esta equação à equação apresentada pelo *GeoGebra* na folha algébrica. Se a equação que representa a bola da Rita é:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

onde 9 corresponde a r^2, então a distância entre o centro da bola e o ponto indicado corresponde ao raio da superfície esférica, ou seja, três. Com esta resposta, o grupo mostrou compreender a dualidade entre a folha algébrica e a folha gráfica 3D do *GeoGebra*.




1.

1.1. $b = 3$

1.2. $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = r^2$

A $(3, -1, 2)$

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$

R: $d = r = 3$

2. $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = r^2$

Figura 19 – Resolução do grupo 3 da tarefa 3.

Se se voltar a aplicar esta tarefa no futuro, era importante introduzir algumas modificações. Refletindo sobre ela, reconhece-se que esta não foi uma forma muito exploratória de introduzir a equação cartesiana da superfície esférica tirando proveito das potencialidades do *GeoGebra*. A situação descrita na tarefa 3 foi apresentada aos alunos num ficheiro em *GeoGebra* que foi colocado previamente nos 8 computadores portáteis nos quais os grupos trabalharam. Assim, a tarefa não permitiu que os alunos aprendessem, autonomamente, a construir uma superfície esférica através das ferramentas: Esfera (Centro, Ponto) e Esfera (Centro, Raio).

Uma sugestão mais interessante para a pergunta 1 seria excluir o ficheiro previamente construído e solicitar aos alunos que representassem, no *GeoGebra*, a situação descrita na tarefa, dando-lhes assim a oportunidade de aprenderem a fazê-lo por si próprios. Para isso, modificar-se-ia ligeiramente o enunciado, fornecendo as coordenadas de P. Deste modo, a tarefa seria mais desafiante e cativante, pois permitiria aos alunos explorarem o programa de forma a tentarem, primeiro por eles próprios, representar a situação recorrendo ao *software*. Após esta questão, ser-lhes-ia pedido para definirem analiticamente a bola que a Rita recebeu no seu aniversário. Considerando estas alterações, manter-se-ia a questão 2.

Como a tarefa 3 não permitiu aos alunos aprenderem a usar as ferramentas já mencionadas, propôs-se a toda a turma, no final da segunda aula da sequência didática, uma tarefa do manual cujo enunciado se encontra no plano da segunda aula (apêndice 2).

Na figura 20, é possível observar a resolução do grupo 3 dessa mesma tarefa. Este grupo optou por utilizar a ferramenta Esfera (Centro, Ponto).

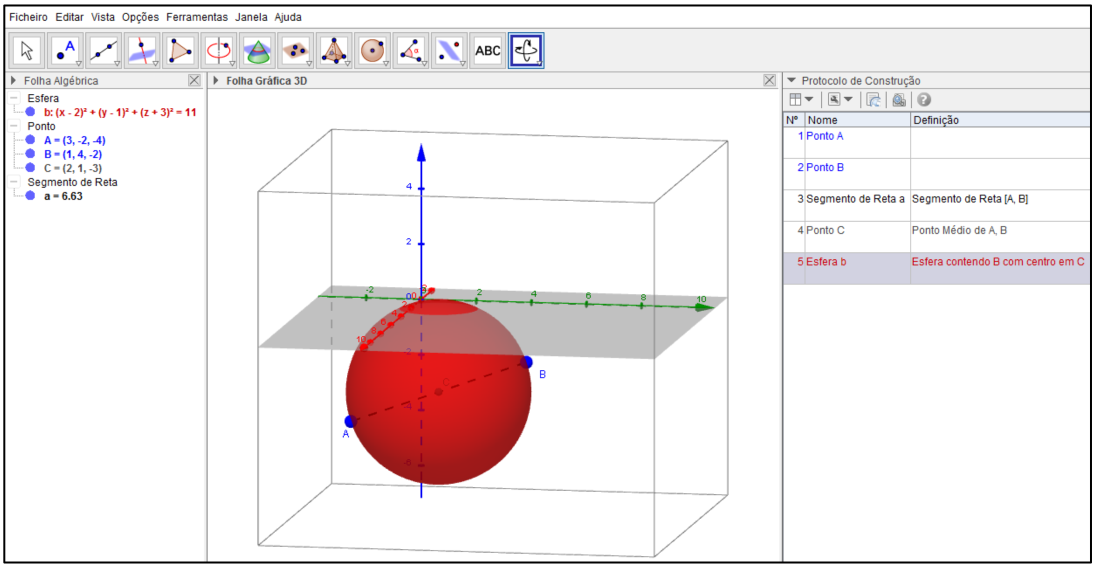


Figura 20 - Resolução do grupo 3 da tarefa 153 com recurso ao *GeoGebra*.

3.2.3.3. Análise dos resultados do Teste Final

Analisando o desempenho da turma em relação à questão 2 da PT do teste, conclui-se que esta foi a mais difícil, tendo 13 em 21 alunos errado ou deixado em branco. Isto significa que, no final da abordagem didática, cerca de metade da turma não apreendeu e/ou não soube aplicar corretamente a equação cartesiana da superfície esférica.

Em relação ao grupo 3, a Andreia e o Leandro responderam à pergunta mas o Daniel voltou a deixá-la em branco. Analisando o desempenho da Andreia em relação à mesma pergunta no teste inicial, verifica-se que foi capaz de aplicar os conhecimentos de Geometria Analítica no espaço adquiridos durante esta abordagem. Como se pode ver na figura 21, a sua resposta está totalmente correta. Considera-se, assim, que a Andreia aprendeu e sabe aplicar analiticamente o conceito de superfície esférica.

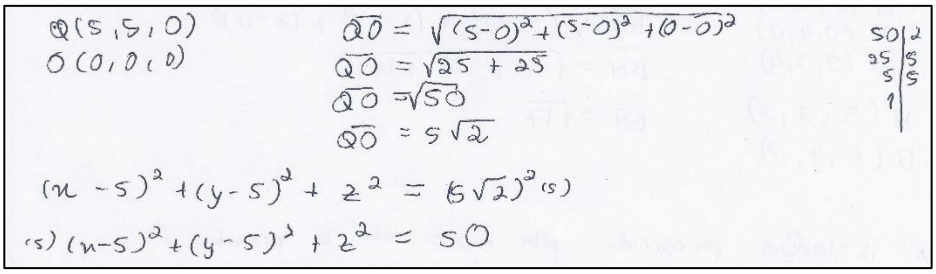


Figura 21 – Resolução da Andreia da questão 2 da PT no teste final.

Quanto ao Leandro, no momento em que respondeu a esta pergunta no teste inicial, não foi capaz de determinar as coordenadas do ponto Q. No entanto, no teste final, mostrou ter construído algum conhecimento ao ser capaz de determinar o raio da superfície esférica (figura 22). Apesar de não ter respondido corretamente à pergunta, este aluno mostrou que sabia distingir a superfície esférica e da esfera. Mesmo assim, considera-se que o Leandro não se apropriou convenientemente da equação cartesiana da superfície esférica, não sendo capaz de a aplicar de forma correta quando é solicitado a fazê-lo numa tarefa com recurso ao papel e lápis.

$O(0,0,0)$
$Q(5,5,0)$

$\sqrt{(0-5)^2+(0-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

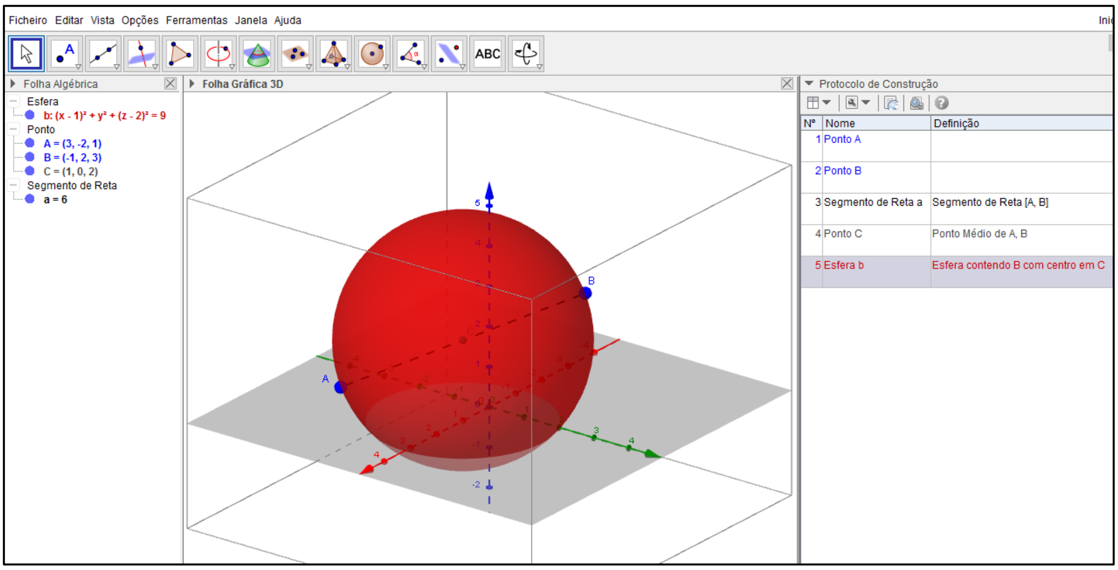
$(0-5)^2+(0-5)^2+(0-0)^2=50$

$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$

$R: (0-5)^2+(0-5)^2+(0-0)^2=50$

Figura 22 – Resolução do Leandro da questão 2 da PT no teste final.

Analisando agora o desempenho do grupo 3 na questão 2 da PP do teste (figura 23), este construiu a superfície esférica de diâmetro [AB] usando a ferramenta Esfera (Centro, Ponto) e identificou corretamente a sua equação reduzida na folha algébrica. Então, o grupo mostrou compreender e ser capaz de aplicar corretamente o conceito de superfície esférica recorrendo ao *GeoGebra*.



$b: (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=9$

Figura 23 – Resolução do grupo 3 da questão 2 da PP no teste final.

3.3. Grupo 4

Recorde-se que o grupo 4 era formado pela Helena e pela Maria. Este grupo era relativamente homogéneo em relação às atitudes em sala de aula, mostrando ambas as alunas interesse e empenho na realização das tarefas propostas. Quanto ao desempenho escolar, a Helena obteve uma classificação de 15 valores no final do 1.º período enquanto a Maria obteve 20 valores.

3.3.1. Ponto médio

3.3.1.1. Análise dos resultados do Teste Inicial

Relativamente à resolução do grupo 4 da questão 1.1 da PT do teste, a Maria foi a única que indicou as coordenadas do ponto médio do segmento de reta [GB]. Quanto à Helena, apesar de saber determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta no plano, não foi capaz de transpor, autonomamente, os seus conhecimentos para o espaço (figura 24).

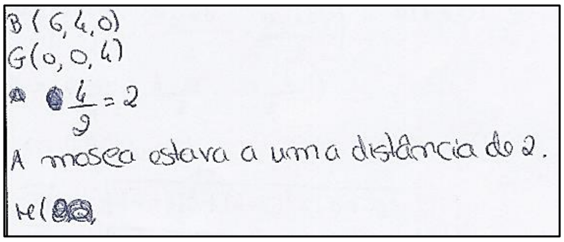

B (6,4,0)
G(0,0,4)
$\frac{4}{2} = 2$
A mosca estava a uma distância de 2.
M(

Figura 24 – Resolução da Helena da questão 1.1. da PT no teste inicial.

Analisando agora a resolução da Maria (figura 25), a aluna indicou corretamente as coordenadas do ponto médio solicitado apesar de não apresentar cálculos. Além disso, tentou determinar a distância $\overline{BM}$ usando uma estratégia adequada - o Teorema de Pitágoras. Contudo, cometeu o erro de considerar $\overline{OB} = 6$, mostrando não ter consolidado o conceito de distância entre dois pontos no plano. Ainda assim, poderia ter evitado o erro se tivesse aplicado previamente o Teorema de Pitágoras ao triângulo [ABO] (ou [BCO]).

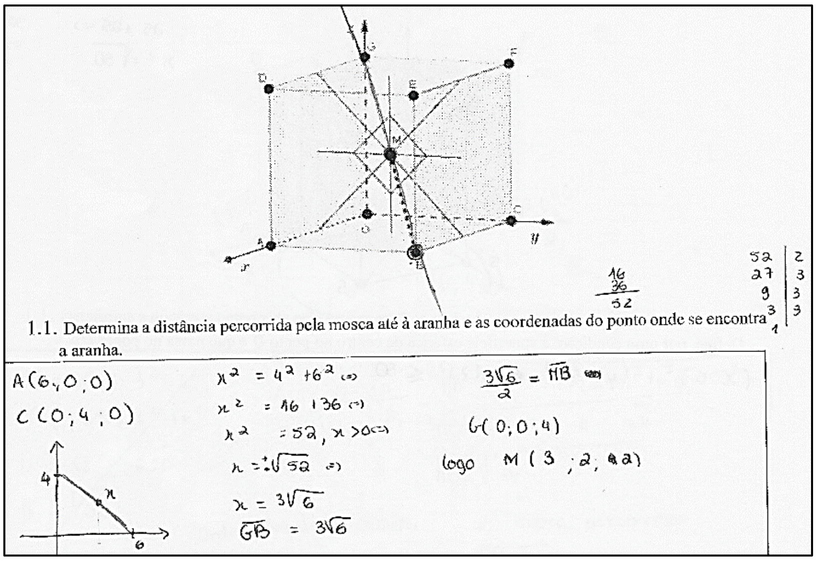


Figura 25 – Resolução da Maria da questão 1.1. da PT no teste inicial.

Relativamente à questão 1.1 da PP do teste, este grupo foi capaz de determinar o ponto médio do segmento de reta [DE], recorrendo ao *GeoGebra*, mas não indicou a distância de C a esse ponto, pelo que a sua resposta está incompleta. Contudo, tentou fazê-lo analiticamente usando o Teorema de Pitágoras, mas cometeu um pequeno erro de cálculo ao resolver a equação $x^2 = 3^2 + 5^2$, o que lhe permitiu a obtenção de um quadrado perfeito. Além disso, o grupo não terá compreendido que o cálculo analítico da distância de C ao ponto médio não era suficiente para responder à pergunta.

Como se pode ver na figura 26, os pontos que se situam sobre os eixos coordenados foram marcados clicando sobre o respetivo eixo (pontos D e B) enquanto o ponto A foi marcado usando a caixa de entrada. Além disso, como o ponto B corresponde ao ponto E do enunciado, infere-se que o grupo não se recordava de como renomear um ponto no *GeoGebra*, algo que tinha sido explicado na sessão de introdução ao *software*, em dezembro. O grupo determinou, ainda, um outro ponto não solicitado, o ponto médio do segmento de reta [AB], ponto C. Salienta-se ainda que, apesar do programa não indicar a cota do ponto E, pois é um ponto fixo contido no plano xOy, o grupo interpretou corretamente a informação do *software*, indicando na sua resposta escrita as três coordenadas do ponto.

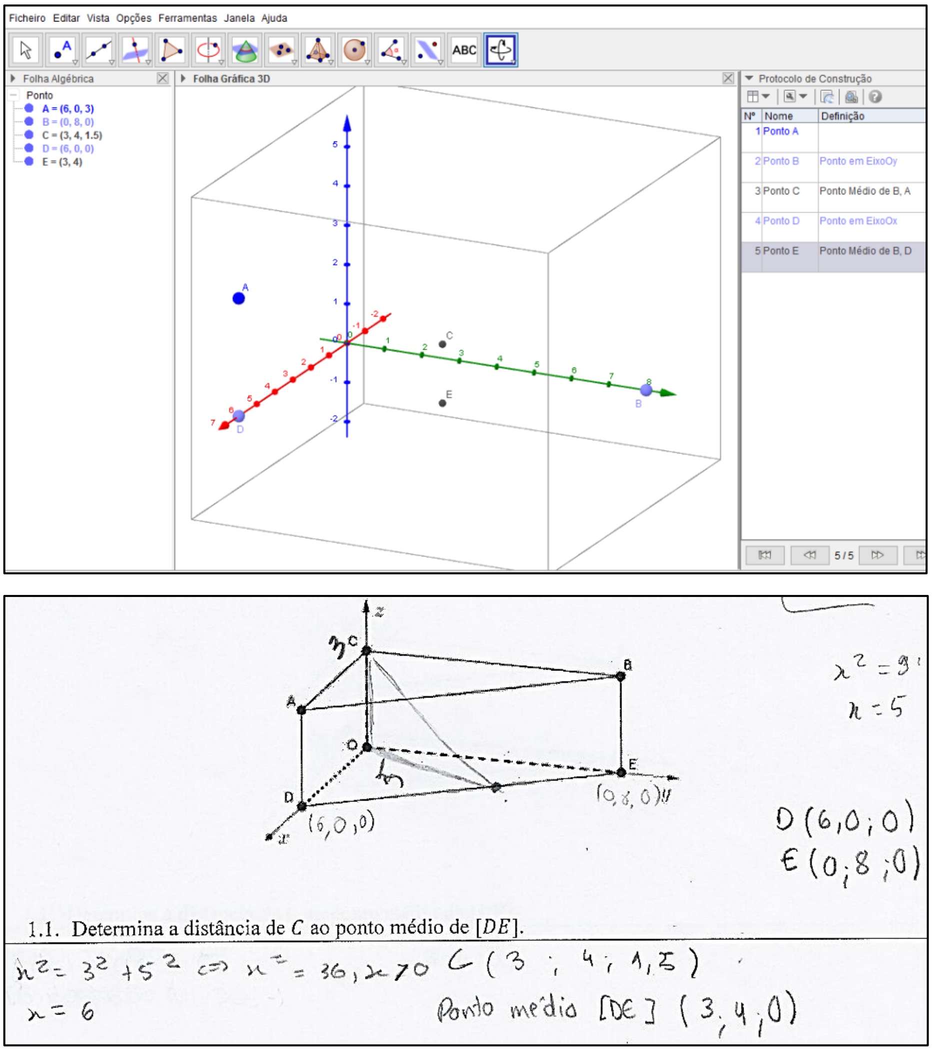


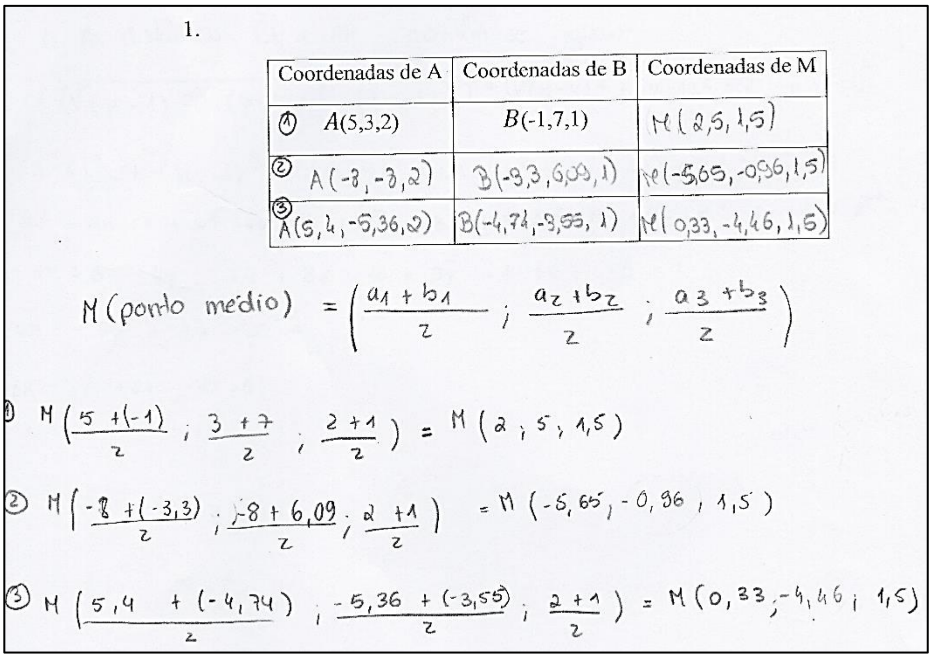
Figura 26 – Resolução do grupo 4 da questão 1 da PP no teste inicial.

3.3.1.2. Análise dos resultados durante a implementação didática

Analisando o desempenho do grupo 4 na tarefa 1 (figura 27), este também se limitou a aplicar a expressão fornecida no enunciado da questão 1.2 aos respetivos dados. Este grupo foi o que teve mais dificuldade em resolver a tarefa recorrendo ao *GeoGebra*, o que está patente numa das notas de campo da investigadora (NC_21_01_2016).

"Durante a tarefa 1, o grupo 4 teve dificuldade em resolver a tarefa através do GeoGebra por não conseguir fazer variar as coordenadas de A e B de forma a obter coordenadas inteiras."

Apesar de se ter explicado, a toda a turma, como fazê-lo a partir do quadro interativo, este grupo foi o único que não conseguiu superar esse obstáculo, como se pode observar na figura seguinte. Isto repercutiu-se na resolução da questão 1.2, uma vez que tiveram de arredondar alguns valores para que os pontos médios calculados analiticamente coincidissem com os indicados no *GeoGebra*.


1.

