

SOBRE VÉRTICES DO ESQUELETO DO POLITOPO DE EMPARELHAMENTOS DE UM GRAFO

Nair M. M. de Abreu

Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE - UFRJ
Cidade Universitária, Centro de Tecnologia, Bloco F - Rio de Janeiro - RJ
nairabreunovoa@gmail.com

Liliana M. G. C. da Costa

Colégio Pedro II - Campus Engenho Novo II
Rua Barão do Bom Retiro, 726 - Engenho Novo - Rio de Janeiro - RJ
lmgccosta@gmail.com

Carlos H. P. do Nascimento

Universidade Federal Fluminense - ICEX - UFF
Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783, Bloco C - Volta Redonda - RJ
carloshenrique@id.uff.br

Laura Patuzzi

Universidade Federal do Rio de Janeiro - IM - UFRJ
Cidade Universitária, Centro de Tecnologia, Bloco C - Rio de Janeiro - RJ
laura@im.ufrj.br

RESUMO

O politopo de emparelhamentos de um grafo G , $\mathcal{M}(G)$, é o fecho convexo dos vetores de incidência de emparelhamentos de G . O esqueleto deste politopo, $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$, é o grafo cujos vértices e arestas são, respectivamente, os vértices e arestas de $\mathcal{M}(G)$. Neste trabalho calculamos o grau do vértice do esqueleto correspondente ao emparelhamento vazio. Mostramos que, dado qualquer subgrafo próprio H de um grafo G , o grau de um vértice de $\mathcal{G}(\mathcal{M}(H))$ é estritamente menor que o grau deste em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$. Além disso, determinamos o número de vértices e o grau mínimo (e máximo, em alguns casos) do esqueleto do politopo de emparelhamentos de grafos pertencentes a duas classes: a primeira, constituída por grafos unicíclicos obtidos pela adição de uma aresta entre dois vértices não adjacentes de um caminho; a segunda, dada por grafos resultantes da ligação de um dado vértice a todos os vértices de uma estrela.

PALAVRAS CHAVE. Politopo de emparelhamentos, Número de vértices, Grau mínimo.

TAG - Teoria e Algoritmos em Grafos.

ABSTRACT

The matching polytope of a graph G , $\mathcal{M}(G)$, is the convex hull of incidence vectors of matchings of G . The skeleton of this polytope, $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$, is the graph whose vertices and edges are respectively vertices and edges of $\mathcal{M}(G)$. Here we determine the degree of the vertex of the skeleton corresponding to the empty matching. And we prove that, given a proper subgraph H of a graph G , the degree of a vertex of $\mathcal{G}(\mathcal{M}(H))$ is strictly less than the degree of this vertex in $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$. Furthermore, we compute the number of vertices and minimum degree (and maximum, in particular cases) of the skeleton of the matching polytope of graphs for two classes: the first one constituted by unicyclic graphs obtained by adding an edge between two non adjacent vertices of a path and, the second one, whose graphs result from connecting a given vertex to the vertices of a given star.

KEYWORDS. Matching polytope, Number of vertices, Minimum degree.

TAG - Theory and Algorithms in Graphs.

Introdução

Um subconjunto $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ é um *politopo* se é o fecho convexo de um conjunto finito de pontos em \mathbb{R}^n , isto é, $\mathcal{P} = \text{conv}\{x_1, \dots, x_r\}$, para $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$. Trata-se de um objeto geométrico estudado desde a antiguidade, e a beleza de sua teoria é complementada pela importância para muitas áreas da matemática, tais como otimização combinatória, geometria algébrica e topologia algébrica. O Teorema de Euler, que relaciona o número de vértices, arestas e faces de politopos tridimensionais, é considerado por muitos estudiosos como marco inicial na teoria dos politopos. Dado um politopo \mathcal{P} , o *esqueleto* de \mathcal{P} é o grafo $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ cujos vértices e arestas são, respectivamente, os vértices e as arestas de \mathcal{P} . Para ver estes e outros conceitos sobre politopos, veja [Grunbaum, 2003].

Seja G um grafo simples e não orientado, com conjunto de *vértices* $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e conjunto de *arestas* E , formado por pares não ordenados $\{v_i, v_j\}$ de vértices distintos. Denotamos a aresta $\{v_i, v_j\}$ simplesmente por $v_i v_j$ e, neste caso, dizemos que a aresta *incide* tanto no vértice v_i quanto no vértice v_j . Também dizemos que os vértices v_i e v_j são *vértices adjacentes*, denotando este fato por $v_i \sim v_j$. O conjunto dos vértices adjacentes a um vértice v_i será representado por $N(v_i)$. Duas arestas distintas são *adjacentes* se incidem em um mesmo vértice; caso contrário, elas dizem-se *disjuntas*. Uma cadeia de n vértices (ou, de $n - 1$ arestas) distintos e consecutivamente adjacentes forma um *caminho*, o qual será denotado por P_n . Um *emparelhamento* de G é um conjunto de arestas duas a duas disjuntas, podendo ser vazio, sendo neste caso denotado por \emptyset . Dado um emparelhamento M de G , um vértice $v \in V$ diz-se *M -saturado* se alguma aresta de M incide em v . Caso contrário, v é dito *M -insaturado*. Para mais detalhes sobre grafos, pode-se consultar [Diestel, 2000].