Coordenadas de A	Coordenadas de B	Coordenadas de M
① $A(5,3,2)$	$B(-1,7,1)$	$M(2,5,1,5)$
② $A(-8,-8,2)$	$B(-3,3,6,09,1)$	$M(-5,65,-0,96,1,5)$
③ $A(5,4,-5,36,2)$	$B(-4,74,-3,55,1)$	$M(0,33,-4,46,1,5)$

$$M(\text{ponto médio}) = \left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2};\frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

① $M\left(\frac{5+(-1)}{2};\frac{3+7}{2};\frac{2+1}{2}\right) = M(2;5;1,5)$

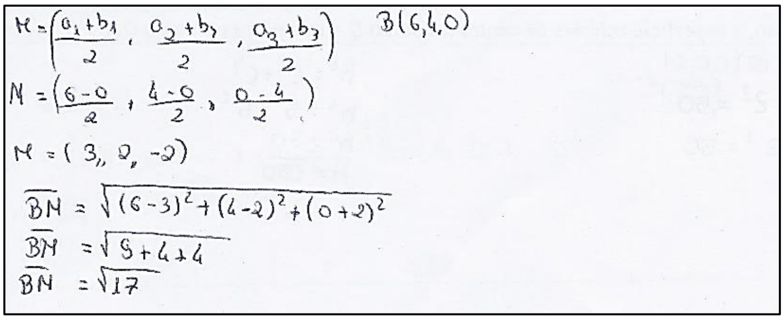
② $M\left(\frac{-8+(-3,3)}{2};\frac{-8+6,09}{2};\frac{2+1}{2}\right) = M(-5,65;-0,96;1,5)$

③ $M\left(\frac{5,4+(-4,74)}{2};\frac{-5,36+(-3,55)}{2};\frac{2+1}{2}\right) = M(0,33;-4,46;1,5)$

Figura 27 – Resolução do grupo 4 da tarefa 1.

3.3.1.3. Análise dos resultados do Teste Final

Comparando a resposta da Helena à questão 1.1 da PT do teste aplicado no final da sequência didática em relação à que foi dada no início, a aluna aprendeu a expressão que permite determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta no espaço, mas não a aplicou corretamente (figura 28). Ao substituir as coordenadas de B e G na expressão que escreveu no início da sua resposta, subtraiu-as em vez de as adicionar. Considera-se que isto tenha sido um erro de distração. Além disso, pode ver-se que a aluna se apropriou do conceito de distância entre dois pontos no espaço e foi capaz de aplicá-lo corretamente.


$M = \left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)$ $B(6,4,0)$

$M = \left(\frac{6-0}{2},\frac{4-0}{2},\frac{0-4}{2}\right)$

$M = (3, 2, -2)$

$\overline{BM} = \sqrt{(6-3)^2+(4-2)^2+(0+2)^2}$

$\overline{BM} = \sqrt{9+4+4}$

$\overline{BM} = \sqrt{17}$

Figura 28 – Resolução da Helena da questão 1.1. da PT no teste final.

Em relação à resposta da Maria (figura 29), voltou a apresentar as coordenadas do ponto médio do segmento de reta [GB], tal como no teste inicial, mas, desta vez, calculou corretamente $\overline{MB}$. A aluna, inclusive, começou por determinar a diagonal espacial do paralelepípedo recorrendo ao Teorema de Pitágoras no espaço mas, depois, optou por calcular diretamente $\overline{MB}$ através da distância entre dois pontos no espaço.

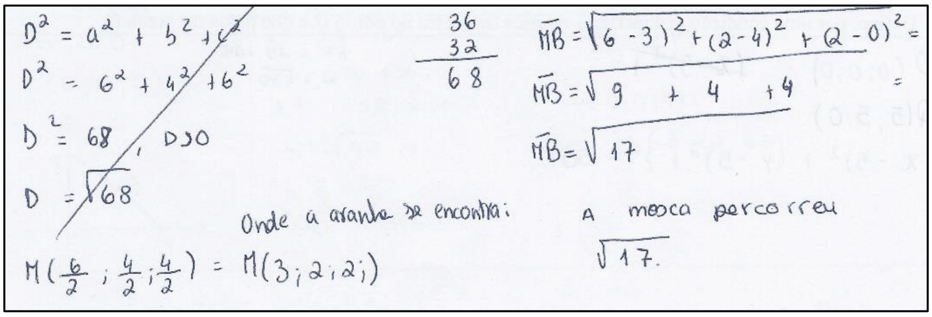


Figura 29 – Resolução da Maria da questão 1.1. da PT no teste final.

Relativamente à questão 1.1 da PP do teste, no final da abordagem, o grupo foi capaz de determinar o ponto médio do segmento de reta [DE] recorrendo à ferramenta apropriada e mostrou evolução em relação ao teste anterior ao determinar a distância pedida através das ferramentas do *software* (figura 30). A única incongruencia é o facto do ponto médio do segmento de reta denominar-se A, no *GeoGebra*, e na folha de respostas ter-lhe sido atribuída a letra F.

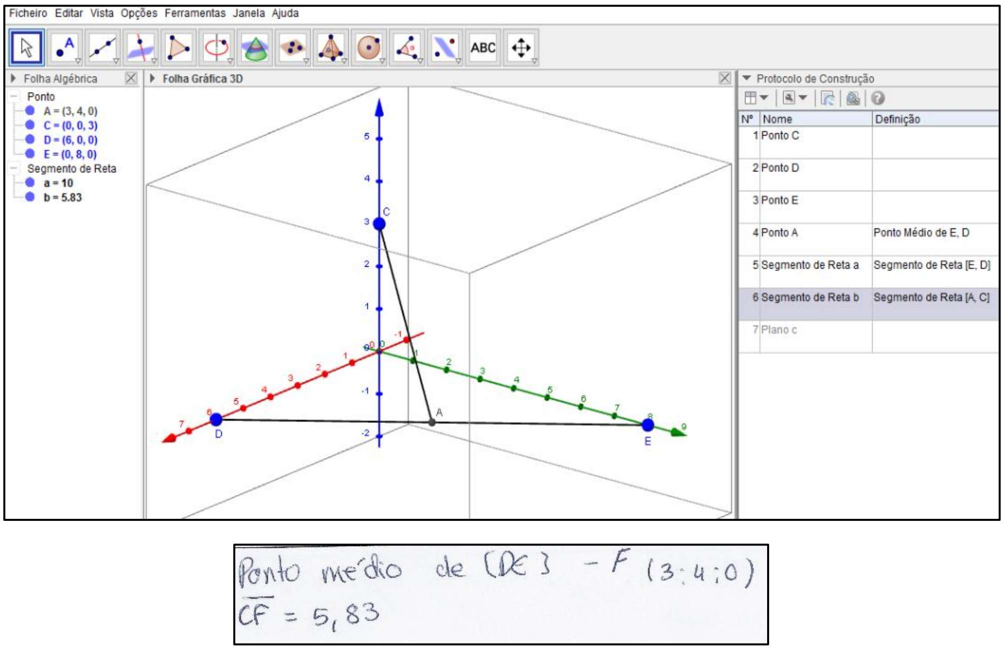


Figura 30 – Resolução do grupo 4 da questão 1.1. da PP no teste final.

3.3.2. Plano mediador

3.3.2.1. Análise dos resultados do Teste Inicial

Relativamente aos conhecimentos deste grupo em relação ao plano mediador antes da sequência didática, não se dispõe de informação, uma vez que nenhuma das alunas respondeu à questão 1.2 da PT do teste inicial nem construíram qualquer plano na componente prática do mesmo teste.

3.3.2.2. Análise dos resultados durante a implementação didática

Durante a implementação da tarefa 2 a professora/investigadora explicou à turma que ia ilustrar, a partir do quadro interativo, como construir o plano mediador usando o *GeoGebra*. Depois de ter questionado a turma sobre o conceito de plano mediador, a Maria mostrou ter estabelecido conexões entre a definição e o que tinha aprendido na sessão introdutória sobre o *software* em dezembro (V_21_01_2016).

Professora: *[O plano mediador] é o lugar geométrico dos pontos do espaço que estão à mesma distância de A e B. Vamos agora construir no GeoGebra o plano mediador do segmento de reta [AB].*

Andreia: *(Confusa) Professora pode repetir o que é um plano mediador?*

Simultaneamente…

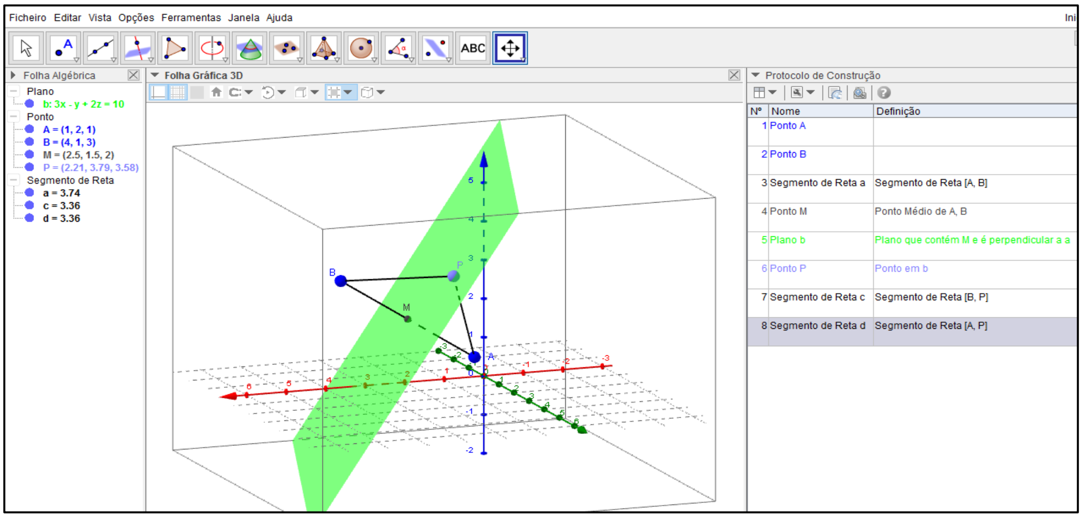
Maria (dirigindo-se à Helena com entusiasmo): *É para usar a ferramenta Mediatriz!*

Professora: *Não é a mediatriz. Não existe uma ferramenta do GeoGebra chamada plano mediador. Portanto, vamos usar a definição. Existe, no entanto, uma ferramenta que se chama plano perpendicular. O plano mediador é um plano perpendicular ao segmento de reta no seu ponto médio certo? Então vão usar a ferramenta plano perpendicular…*

Tal como na tarefa intermédia sobre o ponto médio de um segmento de reta no espaço, este grupo teve alguma dificuldade em tirar partido do *GeoGebra* de forma a completar a construção requerida na tarefa 2. O grupo foi capaz de construir o plano mediador com a ferramenta  (Plano Perpendicular) mas, ao tentar marcar um ponto P pertencente a esse plano, usou a ferramenta  (Novo Ponto) em vez de  (Ponto no Objeto). Como tal, marcou um ponto no espaço que parecia pertencer ao plano mediador (da perspetiva em que visionava a construção) mas não pertencia. Ao construir os segmentos de reta [AP] e [BP] e movimentar o ponto P, percebeu que tinha cometido algum erro porque as distâncias $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ não coincidiam. Nesse momento, o grupo pediu a ajuda da professora/investigadora que, ao rodar o referencial, mostrou-lhe que o ponto P que tinha marcado não pertencia ao plano mediador e explicou-lhe como proceder para obter a construção correta. Assim, a figura 31 corresponde à construção do grupo após a intervenção da professora/investigadora.

Analisando agora a resposta escrita do grupo à questão 1 da tarefa, verifica-se que não está correta pois as distâncias $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ variam à medida que se movimenta o ponto P ao longo do plano. Na verdade, as distâncias são iguais entre si ou coincidentes. Apesar de a resposta não estar correta em termos de precisão de linguagem, considerou-se que o grupo compreendeu o conceito de plano mediador, embora não se tenha expressado corretamente.

Relativamente à questão 2, verifica-se que o grupo foi capaz de definir analiticamente o plano construído e simplificar corretamente a sua expressão.



1. As distâncias $\overline{BP}$ e $\overline{AP}$ mantêm-se iguais.

2. $\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}\right)^2$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=(x-4)^2+(y-1)^2+(z-3)^2$

$\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}-4y+4+\cancel{z^2}-2z+1=\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}-2y+1+\cancel{z^2}-6z+9$

$-2x+6-4y-2z+8x-16+2y-1+6z-9=0$

$6x-2y+4z-20=0 \; (:2)$

$3x-y+2z-10=0$

Figura 31 – Resolução do grupo 4 da tarefa 2.

3.3.2.3. Análise dos resultados do Teste Final

Relativamente à questão 1.2 da PT do teste, observa-se neste grupo uma grande evolução já que, no teste aplicado no início da abordagem didática, ambas as alunas tinham deixado a questão em branco. Assim, considera-se que aprenderam e foram capazes de aplicar, analiticamente, o conceito de plano mediador.

Na figura 32, pode-se observar a resolução da Helena, na qual se verificam pequenos erros de sinal no desenvolvimento dos casos notáveis.

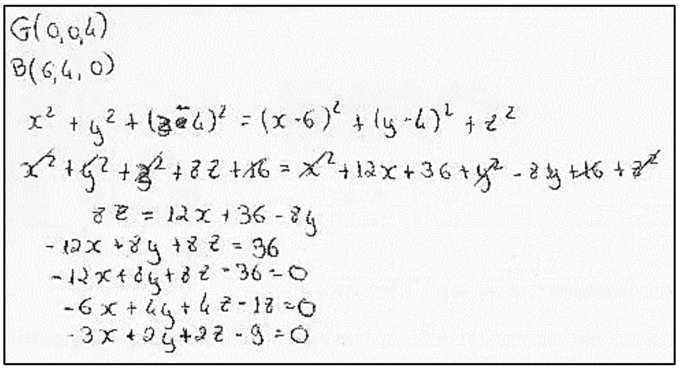

G(0,0,4)
B(6,4,0)
$x^2+y^2+(z-4)^2=(x-6)^2+(y-4)^2+z^2$
$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}+8z+16=\cancel{x^2}+12x+36+\cancel{y^2}-8y+16+\cancel{z^2}$
$8z=12x+36-8y$
$-12x+8y+8z=36$
$-12x+8y+8z-36=0$
$-6x+4y+4z-18=0$
$-3x+2y+2z-9=0$

Figura 32 – Resolução da Helena da questão 1.2. da PT no teste final.

Quanto à Maria (figura 33), a sua resolução está totalmente certa.

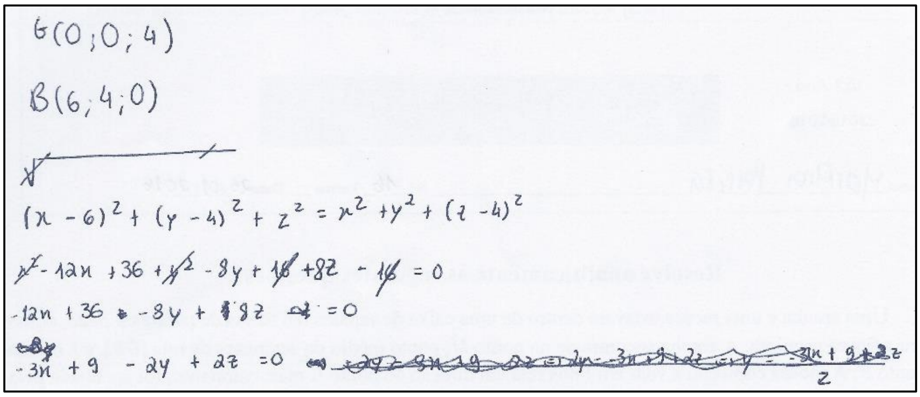
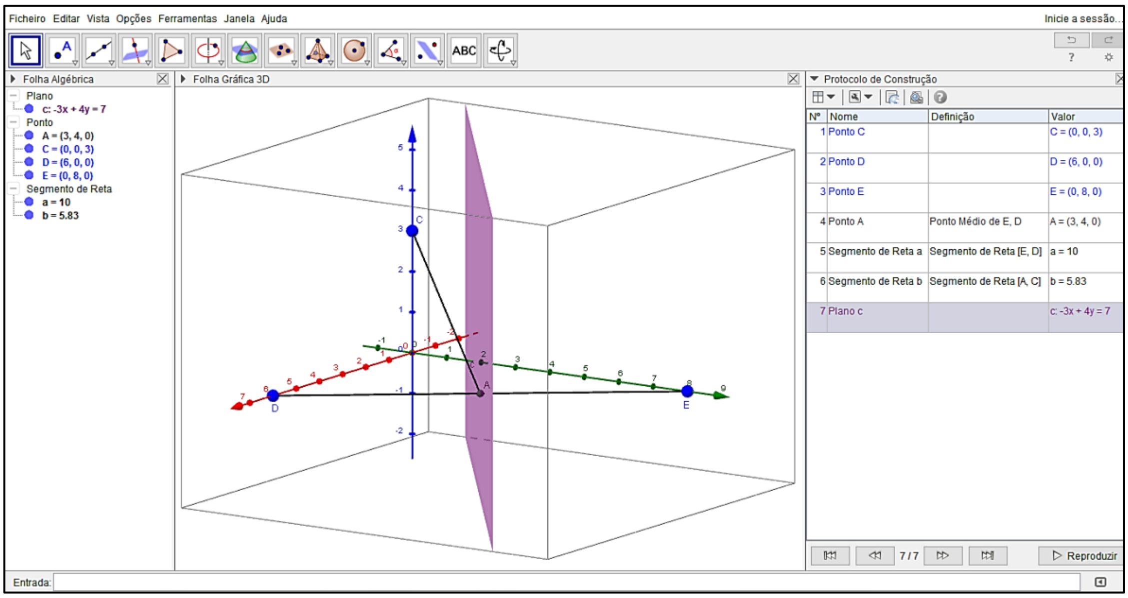

G(0;0;4)
B(6;4;0)
$(x-6)^2+(y-4)^2+z^2=x^2+y^2+(z-4)^2$
$\cancel{x^2}-12x+36+\cancel{y^2}-8y+\cancel{16}+8z-\cancel{16}=0$
$-12x+36-8y+8z=0$
$-3x+9-2y+2z=0$

Figura 33 – Resolução da Maria da questão 1.2. da PT no teste final.

Analisando agora o desempenho do grupo na mesma questão mas relativa à PP do teste (figura 34), considera-se que a resposta difere do esperado. Para definirem o plano mediador do segmento de reta [DE], as alunas calcularam-no analiticamente e, em seguida, introduziram a sua equação na caixa de entrada do *GeoGebra*, o que pode ter acontecido por duas razões. Uma situação possível, é que as alunas não conseguiram localizar a ferramenta Plano Perpendicular ou não compreenderam como usá-la, apesar de lhes ter sido explicado diretamente no seu computador, durante a implementação da tarefa 2, como fazê-lo. Note-se que este estudo decorreu apenas durante três aulas, razão pela qual os alunos não tiveram muito tempo para explorar o *software*. Por outro lado, podem simplesmente não ter compreendido o objetivo da parte prática do teste. De facto, respeitaram as instruções dadas no cabeçalho, pois recorreram ao *GeoGebra* em todas as alíneas, mas o que se pretendia era que aplicassem os conhecimentos adquiridos durante as aulas construindo os objetos geométricos abordados através das ferramentas próprias do programa. Assim, neste caso, o *GeoGebra* teve a mera função de representar visualmente o plano mediador.



$$(x-6)^2+(y)^2+z^2 = x^2+(y-8)^2+z^2$$
$$-3x+4y-7=0$$

Figura 34 – Resolução do grupo 4 da questão 1.2 da PP no teste final.

3.3.3. Superfície esférica

3.3.3.1. Análise dos resultados do Teste Inicial

Quanto à questão 2 da PT do teste, este grupo esteve próximo da resposta correta. Contudo, ambas as alunas confundiram superfície esférica com esfera, apresentando, na sua resposta, a inequação cartesiana da esfera de centro em Q.

Analisando a resposta da Helena (figura 35), considera-se que foi capaz de extrapolar autonomamente da inequação cartesiana reduzida do círculo para a inequação cartesiana reduzida da esfera. Todavia, a pergunta pedia para definir analiticamente uma superfície esférica. Além disso, a Helena não determinou corretamente o raio.

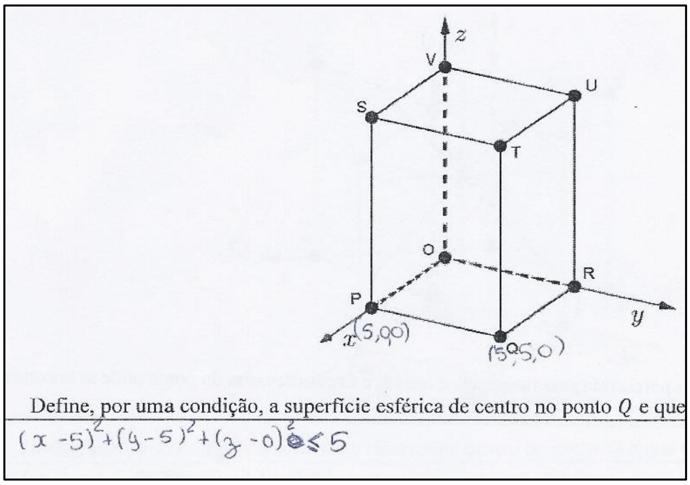


Figura 35 – Resolução da Helena da questão 2 da PT no teste inicial.

Atendendo agora à resolução da Maria (figura 36), a sua resposta estaria completamente certa se, tal como a sua colega, não tivesse confundido a superfície esférica com a esfera. Apesar da linguagem matemática não estar correta, a aluna apresenta os cálculos auxiliares que realizou para determinar o raio.

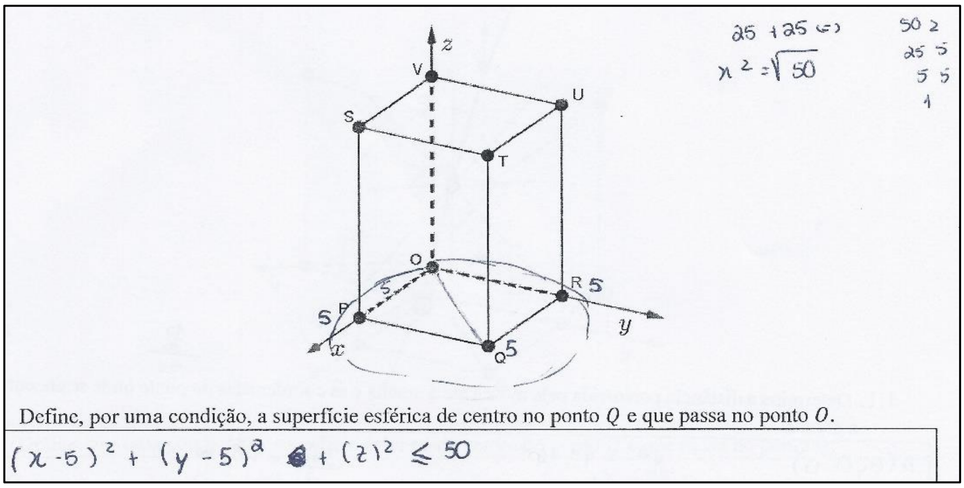


Figura 36 – Resolução da Maria da questão 2 da PT no teste inicial.