Em otimização combinatória há vários problemas importantes relativos a emparelhamentos de grafos, como por exemplo: problemas de atribuição/designação, problemas de escalonamento, problemas de cobertura, etc. Dados um grafo $G = (V, E)$ e uma função $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ que atribui *pesos* às arestas de G , atribui-se a um subconjunto $F \subset E$ o valor $p(F) = \sum_{e \in F} p(e)$, chamado de *peso* de F . Em geral, o problema consiste em se obter um emparelhamento M do grafo que tenha peso $p(M)$ mínimo ou máximo. Em particular, determinar

$$\max\{p(M) : M \text{ emparelhamento de } G\}. \quad (1)$$

Este problema pode ser formulado como um problema de otimização linear inteira, associando a cada emparelhamento M do grafo seu vetor de incidência χ_M , em $\{0, 1\}^E$, definido por

$$\chi_M(e) = \begin{cases} 1, & \text{se } e \in M; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considerando a relaxação linear de χ_M , ou seja, $\chi_M \in \mathbb{R}^E$ tal que $0 \leq \chi_M(e) \leq 1 \forall e \in E$, e considerando p como um vetor em \mathbb{R}^E , temos que $p(M) = p^T \chi_M$. Portanto, o problema (1) pode ser reescrito como obter

$$\max\{p^T \chi_M : M \text{ emparelhamento de } G\}. \quad (2)$$

Isso equivale a maximizar a função linear $p^T x$ sobre o conjunto finito $\{\chi_M : M \text{ emparelhamento de } G\}$. Assim, o valor ótimo não muda se maximizarmos sobre o fecho convexo deste conjunto:

$$\max\{p^T x : x \in \text{conv}\{\chi_M : M \text{ emparelhamento de } G\}\}. \quad (3)$$

O conjunto $\text{conv}\{\chi_M : M \text{ emparelhamento de } G\}$ é um politopo em \mathbb{R}^E , denotado por $\mathcal{M}(G)$. Sendo $\mathcal{M}(G)$ um politopo, existe uma matriz A e um vetor b tais que

$$\mathcal{M}(G) = \text{conv}\{\chi_M : M \text{ emparelhamento de } G\} = \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, Ax \leq b\}.$$

Logo, (3) é equivalente a

$$\max\{p^T x : x \geq 0, Ax \leq b\}, \tag{4}$$

mostrando que o problema inicial (1) pode ser formulado como um problema de programação linear.

O problema de atribuição, por exemplo, pode ser descrito utilizando-se o exemplo de designação de atividades a pessoas. A atividade deve ser designada a apenas uma pessoa, e cada pessoa pode ter no máximo uma atividade. Supondo que existe um valor associado a cada possível designação de atividade às pessoas, o problema consiste em encontrar a melhor designação em termos de valor (pode ser custo mínimo, lucro máximo, etc), e a solução é equivalente a encontrar um emparelhamento perfeito de custo máximo/mínimo em um grafo bipartido.

Neste trabalho estamos interessados no esqueleto deste tipo especial de politopo, obtido a partir dos emparelhamentos de um grafo. Dado um grafo $G = (V, E)$, consideremos o espaço vetorial \mathbb{R}^E , das funções de E em \mathbb{R} , que tem dimensão $m = |E|$. Uma vez estabelecida uma ordenação e_1, e_2, \dots, e_m no conjunto das arestas E do grafo, cada vetor f de \mathbb{R}^E está unicamente associado ao vetor $w = (f(e_1), \dots, f(e_m))$ de \mathbb{R}^m . Deste modo, não faremos distinção entre f e w . Se F é subconjunto de E , definimos o *vetor de incidência* χ_F de F por

$$\chi_F(e) = \begin{cases} 1, & \text{se } e \in F; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como χ_F é unicamente determinado por F , não faremos distinção entre χ_F e F . Note que se $E = \emptyset$, $|E| = 0$ e, portanto, \mathbb{R}^E só possui o vetor nulo, que é vetor de incidência do único emparelhamento existente (o emparelhamento vazio). Além disso, o vetor $1 = (1, 1, \dots, 1)$ é o vetor de incidência de E , e o i -ésimo vetor canônico de \mathbb{R}^m é o vetor de incidência da i -ésima aresta e_i de E .