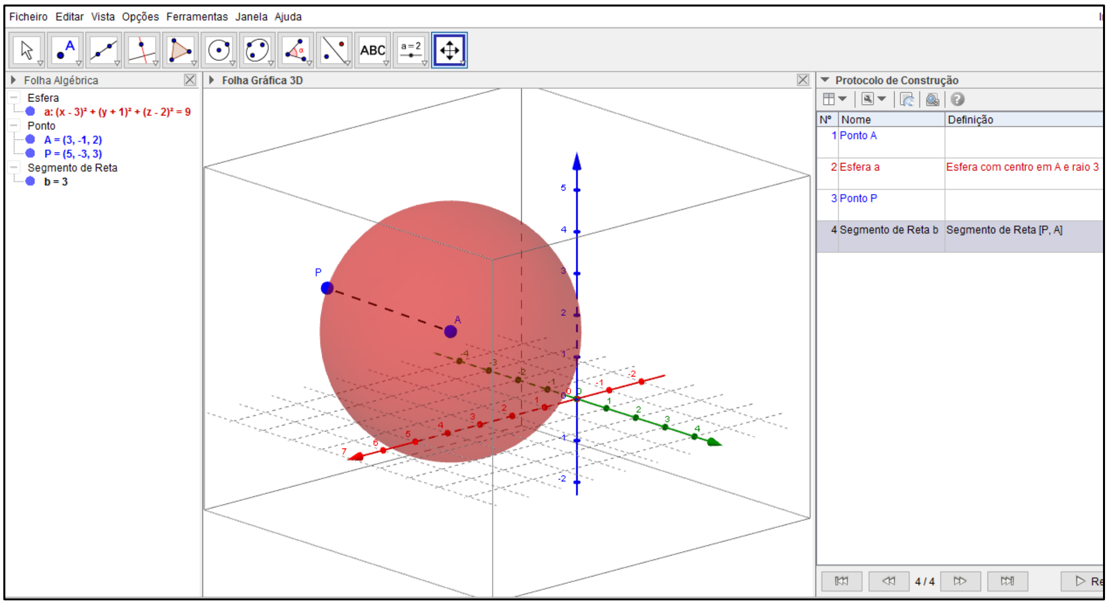
Em relação à questão 2 da PP do teste, não há dados disponíveis uma vez que as alunas não realizaram qualquer construção.

3.3.3.2. Análise dos resultados durante a implementação didática

Analisando o desempenho do grupo 4 na tarefa 3 (figura 37), verifica-se que, na questão 1.1, tal como o grupo 3, associou a medida do comprimento do segmento de reta [AP] ao raio da superfície esférica, indicando na folha de resposta $\overline{AP} = 3$.

A resposta deste grupo à questão 1.2 foi diferente de todos os outros. Primeiramente, verificou se o ponto P pertencia à superfície esférica, o que era desnecessário pois essa informação já era dada no enunciado. Em seguida, calculou a distância $\overline{PA}$ de acordo com a expressão que tinha aprendido na tarefa 0 (distância entre dois pontos no espaço).

Relativamente à pergunta 2, o grupo indicou a resposta certa, mostrando que já sabia distinguir a superfície esférica da esfera.



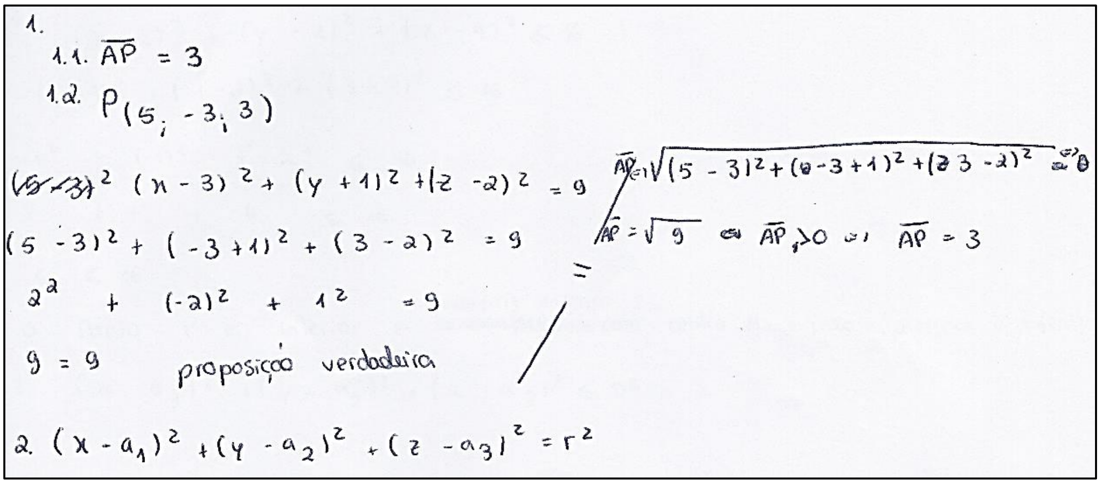


Figura 37 – Resolução do grupo 4 da tarefa 3.

Em seguida, apresenta-se a resolução do grupo 4 da tarefa proposta para que pudesse aprender a construir uma superfície esférica com as ferramentas do *GeoGebra*. Como se pode observar na figura 38, este grupo optou pela ferramenta Esfera (Centro, Raio). Por não ser capaz de usar o comando *sqrt()* na introdução do raio na caixa de diálogo, o *software* construiu a superfície esférica de raio 11 em vez da superfície esférica de raio $\sqrt{11}$. Deste modo, a resposta à tarefa 153 não está totalmente correta.

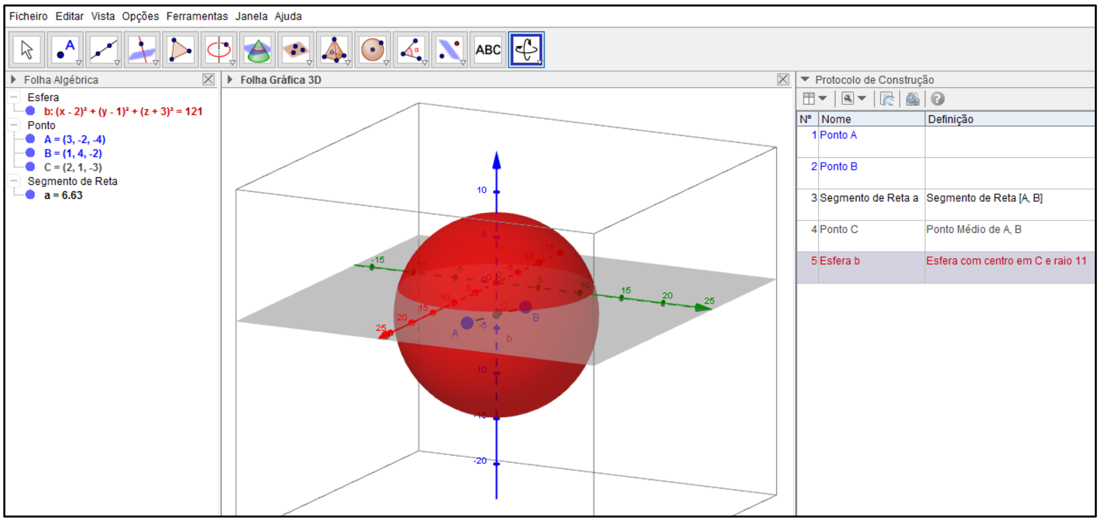


Figura 38 - Resolução do grupo 4 da tarefa 153 com recurso ao *GeoGebra*.

3.3.3.3. Análise dos resultados do Teste Final

Comparando as respostas dadas na questão 2 da PT do teste final com as da mesma parte do teste aplicado no início da abordagem didática, considera-se que ambas as alunas compreendem e são capazes de aplicar o conceito de superfície esférica. Tal como já tinha sido possivel observar na tarefa 3, as duas distinguem corretamente a superfície esférica da esfera. As respostas dadas pelo grupo seguem o mesmo raciocínio, recorrendo ambas ao Teorema de Pitágoras para calcular o raio da superfície esférica (figuras 39 e 40).

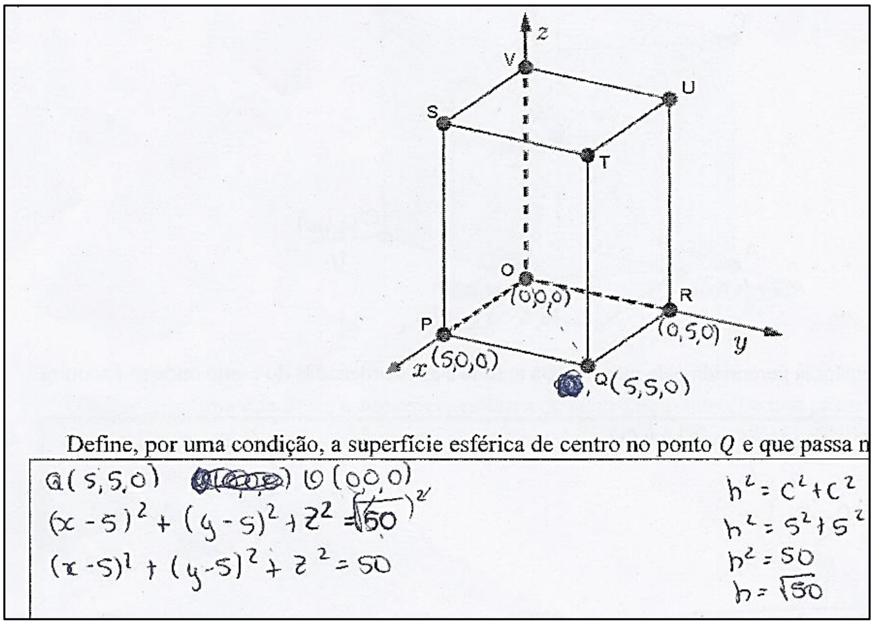


Figura 39 – Resolução da Helena da questão 2 da PT no teste final.

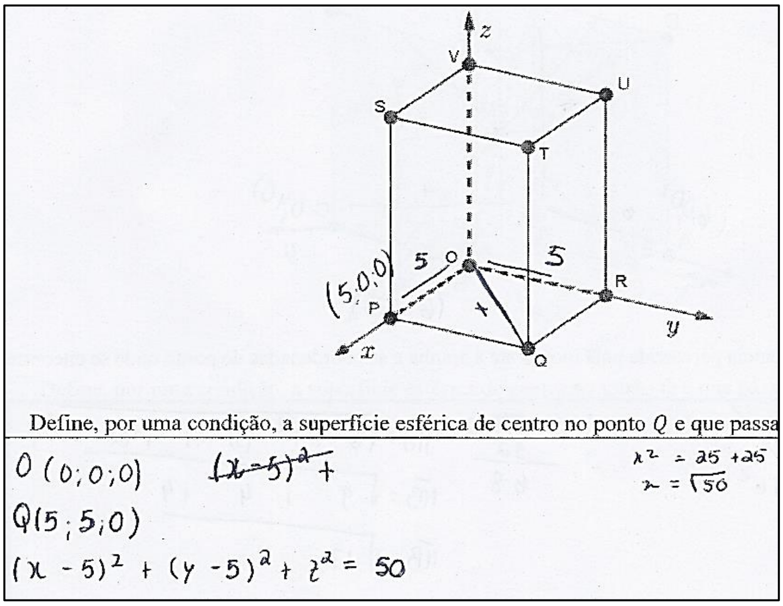


Figura 40 – Resolução da Maria da questão 2 da PT no teste final.

Relativamente à questão 2 da PP do teste, a resposta obtida foi diferente do que era esperado (figura 41). O grupo resolveu partes da questão analiticamente e outras recorrendo ao *GeoGebra*. Começou por marcar os extremos do segmento de reta [AB] usando a caixa de entrada. Em seguida, construiu o segmento de reta e marcou o seu ponto médio (ponto C) usando as ferramentas apropriadas. A partir daí, usou métodos analíticos para chegar à equação reduzida da superfície esférica. Usando a informação da folha algébrica, compreendeu que $\overline{AB} = 6$ e, portanto, o raio da superfície esférica é 3. Através do ponto médio do segmento de reta [AB], obtido recorrendo ao *GeoGebra*, e do raio, determinado a partir da informação dada na folha algébrica, escreveu a equação reduzida da superfície esférica de diâmetro [AB] e, depois, introduziu-a na caixa de entrada do *software*.

Neste caso, o *GeoGebra* não constituíu um mero suporte visual para representar a superfície esférica, como tinha acontecido com este grupo aquando da resolução da questão 1.2 do teste (PT). No entanto, esta resolução não permite saber se o grupo aprendeu ou não a construir autonomamente uma superfície esférica no *software* usando as ferramentas apropriadas. Ainda assim, considera-se que o programa contribuiu para a aprendizagem deste tópico, uma vez que o grupo usou informação nele contida para responder à questão.

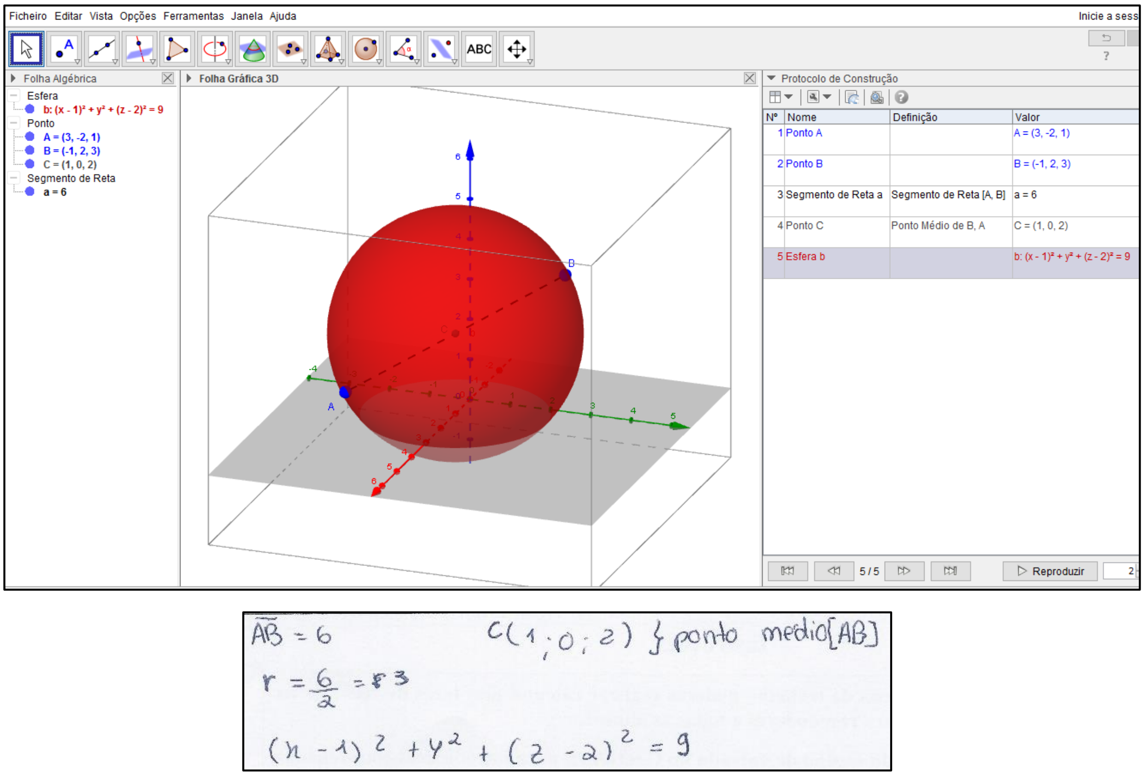


Figura 41 – Resolução do grupo 4 da questão 2 da PP no teste final.

3.4. Grupo 5

Recorde-se que o grupo 5 era composto pelo Tomás, o Paulo e o Filipe. Este grupo era heterogéneo, quer em termos do desempenho escolar quer das atitudes na sala de aula.

O Tomás e o Paulo eram dois alunos moderadamente empenhados nas aulas e, por vezes, conversadores. Tinham o hábito de se ajudarem mutuamente nas tarefas propostas e discutirem a sua resolução, mostrando particular interesse por tarefas desafiantes ou diferentes do habitual. Eram participativos nas aulas. Relativamente ao desempenho escolar, o Tomás obteve 16 valores no final do 1.º período enquanto o Paulo obteve 17 valores.

O Filipe era um aluno diferente dos seus colegas de grupo. Frequentemente mostrava pouco interesse e empenho na concretização das tarefas propostas, manifestando um ritmo de trabalho não contínuo. No final do 1.º período, obteve uma classificação de 12 valores.

3.4.1. Ponto médio

3.4.1.1. Análise dos resultados do Teste Inicial

O grupo 5 destacou-se dos restantes grupos na PT do teste inicial por ter mostrado, logo no início do estudo empírico, que sabia determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos no espaço. Assim, os três elementos do grupo, para além de terem indicado as coordenadas do ponto médio do segmento de reta [GB], foram capazes de determinar a distância $\overline{BM}$ recorrendo à expressão que permite calcular a distância entre dois ponto no espaço, antes de a terem aprendido em sala de aula.

Observando atentamente a resolução do Tomás (figura 42), o aluno não indicou especificamente $M = (3,2,2)$ ou explicou como determinou as coordenadas deste ponto. Contudo, utilizou-as no cálculo de $\overline{BM}$ pelo que se pode depreender que, no início da abordagem didática, o aluno já sabia calcular o ponto médio de um segmento de reta no espaço. Além disso, calculou corretamente a distância pedida.

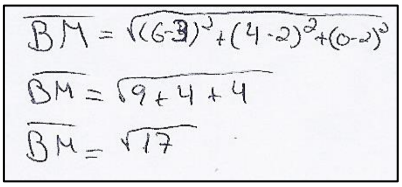

$\overline{BM} = \sqrt{(6-3)^2+(4-2)^2+(0-2)^2}$
$\overline{BM} = \sqrt{9+4+4}$
$\overline{BM} = \sqrt{17}$

Figura 42 – Resolução do Tomás da questão 1.1. da PT no teste inicial.

A resposta do Paulo (figura 43) também está correta mas muito mais completa do que a do Tomás.

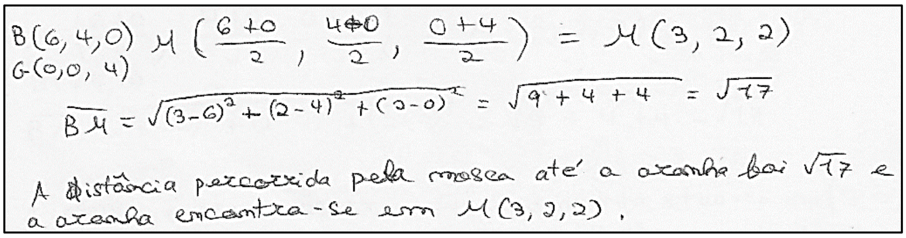

$B(6,4,0)$ $M\left(\frac{6+0}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M(3,2,2)$
$G(0,0,4)$
$\overline{BM} = \sqrt{(3-6)^2+(2-4)^2+(2-0)^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$
A distância percorrida pela mosca até a aranha foi $\sqrt{17}$ e a aranha encontra-se em $M(3,2,2)$.

Figura 43 – Resolução do Paulo da questão 1.1. da PT no teste inicial.

Em relação ao Filipe, trocou a letra B pela letra E mas percebeu que o que está em causa é a distância $\overline{BM}$, pois foi isso que calculou.

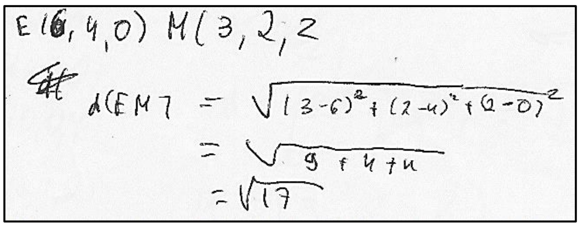

$E(6,4,0)$ $M(3,2,2$
$d(EM) = \sqrt{(3-6)^2+(2-4)^2+(2-0)^2}$
$= \sqrt{9+4+4}$
$= \sqrt{17}$

Figura 44 – Resolução do Filipe da questão 1.1. da PT no teste inicial.

Relativamente à questão 1.1 da PP do teste, este grupo respondeu corretamente ao que era pedido (figura 45). Assim, foi capaz de determinar o ponto médio do segmento de reta [DE] recorrendo à ferramenta apropriada e usou a ferramenta Segmento de Reta para obter a distância de C a esse ponto.