Definição 1.1. *Seja G um grafo. O politopo de emparelhamentos de G , denotado por $\mathcal{M}(G)$, é o fecho convexo dos vetores de incidência de emparelhamentos de G .*

Exemplo 1.2. *No grafo completo K_3 , as arestas e_1, e_2 e e_3 são duas a duas adjacentes, de modo que há somente os emparelhamentos $\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}$ e $\{e_3\}$. Portanto, $\mathcal{M}(K_3) = \text{conv}\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é um tetraedro em \mathbb{R}^3 . Neste caso, $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_3)) = K_4$.*

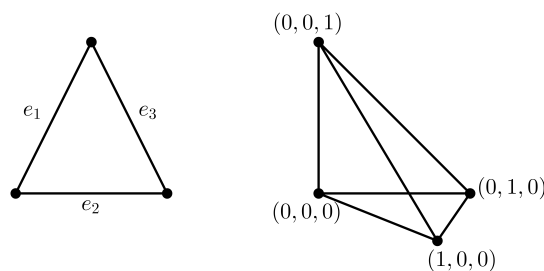


Figura 1: K_3 e $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_3))$

Ao nos referirmos ao esqueleto $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$, diremos com frequência que dois emparelhamentos M e N são vértices adjacentes em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$, ao invés de dizer que χ_M e χ_N são vértices adjacentes deste grafo. O grau de um emparelhamento M , denotado por $d(M)$, é definido como sendo o grau do vértice correspondente a M em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$.

Os próximos resultados dão condições necessárias e suficientes para que dois emparelhamentos sejam adjacentes em $\mathcal{M}(G)$ e permitem determinar quando dois vértices são adjacentes no esqueleto $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$. No enunciado destes, $M\Delta N$ denota a diferença simétrica entre dois emparelhamentos M e N de um grafo G .

Teorema 1.3. [Chvátal, 1975] *Dois emparelhamentos distintos M e N de um grafo G são adjacentes no politopo de emparelhamentos $\mathcal{M}(G)$ se, e somente se, a diferença simétrica $M\Delta N$ é um grafo conexo.*

Teorema 1.4. [Schrijver, 2003] *Sejam M e N emparelhamentos distintos de um grafo G . Então, M e N são vértices adjacentes em $\mathcal{M}(G)$ se, e somente se, $M\Delta N$ é um caminho ou um ciclo.*

Exemplo 1.5. *Considere a árvore T e seus emparelhamentos, dados na Figura 2. Sendo T uma árvore, $M_i\Delta M_j$ (para $i \neq j$) nunca será um ciclo. Logo, neste caso, $M_i \sim M_j$ se, e somente se, $M_i\Delta M_j$ forma um caminho. Note, por exemplo, que $M_1 \sim M_2$ em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$, pois $M_1\Delta M_2$ é o caminho $P = e_1e_2$; mas $M_1 \not\sim M_3$ em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$, pois $M_1\Delta M_3$ é desconexo. O grafo $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$ é apresentado na Figura 3.*

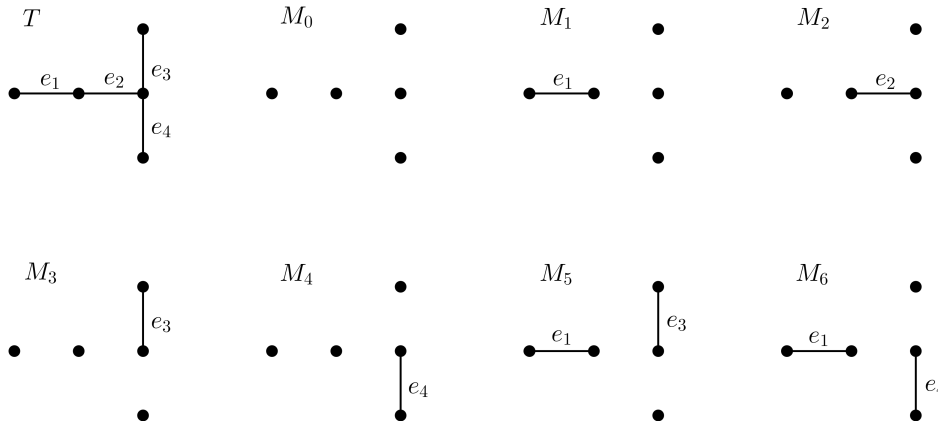


Figura 2: Árvore T e seus emparelhamentos

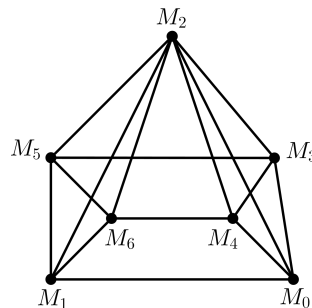


Figura 3: $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$

Lembremos que, uma aplicação φ de um subespaço afim de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m é uma aplicação afim se preserva combinações afins, isto é, $\varphi(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(x_i)$, onde $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Se φ é uma aplicação afim e também uma bijeção, então φ é um isomorfismo afim. Segundo [Costa et al., 2008], quando T é uma árvore, existe um isomorfismo afim entre o politopo $\mathcal{M}(T)$ e o politopo acíclico de Birkhoff, definido a seguir.

Definição 1.6. *Seja T uma árvore com vértices v_1, v_2, \dots, v_n . O politopo acíclico de Birkhoff, $\Omega_n(T)$, é o conjunto das matrizes duplamente estocásticas tais que, cada entrada positiva de uma matriz A de $\Omega_n(T)$ está ou na diagonal principal ou em uma posição (i, j) que corresponde a uma aresta $v_i v_j$ da árvore T .*

Exemplo 1.7. *Considere o caminho P_5 dado pela cadeia de vértices $v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$. Como as arestas de P_5 são $v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4$ e $v_4 v_5$, o politopo acíclico de Birkhoff $\Omega_5(P_5)$ é o conjunto formado*

pelas matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 - x_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 - x_1 - x_2 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 - x_2 - x_3 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 1 - x_3 - x_4 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & 1 - x_4 \end{bmatrix},$$

onde cada variável x_i corresponde à aresta $v_i v_{i+1}$ de P_5 e essas variáveis devem satisfazer $0 \leq x_i \leq 1$, $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_2 + x_3 \leq 1$, $x_3 + x_4 \leq 1$. Portanto, segue que $\Omega_5(P_5) = \mathcal{M}(P_5)$, onde

$$\mathcal{M}(P_5) = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1, x_2 + x_3 \leq 1, x_3 + x_4 \leq 1\}.$$

Na Figura 4 temos o caminho P_5 com seus oito emparelhamentos, e na Figura 5, o esqueleto $\mathcal{G}(\Omega_5(P_5))$.

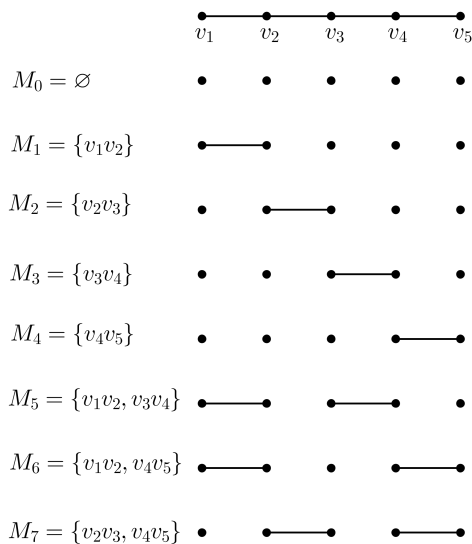


Figura 4: P_5 e seus emparelhamentos

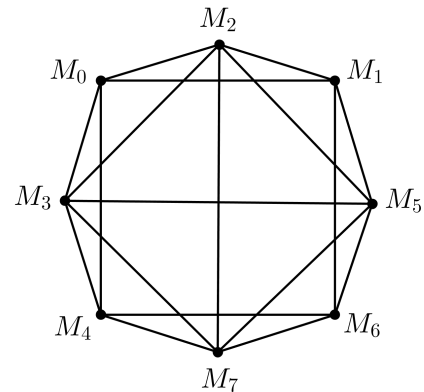


Figura 5: $\mathcal{G}(\Omega_5(P_5))$

O esqueleto do politopo acíclico de Birkhoff foi estudado também em [Abreu et al., 2014] e [Fernandes, 2015], tendo sido obtidos alguns resultados sobre a estrutura desse grafo. O teorema a seguir dá o grau mínimo de $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$.

Teorema 1.8. [Abreu et al., 2014] Se T é uma árvore com n vértices, então o grau mínimo de um vértice em $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$ é $n - 1$.

Neste trabalho estendemos o teorema acima, provando que o grau mínimo do esqueleto $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ continua sendo igual ao número de arestas do grafo G , para grafos G pertencentes a determinadas classes de grafos. No caso do grau máximo, foram obtidos resultados para classes específicas de árvores.

Teorema 1.9. [Abreu et al., 2014] Para o caminho P_n , com $n \geq 2$ vértices, tem-se que o grau máximo de $\mathcal{G}(\Omega_n(P_n))$ é igual a

$$\Delta_{\mathcal{G}(\Omega_n(P_n))} = \begin{cases} \frac{n^2+4n-5}{8}, & \text{se } n \text{ é ímpar;} \\ \frac{n^2+6n-8}{8}, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Uma árvore T que possui no máximo um vértice de grau maior que 2 diz-se uma *starlike*.

Teorema 1.10. [Fernandes, 2015] *Seja T uma starlike com $n + 1 \geq 3$ e seja v um vértice de T de grau máximo. Assuma que todos os ramos de T em v têm comprimento r . Então, o grau máximo de $\mathcal{G}(\Omega_n(T))$ é dado por*

$$\Delta_{\mathcal{G}(\Omega_n(T))} = \begin{cases} n + 1 - \frac{(r+1)^2}{4} + \frac{3n(r^2-1)}{8r}, & \text{se } r \text{ é ímpar;} \\ \frac{(r+2)(3n-2r+4)}{8} - 1, & \text{se } r \text{ é par.} \end{cases}$$

Na próxima seção iremos apresentar alguns resultados por nós obtidos acerca do grau de um vértice do esqueleto do politopo de emparelhamentos de um grafo. Tais resultados serão importantes para os cálculos apresentados nas seções subsequentes.

Propriedades do Grafo $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$

Iniciamos esta seção apresentando uma condição necessária para que dois emparelhamentos, de um grafo qualquer G , sejam adjacentes em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$. Tal condição será de grande utilidade para se obterem vértices adjacentes, a um dado vértice, no esqueleto.