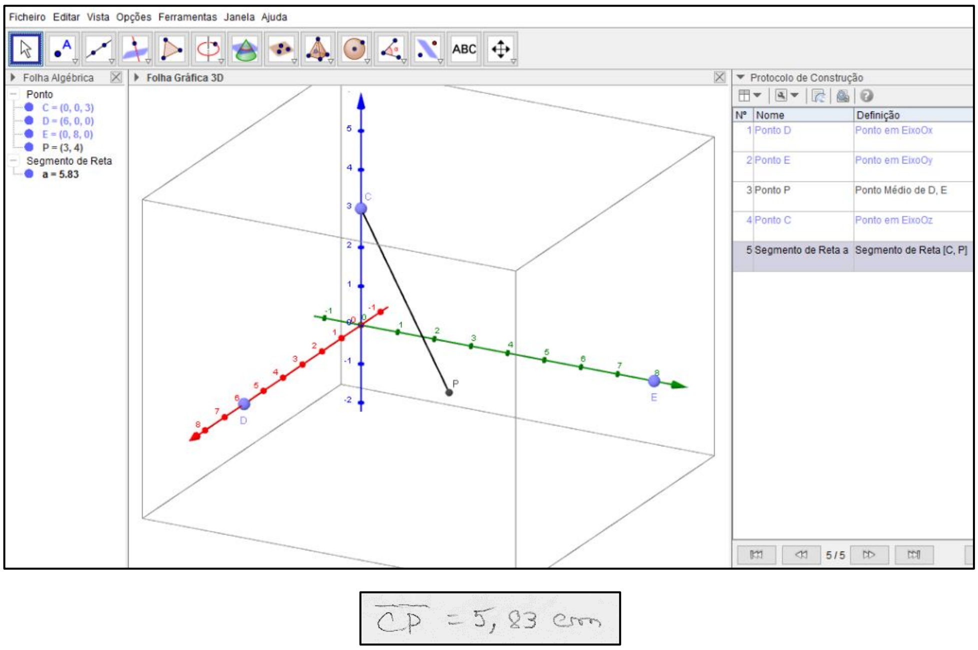
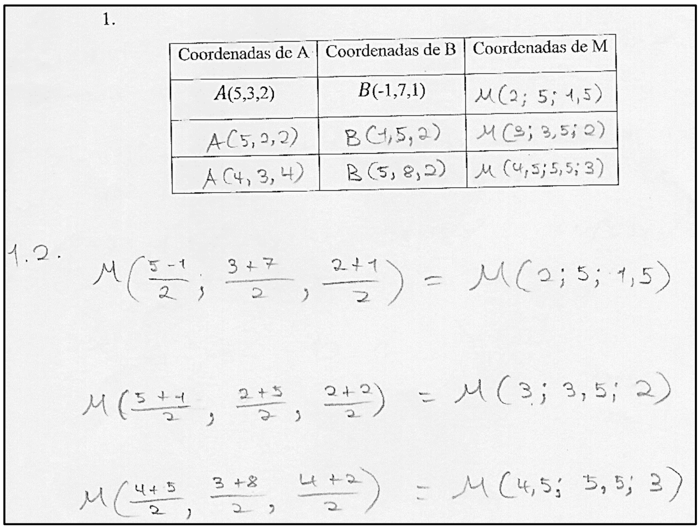


Figura 45 – Resolução do grupo 5 da questão 1.1. da PP no teste inicial.

3.4.1.2. Análise dos resultados durante a implementação didática

Este grupo destacou-se, também, na realização da tarefa 1 pois foi o único que variou as três coordenadas dos pontos A e B, mostrando maior facilidade em trabalhar no *GeoGebra* (figura 46). Apesar de já ter mostrado na PT do teste inicial que sabia determinar analiticamente as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta, não indicou como fazê-lo na pergunta 1.1 (onde se pedia para relacionar as coordenadas de M com as coordenadas de A e B). Assim, tal como os grupos restantes, limitou-se a verificar que a expressão fornecida no enunciado da questão 1.2 era válida para os pontos que tinha obtido em 1.1.


1.

Coordenadas de A	Coordenadas de B	Coordenadas de M
$A(5,3,2)$	$B(-1,7,1)$	$M(2;\ 5;\ 1{,}5)$
$A(5,2,2)$	$B(1,5,2)$	$M(3;\ 3{,}5;\ 2)$
$A(4,3,4)$	$B(5,8,2)$	$M(4{,}5;5{,}5;3)$

1.2.

$$M\left(\frac{5-1}{2};\ \frac{3+7}{2},\ \frac{2+1}{2}\right) = M(2;\ 5;\ 1{,}5)$$

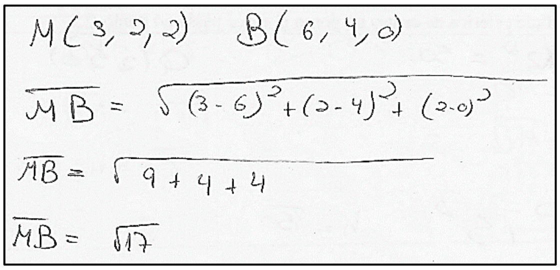
$$M\left(\frac{5+1}{2},\ \frac{2+5}{2},\ \frac{2+2}{2}\right) = M(3;\ 3{,}5;\ 2)$$

$$M\left(\frac{4+5}{2},\ \frac{3+8}{2},\ \frac{4+2}{2}\right) = M(4{,}5;\ 5{,}5;\ 3)$$

Figura 46 – Resolução do grupo 5 da tarefa 1.

3.4.1.3. Análise dos resultados do Teste Final

Comparando os resultados obtidos na PT do teste final do Tomás e do Paulo com os do teste inicial, considera-se que não houve muita evolução já que, no início da abordagem didática, estes alunos já mostravam compreender e saber aplicar os conceitos de ponto médio e distância entre dois pontos no espaço. Novamente, as suas respostas à questão 1.1 estão corretas (figuras 47 e 48).

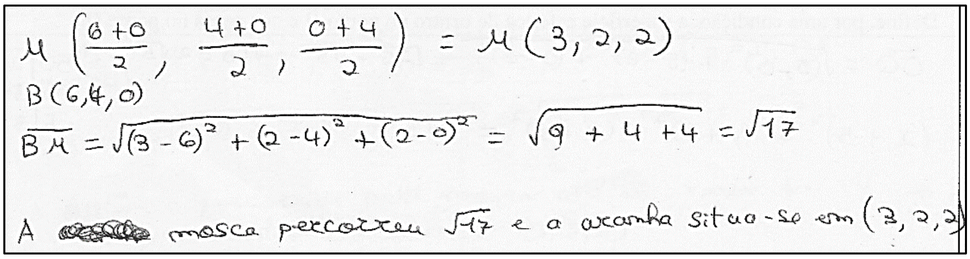

$M(3,2,2)$ $B(6,4,0)$

$\overline{MB} = \sqrt{(3-6)^2+(2-4)^2+(2-0)^2}$

$\overline{MB} = \sqrt{9+4+4}$

$\overline{MB} = \sqrt{17}$

Figura 47 – Resolução do Tomás da questão 1.1. da PT no teste final.


$M\left(\frac{6+0}{2},\ \frac{4+0}{2},\ \frac{0+4}{2}\right) = M(3,2,2)$

$B(6,4,0)$

$\overline{BM} = \sqrt{(3-6)^2+(2-4)^2+(2-0)^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$

A mosca percorreu $\sqrt{17}$ e a aranha situa-se em (3, 2, 2

Figura 48 – Resolução do Paulo da questão 1.1. da PT no teste final.

Quanto ao Filipe, o seu desempenho diminuiu em relação ao teste inicial. Apesar de no teste final ter indicado como determinar as coordenadas do ponto médio do segmento de reta [GB] (figura 49), desta vez não calculou a distância $\overline{BM}$, procedimento que já tinha efetuado no início da sequência didática. Tendo calculado M e dispondo das coordenadas de B, bastava-lhe aplicar a expressão que permite calcular a distância entre dois pontos no espaço, tal como o aluno tinha feito no teste inicial. Considera-se que foi lapso do aluno não ter respondido a esta parte da pergunta uma vez que na questão 2 do mesmo teste determinou o raio da superfície esférica através da expressão referida, como se poderá verificar no ponto 3.4.3.3.

No entanto, o Filipe não foi o único aluno a ter concretizado um procedimento no teste inicial e não o ter feito no teste final. O Guilherme também determinou $\overline{BM}$ no teste inicial e não o fez no teste final.

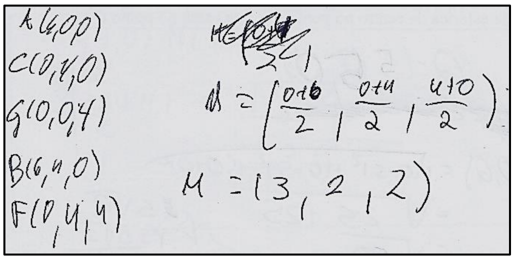
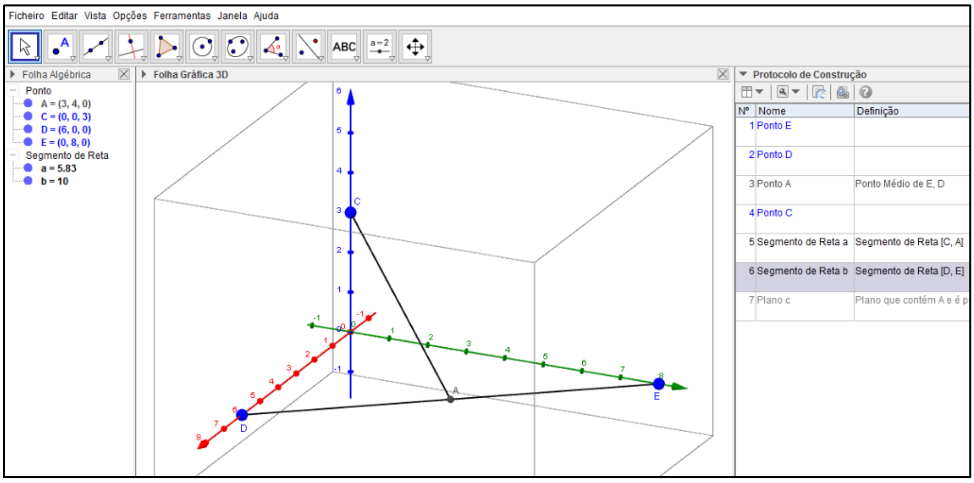
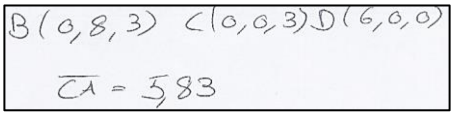


Figura 49 – Resolução do Filipe da questão 1.1. da PT no teste final.

Analisando o desempenho do grupo na questão 1.1 da PP do teste final (figura 50), considera-se que não houve evolução pois quando resolveu a mesma pergunta no teste inicial já tinha respondido corretamente. As únicas diferenças prendem-se com a forma como foram marcados os pontos C, D e E. Desta vez, o grupo optou por introduzir as suas coordenadas na caixa de entrada. Além disso, marcou o segmento de reta [DE], algo que não tinham feito no teste inicial. Deste modo, conclui-se que o grupo 5 aprendeu e sabe aplicar o conceito de ponto médio, tanto analiticamente como recorrendo ao *GeoGebra*.




B(0,8,3) C(0,0,3) D(6,0,0)

$\overline{CA}$ = 5,83

Figura 50 – Resolução do grupo 5 da questão 1.1. da PP no teste final.

3.4.2. Plano mediador

3.4.2.1. Análise dos resultados do Teste Inicial

Relativamente aos conhecimentos deste grupo em relação ao plano mediador antes da sequência didática, não se dispõe de informação, uma vez que nenhum dos alunos respondeu à questão 1.2 da PT do teste inicial nem construíram qualquer plano na componente prática do mesmo teste.

3.4.2.2. Análise dos resultados durante a implementação didática

Quanto ao desempenho do grupo 5 na tarefa 2, salienta-se que esta despoletou, em alguns dos seus elementos, bastante interesse. Enquanto a professora/investigadora orientava a turma na construção do que era solicitado no *GeoGebra*, o Paulo, em particular, mostrou-se atento e participativo na aula (V_21_01_2016).

Professora: *Usando a ferramenta segmento de reta vamos construir o segmento de reta [BP]. Ao clicar em B e em P apareceu isto na folha algébrica [c=6,61]. O que acham que representa este valor, 6,61?*

Paulo: *É a distância entre B e P.*

Professora: *Ótimo!*

(depois de seguir o mesmo procedimento para os pontos A e P)

Professora: *Mexam agora o ponto P. O que é que acontece às distâncias* $\overline{AP}$ *e* $\overline{BP}$*?*

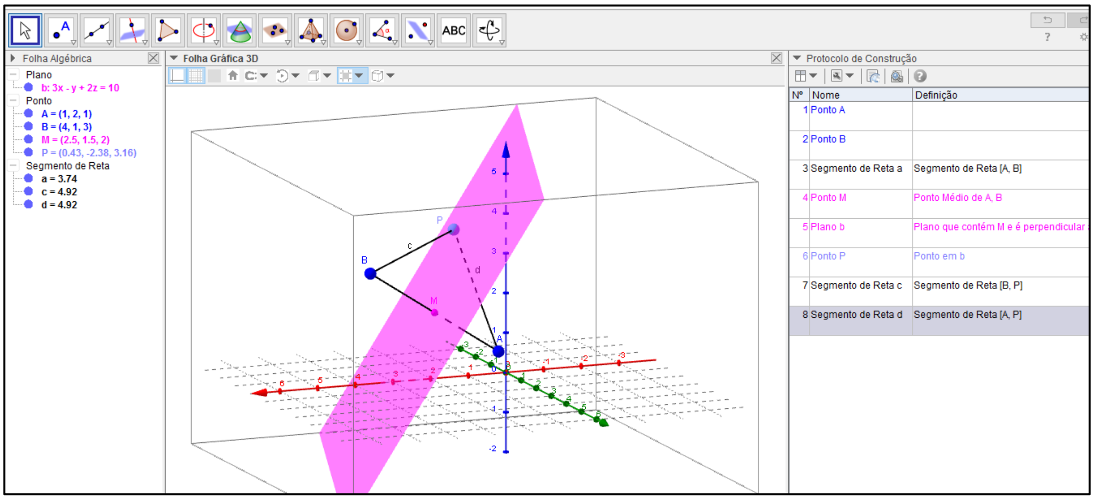
Paulo e Rita em simultâneo: *São sempre iguais!*

Por outro lado, durante o período de trabalho autonomo atribuído aos grupos para a resolução desta tarefa, o Filipe mostrou-se desinteressado na sua realização (NC_21_01_2016).

"Durante a tarefa 2, o Filipe manteve uma postura corporal de desinteresse e não interagiu com os seus colegas de grupo enquanto estes discutiam sobre as resposta à tarefa".

Relativamente à construção do plano medidador do grupo 5 (figura 51), pode-se observar que está correta. Atendendo à resposta do grupo à questão 1 e às intervenções do Paulo durante a aula, infere-se que o grupo associou o ponto P, construído no *GeoGebra* com a ferramenta Ponto no Objeto, aos pontos do espaço equidistantes de A e de B. Deste modo, depreende-se que o grupo estabeleceu uma conexão entre o conceito de plano mediador que já conhecia e a construção que tinha acabado de realizar. Salienta-se, contudo, que a resposta à questão 1 não está correta do ponto de vista sintático.

Analisando a resposta à pergunta 2 (figura 51), verifica-se que este grupo, tal como o grupo 3, determinou autonomamente a equação cartesiana do plano mediador de um segmento de reta de extremos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$. Em seguida, substituiu na expressão obtida os pontos A e B do enunciado e determinou a expressão analítica do plano mediador construído, apresentando-a na forma simplificada.



1. A distância do ponto P a cada um dos extremos são sempre iguais.

2. $(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2=(x-b_1)^2+(y-b_2)^2+(z-a_3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=(x-4)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}-4y+4+\cancel{z^2}-2z+1=\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}+\cancel{z^2}-6z+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x-2y+4z-20=0 \Leftrightarrow$

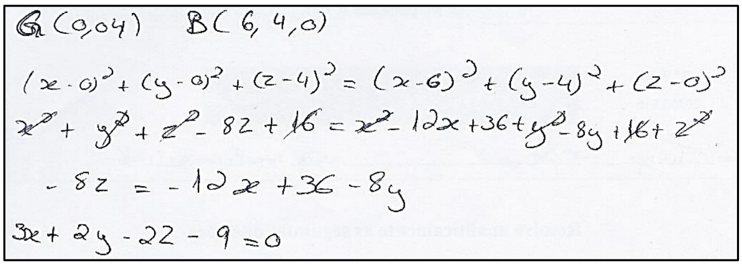
$\Leftrightarrow 3x-y+2z-10=0$

Figura 51 – Resolução do grupo 5 da tarefa 2.

3.4.2.3. Análise dos resultados do Teste Final

Relativamente à aprendizagem do conceito plano mediador, pode-se observar que alguns alunos deste grupo evoluiram bastante em relação ao teste inicial. O Tomás e o Paulo comprenderam o conceito e souberam aplicá-lo analiticamente, tal como é possível observar nas duas figuras seguintes.

O Tomás conseguiu determinar a equação cartesiana do plano mediador do segmento de reta [GB] e simplificá-la corretamente (figura 52).


G(0,04) B(6,4,0)

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-4)^2=(x-6)^2+(y-4)^2+(z-0)^2$

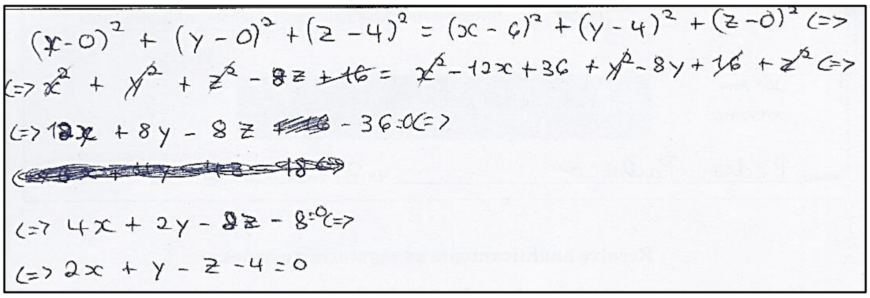
$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}-8z+\cancel{16}=\cancel{x^2}-12x+36+\cancel{y^2}-8y+\cancel{16}+\cancel{z^2}$

$-8z=-12x+36-8y$

$3x+2y-2z-9=0$

Figura 52 – Resolução do Tomás da questão 1.2. da PT no teste final.

O Paulo, por sua vez, mostrou que conhecia a expressão analítica do plano mediador de um segmento de reta e conseguia aplicá-la mas cometeu pequenos erros ao simplificar a expressão (figura 53).


$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-4)^2=(x-6)^2+(y-4)^2+(z-0)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}-8z+\cancel{16}=\cancel{x^2}-12x+36+\cancel{y^2}-8y+\cancel{16}+\cancel{z^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12x+8y-8z-36=0 \Leftrightarrow$

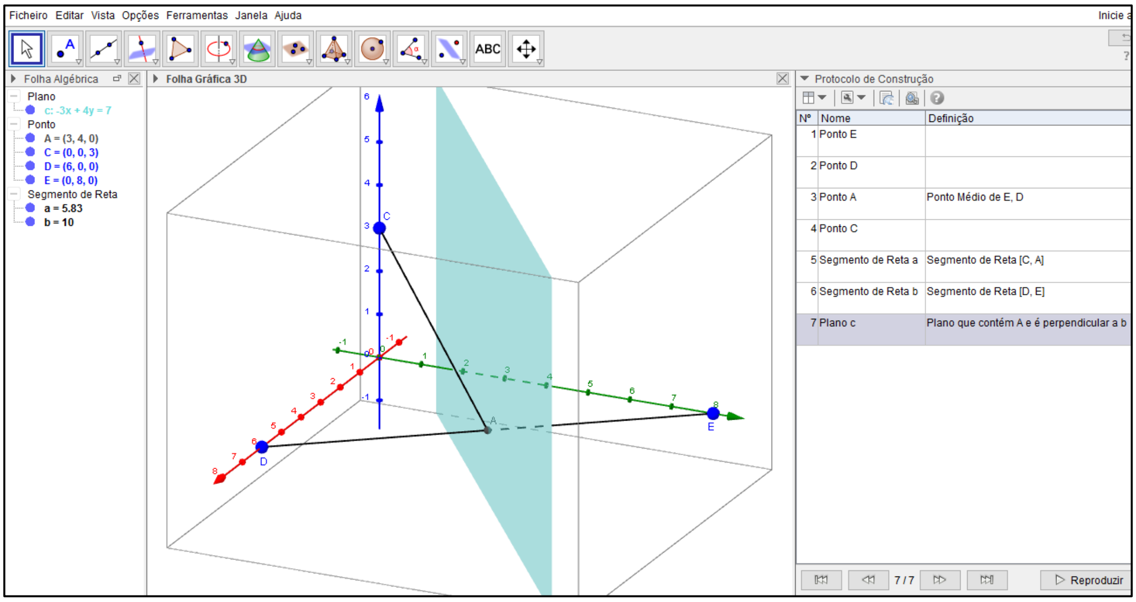
$\Leftrightarrow 4x+2y-2z-8=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+y-z-4=0$

Figura 53 – Resolução do Paulo da questão 1.2. da PT no teste final.

Por fim, o Filipe deixou em branco esta questão, não mostrando evidências de ter aprendido a equação cartesiana do plano mediador de um segmento de reta. Assim, verifica-se que neste grupo, tal como em algumas categorias de análise no grupo 3, a construção de conhecimento foi diferente a nível individual.

Quanto à construção de um plano mediador com o *GeoGebra*, analisada na questão 1.2 da PP do teste, pode-se verificar, na figura 54, que o grupo foi capaz de construir o plano solicitado usando a ferramenta Plano Perpendicular e identificar corretamente a sua expressão analítica na folha algébrica.



$$-3x+4y-7=0$$

Figura 54 – Resolução do grupo 5 da questão 1.2. da PP no teste final.

3.4.3. Superfície esférica

3.4.3.1. Análise dos resultados do Teste Inicial

Relativamente aos conhecimentos deste grupo em relação à superfície esférica, no início da abordagem didática, os alunos não foram capazes de transpor autonomamente os seus conhecimentos de Geometria Analítica no plano para a Geometria Analítica no espaço. Neste grupo, o Tomás e o Paulo deixaram a questão 2 em branco mas o Filipe tentou responder (figura 55).

Antes da implementação do estudo empírico, os estudantes abordaram os planos coordenados. Assim, o Filipe deveria ter aprendido que a interseção desses três planos é a origem do referencial o.n., constituindo assim um ponto. Todavia, a sua resposta mostra algumas falhas na compreensão desse tópico.

$$y=0 \wedge x=0 \wedge z=0$$

Figura 55 – Resolução do Filipe da questão 2 da PT no teste inicial.