Proposição 2.1. *Sejam G um grafo e M e N dois emparelhamentos distintos de G . Se M é adjacente a N em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$, então $\|M\| - \|N\| = 0$ ou $\|M\| - \|N\| = 1$.*

Demonstração. Sejam G um grafo e M e N dois emparelhamentos de G tais que M é adjacente a N em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$. Pelo Teorema 1.4, tem-se que $M\Delta N$ é um ciclo ou um caminho em G (com as arestas se alternando nos conjuntos M e N). Portanto, se $M\Delta N = C_n$, então n é par e $|M| = |N|$; se $M\Delta N = P_n$ e n é ímpar, então $|M| = |N|$; e se $M\Delta N = P_n$ e n é par, então $\|M\| - \|N\| = 1$. Logo, $\|M\| - \|N\| = 0$ ou $\|M\| - \|N\| = 1$. \square

Como aplicação imediata desta proposição, calculamos o grau do vértice, do esqueleto do politopo, correspondente ao emparelhamento vazio.

Corolário 2.2. *Se G é um grafo e $M = \emptyset$, então $d(M)$ é igual ao número de arestas de G .*

Uma consequência não tão imediata da Proposição 2.1, mostra a variação do grau de um vértice, do esqueleto $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$, quando acrescentamos arestas no grafo G . Dados um vértice u de um grafo G e um vértice v não adjacente a u (podendo v ser ou não vértice de G), seja \tilde{G} o grafo obtido de G pela adição da aresta uv . Então, um emparelhamento M de G é um emparelhamento de \tilde{G} . Além disso, se N é um emparelhamento de G tal que $M \sim N$ em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$, então $M \sim N$ em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))$. Vamos mostrar que, neste caso, o grau de M em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))$ é pelo menos uma unidade maior do que o grau de M em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$.

Proposição 2.3. *Sejam G um grafo, u um vértice de G e M um emparelhamento de G . Se v é um vértice não adjacente a u e \tilde{G} é o grafo obtido adicionando-se a G a aresta uv , então*

$$d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))}(M) \geq d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))}(M) + 1.$$

Demonstração. Seja v um vértice não adjacente a u , que pode pertencer ou não a G , e seja \tilde{G} o grafo obtido de G pela adição da aresta $e = uv$. Seja M um emparelhamento de G . Caso $M = \emptyset$, segue do Corolário 2.2, que $d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))}(M) = |E(G)| + 1 = d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))}(M) + 1$. Assim, podemos supor que M seja não vazio. Como observado anteriormente, todo emparelhamento de G é também um emparelhamento de \tilde{G} . Logo, para mostrar que $d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))}(M) \geq d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))}(M) + 1$, é suficiente verificar que existe um emparelhamento N de \tilde{G} , adjacente a M em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))$, tal que $N \not\subset E(G)$. Para obtermos um tal emparelhamento N , iremos analisar os casos em que os vértices

u ou v são saturados, ou não, por M . Note que, caso v não seja vértice de G , necessariamente será M -insaturado. Suponha primeiro que ambos os vértices u e v sejam M -insaturados. Considere o emparelhamento $N = M \cup \{e\}$. Neste caso, tem-se que $N \notin E(G)$ e, como $M \Delta N = \{e\}$, $N \sim M$ em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))$. Agora, suponha que u , ou v , seja saturado por M . Seja L o conjunto das arestas de M que incidem ou em u ou em v (note que $|L| = 1$ ou $|L| = 2$) e considere o emparelhamento $N = (M \setminus L) \cup \{e\}$. Como no caso anterior, $N \notin E(G)$ e $N \sim M$ em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))$, pois $M \Delta N = L \cup \{e\}$ é um caminho em G . Logo, $d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(\tilde{G}))}(M) \geq d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))}(M) + 1$. \square

Como consequência da proposição anterior, obtemos que o grau de um vértice do esqueleto do politopo de emparelhamentos de qualquer subgrafo próprio de um grafo G é estritamente menor que o grau deste vértice no esqueleto do politopo de emparelhamentos de G .

Corolário 2.4. *Seja H um subgrafo próprio de um grafo G , e seja M um emparelhamento de H . Então*

$$d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))}(M) \geq d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(H))}(M) + |E(G)| - |E(H)|.$$

Note que, para o emparelhamento $M = \emptyset$, a igualdade é satisfeita neste corolário.

Vértices do Esqueleto $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{n,t}^i))$

Definimos nesta seção uma classe de grafos obtidos da adição de uma aresta entre dois vértices não adjacentes de um caminho, resultando em um grafo unicíclico.

Definição 3.1. *Sejam $t \geq 2$ um número inteiro e $P_n = v_1 v_2 \dots v_n$ um caminho com $n \geq t + 1$ vértices. Definimos $P_{n,t}^i$ como sendo o grafo obtido de P_n ao adicionar a aresta $v_i v_{i+t}$, para $i \in \{1, \dots, n - t\}$.*

O grafo $P_{n,t}^i$ é unicíclico, cujo ciclo tem comprimento $t + 1$. Se $i = 1$ e $t = n - 1$, $P_{n,t}^i$ é o ciclo C_n . Na Figura 6 temos o grafo $P_{9,3}^3$.

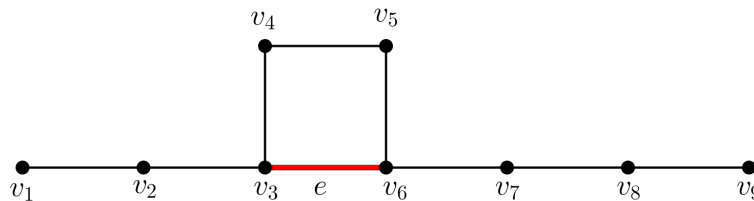


Figura 6: O grafo $P_{9,3}^3$

Ao removermos de $P_{n,t}^i$ os vértices v_i e v_{i+t} , obtemos um grafo com no máximo três componentes conexas não vazias, que são os caminhos P_{i-1} , P_{t-1} e P_{n-i-t} , onde $P_0 = \emptyset$.

A sequência de Fibonacci é a sequência recursiva $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida da seguinte forma: $f_1 = f_2 = 1$ e $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$, para $k \geq 3$. Em [Dahl, 2004] provou-se que, para o caminho P_n , o número de vértices do politopo $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n))$ é igual ao $(n + 1)$ -ésimo termo f_{n+1} da sequência de Fibonacci. Usando este resultado, encontramos o número de vértices do grafo $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{n,t}^i))$.

Proposição 3.2. *O número de vértices do grafo $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{n,t}^i))$ é dado por $f_{n+1} + f_i f_t f_{n+1-(i+t)}$, onde f_k é o k -ésimo número de Fibonacci.*

Demonstração. Como $P_{n,t}^i$ é o grafo obtido do caminho P_n adicionando-se a aresta $e = v_i v_{i+t}$, o número de emparelhamentos de $P_{n,t}^i$ é o número de emparelhamentos de P_n (a saber, f_{n+1}), mais o número de emparelhamentos de $P_{n,t}^i$ que contêm a aresta e .

Os emparelhamentos de $P_{n,t}^i$ que contêm a aresta e são do tipo $M \cup \{e\}$, para algum emparelhamento M de $P_{i-1} \cup P_{t-1} \cup P_{n-i-t}$. Como o número de emparelhamentos de $P_{i-1} \cup P_{t-1} \cup P_{n-i-t}$ é $f_i f_t f_{n+1-(i+t)}$, concluímos a prova. \square

Corolário 3.3. O número de vértices do grafo $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_n))$ é $f_{n-1} + f_{n+1}$.

Exemplo 3.4. Para o grafo $P_{9,3}^3$, temos $n = 9, t = 3$ e $i = 3$ (ver Figura 6). Assim, o número de vértices de $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{9,3}^3))$ é $f_{10} + f_3 f_3 f_4 = 67$, dado que $f_{10} = 55, f_3 = 2$ e $f_4 = 3$.

Teorema 3.5. O grau mínimo do grafo $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{n,t}^i))$ é igual a n , que por sua vez é igual ao número de arestas do grafo $P_{n,t}^i$.

Demonstração. Seja M um emparelhamento qualquer de $P_{n,t}^i$. Se $M = \emptyset$, do Corolário 2.2, $d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{n,t}^i))}(M) = n$.

Suponha que $M \neq \emptyset$ e $M \subset E(P_n)$. Do Teorema 1.8, $d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_n))}(M) \geq n - 1$, número de arestas de P_n . Da Proposição 2.3, $d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{n,t}^i))}(M) \geq n$.

Suponha que $e = v_i v_{i+t} \in M$. Note que $M \setminus \{e\}$ é um emparelhamento do grafo desconexo formado pelas componentes disjuntas P_{i-1}, P_{t-1} e P_{n-i-t} , e que os emparelhamentos de $P_{n,t}^i$ ou estão contidos em $P_i \cup P_{t-1} \cup P_{n-i-t}$, ou contém alguma aresta incidindo em v_i ou em v_{i+t} . Se $N_{P_{i-1}}$ é um emparelhamento adjacente a $M \cap P_{i-1}$ em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{i-1}))$, então $N = N_{P_{i-1}} \cup (M \setminus P_{i-1})$ é adjacente a M em $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{n,t}^i))$. Do Teorema 1.8, $d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{i-1}))}(M \cap P_{i-1}) \geq |E(P_{i-1})|$. Procedendo da mesma forma com P_{t-1} e P_{n-i-t} obtemos, pelo menos, $n - |L|$ emparelhamentos adjacentes a M , onde L é o conjunto de arestas de $P_{n,t}^i$ incidentes ou a v_i ou a v_{i+t} :

$$d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{i-1}))}(M \cap P_{i-1}) + d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{t-1}))}(M \cap P_{t-1}) + d_{\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{n-i-t}))}(M \cap P_{n-i-t}) \geq |E(P_{i-1})| + |E(P_{t-1})| + |E(P_{n-i-t})| = n - |L|.$$

Visto que tais emparelhamentos estão contidos em $P_{i-1} \cup P_{t-1} \cup P_{n-i-t}$, nenhum deles possui aresta em L . Seja f uma aresta de L e $N = M' \cup \{f\}$, onde M' é o conjunto das arestas de M que não são incidentes a f . Sendo $M \Delta N$ conexo, do Teorema 1.3, N é adjacente a M . Assim, teremos mais $|L|$ emparelhamentos adjacentes a M . Logo, $d(M) \geq (n - |L|) + |L| = n$. \square

Corolário 3.6. O grau mínimo do grafo $\mathcal{G}(\mathcal{M}(C_n))$ é igual ao número de arestas do ciclo C_n .