Relativamente à PP do teste inicial, o grupo não fez qualquer construção para responder à questão 2.

3.4.3.2. Análise dos resultados durante a implementação didática

O desempenho do grupo 5 na questão 1.1 da tarefa 3 (figura 56) foi igual ao dos grupos anteriores, associando a medida do comprimento do segmento de reta [AP] ao raio da superfície esférica e indicando na folha de resposta $\overline{AP} = 3$.

Para responder à pergunta 1.2, o grupo determinou $\overline{AP}$ recorrendo à expressão da distância entre dois pontos no espaço e chegou ao resultado correto.

Na questão 2, foi capaz de generalizar da equação cartesiana de uma superfície esférica em particular (a correspondente à bola da Rita) para uma superfície esférica genérica centrada em $A(a_1, a_2, a_3)$ e de raio r. Mostrou também, nesta tarefa, que não confundia a superfície esférica com a esfera.

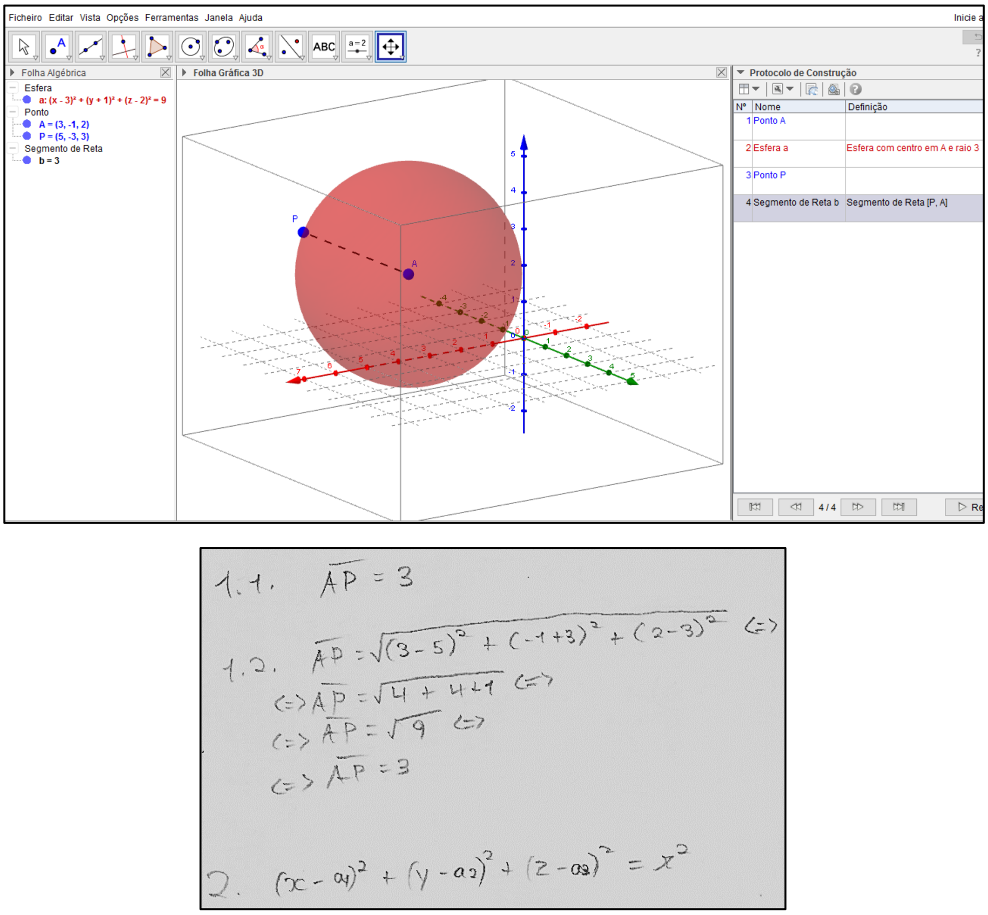


Figura 56 – Resolução do grupo 5 da tarefa 3.

Na figura 57, observa-se a resolução do grupo 5 da tarefa 153 do manual. Tal como o grupo 3, começou por determinar o ponto médio do segmento de reta [AB] e, a partir daí, usou a ferramenta Esfera (Centro, Ponto) para definir a superfície esférica de diâmetro [AB].

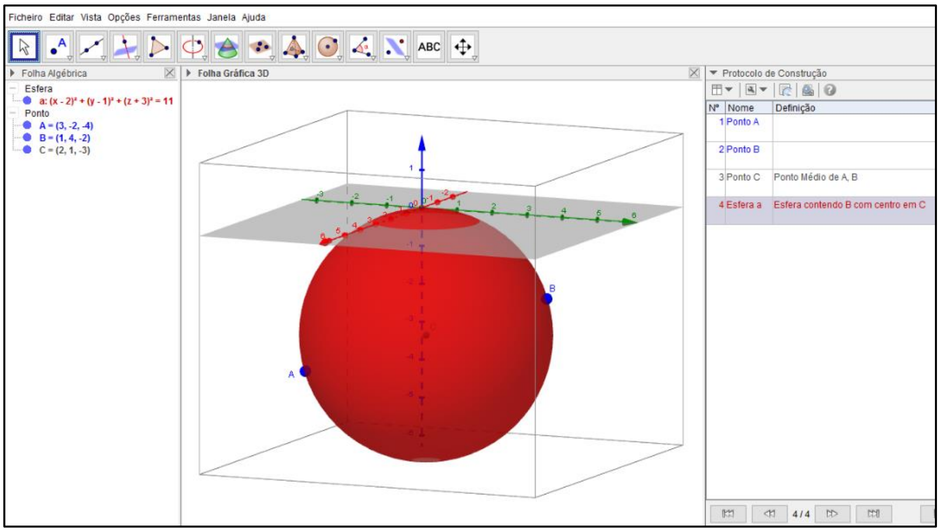


Figura 57 – Resolução do grupo 5 da tarefa 153 com recurso ao *GeoGebra*.

3.4.3.3. Análise dos resultados do Teste Final

Comparando as respostas dadas na questão 2 da PT do teste final com as da mesma parte do teste aplicado no início da abordagem didática, considera-se que houve uma grande evolução por parte do grupo 5, apesar de apenas um dos alunos ter chegado à resposta correta.

Observando a resposta do Tomás (figura 58), verifica-se que aprendeu e sabe aplicar o conceito de superfície esférica. Contudo, o aluno não apresentou de forma completa todos os cálculos que efetuou e revelou alguma falta de rigor na comunicação matemática ao nível escrito.

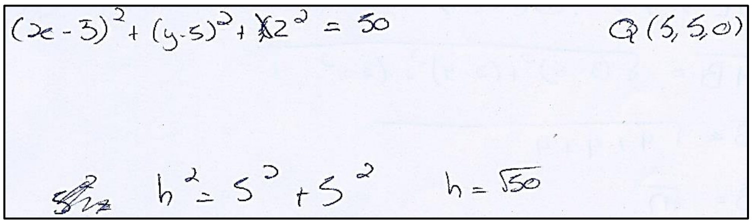


Figura 58 – Resolução do Tomás da questão 2 da PT no teste final.

Examinando a resposta do Paulo (figura 59), o aluno determinou corretamente o raio da superfície esférica apesar de se ter enganado a simplificar o radical. Na sua resposta final, apresenta algumas falhas, mostrando que não se apropriou devidamente da equação cartesiana que define uma superfície esférica. Apesar de indicar as coordenadas de Q(5,5,0), o aluno definiu uma superfície esférica de centro em (-5,-5,-5) e esqueceu-se de elevar o raio ao quadrado. Isto mostra, mais uma vez, que a construção de conhecimento neste grupo foi diferente a nível individual, tal como aconteceu em relação plano mediador.

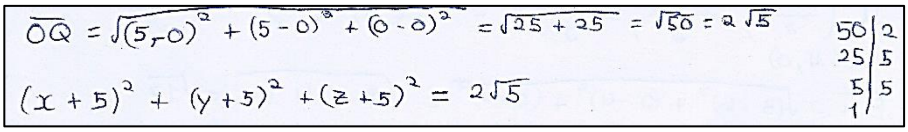


Figura 59 – Resolução do Paulo da questão 2 da PT no teste final.

Finalmente, a resposta do Filipe no teste final mostra um pior desempenho em relação ao que o grupo tinha revelado na tarefa 3. Nessa tarefa, os alunos mostraram saber distinguir a superfície esférica da esfera. No entanto, na questão 2 da PT do teste, o Filipe confunde os dois objetos geométricos (figura 60). Contrariamente ao que tinha mostrado na questão 1.1 da PT do teste final, é possível observar na figura 60 que, no final da abordagem didática, o aluno sabia determinar a distância entre dois pontos no espaço.

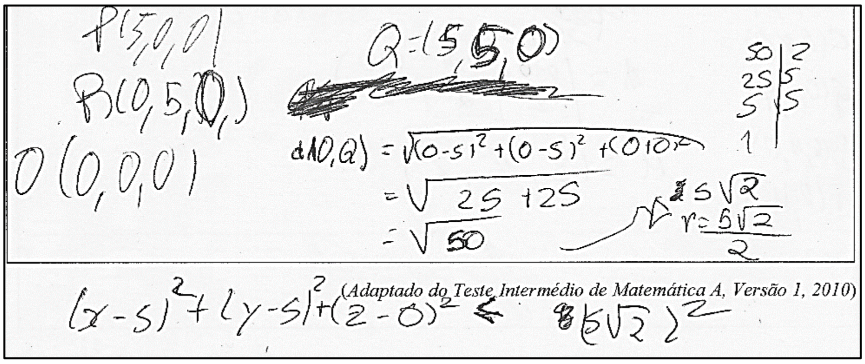
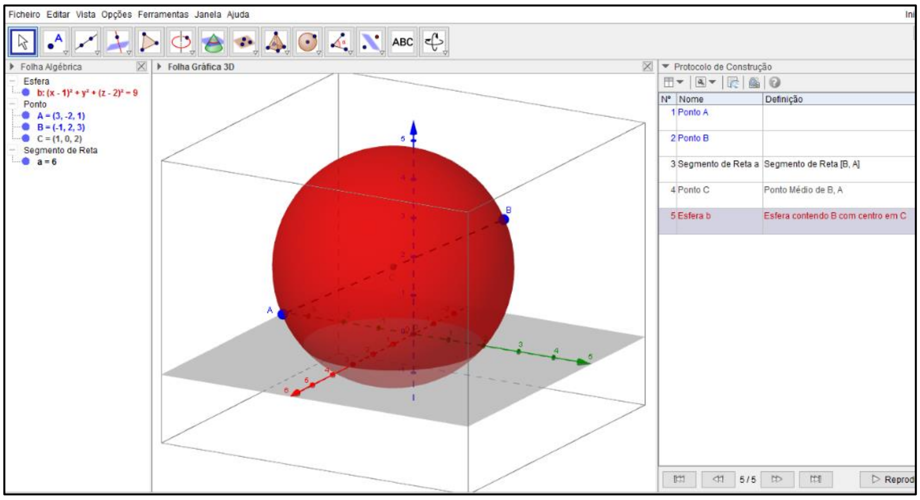


Figura 60 – Resolução do Filipe da questão 2 da PT no teste final.

Examinando agora o desempenho do grupo na questão 2 da PP do teste (figura 61), confirma-se que aprendeu a construir uma superfície esférica no *GeoGebra*. Tal como o grupo 3, começou por determinar o ponto médio do segmento de reta [AB] e, em seguida, usou a ferramenta Esfera (Centro, Ponto) para definir analiticamente a superfície esférica de diâmetro [AB].

Salienta-se que, durante a exploração e formalização do conceito de superfície esférica nas aulas, mostrou-se à turma como usar ambas as ferramentas Esfera (Centro, Ponto) e Esfera (Centro, Raio). Todavia, houve um único grupo que usou a ferramenta Esfera (Centro, Raio) no teste final, pelo que se pode inferir que a construção da superfície esférica com a outra ferramenta é mais simples para os alunos.



$$\boxed{(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=9}$$

Figura 61 – Resolução do grupo 5 da questão 2 da PP no teste final.

Face à análise de dados aqui apresentada, no capítulo seguinte apresentam-se as considerações finais desta investigação, fazendo um balanço do trabalho desenvolvido nesta abordagem didática e do seu contributo para a aprendizagem dos alunos.

4. Considerações finais

No presente capítulo, apresentam-se as principais conclusões deste estudo, estruturadas de acordo com as categorias de análise, numa tentativa de responder à questão de investigação. Explicitam-se ainda alguns constrangimentos do estudo e, por fim, propõem-se algumas sugestões para investigações futuras.

Comece-se por recordar a questão de investigação orientadora do trabalho:

Em que medida é que uma adequada exploração do *GeoGebra*, tirando partido de várias representações de entes matemáticos que o *software* permite e como complemento de ferramentas de ‘papel e lápis’, contribui para uma aprendizagem mais sólida da Geometria Analítica no espaço?

Face à questão apresentada definiu-se como objetivo de investigação:

Analisar a influência de uma adequada exploração, ao nível do 10.º ano de escolaridade, do *GeoGebra*, tirando partido das folhas gráfica 3D e algébrica e como complemento de ferramentas de ‘papel e lápis’, numa aprendizagem mais sólida relacionada com:

- o ponto médio de um segmento de reta no espaço;
- o plano mediador de um segmento de reta e
- a superfície esférica.

4.1. Principais conclusões

Note-se que as conclusões apresentadas em seguida dizem respeito aos casos estudados e são fruto da interpretação dos dados recolhidos sendo, por isso, subjetivas (Stake, 2012).

Os resultados obtidos neste estudo reforçam as conclusões a que chegaram outros autores (Breda et al., 2013; Santos, 2015; Silva, Machado, Zotto, & Mello, 2013) - que, de uma forma geral, o *GeoGebra*, usado como complemento de ferramentas de ‘papel e lápis’, contribuiu para a aprendizagem de tópicos de Geometria Analítica no espaço pelos casos de estudo.

4.1.1. Contributo do *GeoGebra* para a aprendizagem do ponto médio

Como já foi dito anteriormente, a tarefa de apropriação do conceito de ponto médio de um segmento de reta poderia ter sido mais rica se se tivesse tirado partido da folha de cálculo do *GeoGebra* em simultâneo com as folhas algébrica e gráfica 3D. Contudo, no final da abordagem didática, o Daniel foi o único que não determinou o ponto médio do segmento de reta na questão 1.1 do teste final (PT), deixando a resposta em branco. Os restantes alunos que integram os casos de estudo mostraram ter aprendido e saberem aplicar o conceito de ponto médio de um segmento de reta no espaço analiticamente.

Na parte prática do teste, no final da abordagem didática, todos os grupos foram capazes de determinar o ponto médio do segmento de reta pedido recorrendo à ferramenta  (Ponto Médio) mostrando compreenderem e saberem aplicar o conceito através do *GeoGebra*.

Tendo em conta estes resultados e ainda o desempenho dos grupos na realização da tarefa 1 acredita-se que o *GeoGebra* contribuiu de uma forma geral para a aprendizagem deste tópico pelos casos selecionados.

4.1.2. Contributo do *GeoGebra* para a aprendizagem do plano mediador

No final deste estudo, o Filipe foi o único aluno que não mostrou evidências de ter aprendido ou saber aplicar o conceito de plano mediador de um segmento de reta, deixando a resposta à questão 1.2 do teste teórico em branco. Quanto aos restantes alunos, mostraram conhecer a equação cartesiana que define o plano mediador e saber aplicá-la analiticamente, mostrando alguns maior desembaraço na sua simplificação do que outros.

Em relação à compreensão e aplicação deste conceito por recurso ao *GeoGebra*, os resultados obtidos nem sempre corresponderam ao que era esperado. Os grupos 3 e 5 construíram o plano mediador solicitado na questão 1.2 da PP do teste final com a ferramenta  (Plano Perpendicular). Todavia, o grupo 4 determinou a equação cartesiana do plano mediador analiticamente e, em seguida, introduziu-a na caixa de entrada do *software*.

A resolução do grupo 4 levanta uma questão: será que o facto de os alunos não saberem usar as ferramentas do *GeoGebra* para determinar as expressões analíticas dos objetos geométricos significa que o mesmo não tenha contribuído para a sua aprendizagem? Uma análise mais atenta ao desempenho do grupo 4 ao longo de toda a investigação, das dúvidas que levantou e dos meios alternativos que usou para responder às questões, permite concluir que não. De facto, pela abordagem implementada compreendeu-se que o contributo do *GeoGebra* para a aprendizagem dos tópicos lecionados ultrapassa o simples conhecimento das ferramentas por parte dos alunos. Na verdade, o conhecimento da ferramenta que permite determinar o objeto geométrico e a compreensão do conceito que lhe está subjacente estão relacionados mas não constituem uma relação de causa-efeito.

Atendendo à resolução do grupo 4 da questão 1.2 da PP do teste final, infere-se que as alunas compreenderam que a representação gráfica de objetos a três dimensões é uma das vantagens do *software*. Para além disso, apesar de não terem usado a ferramenta Plano Perpendicular mostraram, em vários momentos, compreender a dualidade entre as folhas algébrica e gráfica 3D. Deste modo, o *GeoGebra* parece ter contribuído para a sua aprendizagem do tópico plano mediador, assim como dos restantes casos de estudo.

4.1.3. Contributo do *GeoGebra* para a aprendizagem da superfície esférica

No final desta sequência didática, o Daniel foi o único aluno que não mostrou evidências de ter aprendido o conceito de superfície esférica por ter deixado a questão 2 do teste teórico em branco, tanto no teste inicial como no teste final. Para além deste caso, o Leandro, o Paulo e o Filipe não se apropriaram corretamente da equação cartesiana da superfície esférica, embora tivessem revelado falhas diferentes. O Leandro e o Paulo não sabiam a equação cartesiana da superfície esférica mas mostraram distinguir a superfície esférica da esfera apresentando, na sua resposta, uma equação em vez de uma inequação. O Filipe revelou o oposto - a resposta à questão 2 do teste teórico está quase certa mas indicou uma inequação em vez de uma equação.

A distinção entre superfície esférica e esfera foi explicada aos alunos durante a abordagem didática e, para além disso, estes dois conceitos já deveriam ser conhecidos dos alunos no 3.º CEB. A novidade relativamente aos conteúdos do 10.º ano de escolaridade era a equação e a inequação cartesianas de cada um destes objetos geométricos. Assim, não foi possível averiguar a razão pela qual o Filipe confundiu os dois conceitos no final da abordagem didática. Quanto aos restantes alunos que integram os casos de estudo, mostraram ter aprendido a equação cartesiana que define uma superfície esférica e saber aplicá-la analiticamente.

Em relação à compreensão e aplicação deste conceito por recurso ao *GeoGebra*, mais uma vez, os resultados obtidos nem sempre corresponderam ao que era esperado.

Os grupos 3 e 5 construíram a superfície esférica solicitada na questão 2 da PP do teste final com a ferramenta Esfera (Centro, Ponto). Por outro lado, o grupo 4 utilizou métodos analíticos em conjunto com métodos tecnológicos para responder à pergunta. No entanto, como não usaram a ferramenta Esfera (Centro, Raio) nem a Esfera (Centro, Ponto) não se sabe se o grupo é capaz de mobilizar autonomamente alguma delas para construir uma superfície esférica. Tal como foi referido relativamente ao plano mediador, mesmo que as alunas não tenham aprendido a usar essas ferramentas, considera-se que o programa contribuiu para a aprendizagem da superfície esférica, uma vez que mobilizaram conhecimentos adquiros (teóricos e práticos) para interpretar informação contida no *software* e, assim, definir analiticamente o objeto geométrico solicitado.

4.2. Constrangimentos do estudo

O primeiro constrangimento que se impôs neste estudo prende-se com o facto de ter sido implementado no âmbito da Prática de Ensino Supervisionada da investigadora e, consequentemente, esta não ser a professora titular da turma. Sendo professora estagiária, a sua intervenção foi pontual, não possibilitando um maior conhecimento dos alunos e das suas dificuldades.

Em segundo lugar, o facto de a turma nunca ter trabalhado no *GeoGebra* anteriormente a esta investigação influenciou substancialmente o tempo atribuído às tarefas, que teve de ser mais longo. Provavelmente teria sido vantajoso ter implementado aulas recorrendo ao *software* durante a lecionação do capítulo de Geometria Analítica no plano para que os alunos pudessem adquirir maior destreza no seu manuseamento.

O reduzido número de aulas previstas no início do ano letivo para a implementação do subtópico "Geometria Analítica no espaço" revelou-se outro constrangimento. Tendo em conta que a abordagem didática previa a resolução de tarefas de forma autónoma pelos alunos, envolvendo um *software* que não dominavam, seriam necessárias mais aulas para que se pudessem implementar tarefas mais desafiantes e explorar, em maior profundidade, as potencialidades do *GeoGebra*.

O último constrangimento identificado relaciona-se com a inexperiência da própria investigadora. Sendo esta a sua primeira investigação no âmbito da educação, nem sempre soube como proceder. Neste sentido, o desenvolvimento do trabalho foi feito de avanços e recuos.

4.3. Sugestões para investigações futuras

Considerando a reduzida dimensão deste estudo, seria interessante realizar uma investigação mais alargada, começando, deste logo, pela Geometria Analítica no plano e estendendo-a até a Geometria Analítica no espaço.

Julga-se, também, pertinente aplicar este estudo no 11.º ano de escolaridade, onde também são estudados tópicos de Geometria Analítica, e noutras turmas, para averiguar se os resultados obtidos apontariam no mesmo sentido.