Exemplo 3.7. O grafo $P_{5,2}^2$ da Figura 7 tem 9 emparelhamentos, $M_0 = \emptyset$; $M_1 = \{v_1 v_2\}$; $M_2 = \{v_2, v_3\}$; $M_3 = \{v_3 v_4\}$; $M_4 = \{v_4 v_5\}$; $M_5 = \{v_1 v_2, v_3 v_4\}$; $M_6 = \{v_1 v_2, v_4 v_5\}$; $M_7 = \{v_2 v_3, v_4 v_5\}$ e $M_8 = \{v_2 v_4\}$. Já o grafo $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{5,2}^2))$ tem grau mínimo 5, cujos vértices correspondentes são dados pelos emparelhamentos M_0, M_1, M_4 e M_6 .

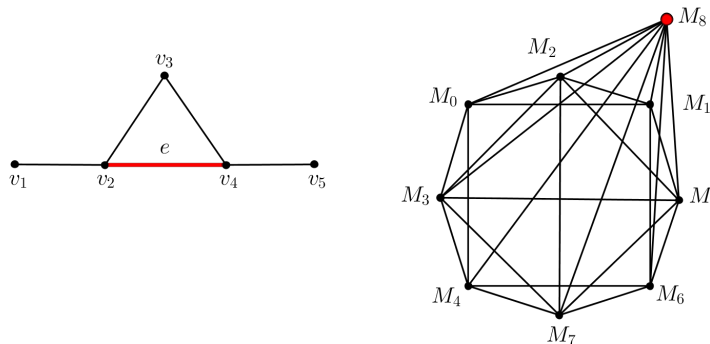


Figura 7: $P_{5,2}^2$ e $\mathcal{G}(\mathcal{M}(P_{5,2}^2))$

Vértices do Esqueleto $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_{1,1,p}))$

Para $p \geq 1$, seja $K_{1,1,p}$ o grafo obtido pela junção de um vértice isolado com os vértices de uma estrela $S_{1,p}$. Tal grafo é conhecido por *book triangular*.

Denote por f a aresta comum aos p triângulos do grafo $K_{1,1,p}$, que resulta da ligação do vértice isolado com o centro da estrela. Para cada vértice v_i não saturado por f , denote por e_i e e'_i as duas arestas que incidem em v_i (ver Figura 8). No que segue, iremos supor que as arestas e_i incidem no mesmo vértice u da aresta f , e que as arestas e'_i incidem no vértice w de f .

Exemplo 4.1. Na Figura 8 temos o grafo $K_{1,1,6}$.

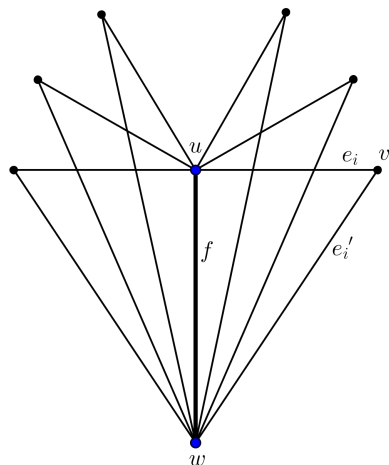


Figura 8: O grafo $K_{1,1,6}$

O teorema a seguir dá o número de emparelhamentos de $K_{1,1,p}$, ou equivalentemente, o número de vértices de $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_{1,1,p}))$, e os graus mínimo e máximo deste grafo.

Teorema 4.2. O número de vértices do esqueleto $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_{1,1,p}))$ é $p^2 + p + 2$. Para este grafo, tem-se que seus graus mínimo e máximo são, respectivamente, $\delta = 2p + 1$ e $\Delta = p^2 + p + 1$.

Demonstração. Os emparelhamentos de $K_{1,1,p}$ são o vazio e aqueles formados por uma ou duas arestas. O número de emparelhamentos formados por quaisquer duas arestas é $p(p - 1)$. Como este grafo possui $2p+1$ arestas, concluímos que o número de vértices de $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_{1,1,p}))$ é $p(p - 1) + 2p + 1 + 1 = p^2 + p + 2$.

Se $M = \emptyset$, do Corolário 2.2, $d(M)$ é igual ao número de arestas de $K_{1,1,p}$, isto é, $d(M) = 2p + 1$.

Para $M = \{e_i\}$, temos que $N(M) = \{\emptyset, \{e_j : j \neq i\}, \{e'_i\}, \{f\}, \{e_i, e'_j : j \neq i\}, \{e_j, e'_i : j \neq i\}\}$. Portanto, $d(M) = 1 + (p - 1) + 1 + 1 + (p - 1) + (p - 1) = 3p$. Analogamente, se $M = \{e'_i\}$, então $d(M) = 3p$.

Se $M = \{f\}$, então M é adjacente a todos os demais emparelhamentos de $K_{1,1,p}$. Assim, $d(M) = p^2 + p + 1$.

Por fim, se $p \geq 2$ e $M = \{e_i, e'_j\}$, sejam e_s e e'_t as arestas de $K_{1,1,p}$ tais que $e_i e_s e'_j e'_t$ forma um ciclo C_4 . Temos que $N(M) = \{\{f\}, \{e_i\}, \{e'_j\}, \{e_s\}, \{e'_t\}, \{e_i, e'_w : w \neq j, w \neq t\}, \{e_k, e'_j : k \neq i, k \neq s\}, \{e_s, e'_w : w \neq j\}, \{e_k, e'_t : k \neq i, k \neq s\}\}$. Portanto, $d(M) = 5 + (p - 2) + (p - 2) + (p - 1) + (p - 2) = 4p - 2$. \square

Exemplo 4.3. Na Figura 9 são dados os grafos $K_{1,1,2}$ e $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_{1,1,2}))$. Este último com $2^2 + 2 + 2 = 8$ vértices, grau mínimo $\delta = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ e grau máximo $\Delta = 2^2 + 2 + 1 = 7$.

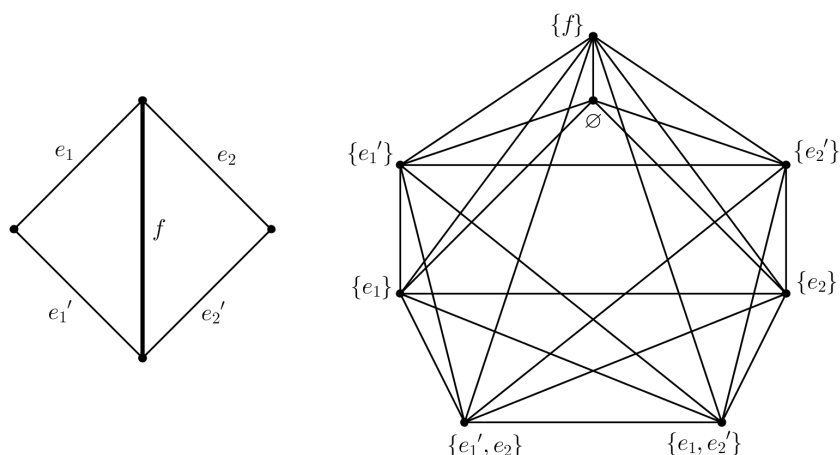


Figura 9: $K_{1,1,2}$ e $\mathcal{G}(\mathcal{M}(K_{1,1,2}))$

Considerações Finais

Pode-se notar que determinar o grau mínimo ou o grau máximo do esqueleto $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$ não é um problema fácil, dado que tais grafos são, em geral, de ordem muito grande. Por isso, determinar estes graus quando G pertence a uma classe especial de grafos é um resultado interessante, mesmo que G seja de ordem relativamente pequena. Ainda, são necessários resultados mais gerais sobre o grau de um vértice do esqueleto. De fato, para os cálculos apresentados nas duas últimas seções, foram usados tanto resultados conhecidos acerca de grau de vértices do esqueleto $\mathcal{G}(\mathcal{M}(T))$, quando T é uma árvore, como os novos resultados, obtidos na Seção 2. Como proposta para trabalhos futuros, pretende-se obter resultados mais gerais sobre o grau de um vértice do esqueleto $\mathcal{G}(\mathcal{M}(G))$, além de encontrar o grau mínimo deste grafo, no caso em que G é um grafo qualquer.

Referências

- Abreu, N., Costa, L., Dahl, G., e Martins, E. A. (2014). The skeleton of acyclic birkhoff polytopes. *Linear Algebra Appl.*, 457:29–48.
- Chvátal, V. (1975). On certain polytopes associated with graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, B 18:138–154.
- Costa, L., Fonseca, C. M., e Martins, E. A. (2008). The diameter of the acyclic birkhoff polytope. *Linear Algebra Appl.*, 428:1524–1537.
- Dahl, G. (2004). Tridiagonal doubly stochastic matrices. *Linear Algebra Appl.*, 390:197–208.
- Diestel, R. (2000). *Graph Theory*. Springer-Verlag, New York.
- Fernandes, R. (2015). Computing the degree of a vertex in the skeleton of acyclic birkhoff polytopes. *Linear Algebra Appl.*, 475:119–133.
- Grunbaum, B. (2003). *Convex Polytopes*. Springer-Verlag, New York.
- Schrijver, A. (2003). Combinatorial optimization: Polyhedra and efficiency. In *Algorithms and Combinatorics*, No. 24. Springer-Verlag.