Referências bibliográficas

Abar, C. (2012). Aportes teóricos de pesquisas que utilizaram o Geogebra. In *Atas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra* (pp. 1–13). Uruguay. Retrieved from http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/procesadas1367284106/69.pdf

Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte, & P. Abrantes (Eds.), *Ensino da Geometria no Virar do Milénio*. Lisboa: DEFCUL. Retrieved from http://bit.ly/2dkJxr8

Ackermann, E. (2001). Piaget's constructivism, Papert's constructionism: What's the difference. *Future of Learning Group Publication*. Retrieved from http://bit.ly/22Pp5Np

Almeida, J., & Grubisich, T. (2011). O ensino e a aprendizagem na sala de aula numa perspectiva dialética. *Revista Lusófona de Educação*, (17), 65–74. Retrieved from http://bit.ly/2d7Nd9l

Almeida, M., & Matos, J. (2011). Modelando um novo currículo - a Matemática Moderna no início da Telescola. In *Actas do I Congresso Ibero-Americano de História da Educação Matemática* (pp. 69–84). Lisboa: UIED.

Andrade, C., Pereira, P., & Pimenta, P. (n.d.). *Novo Ípsilon - Volume 2: Matemática A*. Lisboa: Raiz Editora. Retrieved from http://bit.ly/2duehBJ

Aquino, S. (2013). *O projeto PmatE e a aprendizagem da Matemática no Ensino Superior*. Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, Portugal.

Bhagat, K., & Chang, C.-Y. (2015). Incorporating GeoGebra into Geometry Learning-A Lesson from India. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(1), 77–86. Retrieved from http://bit.ly/2diJiga

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Borrões, M. (1998). O computador na educação matemática. *Portugal: Programa Nónio Século XXI*. Retrieved from http://ml.apm.pt/apm/borrao/matematica.PDF

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no ensino básico*. Lisboa: ME - DGIDC.

Breda, A., Trocado, A., & Santos, J. (2013). O GeoGebra para além da segunda dimensão. *Indagatio Didactica*, *5*(1), 61–83. Retrieved from http://bit.ly/2d8xuYy

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11–17. Retrieved from http://www.rdpc.uevora.pt/handle/10174/4265

Candeias, N., & Ponte, J. P. (2008). Aprender geometria utilizando um ambiente de geometria dinâmica. In *Tecnologias e Educação Matemática, actas dos encontros da Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática*. Vieira de Leiria: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. Retrieved from http://bit.ly/1L5oUn9

Carvalho, M., Andrade, A., & Cardoso, E. (2009). A utilização de ambientes geométricos dinâmicos no ensino e aprendizagem de geometria - um curso de geometria no 9.º ano de escolaridade. In *Encontro Nacional de Professores de Matemática: ProfMat 2009* (pp. 1–11). Viana do Castelo: Associação de Professores de Matemática. Retrieved from http://hdl.handle.net/10400.14/14479

Casal, J. (2013). Construtivismo tecnológico para promoção de motivação e autonomia na aprendizagem. In *XII Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia* (pp. 6616–6631). Braga: Universidade do Minho. Retrieved from http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/26765

Choi, K. (2010). Motivating students in learning mathematics with GeoGebra. *Annals. Computer Science Series*, *8*(2), 65–76. Retrieved from http://bit.ly/1SJc46h

Coelho, M., & Saraiva, M. (2000). Tecnologias no ensino/aprendizagem da geometria. In *Ensino e Aprendizagem da Geometria, actas dos encontros da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação* (pp. 35–60). Fundão: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. Retrieved from http://bit.ly/2dqQxPC

Costa, C. (2000). Visualização, veículo para a educação em geometria. In *Ensino e aprendizagem da Geometria, actas dos encontros da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação* (pp. 157–184). Fundão: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. Retrieved from http://bit.ly/1KwQ63o

Coutinho, C. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática*. Coimbra: Edições Almedina.

D'Hainaut, L. (1992). *Conceitos e Métodos da Estatística* (Vol. II). Lisboa: Livraria Almedina.

Decreto Legislativo Regional n.º17/2015/A de 17 de abril. (2015). *Diário da República, 1.ª Série, N.º 119*. Região Autónoma dos Açores.

Denbel, D. (2015). Student's Learning Experiences When Using a Dynamic Geometry Software Tool in a Geometry Lesson at Secondary School in Ethiopia. *Journal of Education and Practice*, *6*(1), 23–38. Retrieved from http://1.usa.gov/1UEBwrQ

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. (M. T. Moretti, Trans.)*Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 266–297. Retrieved from http://bit.ly/1Pr1RoM

Edwards, J., & Penney, D. (1994). *Calculus with analytic geometry* (4th ed.). Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Feltrin, E. (2015). As novas tecnologias aplicadas ao ensino de Física numa perspectiva construtivista. In *V Seminário Nacional Interdisciplinar em Experiências Educativas* (pp. 484–495). Panamá. Retrieved from http://bit.ly/2dFypRk

Fischer, B., & Fischer, M. (2011). Repercussões do movimento da Matemática Moderna nas práticas escolares nos anos 1980, sul do Brasil. In *Actas do I Congresso Ibero-Americano de História da Educação Matemática* (pp. 239–247). Lisboa: UIED.

Fosnot, C. (2005). Constructivism: a psychological theory of learning. In *Constructivism: theory, perspectives and practice* (2nd ed.). Teachers College Press. Retrieved from http://bit.ly/1PI9Ljs

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gaspar, J., & Cabrita, I. (2014). GeoGebra e ferramentas tradicionais – Uma conjugação favorável à apropriação das isometrias. In *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 169–190). Braga: APM. Retrieved from http://www.apm.pt/files/_P10_534361be1df72.pdf

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *27*(3), 126–131. Retrieved from http://eprints.soton.ac.uk/50742/

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007, March). Dynamic Mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics and Its Applications*, *7*. Retrieved from http://www.maa.org/node/115964

Isotani, S., & Brandão, L. (2006). Como Usar a Geometria Dinâmica? O Papel do Professor e do Aluno Frente às Novas Tecnologias. In *XII Workshop de Informática na Escola: anais do XXVI Congresso da SBC*. Campo Grande, 14-20 julho 2006 (120-128). Retrieved from http://bit.ly/1Q1Lsg5

Karrer, M., & Barreiro, S. N. (2013). Superfícies esféricas: uma proposta de ensino com o auxílio de um ambiente de geometria dinâmica. In R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1843–1850). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/4499/

Laborde, C. (2000). Why technology is indispensable today in the teaching and learning of mathematics? In *Contribution to the T3 World-Wide conference in Tokyo*. Retrieved from http://bit.ly/2dNH18h

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 275–304). Rotterdam: Sense Publishers.

Leandro, R. (2006). *Insucesso escolar na Matemática: um (outro) olhar*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Portugal. Retrieved from http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/6758

Leão, D. (1999). Paradigmas contemporâneos de educação: escola tradicional e escola construtivista. *Cadernos de Pesquisa*, *107*, 187–206.

Ljajko, E., & Ibro, V. (2013). Development of ideas in a GeoGebra - aided mathematics instruction. *Mevlana International Journal of Education (MIJE), 3*(3), 1–7. Retrieved from http://eric.ed.gov/?id=ED544150

Lu, Y. (2008). *Linking geometry and algebra: a multiple-case study of upper-secondary mathematics teachers' conceptions and practices of GeoGebra in England and Taiwan*. Dissertação de Mestrado, University of Cambridge, England. Retrieved from http://bit.ly/2cSUIpd

Martins, C. (2012). *Sistemas de equações - uma abordagem criativa*. Dissertação de Mestrado, Universidade Aveiro, Portugal. Retrieved from http://ria.ua.pt/handle/10773/9883

ME. (2001). *Matemática A 10.º Ano*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário. Retrieved from http://dge.mec.pt/programas-e-metas-curriculares

ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC. Retrieved from http://www.dge.mec.pt/matematica

ME. (2013a). *Programa e Metas Curriculares Matemática A Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério de Educação e Ciência. Retrieved from http://bit.ly/2dS9n4Y

ME. (2013b). *Programa e Metas Curriculares Matemática Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Mehanovic, S. (2009). Learning based on dynamic software geogebra. Retrieved from http://bit.ly/1NWuOXJ

Mergel, B. (1998). *Instructional Design & Learning Theory*. University of Saskatchevan: Educational Communications and Technology. Retrieved from http://etad.usask.ca/802papers/mergel/brenda.htm#The Basics of Constructivism

Miras, M. (2001). Um ponto de partida para a aprendizagem de novos conteúdos: os conhecimentos prévios. In C. Coll, E. Martín, T. Mauri, M. Miras, J. Onrubia, I. Solé, & A. Zabala (Eds.), *O construtivismo na sala de aula: novas perspectivas para a acção pedagógica* (pp. 54–73). Edições ASA.

Nascimento, E. (2012). Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. In *Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra* (pp. 125–132). Uruguay. Retrieved from http://bit.ly/2dF5fnK

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. 2ª edição. Lisboa:

APM.

Onrubia, J. (2001). Ensinar: criar Zonas de Desenvolvimento Próximo e intervir nelas. In C. Coll, E. Martín, T. Mauri, M. Miras, J. Onrubia, I. Solé, & A. Zabala (Eds.), *O construtivismo na sala de aula: novas perspectivas para a acção pedagógica* (pp. 120–149). Edições ASA.

Papert, S., & Harel, I. (1991). *Constructionism*. Ablex Publishing Corporation. Retrieved from http://namodemello.com.br/pdf/tendencias/situatingconstrutivism.pdf

Pereira, P. (2010). *Integração de Recursos Educativos Abertos num Modelo Pedagógico de Ensino-Aprendizagem*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro, Portugal. Retrieved from http://bit.ly/2dxPgpw

Piteira, G., & Matos, J. (2000). Ambientes Dinâmicos de Geometria como Artefactos Mediadores para a Aprendizagem da Geometria. In *Ensino e Aprendizagem da Geometria, actas dos encontros da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação* (pp. 61–72). Fundão: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. Retrieved from http://bit.ly/1PGBsqp

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM. Retrieved from http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3008

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105–132. Retrieved from http://bit.ly/1pt3ThV

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M., & Abrantes, P. (1997). *Didáctica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: ME - DGIDC. Retrieved from http://bit.ly/1P791Uy

Pozo, J. (1996). No es oro todo lo que reluce ni se construye (igual) todo lo que se aprende: contra el reduccionismo constructivista. *Anuario de Psicología*, *69*, 127–139. Retrieved from https://bitly.com

Quivy, R., & Campenhoudt, L. (2005). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. (J. M. Marques, M. A. Mendes, & M. Carvalho, Trans.) (4.º). Lisboa: Gradiva.

Raposo, R. (2011). Novas Ferramentas, dentro e fora da Sala de Aula: uma exploração com o GeoGebra. *Tecnologias Na Educação Matemática*, *113*, 37–42. Retrieved from http://www.apm.pt/files/_EM113_pp37-42_4e00b6c7cf8b3.pdf

Ribeiro, A. (2005). *O Cabri-Géomètre e a construção de uma nova cultura matemática*. Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, Portugal.

Ricoy, M., & Couto, M. (2011). As TIC no ensino secundário na matemática em Portugal: a perspectiva dos professores. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *14*(1), 95–119. Retrieved from http://bit.ly/1TGyvoq

Rocha, H. (2015). O formalismo matemático num contexto de utilização da tecnologia. In A. P. Canavarro, L. Santos, C. C. Nunes, & H. Jacinto (Eds.), *Atas do XXVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 25–33). Lisboa: APM.

Rodrigues, M. (2012). *O ensino da Geometria no 10º ano*. Dissertação de Mestrado, Universidade Portucalense Infante D Henrique, Portugal. Retrieved from http://bit.ly/2dL9oYT

Rosário, P. (2001). Diferenças processuais na aprendizagem: avaliação alternativa das estratégias de auto-regulação da aprendizagem. *Psicologia Educação E Cultura*, *5*(1), 87–102.

Roteiro, Z. (2016). *GeoGebra 3D - Uma Abordagem para Timor-Leste*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal. Retrieved from http://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/82457

Sampaio, P., & Coutinho, C. (2014). Ensinar Matemática com TIC: Em Busca de um

Referencial Teórico. *Revista Portuguesa de Pedagogia*, 91–109. Retrieved from http://iduc.uc.pt/index.php/rppedagogia/article/view/1738/1115

Santos, E. (2015). *Matemática e tecnologia: Analisando a contribuição do software GeoGebra 3D para o processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial*. Trabalho de conclusão de curso, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, Brasil. Retrieved from http://bit.ly/2gWKtOM

Santos, I. (2011). *Explorando conceitos de Geometria Analítica Plana utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação: uma ponte do Ensino Médio para o Ensino Superior construída na formação inicial de Professores de Matemática*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil. Retrieved from http://bit.ly/2dsmJ8K

Silva, R., Machado, G., Zotto, N., & Mello, K. (2013). GeoGebra 3D e quadro interativo: uma possibilidade para o ensino de geometria espacial no ensino médio. In *VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática* (pp. 1–13). Rio Grande: ULBRA. Retrieved from http://bit.ly/2hK5X1j

Silveira, A., & Cabrita, I. (2013). O GeoGebra como ferramenta de apoio à aprendizagem significativa das transformações geométricas isométricas. *Indagatio Didactica*, *5*(1), 150–170. Retrieved from http://revistas.ua.pt/index.php/ID/article/view/2425

Solé, I., & Coll, C. (2001). Os professores e a concepção construtivista. In C. Coll, E. Martín, T. Mauri, M. Miras, J. Onrubia, I. Solé, & A. Zabala (Eds.), *O construtivismo na sala de aula: novas perspectivas para a acção pedagógica* (pp. 8–27). Edições ASA.

Stake, R. (2012). *A Arte da Investigação com Estudos de Caso*. (A. M. Chaves, Trans.) (3rd ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Valente, J. (n.d.). Informática na educação: instrucionismo x Construcionismo. Retrieved May 18, 2016, from http://bit.ly/2cGKl7Q

Valente, J. (2014). A comunicação e a educação baseada no uso das tecnologias digitais de informação e comunicação. *Revista UNIFESO - Humanas E Sociais*, *1*(1), 141–166. Retrieved from http://bit.ly/2ddjmzh

Veloso, E. (1998). *Geometria: temas atuais - materiais para professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Viveiros, J., & Lopes, A. (2008). O (in)sucesso escolar a matemática na transição para o 10.º ano - um estudo de caso. *Currículo, Aprendizagens E Trabalho Docente*, 2247–2263.

Yin, R. (2003). *Estudo de caso: planejamento e métodos* (2nd ed.). Porto Alegre: Bookman. Retrieved from http://bit.ly/1RO7Irp

Apêndices

Apêndice 1: Plano da primeira aula

Primeira aula de Geometria no espaço			
Ano: 10.º	*Turma:*	*Data:* 21/01/2016	*Tempo:* 1 bloco de 90 minutos

Sumário

Ficha de trabalho.
Distância entre dois pontos no espaço.
Ponto médio de um segmento de reta no espaço.
Plano mediador.

Objetivos

Do domínio do conhecimento

Gerais:

- Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do espaço;

Específicos:

- Inferir a expressão da distância entre dois pontos no espaço;
- Determinar as coordenadas de pontos médios de segmentos de reta no espaço;
- Definir o plano mediador de um segmento de reta

Do domínio das capacidades

- Resolver tarefas que variem no seu grau de complexidade e abertura;
- Desenvolver o raciocínio matemático através da resolução de problemas de Geometria Analítica;
- Selecionar estratégias de resolução de problemas;
- Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução;
- Interpretar e criticar resultados no contexto de problemas no âmbito da Geometria Analítica;
- Descobrir relações entre conceitos de Geometria Analítica;
- Usar a simbologia própria da Geometria;
- Utilizar o *GeoGebra* na resolução das tarefas propostas;
- Trabalhar em grupo.

Do domínio das atitudes

- Colaborar em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades;
- Abordar situações novas com interesse e espírito de iniciativa;
- Elaborar e apresentar as resoluções das tarefas propostas de forma organizada;
- Respeitar a opinião dos outros;
- Apreciar o *GeoGebra* enquanto ferramenta tecnológica mediadora na aprendizagem da Geometria Analítica.

Tema: Geometria Analítica no espaço

Tópicos:

- Distância entre dois pontos no espaço;
- Ponto médio de um segmento de reta no espaço;
- Plano mediador de um segmento de reta;

Conceitos prévios

- Coordenadas de pontos no espaço;
- Distância entre dois pontos no plano;
- Teorema de Pitágoras;

Conceitos emergentes

- Distância entre dois pontos no espaço;
- Ponto médio de um segmento de reta no espaço;
- Plano mediador.

Estrutura da aula

1. Redação do sumário
2. Aplicação do teste inicial (partes teórica e prática)
3. Realização da tarefa 0 pelos alunos
4. Correção da tarefa 0 (após a recolha das resoluções)
5. Realização da tarefa 1 pelos alunos
6. Correção da tarefa 1 (após a recolha das resoluções)
7. Realização da tarefa 2 pelos alunos
8. Correção da tarefa 2 (após a recolha das resoluções)

Metodologia

Nesta aula, os alunos resolverão, em grupos, tarefas de variada complexidade e abertura (tarefas 0, 1 e 2), no sentido da consecução dos objetivos formulados.

Para efeitos de recolha de dados para o Relatório de Estágio irão ainda realizar um teste (assim designado apenas para efeitos da investigação) com duas partes: uma teórica (com recurso a papel e lápis) e uma prática (com recurso ao *GeoGebra*). Para que a recolha das produções dos alunos não os impeça de ficar com o enunciado das tarefas irei distribuir, em folhas isoladas e para cada uma delas, o enunciado e uma folha de respostas.

Enquanto decorre o trabalho dos estudantes, irei, em conjunto com a professora Paula, acompanhar o seu trabalho e orientá-los sem, no entanto, lhes fornecer as respostas às tarefas.

Terminado o tempo de resolução atribuído a cada uma das tarefas, que será indicado previamente, irei recolher as suas produções e, em seguida, será feita a correção no quadro para toda a turma, incentivando a participação dos alunos.

Durante a realização destas atividades, os estudantes não poderão consultar o manual pois, só assim, poderei compreender se eles são capazes de, a partir de casos particulares, generalizar.

Em virtude das orientações metodológicas anteriores os recursos a utilizar nesta aula são:

Lápis ou caneta;
Calculadora;
Marcador do quadro;
Computadores com *GeoGebra* instalado e projetor;
Teste – Parte Teórica
Teste – Parte Prática
Ficha de Tarefas – Distância entre dois pontos no espaço
Ficha de Tarefas – Ponto médio de um segmento de reta no espaço
Ficha de Tarefas – Plano mediador de um segmento de reta

Avaliação das aprendizagens

Irei avaliar as aprendizagens dos alunos a partir da recolha das suas resoluções das tarefas propostas.

Desenvolvimento da aula

- **Primeira parte (5 minutos):** redação do sumário

Nesta parte da aula, explicarei que, para fins do meu projeto de investigação no âmbito do mestrado, durante a mesma e nas seguintes, irei recolher as suas resoluções das tarefas que lhes vou propor.

- **Segunda parte (20 minutos):** aplicação do teste inicial
  - <u>Parte teórica</u>: 10 minutos
  - <u>Parte prática</u>: 10 minutos

Em ambas as partes do teste, os alunos não terão acesso ao manual, ao caderno diário, nem à calculadora.

- **Terceira parte (15 minutos):** realização da tarefa 0 pelos alunos

Nesta questão, os alunos terão de interpretar o enunciado e perceber que devem calcular as medidas dos comprimentos dos segmentos de reta [AC] e [AB], para descobrir se a caneta cabe no estojo.

Em relação à pergunta 1, não são esperadas dúvidas quanto aos procedimentos a utilizar para resolver o problema, uma vez que os alunos, ainda este ano letivo (durante o estudo dos radicais), resolveram um exercício em que lhes era pedido para calcularem a diagonal espacial de um paralelepípedo, o que fizeram recorrendo ao Teorema de Pitágoras.

Se os alunos fizerem uma abordagem muito superficial do problema, afirmando por exemplo que a caneta não cabe no estojo pois as suas medidas de comprimento são 13 cm (comprimento), 5 cm (largura) e 3 cm (altura), irei sugerir-lhes que experimentem outras posições em que a caneta poderá caber no estojo.

Relativamente à pergunta 2, prevejo que alguns alunos tenham dificuldade, uma vez que não estão habituados a generalizar. Considero muito provável que vários grupos me questionem sobre o que é pedido nesta pergunta, uma vez que não dispõem de dados numéricos. Irei explicar-lhes que não se pretende que façam cálculos com dados numéricos mas que indiquem uma expressão, com as letras fornecidas, que permita determinar a distância entre os pontos A e B. Em caso de dificuldades, irei perguntar-lhes qual seria a expressão para determinar a distância entre os dois pontos se, em vez de uma diagonal espacial, fosse pedida a medida do comprimento da diagonal facial do paralelepípedo.

- **Quarta parte (10 minutos):** correção da tarefa 0

Os alunos deverão fazer a correção no caderno diário.

Pergunta 1

- 1º passo: determinar as coordenadas dos pontos

$A(5{,}0{,}0)$ $D(5{,}13{,}0)$ $C(0{,}13{,}0)$ $O(0{,}0{,}0)$ $E(5{,}0{,}3)$ $H(5{,}13{,}3)$ $B(0{,}13{,}3)$ $F(0{,}0{,}3)$

- 2º passo: Como a caneta mede 15 cm de comprimento, é maior que as medidas de comprimento do estojo - 13 cm (comprimento), 5 cm (largura) e 3 cm (altura). Será que a caneta cabe na diagonal [AC] do paralelepípedo?

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 13^2 + 5^2$$
$$\underset{\overline{AC}>0}{\Longleftrightarrow} \overline{AC} = \sqrt{169+25}$$
$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{194}$$
$$\Leftrightarrow \overline{AC} \cong 13{,}93$$

- $\overline{AD}$: como $\overline{AD}$ representa a medida do comprimento do paralelepípedo (que é dado pela ordenada do ponto H) então $\overline{AD} = 13$

- $\overline{DC}$: como $\overline{DC}$ representa a largura do paralelepípedo (que é dada pela abcissa do ponto H) então $\overline{DC} = 5$

Como a caneta mede 15 cm de comprimento e $\overline{AC} \cong 13{,}93$ cm, então ela não cabe no estojo segundo a direção do segmento de reta [AC]

- 3º passo: Será que a caneta cabe segundo a direção da diagonal [AB]? Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 13{,}93^2 + 3^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 203{,}04$$
$$\underset{\overline{AB}>0}{\Longleftrightarrow} \overline{AB} = \sqrt{203{,}04}$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB} \cong 14{,}25$$

Como $\overline{AB} \cong 14{,}25$ cm então a caneta não cabe no estojo

Pergunta 2

Após a correção da pergunta anterior, projetarei no *power point* a expressão que permite determinar, de forma direta, a distância entre quaisquer dois pontos representados num referencial o.n. do espaço:

Dados dois pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$, considerados num referencial o.n. do espaço, representamos a distância entre os dois pontos por $d(A,B)$ ou $\overline{AB}$ e tem-se:

$$\overline{AB} = d(A,B) = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}$$

De acordo com o que foi feito na questão anterior:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\underset{(1)}{\Leftrightarrow} \overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}$$

Tal como foi calculado anteriormente:

- $\overline{AC}^2 = 25 + 169$
- $\overline{BC}^2 = 9$

Substituindo em (1) vem:

$$\overline{AB} = \sqrt{25 + 169 + 9} \cong 14{,}25$$

- **Quinta parte (15 minutos):** realização da tarefa 1 pelos alunos

Como os estudantes nunca trabalharam com a folha gráfica 3D do GeoGebra, mostrar-lhes-ei durante breves minutos como ativar essa vista do *software* e a grelha. De seguida, explicitarei a correspondência entre cada um dos eixos do referencial o.n. e os eixos das abcissas, das ordenadas e das cotas. Explicar-lhes-ei, também, a utilização de algumas ferramentas básicas que poderão ser úteis em todas as construções que realizarem:

Mover

Arrastar a folha gráfica

Rodar a vista 3D

Ampliar

Reduzir

Após esta breve introdução à folha gráfica 3D, distribuirei o enunciado da tarefa 2 que os alunos terão 10 minutos para resolver.

Relativamente ao ponto 1 da tarefa 1, considero que os alunos poderão demorar um pouco a conseguir fazê-lo uma vez que nunca calcularam o ponto médio de um segmento de reta utilizando a ferramenta do GeoGebra. Em caso de dificuldade, irei sugerir-lhes que sigam as instruções que se indicam no verso da página.

Depois de terem conseguido realizar o ponto 1, mostrar-lhes-ei como mover os pontos A e B. Irei evidenciar que, ao movermos um ponto no GeoGebra, surge uma linha a tracejado indicando a projeção ortogonal desse ponto no plano xOy. Aconselhá-los-ei a variarem as coordenadas dos pontos tentando obter sempre coordenadas inteiras pois, assim, será mais fácil encontrar uma relação entre as coordenadas de M e as coordenadas de A e de B.

Em seguida, irei pedir-lhes que preencham a tabela que lhes será fornecida e que respondam ao que é pedido em 1.1 e 1.2.

Antes de passar à correção da tarefa, pedirei aos alunos para guardarem, no ambiente de trabalho, o ficheiro Geogebra em que trabalharam.

- **Sexta parte (5 minutos):** correção da tarefa 1

Como a realização da tarefa 2 com recurso ao GeoGebra será orientada por mim, prevejo que a sua correção seja rápida.

Alínea 1.1

Alguns pontos possíveis:

Coordenadas de A	Coordenadas de B	Coordenadas de M
$A(5,3,2)$	$B(-1,7,1)$	$M(2;5;1,5)$
$A(5,1,2)$	$B(-4,5,1)$	$M(0,5;3;1,5)$
$A(-2,-4,2)$	$B(6,4,3)$	$M(2;0;2,5)$

Alínea 1.2

$$M\left(\frac{5-1}{2},\frac{3+7}{2},\frac{2+1}{2}\right)=\left(2,5,\frac{3}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{5-4}{2},\frac{1+5}{2},\frac{2+1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},3,\frac{3}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{-2+6}{2},\frac{-4+4}{2},\frac{2+3}{2}\right)=\left(2,0,\frac{5}{2}\right)$$

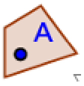
Após a correção da pergunta anterior, projetarei, de um ficheiro em *Power Point*, a expressão que permite determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta no espaço:

Num referencial o.n. do espaço, as coordenadas do ponto médio, M, de um segmento de reta $[AB]$, em que $A(a_1,a_2,a_3)$ e B(b_1,b_2,b_3), são:

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

❖ **Sétima parte (15 minutos):** realização da tarefa 2 pelos alunos

Para a realização desta tarefa, os alunos terão de recorrer ao ficheiro *tarefa2_plano_mediador* que foi colocado previamente nos seus computadores de trabalho.

Neste ficheiro, foi construído o segmento de reta [AB] de extremos $A(1,2,1)$ e $B(4,1,3)$ e foi marcado o seu ponto médio. O objetivo da tarefa será construir o plano mediador do segmento de reta anterior, com recurso à ferramenta  (plano perpendicular), e marcar um ponto (que se denominará ponto P) pertencente a esse plano, através da ferramenta  (ponto no objeto). Construindo os segmento de reta [AP] e [BP], será possível observar, na folha algébrica, a distância do ponto P, ponto genérico pertencente ao plano mediador, a cada um dos extremos do segmento de reta. Ao movimentar-se o ponto P, verificar-se-á que as distâncias $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ mantêm-se sempre iguais.

Como os passos de construção desta tarefa poderiam tornar-se confusos para os alunos, irei mostrar-lhe como fazê-la e eles acompanharão o processo nos seus computadores de trabalho.

Em relação à pergunta 1, não são esperadas dúvidas.

Na resolução da pergunta 2, os alunos poderão sentir alguma dificuldade. Nesse caso, irei perguntar-lhes como é que definiriam analiticamente a mediatriz do segmento de reta cujos extremos fossem os pontos dados no enunciado e sugerir-lhes que leiam atentamente o retângulo *Recorda*.

Nesta fase, penso que os alunos já se apropriaram do conceito de lugar geométrico. No entanto, se me questionarem sobre o seu significado, responderei que um lugar geométrico é um conjunto de pontos que satisfazem uma determinada condição. Poderei exemplificar afirmando que a mediatriz de um segmento de reta [AB] é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à mesma distância de A e de B.

❖ **Oitava parte (5 minutos):** correção da tarefa 2

Considero a possibilidade de não haver tempo para corrigir esta tarefa durante a aula. Nesse caso, a sua correção será realizada na aula seguinte.

Pergunta 1

A distância de P aos extremos do segmento de reta [AB] é sempre igual ($\overline{AP} = \overline{BP}$).

Pergunta 2

Seja $P(x, y, z)$ um ponto genérico pertencente ao plano mediador. De acordo com a questão anterior:

$$\overline{AP} = \overline{BP} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}\right)^{\cancel{2}} = \left(\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2}\right)^{\cancel{2}}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 + \cancel{z^2} - 2z + \cancel{1} = \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1} + \cancel{z^2} - 6z + 9$$

$$\Leftrightarrow -2x + 8x - 4y + 2y - 2z + 6z + 5 = 25$$

$$\Leftrightarrow 6x - 2y + 4z - 20 = 0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow 3x - y + 2z - 10 = 0}$$

Equação cartesiana reduzida do plano mediador de [AB]

Após a correção da pergunta anterior, projetarei, de um ficheiro em *Power Point*, a equação cartesiana do plano mediador de um segmento de reta $[AB]$.

Dados dois pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e B(b_1, b_2, b_3) do espaço, o plano mediador de $[AB]$ é o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ tais que $\overline{AP} = \overline{BP}$. Desta condição obtém-se uma equação cartesiana do plano mediador de $[AB]$**:**

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + (z - b_3)^2$$

Apêndice 2: Plano da segunda aula

Segunda aula de Geometria no espaço			
Ano: 10.º	*Turma:*	*Data:* 22/01/2016	*Tempo:* 1 bloco de 90 minutos

Sumário

Equação cartesiana da superfície esférica.
Inequação cartesiana da esfera.
Resolução de tarefas.

Objetivos

Do domínio do conhecimento

Gerais:

- Definir analiticamente conjuntos elementares de pontos do espaço;

Específicos:

- Inferir a expressão da superfície esférica;
- Inferir a expressão da esfera;

Do domínio das capacidades

- Resolver tarefas que variem no seu grau de complexidade e abertura;
- Desenvolver o raciocínio matemático;
- Descobrir relações entre conceitos de Geometria Analítica;
- Interpretar resultados no contexto da tarefa;
- Usar a simbologia própria da Geometria;
- Utilizar o *GeoGebra* na resolução de tarefas no âmbito da Geometria Analítica;
- Trabalhar em grupo.

Do domínio das atitudes

- Colaborar em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades;
- Abordar situações novas com interesse e espírito de iniciativa;
- Elaborar e apresentar as resoluções das tarefas propostas de forma organizada;
- Respeitar os colegas;
- Apreciar o *GeoGebra* enquanto ferramenta tecnológica mediadora na aprendizagem da Geometria Analítica.

Tema: Geometria Analítica no espaço

Tópicos:

- Equação cartesiana da superfície esférica.

• Inequação cartesiana da esfera.
Conceitos prévios • Coordenadas de pontos no espaço; • Distância entre dois pontos no espaço.
Conceitos emergentes • Equação cartesiana reduzida da superfície esférica; • Inequação cartesiana reduzida da esfera.
Estrutura da aula 1. Redação do sumário 2. Realização da tarefa 3 pelos alunos 3. Correção da tarefa 3 (após a recolha das resoluções) 4. Realização da tarefa 4 pelos alunos 5. Correção da tarefa 4 (após a recolha das resoluções) 6. Resolução de tarefas de consolidação

Metodologia

A metodologia a utilizar nesta aula será a mesma da aula anterior.

Em virtude das orientações metodológicas anteriores os recursos a utilizar nesta aula são:
Lápis ou caneta;
Calculadora;
Marcador do quadro;
Computadores com *GeoGebra* instalado e projetor;
Ficha de Tarefas – Superfície esférica.
Ficha de Tarefas – Esfera

Avaliação das aprendizagens

Irei avaliar as aprendizagens dos alunos a partir da recolha das suas resoluções das tarefas propostas.

Desenvolvimento da aula

- **Primeira parte (5 minutos):** redação do sumário
- **Segunda parte (10 minutos):** realização da tarefa 3 pelos alunos

Para a realização desta tarefa os alunos terão de recorrer ao ficheiro *tarefa3_superfície_esférica* que foi colocado previamente nos seus computadores de trabalho.

Neste ficheiro foi construída a superfície esférica de centro em $A(3,-1,2)$ e raio 3 e foi marcado um ponto P que lhe pertence.

Relativamente à alínea 1.1, não são esperadas dúvidas uma vez que os alunos já deverão ter compreendido na tarefa de apropriação do conceito de plano mediador que a determinação da distância entre dois pontos no *GeoGebra* calcula-se construindo o segmento de reta entre eles.

Em relação à alínea 1.2, também não são esperadas dúvidas pois a sua resolução consiste na aplicação direta da expressão da distância entre dois pontos no espaço que foi aprendida na aula anterior. Caso os alunos solicitem a fórmula irei escrevê-la no quadro.

Quanto à pergunta 2, alguns alunos poderão sentir dificuldade uma vez que é pedida uma expressão que permita determinar os pontos do espaço pertencentes a uma superfície esférica de centro em $A(a_1,a_2,a_3)$. Poderei apenas sugerir-lhes que leiam atentamente o retângulo *Recorda* e tentem traduzir o seu conteúdo para uma expressão matemática.

❖ **Terceira parte (5 minutos):** correção da tarefa 3

Alínea 1.1

Para corrigir esta alínea construirei no ficheiro *tarefa1_superfície_esferica* o segmento de reta [AP] pois surgirá na folha algébrica a medida do comprimento desse segmento (b=3).

Alínea 1.2

$$\overline{AP} = \sqrt{(5-3)^2+(-3+1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

Irei chamar a atenção dos alunos para o facto de a distância coincidir com a indicada no *GeoGebra*.

Pergunta 2

Como a superfície esférica é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao centro é igual ao raio, r podemos escrever:

$$\overline{AP} = r \ (1)$$

Como a distância entre dois pontos no espaço é dada por:

$$\overline{AP} = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2}$$

Substituindo em (1) obtemos:

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2} = r$$
$$\Rightarrow \left(\cancel{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2}}\right)^{\cancel{2}} = r^2$$
$$\Leftrightarrow (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 = r^2$$

Após a correção da pergunta a anterior, projetarei no *power point* a equação cartesiana reduzida da superfície esférica:

A superfície esférica é o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ cuja distância a A é **igual a r** ($r > 0$). A equação da superfície esférica de centro em $A(a_1, a_2, a_3)$ e raio r é dada por**:**

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 = r^2$$

❖ **Quarta parte (10 minutos):** realização da tarefa 4 pelos alunos

Quanto à pergunta 1, não prevejo que existam dúvidas uma vez que alunos já realizaram um exercício semelhante quando estudaram a equação cartesiana da circunferência. Caso solicitem a fórmula da distância entre dois pontos no espaço irei escrevê-la no quadro.

Em relação à pergunta 2, penso que os alunos já não sentirão dificuldade uma vez que é idêntica à da tarefa 4 e dispõem da informação no retângulo *Recorda*. Assim, penso que será muito intuitivo que a expressão pedida é idêntica à equação cartesiana da superfície esférica mas neste caso será uma inequação. Caso sintam dificuldades irei questioná-los sobre as diferenças entre uma superfície esférica e uma esfera e aconselhá-los a lerem atentamente o *Recorda*.

❖ **Quinta parte (5 minutos):** correção da tarefa 4

Perunta 1

$$\overline{AP} = \sqrt{(4-3)^2 + (1-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \cong 2{,}45$$

Como a laranja tem 4 cm de raio então o ponto P pertence-lhe (está no seu interior).

Pergunta 2

Como a esfera é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao centro é menor ou igual ao raio, r podemos escrever:

$$\overline{AP} \leq r \quad (2)$$

Como a distância entre dois pontos no espaço é dada por:

$$\overline{AP} = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2}$$

Substituindo em (2) obtemos:

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2} \leq r$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2}\right)^2 \leq r^2$$

$$\Leftrightarrow (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 \leq r^2$$

Após a correção da pergunta a anterior, projetarei no *power point* a inequação cartesiana reduzida da esfera:

A esfera é o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ cuja distância a A é **menor ou igual a r** ($r > 0$). A inequação da esfera de centro em $A(a_1, a_2, a_3)$ e raio r é dada por**:**

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 \leq r^2$$

❖ **Sexta parte (55 minutos):** resolução de tarefas de consolidação

As tarefas seguintes são quase todos retirados do manual, exceto a última que adaptei de um Teste Intermédio de Matemática A de 2009. Irei distribuir aos alunos uma lista com as tarefas que devem resolver até ao final da aula e dar-lhes-ei algum tempo para começarem a trabalhar. Em seguida prosseguirei para a correção.

141 Num referencial o.n. do espaço calcula a distância entre os pontos seguintes:

141.1 $A(2, 3, 5)$ e $B(-1, 2, 3)$

No **exercício 141.1** da página 87 não são esperadas dúvidas.

- Com recurso ao GeoGebra

Para determinar a distância entre $A(2{,}3{,}5)$ e $B(-1{,}2{,}3)$ com recurso ao GeoGebra basta introduzir as coordenadas dos pontos no campo de entrada e construir o segmento de reta [AB] pois aparecerá na folha algébrica a medida do comprimento desse segmento.

- Analiticamente

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (2-3)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

Relativamente ao **exercício 147** da página 89 começarei por solicitar aos alunos que indiquem as coordenadas de todos os pontos da figura:

Na **alínea 2** não são esperadas dúvidas, uma vez que o plano mediador do segmento de reta [BA] é um plano paralelo ao plano coordenado xOz. Assim, a sua equação será $y = b$ com $b \in \mathbb{R}$. Como o cubo tem 8 cm de aresta a equação do plano mediador do segmento de reta [BA] é $y = 4$.

Na **alínea 3** o plano mediador de [BE] não é paralelo a nenhum dos planos coordenados, sendo necessário recorrer à expressão que permite determinar o plano medidor de um segmento de reta:

$$\begin{aligned}
&(x-8)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = (x-0)^2 + (y-8)^2 + (z-0)^2 \\
&\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 16x + \cancel{64} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 16y + \cancel{64} + \cancel{z^2} \\
&\Leftrightarrow -16x + 16y = 0 \\
&\Leftrightarrow -x + y = 0
\end{aligned}$$

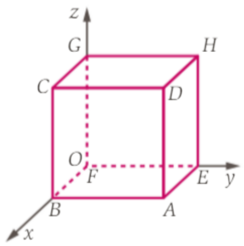
Na **alínea 4** começarei por questionar os alunos se existe alguma relação entre o plano mediador do segmento de reta [BE] e o plano mediador do segmento de reta [CH] e porquê.

Como o segmento de reta [CH] obtém-se transladando o segmento de reta [BE] 8 unidades na vertical e o plano mediador do segmento de reta [BE] é um plano perpendicular a este

$O(0,0,0)$ $B(8,0,0)$ $A(8,8,0)$ $E(0,8,0)$
$G(0,0,8)$ $C(8,0,8)$ $D(8,8,8)$ $H(0,8,8)$

segmento no seu ponto médio, então também é

147 Consideremos, no referencial o.n. tridimensional em que a unidade é o cm, o cubo $[ABCDEFGH]$ com 8 cm de aresta. O ponto F coincide com a origem do referencial, G pertence ao eixo Oz e B pertence ao eixo Ox.



Determina equações cartesianas dos planos mediadores de:

147.1 $[BC]$ **147.4** $[CH]$
147.2 $[BA]$ **147.5** $[BG]$
147.3 $[BE]$

perpendicular ao segmento de reta [CH]. Ou seja, como os segmentos de reta [CH] e [BE] são paralelos, o plano mediador é o mesmo.

Para que eles consigam visionar a situação irei mostrar-lhe a construção que realizei no GeoGebra para ilustrar este exercício.

Realizarei os cálculos no quadro para que os alunos verifiquem que a equação dos dois planos mediadores é a mesma:

$$(x-8)^2 + y^2 + \cancel{(z-8)^2} = x^2 + (y-8)^2 + \cancel{(z-8)^2}$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 16x + \cancel{64} + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 16y + \cancel{64}$$
$$\Leftrightarrow -16x + 16y = 0$$
$$\Leftrightarrow -x + y = 0$$

Se eles não compreenderem a simplificação de $(z-8)^2$ em ambos os membros da equação desenvolverei o caso notável.

O **exercício 155** da página 91 é uma tarefa de aplicação da equação cartesiana reduzida da superfície esférica:

155 Considera a superfície esférica de centro em $A(2, -1, -3)$ e raio 2.

155.1 Qual é a equação reduzida que caracteriza esta superfície esférica?

155.2 Verifica se o ponto $P(1, -1, -3)$ pertence a esta superfície esférica.

Alínea 1:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 4$$

Relativamente à alínea 2, não são esperadas dúvidas uma vez que eles já aprenderam que para verificarmos se um ponto pertence a um lugar geométrico substituímos as suas coordenadas na equação que define esse lugar geométrico:

$$(1-2)^2 + (-1+1)^2 + (-3+3)^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow 1 + 0 + 0 = 4$$
$$\Leftrightarrow 1 = 4 \text{ (proposição falsa)}$$

Logo o ponto não pertence à superfície esférica. Irei aproveitar esta questão para perguntar-lhes se estivéssemos a determinar a equação de uma esfera com o mesmo centro e o mesmo raio o ponto P pertenceria a essa esfera.

O **exercício 153** será resolvido analiticamente e com recurso ao GeoGebra.

153 Os pontos $A(3, -2, -4)$ e $B(1, 4, -2)$ são os extremos de um diâmetro de uma superfície esférica.

Obtém uma equação desta superfície esférica.

- Com recurso ao GeoGebra

Explicarei aos alunos que quando lhes é pedido para resolverem um exercício com recurso ao GeoGebra poderão ter de fazer cálculos. Neste caso, pretende-se que utilizem a ferramenta Esfera (Centro, Raio).

Começaremos por determinar o raio:

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-3)^2 + (4+2)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 2^2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$
$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$$

Quanto ao centro não é necessário calculá-lo analiticamente. Basta construirmos o segmento de reta [AB] (diâmetro da circunferência) e com a ferramenta determinar o seu ponto médio. O ponto obtido tem coordenadas (2,1,-3)

Introduz-se no campo de entrada: M=(2,1,-3) e clica-se na ferramenta Esfera (Centro, Raio). Depois de selecionar o ponto M surge uma caixa onde deverá ser introduzido o raio: sqrt(11) . O *software* construirá a superfície esférica de centro em M e raio $\sqrt{11}$.

A equação que surge na folha algébrica é: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 11$

Deverei esclarecer aos alunos que apesar da ferramenta se denominar "Esfera" o que o programa constrói na realidade é a superfície esférica, como se pode ver na equação que obtivemos na folha algébrica.

- Analiticamente

Para resolvermos a questão analiticamente teríamos de calcular o raio (como já foi realizado na alínea anterior) e determinar as coordenadas do ponto médio do segmento de reta [AB], que será o centro da superfície esférica:

$$M_{[AB]} = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{-4-2}{2}\right) = (2,1,-3)$$

Resposta: $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=11$

Quanto ao **exercício 158.1** não são esperadas dúvidas uma vez que eles já fizeram algo semelhante no estudo da geometria no plano:

> **158** Considera, fixado um referencial ortonormado do espaço, os pontos $A(3\,,\,-1\,,\,5)$ e $B(4\,,\,0\,,\,5)$. Determina:
>
> **158.1** as coordenadas do ponto $C(x\,,\,y\,,\,z)$ tal que A é o ponto médio de $[BC]$;
>
> **158.2** a inequação reduzida da esfera de diâmetro $[AB]$.

$$(3,-1{,}5)=\left(\frac{4+x}{2},\frac{0+y}{2},\frac{5+z}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4+x}{2}=3\\ \dfrac{y}{2}=-1\\ \dfrac{5+z}{2}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4+x=6\\ y=-2\\ 5+z=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=-2\\ z=5\end{cases}$$

Portanto o ponto C tem coordenadas (2,-2,5)

Em relação ao **exercício 158.2** também não são esperadas dúvidas uma vez que o raciocínio é o mesmo do exercício 153:

$$\overline{AB}=\sqrt{(4-3)^2+(0+1)^2+(5-5)^2}=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$$

$$r=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como na inequação reduzida da esfera indica-se r^2:

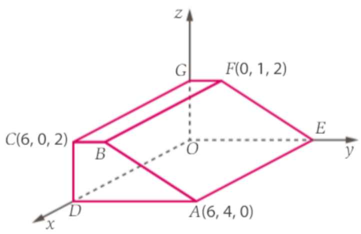
$$r^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$M_{[AB]}=\left(\frac{3+4}{2},\frac{-1+0}{2},\frac{5+5}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2},5\right)$$

Resposta: $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+(z-5)^2\le\frac{1}{2}$

Quanto ao **exercício 182 alíneas 1, 3c e 4** da página 100 irei propor-lhes a resolução com recurso ao GeoGebra e analiticamente.

182 Considera, no referencial ortonormado $Oxyz$, uma cunha obtida pelo corte feito num paralelepípedo de madeira por um plano paralelo a $[CG]$. Os vértices D, E e G pertencem a Ox, Oy e Oz, respetivamente.



182.1 Indica as coordenadas dos pontos B, D, E e G.

182.2 Qual é a distância de B ao plano yOz? E ao plano de equação $y=-2$?

182.3 Indica uma equação cartesiana que caracterize

a. a reta CD;

b. a face $[BCGF]$;

c. o plano mediador de $[BF]$.

182.4 Define analiticamente a esfera de diâmetro $[CG]$.

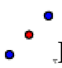
Na alínea 182.1 é pedido para determinar as coordenadas dos pontos B, D, E e G.

$$B(6,1,2) \quad D(6,0,0) \quad E(0,4,0) \quad G(0,0,2)$$

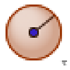
- Com recurso ao GeoGebra

Começarei por explicar aos alunos que para resolver um exercício em que consta uma figura deste género no GeoGebra não é necessário reproduzi-la integralmente no *software*, apenas se introduzem no campo de entrada as coordenadas dos pontos necessárias para responder às questões que lhes sejam colocadas.

Na alínea 182.3c) é pedido para indicar uma equação cartesiana que caraterize o plano mediador do segmento de reta [BF]. Passos a seguir:

- Introduzir no campo de entrada: B=(6,1,2);
- Introduzir no campo de entrada: F=(0,1,2);
-  Construir o segmento de reta [BF];
-  Marcar o seu ponto médio e nomeá-lo M. Surgem na folha algébrica as coordenadas (3,1,2)
-  Construir o plano perpendicular ao segmento de reta [BF] que passa em M;

Resposta: $x = 3$

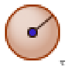
Para responder à alínea 182.4 os alunos deverão guardar o ficheiro construído anteriormente no ambiente de trabalho e abrir um novo ficheiro. Nesta alínea é pedido para definir analiticamente a esfera de diâmetro [CG]. Para usarmos a ferramenta  necessitamos de introduzir no programa o centro e o raio.

Determinação do raio:

$$\overline{CG} = \sqrt{(0-6)^2+(0-0)^2+(2-2)^2} = \sqrt{36+0+0} = \sqrt{36} = 6$$

Raio $r = \frac{\overline{CG}}{2} = 3$

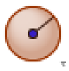
Passos a seguir no GeoGebra:

- Introduzir no campo de entrada: C=(6,0,2);
- Introduzir no campo de entrada: G=(0,0,2);
-  Construir o segmento de reta [CG];
-  Marcar o seu ponto médio e nomeá-lo M. Surgem na folha algébrica as coordenadas (3,0,2)
-  Construir a superfície esférica de centro em M e raio 3

Equação fornecida pelo Geogebra: $(x-3)^2+y^2+(z-2)^2=9$

Como pretendemos a esfera e não a superfície esférica e equação será:

$$(x-3)^2+y^2+(z-2)^2 \leq 9$$

Explicarei aos alunos que poderão usar a ferramenta  para determinar uma superfície esférica ou uma esfera desde que tenham em atenção que o *software* indica sempre uma equação e não uma inequação. Por este motivo, quando for pedida a inequação cartesiana de uma esfera devem indicar na resposta uma desigualdade.

- Analiticamente

Solicitarei um aluno para vir ao quadro determinar a equação cartesiana do plano mediador do segmento de reta [BF]:

$$(x-6)^2+\cancel{(y-1)^2}+\cancel{(z-2)^2} = x^2+\cancel{(y-1)^2}+\cancel{(z-2)^2}$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-12x+36=\cancel{x^2}$$
$$\Leftrightarrow -12x+36=0$$
$$\Leftrightarrow -3x+9=0$$
$$\Leftrightarrow -x+3=0$$

Como no exercício 158.2 já foi determinada a inequação cartesiana de uma esfera dado um diâmetro não irei resolver a alínea 182.4 no quadro.

O **exercício 172** da página 97 é de escolha múltipla. A resposta correta é a C.

172 Seja $[AB]$ um segmento de reta. O conjunto dos pontos P do espaço tais que $\overline{AP} = \overline{BP}$ definem

(A) uma esfera.

(B) uma superfície esférica.

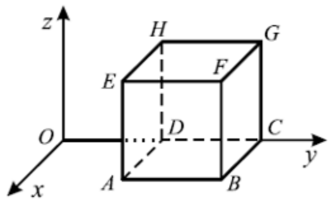
(C) o plano mediador do segmento de reta $[AB]$.

(D) um plano que contém os pontos A e B.

A última tarefa proposta aos alunos é um problema que adaptei de um teste intermédio. Começarei por questioná-los sobre quais são os vértices do cubo que correspondem às coordenadas dos dois pontos no enunciado. As coordenadas (2,2,0) correspondem ao ponto A e as coordenadas (0,4,0) correspondem ao ponto C.

1. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cubo de aresta 2. Sabe-se que:
   - a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy
   - a aresta $[DC]$ está contida no eixo Oy
   - o ponto D tem coordenadas (0,2,0)

   Os pontos de coordenadas (2,2,0) e (0,4,0) são vértices do cubo.



   1.1. Define analiticamente o plano mediador do segmento de reta cujos extremos são os dois vértices anteriores.

(Adaptado do Teste Intermédio de Matemática A, Versão 1, 2009)

Na definição analítica do plano mediador do segmento de reta [AC] não são esperadas dúvidas:

$$
\begin{aligned}
&(x-2)^2 + (y-2)^2 + \cancel{z^2} = x^2 + (y-4)^2 + \cancel{z^2} \\
&\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 8y + 16 \\
&\Leftrightarrow -4x - 4y + 8y + 8 - 16 = 0 \\
&\Leftrightarrow -4x + 4y - 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow -x + y - 2 = 0
\end{aligned}
$$

Apêndice 3: Teste (Parte Teórica)

Matemática A

10.º Ano
2015/2016

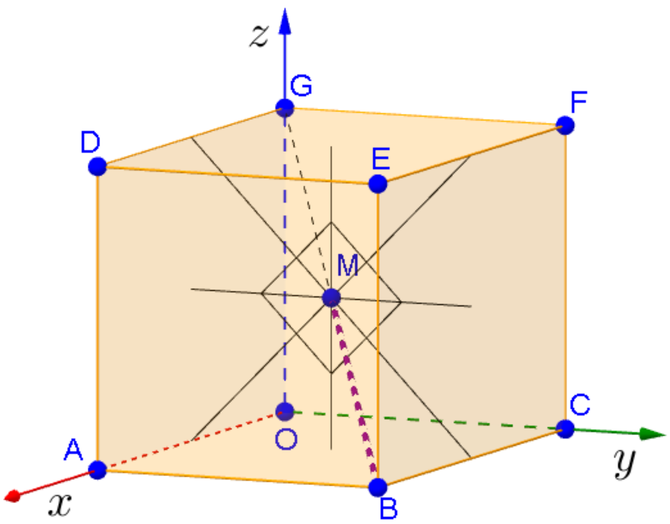
Ficha de Trabalho - Parte Teórica

Nome: ____

N.º _______ **Turma** _____**Data** ____/____/______

Resolve analiticamente as seguintes questões.

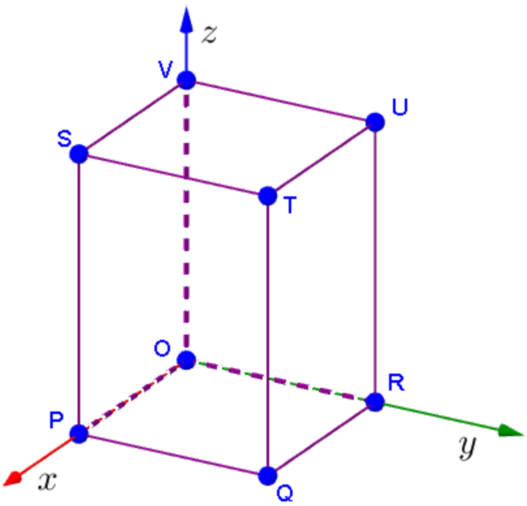
1. Uma aranha e uma mosca estavam dentro de uma caixa de sapatos em forma de paralelepípedo, como ilustra a figura seguinte. A aranha encontra-se no ponto M, ponto médio do segmento de reta $[GB]$, e a mosca no ponto B. A mosca começou a voar em linha reta em direção ao ponto G mas, entretanto, foi apanhada pela aranha. Considera que o vértice O coincide com a origem do referencial o.n. e as coordenadas dos pontos $A(6,0,0)$, $C(0,4,0)$ e $G(0,0,4)$.



1.1. Determina a distância percorrida pela mosca até à aranha e as coordenadas do ponto onde se encontra a aranha.

1.2. Define analiticamente o plano mediador do segmento de reta $[GB]$.

2. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular. A base inferior do prisma, $[OPQR]$, está contida no plano xOy e o ponto P tem coordenadas (5,0,0).



Define, por uma condição, a superfície esférica de centro no ponto Q e que passa no ponto O.

(*Adaptado do Teste Intermédio de Matemática A, Versão 1, 2010*)

Apêndice 4: Teste (Parte Prática)

Matemática A

10.º Ano
2015/2016

Ficha de Trabalho - Parte Prática

Grupo nº: ______ Turma _____ Data ____/____/______

Instruções

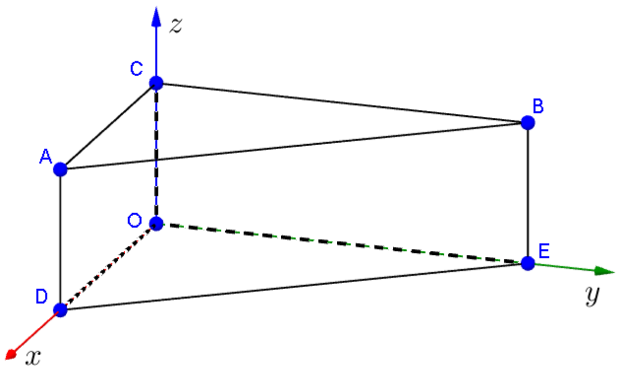
Para resolveres a seguinte ficha de trabalho poderás realizar cálculos mas terás de recorrer às ferramentas do GeoGebra para responderes a todas as alíneas.

Atenção! Só te podes servir do campo de entrada do GeoGebra para introduzires coordenadas de pontos.

Deverás criar um ficheiro GeoGebra para responder à questão 1 e outro ficheiro para responder à questão 2.

1. Na figura está representado um prisma triangular num referencial o.n. $Oxyz$ em que A$(6,0,3)$ e $E(0,8,0)$. Considera o centímetro como unidade de medida.

   Nota: Não necessitas de reproduzir toda a figura no GeoGebra.



1.1. Determina a distância de C ao ponto médio de $[DE]$.

1.2. Define analiticamente o plano mediador do segmento de reta $[DE]$

Guarda o ficheiro que criaste no GeoGebra no ambiente de trabalho com o nome:

Grupo_*Nº grupo*_Tarefa1

Cria outro ficheiro para responderes à questão 2.

2. Considera, fixado um referencial ortonormado do espaço, os pontos $A(3,-2,1)$ e $B(-1,2,3)$. Determina a equação reduzida da superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

Guarda o ficheiro que criaste no GeoGebra no ambiente de trabalho com o nome:

Grupo_*Nº grupo*_Tarefa2

Apêndice 5: Tarefa 0 – Distância entre dois pontos

Matemática
Ficha de Tarefas

10.º Ano
2015/2016

Geometria Analítica no Espaço
Distância entre dois pontos no espaço

Nome: ____ **N.º** ____ **Turma** _____
Data ____/____/______

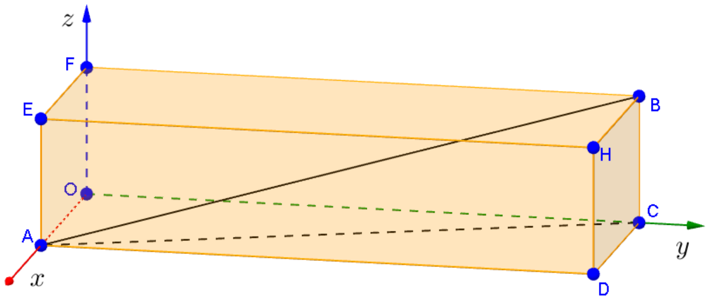
Tarefa 0

Recorda

Dados dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$, num plano munido de um referencial o.n., representamos a **distância entre os dois pontos** por $d(A, B)$ e tem-se:

$$\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

1. A Raquel encontrou numa loja uma caneta que media 15 cm de que gostou muito. Mas só a compraria se, de alguma maneira, coubesse no seu estojo que, infelizmente, não trazia consigo. Para se decidir, esboçou uma figura idêntica à que se apresenta a seguir e efetuou alguns cálculos. Será que a Raquel consegue transportar no seu estojo a caneta que encontrou na loja?
   Nota que o ponto O é a origem de um referencial ortonormado e que os pontos F e D têm coordenadas (0,0,3) e (5,13,0), respetivamente. Nos cálculos que efetuares, utiliza uma aproximação com 2 casas decimais.



2. Considera agora um paralelepípedo idêntico ao representado na figura anterior mas de dimensões desconhecidas, cujo vértice A tem de coordenadas (a_1, a_2, a_3) e o vértice B tem de coordenadas (b_1, b_2, b_3). Determina uma expressão que te permita calcular a medida do comprimento da diagonal espacial desse paralelepípedo.

Distância entre dois pontos no espaço

Dados dois pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$, considerados num referencial o.n. do espaço, representamos a **distância entre os dois pontos** por $d(A, B)$ e tem-se:

$$\overline{AB} = d(A, B) =$$

Apêndice 6: Tarefa 1 – Ponto médio de um segmento de reta

Matemática

Ficha de Tarefas

10.º Ano
2015/2016

Geometria Analítica no Espaço
Ponto médio de um segmento de reta no espaço

Nome: ______________________________ **N.º** ____ **Turma** _____
Data ____/____/______

Tarefa 1

Recorda

Num plano munido de um referencial o.n., as **coordenadas do ponto médio, M,** de um segmento de reta $[AB]$, em que $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$, são:

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}\ ,\frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

Uma vez que já sabes determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta no plano, vais agora ficar a saber determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta no espaço. Para isso, procede da seguinte forma:

Preparação

- Abre um novo ficheiro do GeoGebra;
- Muda o display do programa optando apenas pela *Folha Algébrica* e pela *Folha Gráfica 3D*;
- Ativa a grelha da *Folha Gráfica 3D*.

Construção

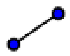
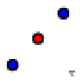
1. Constrói no GeoGebra o segmento de reta $[AB]$ em que A(5,3,2) e B(-1,7,1) e determina o seu ponto médio (recorrendo às ferramentas do programa apropriadas). Designa por M esse ponto médio e regista as suas coordenadas na tabela que te será fornecida.

1.1. Com as ferramentas do GeoGebra adequadas, move os pontos A e B e observa, na *Folha Algébrica*, as coordenadas do ponto médio de cada um dos segmentos de reta que determinares. Preenche a tabela com as coordenadas de A, B e M de acordo com os segmentos de reta que definires no GeoGebra. Analisa a tabela e tenta relacionar as coordenadas de M com as coordenadas de A e B.

1.2. Verifica se as coordenadas dos pontos médios que obtiveste no GeoGebra podem ser determinadas através da expressão seguinte em que $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ são extremos de um segmento de reta $[AB]$ no espaço:

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Nota: se tiveres dificuldades na realização desta tarefa no GeoGebra, segue os seguintes passos:

- No campo de entrada introduz: *A* = (5,3,2);
- Introduz também neste campo o ponto *B* = (-1,7,1);
-  Desenha o segmento de reta $[AB]$;
-  Marca o ponto médio do segmento de reta $[AB]$ e atribui-lhe o nome M. Observa as suas coordenadas na *Folha Algébrica*;
-  Move os pontos *A* e *B* no referencial o.n. para poderes observar as coordenadas do ponto médio de outros segmentos de reta. Regista as coordenadas dos pontos *A*, *B* e *M* na tabela que te foi fornecida.

Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Num referencial o.n. do espaço, as **coordenadas do ponto médio , $\boldsymbol{M}$,** de um segmento de reta $[AB]$, em que $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ são:

$$M\left(\quad , \quad , \quad \right)$$

Apêndice 7: Tarefa 2 – Plano mediador

Matemática

Ficha de Tarefas

10.º Ano
2015/2016

Geometria Analítica no Espaço
Plano mediador de um segmento de reta

Nome: ______________________________ **N.º** ____ **Turma** _____
Data ____/____/______

Tarefa 2

Recorda

O plano mediador de um segmento de reta $[AB]$ é o plano normal (perpendicular) à reta suporte de $[AB]$ no respetivo ponto médio. Este plano é definido pelo lugar geométrico dos pontos do espaço **equidistantes de A e de B**.

Com o GeoGebra, abre o ficheiro *tarefa2_plano_mediador*. Neste ficheiro, está construído o segmento de reta $[AB]$ de extremos $A(1,2,1)$ e $B(4,1,3)$ e foi marcado o seu ponto médio M. Seguindo as indicações da tua professora, constrói o plano mediador do segmento de reta $[AB]$ e marca um ponto P que pertença a esse plano.

1. Move o ponto P ao longo do plano e observa, na *Folha Algébrica*, o que acontece a $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$. O que podes concluir relativamente à distância do ponto P a cada um dos extremos do segmento de reta $[AB]$?

2. Tendo em conta a questão anterior, define **analiticamente** o plano mediador que construíste no GeoGebra.

Equação cartesiana do plano mediador de um segmento de reta

Dados dois pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ do espaço, o plano mediador de $[AB]$ é o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ tais que $\overline{AP} = \overline{BP}$. Desta condição, obtém-se uma equação cartesiana do plano mediador de $[AB]$:

Apêndice 8: Tarefa 3 – Superfície esférica

Matemática
Ficha de Tarefas

10.º Ano
2015/2016

Geometria Analítica no Espaço
Equação cartesiana reduzida da superfície esférica

Nome: ____ **N.º** ____ **Turma** _____
Data ____/____/______

Tarefa 3

Recorda

A **superfície esférica** é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao centro é **igual ao raio, r** ($r > 0$).

1. A Rita recebeu no seu aniversário uma bola insuflável. Para a distinguir das bolas dos seus amigos, desenhou um ponto na sua superfície (ponto P). Como gosta muito de inventar e resolver desafios, questionou-se – "Qual será a distância do centro da bola insuflável ao ponto que marquei?"

   Para tentar resolver esta questão, decidiu representar a situação.

   Com o GeoGebra, abre o ficheiro *tarefa3_superfície_esférica* onde se encontra ilustrada a situação descrita anteriormente.

   Antecipa-te à Rita e determina a distância entre o centro $A(3,-1,2)$ e o ponto indicado:

   1.1. Com recurso ao GeoGebra.
   1.2. Analiticamente.

2. Considera, agora, uma superfície esférica de dimensões desconhecidas, cujo centro A tem de coordenadas (a_1, a_2, a_3). Indica uma expressão que te permita determinar os pontos $P(x, y, z)$ do espaço pertencentes a essa superfície esférica.

Equação cartesiana reduzida da superfície esférica

A **superfície esférica** é o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ cuja distância a A é **igual a r** ($r > 0$). A equação da superfície esférica de centro em $A(a_1, a_2, a_3)$ e raio r é dada por:

Apêndice 9: Tarefa 4 – Esfera

Matemática

Ficha de Tarefas

10.º Ano
2015/2016

Geometria Analítica no Espaço
Inequação cartesiana reduzida da esfera

Nome: ____________________ **N.º** ____ **Turma** _____
Data ____/____/______

Tarefa 4

Recorda

A **esfera** é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao centro é **menor ou igual ao raio, r** ($r > 0$). Assim, uma esfera é a união de uma superfície esférica com a sua parte interna.

1. Uma laranja com 4 cm de raio foi colocada sobre um referencial o.n. de modo a que o seu centro estivesse no ponto $A(3,2,1)$. Seja P o ponto de coordenadas $(4,1,3)$. Qual é a posição do ponto P relativamente à laranja?

2. Considera, agora, uma esfera de dimensões desconhecidas, cujo centro A tem de coordenadas (a_1, a_2, a_3).

   Indica uma expressão que te permita determinar os pontos $P(x, y, z)$ do espaço pertencentes a essa esfera.

Inequação cartesiana reduzida da esfera

A **esfera** é o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ cuja distância a A é **menor ou igual a r** ($r > 0$). A inequação da esfera de centro em $A(a_1, a_2, a_3)$ e raio r é dada por: