Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta

Katarina Polc

INVARIANTNI PODPROSTORI LINEARNIH OPERATORJEV NAD $\mathbb{R}$

Diplomsko delo

Ljubljana, 2017

Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta

Dvopredmetni učitelj: matematika - računalništvo

Katarina Polc

Mentor: prof. dr. Aleksander Malnič

INVARIANTNI PODPROSTORI LINEARNIH OPERATORJEV NAD $\mathbb{R}$

Diplomsko delo

Ljubljana, 2017

Najprej izražam hvaležnost mentorju, prof. dr. Aleksandru Malniču, za skrbno branje, popravke in nasvete ob nastajanju tega dela.

Hvala oče za vsa finančna sredstva, hvala bratom za moralno podporo in sodelavkam za priskrbljen čas.

Posebno zahvalo pa namenim Anji Knežević, ki mi je ob študiju nudila ogromno pomoči in močno oporo.

Povzetek

V nalogi ločimo operatorje, ki s svojim delovanjem na vektorski prostor porodijo razpad prostora na premo vsoto samih, za izbrani operator minimalnih invariantnih podprostorov. Takšne operatorje imenujemo povsem reducibilni. V delu definiramo invariantne podprostore. Inducirane operatorje, ki delujejo nad njimi, preučimo vsaj do te mere, da lahko vpeljemo lastne ter korenske podprostore, za tem pa presodimo, v kakšnih primerih sta ta dva enaka in kakšne so posledice tega. S tem ločimo operatorje, ki porodijo razpad prostora na same enorazsežne, za dani operator invariantne podprostore, ter operatorje, katerih razpad prostora, na katere delujejo, ni tak. Ob tem vpeljemo vse potrebno orodje za opis takega razcepa.

Ključne besede: lineareni operator, invariantni podprostor, inducirani operator, lastna vrednost, lastni podprostor, korenski podprostor

Abstract

In the thesis, we separate operators which have an effect on a vector space in such a way that they cause a decomposition of that space into a direct sum of minimal invariant subspaces. These kinds of operators are completely reducible. Invariant subspaces are then defined. We define induced operators that affect them to such extent that we can introduce their eigenspaces and root subspaces (generalized eigenspaces) and judge in which cases these are the same and what the consequences of that fact are. By using this procedure, we can separate the operators on those which cause a decomposition of space on only one-dimensional invariant subspaces and on those of which the decomposition of the space they affect on is different. The end result of this thesis is a treatment of the tool used to describe that kind of decomposition.

Key words: linear operator, invariant subspace, induced operator, eigenvalue, eigenspace, root subspace (generalized eigenspace)

Kazalo

1 Uvod

Invarianten podprostor U_i za operator na vektorskem prostoru U, je podprostor, ki se pri delovanju operatorja preslika sam vase. Cilj naloge je študirati invariantne podprostore U_i, ko le ti s premo vsoto tvorijo celoten prostor U in do neke mere preučiti inducirane operatorje, ki delujejo nad takšnimi podprostori.

Najprej bomo navedli osnovne pojme, ki so potrebni za nadaljnjo obravnavo invariantnih podprostorov, nato pa se bomo problema lotili z iskanjem lastnih vrednosti operatorja in definiranjem pripadajočih lastnih podprostorov. Nad lastnimi podprostori namreč delujejo inducirani operatorji, ki porodijo razpad lastnih podprostorov, na same enorazsežne invariantne podprostore. Preko možnosti razcepa karakterističnega polinoma operatorja bomo izločili operatorje, ki ne porodijo razpada prostora. Ti nimajo zadosti lastnih vrednosti, da bi bil operator popolnoma reducibilen. Nekatere operatorje, ki so predmet te naloge, bomo z obravnavo lastnih podprostorov že preučili, ostanejo pa nam operatorji, katerih delovanje ne porodi razpada prostora na same lastne podprostore, ki bi s premo vsoto tvorili celoten prostor U. Takšne operatorje bomo prepoznali preko njihovih karakterističnih polinomov in karakterističnih polinomov induciranih operatorjev, ki delujejo nad lastnimi podprostori. Študirali bomo korenske podprostore, ki so za dani operator invariantni in katerih vsota razsežnosti je enaka razsežnosti prostora U. S tem dobimo razpad prostora na premo vsoto samih, za dani operator invariantnih podprostorov. Tekom obravnave nas bodo spremljali različni zgledi, na primer zrcaljenja, delni razteg, projekcije in rotacije.

2 Osnovni pojmi

2.1 Vektorski prostor in podprostor

Definicija. *Naj bo* $(U, +)$ *komutativna grupa in* $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ *polje. Potem je* U vektorski prostor *nad poljem* $\mathbb{F}$*, če obstaja zunanja operacija* $\cdot : \mathbb{F} \times U \to U$*, ki zadošča naslednjim aksiomom:*

1. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$*, za* $\lambda \in \mathbb{F}$ *in* $u, v \in U$*;*

2. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$*, za* $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ *in* $u \in U$*;*

3. $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$*, za* $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ *in* $u \in U$*;*

4. $1 \cdot u = u$*, za* $1 \in \mathbb{F}$ *in* $u \in U$*.*

Elementom komutativne grupe $(U, +)$ rečemo *vektorji*, elementom polja $\mathbb{F}$ pa *skalarji.* Notranji operaciji v grupi vektorjev $(U, +)$ pravimo *seštevanje vektorjev*, zunanji operaciji $\cdot : \mathbb{F} \times U \to U$ pa *množenje vektorja s skalarjem.* Če je $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ rečemo, da je U *realen vektorski prostor*, v primeru, ko je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, pa *kompleksni vektorski prostor.* Polja, nad katerim je definiran vektorski prostor običajno, ne bomo posebej označevali, saj bo le-ta razviden iz konteksta.

Poglejmo si nekaj najbolj pomembnih zgledov.

ZGLEDI

1. Trivialna grupa (ki torej vsebuje zgolj ničelni vektor) tvori vektorski prostor. Rečemo mu *trivialni* vektorski prostor.

2. Množica urejenih n-teric $\mathbb{F}^n$ skupaj z operacijama seštevanja in množenja s skalarjem po komponentah tvori vektorski prostor.

3. Množica vseh $m \times n$ matrik s seštevanjem matrik in množenjem matrik s skalarjem po elementih matrike, je vektorski prostor.

4. Množica matrik oblike $m \times 1$, to so kar matrike stolpci, tudi tvori vektorski prostor.

5. Vsaka premica skozi izhodišče v prostoru je vektorski prostor. V prostoru je vsaka ravnina skozi izhodišče vektorski prostor.

Definicija. *Naj bo U vektorski prostor in naj bo U_i neka neprazna podmnožica množice U, ki je zaprta za operacijo seštevanja vektorjev in operacijo množenja s skalarjem. Če je podmnožica U_i vektorski prostor, je*

U_i vektorski podprostor *prostora U, kar označimo z*

$$U_i \leq U.$$

ZGLEDI

1. V vsakem vektorskem prostoru je podmnožica, ki vsebuje zgolj ničelni vektor, podprostor. To je *trivialni podprostor.*

2. Vsaka premica skozi izhodišče, ki leži v neki ravnini , je podprostor te ravnine. Vsaka ravnina in vsaka premica skozi izhodišče so vektorski podprostori v prostoru.

3. Naj bodo $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{F}^n$ vektorji v prostoru urejenih n-teric. Vsaka množica vektorjev, ki imajo enaka razmerja med koordinatami u_i, je vektorski podprostor v $\mathbb{F}^n$.

4. Presek poljubnih vektorskih prostorov je vektorski prostor.

5. Če sta poljubna netrivialna prostora različna in nista eden podprostor drugega, potem njuna unija ni vektorski prostor.

2.2 Baza vektorskega prostora

Definicija. *Naj bo U vektorski prostor. Predpostavimo, da v vektorskem prostoru U nad poljem $\mathbb{F}$ obstaja množica vektorjev $B_U = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, za katere velja, da se da vsak vektor $u \in U$ enolično linearno izraziti z vektorji iz B_U, to je, za vsak $u \in U$ obstaja tak enoličen nabor skalarjev $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, da je $u = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$. Taki množici rečemo* baza *vektorskega prostora U, njenim elementom pa* bazni vektorji.

Ker je baza najmanjša takšna množica, so skalarji $a_1, \ldots, a_n$ za vsak vektor u natanko določeni. Baza prostora načeloma ni določena enolično, vendar pa se da pokazati, da sta poljubni dve bazi enako močni. Moči baze rečemo *razsežnost* prostora in jo označimo z dim(U), skalarjem $a_1, \ldots, a_n$ pa *koeficjenti razvoja vektorja u po bazi B_U*. Ti koeficienti so seveda odvisni od baze, zato je pomembno, da vemo, v kateri bazi je vektor podan. Ker sprememba vrstnega reda baznih vektorjev v B_U vpliva na zapis koeficientov razvoja vektorja, sta množici z istimi elementi, zapisanimi v različnem vrstnem redu, že različni bazi.

ZGLEDI

1. Reprezentacija vektorja u z matriko stolpcem v bazi B_U:

$$u = a_1b_1 + a_2b_2 + ...a_nb_n \text{ reprezentiramo z } \mathrm{M}(u) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{bmatrix}^t_{B_U}.$$

2. Vsak vektor na premici lahko izražamo z večkratnikom poljubnega enega netrivialnega vektorja na tej premici. Baza premice je vektor s smernikom premice. Premica skozi izhodišče je enorazsežen prostor. Vse vektorje ravnine lahko izrazimo z dvema vektorjema te ravnine. Ravnina je dvorazsežen prostor.

3. Poljubno matriko stolpec $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & ... & u_n \end{bmatrix}^t$ lahko izrazimo z n matrikami stolpcev. Prostor $n \times 1$ matrik stolpcev je n-razsežen.

4. Množica matrik stolpcev $E_n = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \end{bmatrix}^t, ..., \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}^t\}$ je reprezentacija standardne baze n-razsežnega prostora.

Naj bodo $u_1, u_2, ...u_m$ vektorji iz U. Rečemo, da so ti vektorji *linearno neodvisni*, če je enakost $a_1u_1 + \ldots + a_mu_m = 0$ izpolnjena le za $a_1 = \ldots = a_m = 0$. Vektorji kake baze so očitno linearno neodvisni.

Naj bo B_U neka baza n-razsežnega prostora. Če iz B_U odstranimo nek vektor, nam ostane množica B_{U^-} linearno neodvisnih vektorjev. Množica B_{U^-} je spet baza nekega manj razsežnega prostora, ki je podprostor prostora U. Če pa množici B_U dodamo poljuben vektor iz prostora, množica B_{U^+} ne bo več linearno neodvisna.

Imejmo bazi poljubnih podprostorov U in V v prostoru W, recimo $B_U = \{b_{u1}, b_{u2}, ..., b_{u_n}\}$ in $B_V = \{b_{v_1}, b_{v2}, ..., b_{vm}\}$. Očitno je U n-razsežen podprostor in V m-razsežen podprostor. Poglejmo, kaj se lahko zgodi, če bazne vektorje b_{vi} dodajamo v bazo B_U:

- Vse vektorje uspemo dodati v B_U, tako da so še vedno vsi vektorji linearno neodvisni. Potem je nova množica baza nekega $(n + m)$-razsežnega podprostora v W.

- Nek vektor b_{vi} je linearno odvisen od vektorjev b_{ui}. Tedaj je b_{vi} vektor iz prostora U. To pomeni, da presek prostora U in V ni trivialen.

Če torej želimo iz baz prostorov razsežnosti m in n sestaviti bazo prostora razsežnosti $m + n$, mora biti presek prostorov trivialen. Obratno iz zgornjega sledi, da kadar razbijemo bazo na več manjših množic, bodo te množice baze nekih podprostorov, ki imajo paroma trvialen presek.

Definicija. *Naj bosta U in V poljubna podprostora v prostoru W, ki imata trivialen presek. Podprostor, katerega baza je unija baz teh podprostorov, imenujemo* prema vsota *podprostorov U, V, kar označimo kot*

$$U \oplus V.$$

Iz tega sledi, da lahko bazo poljubno razsežnega prostora U sestavimo iz baz podprostorov U_i s trivialnim presekom, katerih vsota razsežnosti je enaka razsežnosti prostora U. Brez dokaza navedimo naslednjo trditev.

Trditev 2.1. *Naj bo U vektorski prostor. Če najdemo podprostore $U_1, U_2, ..., U_k$, za katere velja, da nobeden od njih ni vsebovan v vsoti preostalih, potem je $B_U = \{B_{U1}, B_{U2}, ..., B_{Uk}\}$. Prostor U je prema vsota podprostorov $U_1, \ldots, U_k$, kar zapišemo kot*

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_k.$$

ZGLEDI

1. Naj premica skozi izhodišče ne leži v neki izbrani ravnini skozi izhodišče. Njun presek je izhodišče oz. trivialni vektor. Vsota premice in ravnine je v tem primeru prema, torej bosta njuni bazi sestavljali bazo za $1 + 2 = 3$-razsežen prostor.

2. Matrike stolpci, ki imajo v j-ti vrstici 0, imajo z matrikami stolpci, ki imajo v vseh razen j-ti vrstici 0, trivialen presek. Prostor prvih je razsežnosti n-1, prostor drugih pa razsežnosti 1. Če njuni bazi združimo, dobimo bazo za n-razsežen prostor matrik stolpcev. Vsota med prostoroma je prema.

2.3 Linearen operator vektorskega prostora

Imejmo vektorski prostor U in naj bo $\mathcal{A}$ neka preslikava, ki vektorje prostora U preslika v neke druge vektorje tega prostora, kar označimo z $\mathcal{A} : U \to U$. Začetne vektorje, ki jih kasneje preslikamo, imenujemo *originali* in predstavljajo definicijsko območje preslikave, vektorje, ki so rezultat preslikave originalov pa *slike* in predstavljajo zalogo vrednosti preslikave. Če za vsak $u_1, u_2 \in U$ ter $a \in \mathbb{F}$ velja še

$$\mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2) = \mathcal{A}(u_1 + u_2) \quad \textit{aditivnost}$$

ter

$$\mathcal{A}(au) = a\mathcal{A}(u) \quad \textit{homogenost},$$

preslikavo imenujemo *linearna preslikava.* Preslikavam vektorskih prostorov pravimo *operatorji*, ki seveda lahko slikajo iz enega prostora v kak drug prostor, torej $\mathcal{B} : U \to V$. Tudi takšni operatorji so lahko linearni. Operatorjem, ki slikajo v isti prostor, pravimo *endomorfizmi* vektorskega prostora. Možico vseh endomorfizmov nekega vektorskega prostora U označimo $\mathrm{End}(U)$. V tej nalogi se bomo ukvarjali izključno z endomorfizmi, zato bomo v nadaljevanju pisali le *operator*, pri tem pa bomo privzeli, da je to linearen operator vektorskega prostora vase.

Vsak operator preslika trivialni vektorski prostor vase, torej za vsak $\mathcal{A} \in \mathrm{End}(U)$ velja $\mathcal{A}(0) = 0$. Lahko pa pogoju $\mathcal{A}(u) = 0$ ustreza tudi kakšen drug neničelni vektor u iz U. To pomeni, da operator $\mathcal{A}$ v ničelni vektor preslika še kakšne vektorje . Množico vseh takih originalov

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{u \in U \mid \mathcal{A}(u) = 0\}$$

imenujemo *jedro* operatorja $\mathcal{A}$. Definirajmo tudi množico vseh slik originalov. Takšni množici rečemo kar *slika* operatorja $\mathcal{A}$ in jo definiramo kot

$$\mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}(u) \in U \mid u \in U\}.$$

Ker je operator linearen, sta tako obe množici zaprti za operaciji seštevanja vektorjev in množenja s sklarjem. To pa pomeni, da oba predstavljata neka vektorska podporstora prostora U in imata potem vsak svojo bazo in s tem razsežnost. Razsežnosti jedra rečemo *ničelnost* operatorja, razsežnosti slike pa *rang* operatorja.

Pri delovnju operatorja se zgodi ena od dveh možnosti:

1. $$\dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A})) = \dim(U) \iff \dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A})) = 0^1$$

   Tak operator je hkrati surjektiven in injektiven, torej bijektiven. Rečemo mu tudi *avtomorfizem.*

2. $$\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{A} \neq 0)) \iff \dim(\mathrm{Im}(\mathcal{A})) < \dim(U)$$

   Tak operator ni niti surjektiven niti injektiven.

ZGLEDI

1. Naj bo $\mathcal{M} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^{n,1}$ preslikava, ki slika iz vektorskega prostora urejenih n-teric, v vektorski prostor matrik stolpcev nad istim poljem, $\mathcal{M}((u_1, u_2, ..., u_n)) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & ... & u_n \end{bmatrix}^t$. Naj bosta $u, v \in \mathbb{F}^n$ ter $a \in \mathbb{F}$. Preverimo:

$$\mathcal{M}((u_1, u_2, ..., u_n) + (v_1, v_2, ..., v_n)) = \mathcal{M}((u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n) =$$
$$\begin{bmatrix} u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & ... & u_n + v_n \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & ... & u_n \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & ... & v_n \end{bmatrix}^t =$$
$$\mathcal{M}((u_1, u_2, ..., u_n)) + \mathcal{M}((v_1, v_2, ..., v_n))$$

preslikava je aditivna,

$$a\mathcal{M}((u_1, u_2, ..., u_n)) = a \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & ... & u_n \end{bmatrix}^t =$$
$$\begin{bmatrix} au_1 & au_2 & ... & au_n \end{bmatrix}^t = \mathcal{M}((au_1, au_2, ..., au_n)) = \mathcal{M}(a(u_1, u_2, ..., u_n))$$

in homogena. Linearni preslikavi $\mathcal{M}$ pravimo reprezentacija vektorskega prostora urejenih n-teric $\mathbb{F}^n$ v standardni bazi matrik stolpcev $\mathbb{F}^{n,1}$.

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{M}) = \{(u_1, u_2, ..., u_n) \mid \mathcal{M}((u_1, u_2, ..., u_n)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}^t\} = \{0\}$$
$$\mathrm{Im}(\mathcal{M}) = \{\mathcal{M}((u_1, u_2, ..., u_n)) \mid (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{F}^n\} = \{\mathbb{F}^{n,1}\}$$

Jedro preslikave je trivialno, slika pa je kar celoten prostor v katerega preslikava slika. Takšni preslikavi vektorskih prostorov rečemo *izomorfizem*, za prostora pa rečemo da sta *izomorfna* ali strukturno enaka.

2. Naj bo $U \leq \mathbb{F}^{3,1}$ in $\mathcal{X}$ preslikava, ki nanj deluje s predpisom $\mathcal{X}(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}^t) = u_1 + |u_2| + u_3$. Preslikava ni linearna, saj zanjo ne velja aditivnost. Primer:

$$\mathcal{X}(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^t) + \mathcal{X}(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t) = 3 + 3 = 6$$
$$\neq$$
$$\mathcal{X}(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t) = \mathcal{X}(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^t) = 4$$

Odslej bodo vse preslikave linearne, zato pogojev za linearnost ne bomo več preverjali.

[1]Dimenzija trivialnega podprostora je privzeto enaka 0

3. Naj bo $\mathcal{B}$ operator, ki s predpisom $\mathcal{B}(\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3\end{bmatrix}^t) = \begin{bmatrix}u_1 & u_3 & u_2\end{bmatrix}^t$ deluje na bazo $E_3 = \{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^t\}$

$$\mathcal{B}(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^t) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^t$$

$$\mathcal{B}(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^t) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^t$$

$$\mathcal{B}(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^t) = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^t$$

Slike baznih vektorjev so trije linearno neodvisni vektorji, torej je množica teh slik prav tako baza trirazsežnega vektorskega prostora. Razsežnost jedra preslikave je 0, saj iz $\mathcal{B}(\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3\end{bmatrix}^t) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^t$ sledi $u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0$, torej je v jedru le ničelni vektor. Rang operatorja je 3. Operator $\mathcal{B}$ je torej avtomorfizem.

4. Nekateri primeri štirih pomembnih operatorjev:

4.1. $\mathcal{Z}_{U_1}(\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3\end{bmatrix}^t) = \begin{bmatrix}u_1 & -u_2 & -u_3\end{bmatrix}^t$.

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{Z}_{U_1}) = \{0\}, \mathrm{Im}(\mathcal{Z}_{U_1}) = U$$

Podprostor $U_1 = a_1 \begin{bmatrix}u_1 & 0 & 0\end{bmatrix}^t$ operator "pusti pri miru", podprostoroma $U_2 = a_2 \begin{bmatrix}0 & u_2 & 0\end{bmatrix}^t$ ter $U_3 = a_3 \begin{bmatrix}0 & 0 & u_3\end{bmatrix}^t$ pa spremeni usmerjenost. Takšnemu operatorju pravimo *zrcaljenje čez podprostor* U_1. V tem primeru je to zrcaljenje čez premico, lahko pa bi bil U_1 tudi ravnina.

4.2. $\mathcal{D}_{U_2,2}(\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3\end{bmatrix}^t) = \begin{bmatrix}u_1 & u_2 & 2u_3\end{bmatrix}^t$.

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{D}_{U_2,2}) = \{0\}, \mathrm{Im}(\mathcal{D}_{U_2,2}) = U$$

Podprostor $U_1 = a_1 \begin{bmatrix}u_1 & 0 & 0\end{bmatrix}^t + a_2 \begin{bmatrix}0 & u_2 & 0\end{bmatrix}^t$ je negiben, podprostor $U_2 = a_3 \begin{bmatrix}0 & 0 & u_3\end{bmatrix}^t$, pa se pomnoži s skalarjem 2, torej se raztegne. Operator se imenuje *delni razteg.* V tem primeru se raztegne premica U_2, ravnina U_1 pa ostane negibna.

4.3. $\mathcal{P}_{U_2}(\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}u_1 & u_2 & 0\end{bmatrix}^t$.

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{P}_{U_2}) = \{a_1 \begin{bmatrix}0 & 0 & u_3\end{bmatrix}^t\} = U_1, \mathrm{Im}(\mathcal{P}_{U_2}) = \{a_2 \begin{bmatrix}u_1 & 0 & 0\end{bmatrix}^t + a_3 \begin{bmatrix}0 & u_2 & 0\end{bmatrix}^t\} = U_2$$

Podprostor U_1 pade v podprostor U_2. To je operator *projekcija prostora U, vzdolž podprostora* U_1.

4.4. $\mathcal{R}_{\phi,U_2}(\begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3\end{bmatrix}^t) = \begin{bmatrix}u_1\cos\phi - u_2\sin\phi & u_1\sin\phi + u_2\cos\phi & u_3\end{bmatrix}^t$.

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{R}_{\phi,U_2}) = \{0\}, \mathrm{Im}(\mathcal{R}_{\phi,U_2}) = U$$

Podprostor $U_1 = a_1 \begin{bmatrix}u_1 & 0 & 0\end{bmatrix}^t + a_2 \begin{bmatrix}0 & u_2 & 0\end{bmatrix}^t$ se zavrti za kot ϕ, podprostor $U_2 = a_3 \begin{bmatrix}0 & 0 & u_3\end{bmatrix}^t$ pa miruje. Tak operator se imenuje *rotacija prostora U, okrog podprostora* U_2. Podprostor U_2 je os rotacije.

Povejmo še kaj o množici vseh operatorjev $\mathrm{End}(U)$ nad danim vektorskim prostorom U. Vsota operatorjev je definirana kot vsota funkcij, množenje s skalarji pa kot množenje funkcije s skalarji. Za vse operatorje $\mathrm{End}(U)$ in vse skalarje iz polja, nad katerim je definiran U, veljajo aksiomi vektorskega prostora. Nevtralni element za seštevanje je trivialni endomorfizem, ki vse vektorje preslika v ničelni vektor. Velja naslednje:

1. Množica $\mathrm{End}(U)$ je vektorski prostor.
2. V množici $\mathrm{End}(U)$ za vsak $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{End}(U)$ definiramo še operacijo *produkt endomorfizmov*:

   $$(\mathcal{B}\mathcal{A})(u) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(u)) \quad za \; \forall \; u \in U.$$

   Nevtralni element je *identični* endomorfizem, ki vsak vektor preslika nase in ga označimo z $\mathrm{id}(U)$. Operacija je dobro definirana in množica endomorfizmo je zanjo zaprta.
3. Množica $\mathrm{End}(U)$ je kolobar z enico za operaciji seštevanja in produkta endomorfizmov.
4. Pa še za vsak endomorfizem $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{End}(U)$, ter vsak $a \in F$ velja:

   $$(a\mathcal{A})\mathcal{B} = a(\mathcal{A}\mathcal{B}) \qquad \mathcal{A}(a\mathcal{B}) = a(\mathcal{A}\mathcal{B})$$

Točke 1., 3. in 4. so ravno zahteve, da množica ohranja strukturo *algebre*. Formulirajmo to misel tudi formalno.

Trditev 2.2. *Naj bo U n-razsežen vektorski prostor nad poljem F. Množica vseh njegovih endomorfizmov $End(U)$ je algebra.*

Naj opomnim še, da algebra endomorfizmov v splošnem ni komutativna, torej $\mathcal{A}\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$. Dokaze lahko najdemo v [3] strani 66-69 ali pa [1] strani 28-33. Kot smo povedali, obstajajo endomorfizmi, katerih ničelnost je 0 in rang enak razsežnosti celotnega prostora. Rekli smo jim avtomorfizmi. Množica vseh avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(U)$ je podmnožica algebre endomorfizmov, ki prenese operacijo množenja avtomorfizmov, ima nevtralni element in sicer $\mathrm{id}(U) \in \mathrm{Aut}(U)$, polek tega pa ima še vsak njen element $C \in \mathrm{Aut}(U)$ svoj obrat $C^{-1} \in \mathrm{Aut}(U)$, ki mu pravimo *obratni avtomorfizem*. Ker v $\mathrm{Aut}(U)$ velja tudi asociativnost, lahko zapišemo naslednjo trditev. (Povzeto po [1] stran 35)

Trditev 2.3. *Naj bo U n-razsežen vektorski prostor nad poljem F. Množica vseh njegovih avtomorfizmov $Aut(U)$ je grupa za množenje.*

2.4 Delovanje operatorja na bazne vektorje

Oglejmo si, kako operator deluje na neki poljuben vektor $u \in U$ vektorskega prostora U. Naj bo $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ baza za U in naj bo vektor u izražen v tej bazi, torej

$$u_B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \quad a \in F.$$

Pa naj bo $\mathcal{A}$ operator, ki vektor u_B preslika v vektor $\mathcal{A}(u_B) = u_{B'}$, izražen v bazi B'. Naj bo $B' = \{b'_1, b'_2, ..., b'_n\}$. Zaradi linearnosti operatorja velja,

$$\mathcal{A}u_B = a_1 \mathcal{A}b_1 + a_2 \mathcal{A}b_2 + ... + a_n \mathcal{A}b_n,$$

kar krajše lahko zapišemo kot

$$Au_B = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{A} b_j.$$

Če torej poznamo slike $\mathcal{A}b_1, \mathcal{A}b_2, .., \mathcal{A}b_n$ baznih vektorjev iz B, lahko iz njih razvijemo sliko poljubnega vektorja iz U. Vektorje $\mathcal{A}b_j,\ j = 1, 2, ..., n$, razvijemo po bazi B':

$$\mathcal{A}b_1 = a_{11}b'_1 + a_{21}b'_2 + ... + a_{n1}b'_n$$

$$\mathcal{A}b_2 = a_{12}b'_1 + a_{22}b'_2 + ... + a_{n2}b'_n$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{A}b_n = a_{1n}b'_1 + a_{2n}b'_2 + ... + a_{nn}b'_n,$$

oziroma krajše,

$$\mathcal{A}b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b'_i.$$

Če sedaj razvoj slik baznih vektorjev iz B vnesemo v razvoj vektorja $\mathcal{A}u_B = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{A}b_j$,

dobimo

$$\mathcal{A}u_B =$$

$$= a_1(a_{11}b'_1 + a_{21}b'_2 + \ldots + a_{n1}b'_n) + a_2(a_{12}b'_1 + a_{22}b'_2 + \ldots + a_{n2}b'_n) + \ldots + a_n(a_{1n}b'_1 + a_{2n}b'_2 + \ldots a_{nn}b'_n)$$

$$= (a_1a_{11} + a_2a_{12} + ... + a_na_{1n})b'_1 + (a_1a_{21} + a_2a_{22} + ... + a_na_{nn})b'_2 + ... + (a_1a_{n1} + a_2a_{n2} + ... + a_na_{nn})b'_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_j a_{ij} b'_i.$$

S tem smo pokazali, da je za preučevanje delovanja operatorja na U dovolj, če preučujemo delovanje operatorja na bazne vektorje prostora U. Dogovorimo se še, kako bomo zadeve reprezentirali. (Povzeto po [1] na strani 34,35)

2.5 Reprezentacija

Če slike baznih vektorjev iz B zapišemo po stolpcih v matriko, lahko sliko $\mathcal{A}u$ izrazimo v matrični obliki takole:

$$\mathcal{A}u_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \mathrm{M}_{B'}^{B}(\mathcal{A}) \cdot u_B.$$

Matrika operatorja bo tako vedno $n \times n$. Kadar bo operator, ki bazo nekega prostora slika v množico vektorjev, ki ni baza za ta prostor, bodo vektorji, ki ustrezajo stolpcem matrike $\mathrm{M}_{B'}^{B}(\mathcal{A})$ linearno odvisni. Takrat je operator $\mathcal{A}$ endomorfizem, ki ni avtomorfizem. Če pa so vsi vektorji matrike $\mathrm{M}_{B'}^{B}(\mathcal{A})$ linearno neodvisni, potem je operator $\mathcal{A}$ avtomorfizem. V resnici med množico endomorfizmov nekega n-raze₫nega prostora in prostorom $n \times n$ kvadratnih matrik, obstaja izomorfizem. Več besed o izomorfizmu med endomorfizmi in kvadratnimi matrikami lahko preberemo v zapiskih predmeta Algebrske strukture [3] na straneh od 71.-73., kot v mnogih drugih virih, tudi v virih, ki so uporabljeni tu. [1] strani 44.,45., ter [2] strani 69.,70..

Naj bo $\mathcal{P}$ avtomorfizem, ki slika bazo B na bazo B'. Matriki avtomorfizma $\mathcal{P}$ v bazi B rečemo tudi *prehodna matrika iz baze B na bazo B'* in jo označimo z

$$\mathrm{M}_{B}^{B'}(\mathrm{id}).$$

Velja

$$\mathrm{M}_{B}^{B}(\mathcal{P}) = \mathrm{M}_{B}^{B'}(\mathrm{id}).$$

2.5.1 Matrike operatorjev v primerno izbrani bazi B

1. Matrika trivialnega operatorja, podana v poljubni bazi B je

$$\mathrm{M}_{B}^{B}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

2. Matriko identičnega operatroja smo že spoznali. Podana v poljubni bazi B izgleda takole

$$\mathrm{M}_{B}^{B}(\mathrm{id}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

3. Naj bo $\mathcal{Z}k$ zrcaljenje preko k-razsežnega podprostora $U_i \leq U$. V bazi, sestavljeni iz baze za U_i in baze za ortogonalni komplement[2] $U_{i\perp}$ je matrika tega zrcaljenja

$$\mathrm{M}_{B}^{B}(\mathcal{Z}k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & ... & -1 \end{bmatrix}$$

[2]Ortogonalni komplement prostora U_i je prostor, ki je na U_i pravokoten. Označimo ga z $U_{i\perp}$

k elementov po diagonali bo 1, n-k elementov po diagonali pa 1. Vrstni red je lahko različen.

4. Spodnja matrika pripada operatorju delnega raztega $\mathcal{D}_{kU_i}$ prostora U. Podobno kot prej, je baza B sestavljena iz baze podprostora U_i, ki se raztegne za k in baze za $U_{i\perp}$.

$$\mathrm{M}_B^B(\mathcal{D}_{kU_i}) = \begin{bmatrix} k & 0 & ... & 0 \\ 0 & k & ... & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

Elementov, kolikor je razsežnost U_i, po diagonali bodo k, vsi ostali elementi po diagonali pa bodo enice. Vrstni red elementov k in 1 po diagonali je tudi tukaj lahko različen.

5. Matrika projekcije na k-razsežen podprostor U_i vzdolž nekega poljubnega komplementa $\overline{U_i}$ podana v bazi sestavljeni iz baze za U_i in baze za $\overline{U_i}$ je

$$\mathrm{M}_B^B(\mathcal{P}_{n-k}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

Prvih k elementov po diagonali bodo enice, naslednjih n-k pa ničle.

6. Matrika rotacije. Tukaj se bom omejili na delovanje operatorja na 3-razežen prostor.

$$\mathrm{M}_B^B(\mathcal{R}_{\phi U_k}) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrika operatorja bo v dveh stolpcih vsebovala kotne funkcije, na enem mestu po diagonali, pa bo imela zapisano enico. Vrstni red je lahko različen, pač odvisno od izbranega vrstenga reda baznih vektorjev.

2.6 Podobnost matrik operatorja

Imejmo poljuben operator $\mathcal{A} : U \to U$. Za matriki operatorja, podanega v dveh različnih bazah B in B' velja, da sta si *podobni*, torej obstaja obrnljiva matrika S, da velja :

$$\mathrm{M}_{B'}^{B'}(\mathcal{A}) = S^{-1}\mathrm{M}_B^B(\mathcal{A})S$$

Matrika S iz definicije podobnosti je natanko matrika $\mathrm{M}_B^{B'}(\mathrm{id})$ torej prehodna matrika iz baze B na bazo B'. To za nas pomeni, da ni pomembno, v kateri bazi operator reprezentiramo. Več o podobnosti matrik operatorja si lahko preberemo v zapiskih predmeta Osnove linearne algebre [4] na straneh od 111 do 121.

ZGLED

1. Matrika trivialnega operatorja je sama v svojem podobnostnem razredu. Tako bo matrika trivialnega operatorja enaka, ne glede na to, v kateri bazi bo podana.

3 Invariantni podprostori

Definicija. *Naj bo $\mathcal{A}$ operator nad vektorskim prostorom U in U_i netrivialen podprostor v U. Podprostor U_i je* invarianten *za operator A, če za vsak $u_i \in U_i$ velja,*

$$\mathcal{A}(u_i) \in U_i \quad torej, \quad \mathcal{A}(U_i) \leq U_i.$$

*Krajše rečemo, da je podprostor U_i $\mathcal{A}$-*invarianten.

Če podprostor U_i $\mathcal{A}$-invarianten, pomeni da se operator $\mathcal{A}$ na U_i vede kot endomorfizem, oziroma v primeru, ko velja celo $\mathcal{A}(U_i) = U_i$, kot avtomorfizem.

ZGLEDA

1. Netrivialno jedro nekega operatorja $\mathcal{A} : U \to U$, ki takšno jedro premore, je $\mathcal{A}$-invarianten podprostor. Namreč iz
$$\mathcal{A}(\text{Ker}(\mathcal{A})) = 0 \quad in \quad 0 \leq U$$
sledi
$$\mathcal{A}(\text{Ker}(\mathcal{A})) \leq U.$$
Operatorji, ki takšno jedro premorejo, so endomorfizmi, ki niso avtomorfizmi.

2. Celoten prostor U je invarianten za vsak svoj endomorfizem, saj za endomorfizme velja,
$$\mathcal{A}(U) \leq U.$$

3.1 Induciran operator

Naj bo U_i netrivialen $\mathcal{A}$-invarianten podprostor prostora U. Potem lahko definiramo operator, ki je definiran samo nad podprostorom U_i in nanj deluje enako kot operator $\mathcal{A}$.

Definicija. *Naj bo $\mathcal{A}_i$ operator, ki deluje nad vektorskim podprostorom U_i, tako da velja*

$$\mathcal{A}_i(u) = \mathcal{A}(u), \; za \; \forall \; u \in U_i.$$

Operator $\mathcal{A}_i$ je inducirani operator *operatorja $\mathcal{A}$ in je definiran nad $\mathcal{A}$-invariantnim podprostorom U_i.*

Operatorju $\mathcal{A}$, ki premore kakšen pravi $\mathcal{A}$-invarianten podprostor, rečemo da je *reducibilen*, sicer je *nereducibilen*. Obstoj induciranega operatorja $\mathcal{A}_i$ je ekvivalenten temu, da obstaja podprostor U_i, ki je $\mathcal{A}$-invarianten. Zato je vseeno, ali najdemo invarianten podprostor ali pa induciran operator.

1. Recimo, da operator projekcije nad neko ravnino, ki je dvorazsežna, to ravnino projecira na premico. Delovanje projekcije na premico lahko opišemo z induciranim operatorjem, ki deluje samo na to premico. Premica pri tej projekciji ostane "negibna", torej nanjo deluje operator identitete. Operator identitete nad enorazsežnim prostorom je torej induciran operator operatorja projekcije na ta enorazsežen podprostor.

2. Naj bo B_U neka baza prostora U, na katero deluje operator $\mathcal{A}$, ki prvih k baznih vektorjev slika same nase, torej velja $\mathcal{A}(b_i) = b_i;\;\; i = 1, 2, ..., k$, ostale pa v ničelni vektor. Nad podprostorom prostora U, katerega baza je prvih k baznih vektorjev iz B_U, lahko definiramo operator identitete, ki deluje na k razsežen podprostor. Nad podprostorom, katerega bazni vektorji so elementi iz B_U od k-tega elementa dalje, pa lahko definiramo trivialni operator, ki vse vektorje slika v ničelni vektor.

Naj bo U prostor in $\mathcal{A}$ operator, ki nanj deluje. Naj U premore toliko $\mathcal{A}$-invarnatnih podprostorov U_i, da je prema vsota med njimi celoten prostor U. Ker so U_i $\mathcal{A}$-invariantni, nad njimi definiramo inducirane operatorje $\mathcal{A}_i$.

Vsak $u \in U$, lahko enolično izrazimo z vektorji iz U_i;

$$u = u_1 + u_2 + ... + u_k \qquad (u_i \in U_i).$$

Potem je

$$\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2) + ... + \mathcal{A}(u_k) = \mathcal{A}_1(u_1) + \mathcal{A}_2(u_2) + ... + \mathcal{A}_k(u_k).$$

Obratno, naj bodo $u_i \in U_i$ poljubni vektorji iz $\mathcal{A}$-invarantnih podprostorov. Potem je

$$\mathcal{A}_1(u_1) + \mathcal{A}_2(u_2) + ... + \mathcal{A}_k(u_k) = \mathcal{A}(u_1) + \mathcal{A}(u_2) + ... + \mathcal{A}(u_k) = \mathcal{A}(u_1 + u_2 + ... + u_k)$$

.

Definicija. *Naj bo $\mathcal{A}$ operator nad U in naj bodo $U_1, U_2, ..., U_k \leq U$ vsi $\mathcal{A}$-invariantni. Če velja*

$$U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_k = U$$

potem je,

$$\mathcal{A}_1(U_1) \oplus \mathcal{A}_2(U_2) \oplus ... \oplus \mathcal{A}_k(U_k) = \mathcal{A}(U).$$

V tem primeru rečemo, da prostor U pri delovanju $\mathcal{A}$ razpade na premo vsoto samih $\mathcal{A}$-invariantnih podprostorov*.*

(Povzeto po [2], stran 215)

3.1.1 Matrika reducibilnega operatorja

Naj bo U_i n_i-razsežen podprostor n-razsežnega prostora U, ki je $\mathcal{A}$-invarianten, in naj bo $B_i = \{b_{i1}, b_{i2}, ...b_{in_i}\}$ baza za ta podprostor. V U poiščemo še $n - n_i$ linearno neodvisnih vektorjev in sestavimo bazo za U, recimo

$$B = \{b_{i1}, b_{i2}, ...b_{in_i}, b_{n_i+1}, b_{n_i+2}, ..., b_n\}.$$

Poglejmo delovanje $\mathcal{A}$ na tako izbrano bazo B. Ker U_i $\mathcal{A}$-invarianten, se vse slike $\mathcal{A}(u_{ij})$, $u_{ij} \in U_i$ izražajo z vektorji iz B_i. Sledi

$$\mathcal{A}(b_{i1}) = a_{11}b_{i1} + a_{21}b_{i2} + ... + a_{n_i1}b_{n_i} + 0b_{n_i+1} + 0b_{n_i+2} + ... + 0b_n$$
$$\mathcal{A}(b_{i2}) = a_{12}b_{i1} + a_{22}b_{i2} + ... + a_{n_i2}b_{n_i} + 0b_{n_i+1} + 0b_{n_i+2} + ... + 0b_n$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{A}(b_{in_i}) = a_{1n_i}b_{i1} + a_{2n_i}b_{i2} + ... + a_{n_in_i}b_{n_i} + 0b_{n_i+1} + 0b_{n_i+2} + ... + 0b_n$$
$$\mathcal{A}(b_{n_i+1}) = a_{1,n_i+1}b_{i1}+a_{2,n_i+1}b_{i2}+...+a_{n_i,n_i+1}b_{n_i}+a_{n_i+1,n_i+1}b_{n_i+1}+a_{n_i+2,n_i+1}b_{n_i+2}+...+a_{n,n_i+1}b_n$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{A}(b_n) = a_{1n}b_{i1} + a_{2n}b_{i2} + ... + a_{n_in}b_{n_i} + a_{n_i+1,n}b_{n_i+1} + a_{n_i+2,n}b_{n_i+2} + ... + a_{nn}b_n$$

Matrika operatorja podana v tako sestavljeni bazi bo torej oblike

$$\mathrm{M}_B^B(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n_i} & a_{1,n_i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n_i} & a_{2,n_i+1} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \vdots & & & \\ a_{n_i1} & a_{n_i2} & ... & a_{n_in_i} & a_{n_i,n_i+1} & \cdots & a_{n_in} \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{n_i+1,n_i+1} & \cdots & a_{n_i+1,n} \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{n,n_i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ta matrika vsebuje podmatriko dimenzije $n_i \times n_i$, s koeficjenti razvoja slik baznih vektorjev iz B_i, kar je ravno matrika induciranega operatorja A_i v bazi B_i. Naj bosta sedaj $U_1, U_2 \leq U$ dva $\mathcal{A}$-invariantna podprostora s trivialnim presekom. Potem nad U_1 deluje induciran operator $\mathcal{A}_1$, nad U_2 pa $\mathcal{A}_2$. Izberimo bazi $B_1 = \{b_{11}, b_{12}, ...b_{1n_1}\}$ za U_1 ter $B_2 = \{b_{2,n_1+1}, b_{2,n_i+2}, ...b_{2,n_i+n_j}\}$ za U_2. Seveda z vsoto $B_1 + B_2$ ter še $n - n_i - n_j$ linearno neodvisnih vektorjev spet sestavimo bazo B za U. Podobno kot prej, v bazi B zapišemo matriko operatorja $\mathcal{A}$.

$$\mathrm{M}_B^B(\mathcal{A}) = \left[\begin{array}{cc|ccc} \begin{bmatrix} \mathrm{M}_{B_1}^{B_1}(\mathcal{A}_1) \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathcal{A}(b_{n_i+n_j+1}) \downarrow & ... \downarrow & \mathcal{A}(b_n) \downarrow \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathrm{M}_{B_2}^{B_2}(\mathcal{A}_2) \end{bmatrix} & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & \end{array}\right]$$

Matrika operatorja se glede na baze invariantnih podprostorov poenostavlja. Če je operator $\mathcal{A}$ povsem reducibilen, lahko bazo $B = B_1 + B_2 + ... + B_k$ sestavimo iz baz B_i samih invariantnih podprostorov U_i. Matrika operatorja podana v bazi B je *bločno-diagonalna.*

$$\mathrm{M}_B^B(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{M}_{B_1}^{B_1}(\mathcal{A}_1) \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathrm{M}_{B_2}^{B_2}(\mathcal{A}_2) \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathrm{M}_{B_k}^{B_k}(\mathcal{A}_k) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(Povzeto po [2], 216-219)

Po diagonali so ravno matrike vseh induciranih operatorjev $\mathcal{A}_i$, podane v bazah B_i podprostorov U_i, nad katerimi so definirani. Vsaka je takšne razsežnosti, kakršne je razsežnosti podprostor U_i.

ZGLED:

1. Matrike, na straneh 10 in 11 so bločno-diagonalne, torej so pripadajoči operatorji, povsem reducibilni. Baza B je pri vsakem operatorju sestavljena iz baz samih, za pripadajoč operator, invariantnih podprostorov.

3.2 Lastna vrednost operatorja

Definicija. *Naj bo $\mathcal{A}$ operator, ki deluje na U. Če obstaja kakšna vrednost λ iz polja $\mathbb{F}$, nad katerim je U definiran, in kakšen neničelen vektor $u \in U$, da velja*

$$\mathcal{A}(u) = \lambda u,$$

rečemo, da je λ lastna vrednost *operatorja $\mathcal{A}$, vektorju u pa pravimo λ*-lastni vektor.

Lastna vrednost λ vektor u "raztegne" za faktor λ. Ker je lastnih vrednosti operatorja lahko več, bomo odslej lastne vrednosti in pripadajoče vektorje indeksirali. Če lastna vrednost λ_i in vsaj en pripadajoč vektor u_{ij} obstajata, je vektor u_{ij} baza enorazsežnega prostora $U^1_{\lambda_{ij}}$. Torej lahko definiramo induciran operator $\mathcal{A}_i$ nad prostorom $U^1_{\lambda_i j}$.

Obstoj λ_i-lastne vrednosti, zahteva obstoj vsaj enega λ_i-lastnega vektorja.

Trditev 3.1. *Naj bo λ_i lastna vrednost operatorja $\mathcal{A}_i$. Vsaj nad enim enorazsežnim podprostorom lahko definiramo inducirani operator $\mathcal{A}_i$.*

$$\mathcal{A}_i(u) = \mathcal{A}(u) = \lambda_i u, \ u \in U^1_{\lambda_i j}$$

Prostor, na katerega $\mathcal{A}$ deluje, ima vsaj en enorazsežen $\mathcal{A}$-invarianten podprostor.

ZGLED

1. Če $\mathcal{A}$ ni avtomorfizem, potem njegovo jedro ni trivialno. Tedaj zagotovo obstaja vsaj ena lastna vrednost operatorja in sicer $\lambda_i = 0$. Za $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ namreč velja

   $$\mathcal{A}(\mathrm{Ker}(\mathcal{A})) = 0(\mathrm{Ker}(\mathcal{A})).$$

   Če pa je $\mathcal{A}$ avtomorfizem, potem za vse njegove morebitne lastne vrednosti zagotovo velja $\lambda_i \neq 0$, saj zgornji pogoj ne velja za noben netrivialen vektor.

3.2.1 Računanje lastnih vrednosti

Iz definicije λ_i lastne vrednosti lahko pogoj $\mathcal{A}(u_i) = \lambda_i u_i$ zapišemo v obliki

$$\mathcal{A}(u_i) - \lambda_i \mathrm{id}(u_i) = (\mathcal{A} - \lambda_i \mathrm{id})(u_i) = 0$$

Tako dobimo nov, lastni vrednosti λ_i prirejeni operator $\mathcal{A} - \lambda_i \mathrm{id}$, ki natanko λ_i-lastne vektorje slika v ničelni vektor, torej so v jedru prirejenega operatorja. Prirejeni operator, ki deluje nad celotnim U, natanko definira vektorje u_i. Ker je parov λ_i- lastnih vrednosti in množic λ_i-lastnih vektorjev lahko več, λ_i nadomestimo z λ-neznanko in rešujemo enačbo dveh neznank, pri čemer je ena neznanka lastna vrednost, druga pa množica u_i vektorjev. Konkretno to naredimo prek reprezentacije v poljubno izbrani bazi B.

$$\mathrm{M}_B^B(\mathcal{A} - \lambda \mathrm{id}) u_B = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = 0$$

Iskanje teh parov je iskanje netrivialnih rešitev homogenega sistema enačb za neke λ vrednosti,

$$\begin{gathered} (a_{11} - \lambda) u_1 + a_{12} u_2 + ... + a_{1n} u_n = 0, \\ a_{21} u_1 + (a_{22} - \lambda) u_2 + ... + a_{2n} u_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1} u_1 + a_{n2} u_2 + ... + (a_{nn} - \lambda) u_n = 0. \end{gathered}$$

Netrivialne rešitve tega obstajajo natanko takrat, ko je determinanta homogenemu sistemu prirejene matrike enaka 0, torej ko velja,

$$\det(\mathrm{M}_B^B(\mathcal{A} - \lambda \mathrm{id})) = 0.$$

Determinanta je z matriko natančno določena. Če postopek računanja determinante izvedemo na matriki $\mathrm{M}_B^B(\mathcal{A} - \lambda \mathrm{id})$, dobimo nek polinom oblike $(-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \alpha_{n-2} \lambda^{n-2} + ... + \alpha_0$.[3] Vrednost tega polinoma pri λ je vrednost determinante matrike $\mathrm{M}_B^B(\mathcal{A} - \lambda \mathrm{id})$. Ta polinom je, tako kot determinanta, z vsako matriko natančno določen. Ker je tudi matrika prirejenega operatorja z vsakim operatorjem $\mathcal{A}$ do podobnosti natančno določena, je z operatorjem $\mathcal{A}$ tudi polinom, ki ga dobimo po opisanem postopku, natančno določen. Temu polinomu, kot bomo videli kasneje, upravičeno rečemo *karakteristični polinom* operatorja in ga označimo z $\Delta_{\mathcal{A}}$.

Trditev 3.2. *Karakteristični polinom $\Delta_{\mathcal{A}}$ je z operatorjem $\mathcal{A}$ natančno določen in je neodvisen od baze B v kateri je operator reprezentiran.*

Trditev 3.3. *Ničle karakterističnega polinoma $\Delta_{\mathcal{A}}$ operatorja $\mathcal{A}$, so natanko λ_i lastne vrednosti operatorja.*

Več o karakterističnem polinomu in zgornjih trditvah sledi kasneje.

[3] α_i koeficjenti polinoma so elementi polja F.

ZGLED

- Naj bo spodnja matrika matrika operatorja $\mathcal{A}$, podanega v neki poljubni bazi:

$$\mathrm{M}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrika prirejenega operatorja je:

$$\mathrm{M}(\mathcal{A} - \lambda \mathrm{id}) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

Karakteristični polinom:

$$\Delta_{\mathcal{A}} = (2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

Ničli karakterističnega polinoma oziroma lastni vrednosti operatorja $\mathcal{A}$ sta $\lambda_1 = 1$ ter $\lambda_1 = 2$.

Za lastne vrednosti λ_i bodo obstajale netrivialne rešitve matrične enačbe na strani 16, ki so natanko vektorji u_i.

3.3 Lastni podprostori

Ker za poljubna λ_i-lastna vektorja u_{i1}, u_{i2} velja

$$\mathcal{A}(u_{i1}) + \mathcal{A}(u_{i2}) = \lambda_i(u_{i1}) + \lambda_i(u_{i2}) = \lambda_i(u_{i1} + u_{i2})$$

in

$$\mathcal{A}(\alpha u_i) = \alpha \mathcal{A}(u_i) = \alpha \lambda_i u_i = \lambda_i \alpha u_i.$$

Zato je množica vseh λ_i-lastnih vektorjev vektorski prostor.

Definicija. *Naj bo U_{λ_i} množica samih λ_i-lastnih vektorjev. Potem je U_{λ_i} podprostor in ga imenujemo* λ_i-lastni podprostor.

Presek λ_i, λ_j-lastnih podprostorov je trivialen, saj noben lastni vektor ne more biti lastni vektor več kot eni lastni vrednosti.

Nad vsakim lastnim podprostorom U_{λ_i} lahko definiramo induciran operator $\mathcal{A}_i$.

Trditev 3.4. *Lastni podprostori prostora, na katerega deluje operator $\mathcal{A}$, so $\mathcal{A}$-invariantni.*

Bazo λ_i- lastnega podprostora tvorijo linearno neodvisni λ_i-lastni vektorji. Ker operator $\mathcal{A}_{\lambda_i}$ deluje tako na posamezen lastni vektor, kakor na celoten lastni prostor, lahko definiramo induciran operator $\mathcal{A}_{\lambda_{ij}}$ nad enorazsežnim prostorom $U^1_{\lambda_{ij}}$, ki ga bazni λ_i-lastni vektor u_{ij} tvori. Teh lahko definiramo toliko, kolikor je razsežnsot pripadajočega lastnega podprostora. Tako lastni podprostor razpade na premo vsoto samih enorazsežnih $\mathcal{A}$-invariantnih podprostorov.

Trditev 3.5. *Naj bo operator $\mathcal{A}$ tak, da prostor U, na katerega deluje, razpade na premo vsoto samih lastnih podprostorov. Potem prostor U razpade na premo vsoto samih enorazsežnih $\mathcal{A}$-invariantnih podprostorov.*

ZGLEDI:

Iz matrik operatorjev na straneh 10 in 11 lahko preberemo lastne vrednosti in lastne podprostore.

1. Lastna vrednost trivialnega operatorja je 0. Cel prostor, na katerega trivialen operator deluje, je edini lastni podprostor.

2. Lastna vrednost identičnega operatorja je 1. Cel prostor, na katerega identičen operator deluje, je edini lastni podprostor.

3. Lastni vrednosti operatorja zrcaljenja sta $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -1$. Prostor, preko katerega zrcali, je λ_1-lastni podprostor, λ_2-lastni podprostor pa je ortogonalni komplement, ki ga prezrcali.

4. Lastni vrednosti operatorja delnega raztega sta $\lambda_1 = k$ in $\lambda_2 = 1$. Podprostor, ki se "raztegne" za k, je λ_1-lastni podprostor, λ_2-lastni podprostor pa je ortogonalni komplement $U_{i\perp}$.

5. Lastni vrednosti operatorja projekcije sta $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 0$. Prostor, na katerega projicira, je λ_1-lastni podprostor, λ_2-lastni podprostor pa je jedro projekcije.

6. Lastna vrednosti operatorja rotacije je $\lambda_1 = 1$. Os rotacije je λ_1-lastni podprostor.

Vsi prostori, na katere deluje prvih 5. operatorjev, razpade na premo vsoto samih enorazsežnih, za dani opertor invarantnih podporstorov.

3.3.1 Računanje lastnih podprostorov

Naj bodo $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ različne lastne vrednosti operatorja $\mathcal{A}$ nad prostorom U. Za vsako lastno vrednost λ_i posebej priredimo operator $\mathcal{A} - \lambda_i \mathrm{id}$, ki vektorje U_i slika v ničelni vektor. Tako že v matriki prirejenega operatorja lahko preverimo, koliko njenih stolpcev je linearno odvisnih. Število takih je namreč razsežnost jedra tega operatorja, torej razsežnost λ_i-lastnega podprostora. Nastavimo enačbo $\mathrm{M}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathrm{id}) \cdot u = 0$, pa dobimo

$$\begin{bmatrix} (a_{11} - \lambda_i) + a_{12} + ... + a_{1n} \\ a_{21} + (a_{22} - \lambda_i) + ... + a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + ... + (a_{nn} - \lambda_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} - \lambda_i)u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n \\ a_{21}u_1 + (a_{22} - \lambda_i)u_2 + ... + a_{2n}u_n \\ \vdots \\ a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + ... + (a_{nn} - \lambda_i)u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

iz česar dobimo odnos med vrednostmi $u_i, u_2, ..., u_n$, ki so koordinate poljubnega vektorja. Vsak vektor, katerega koordinate bodo v dobljenem odnosu, bo λ_i-lastni vektor.

ZGLED

- Nadaljujmo, kjer smo ostali v zgledu na strani 17.

  Za lastno vrednost $\lambda_1 = 1$ priredimo operator $\mathcal{A}$. Matrika prirejenega operatorja $\mathcal{A} - \lambda_1 \mathrm{id}$ je

$$\mathrm{M}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathrm{id}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Takoj lahko preberemo, da je tretji stolpec vsota med prvim in drugim stolpcem, torej je linearno odvisen. Ničelnost prirejenega operatorja je 1, torej bo λ_1-lastni podprostor enorazsežen. Z Gaussovo eliminacijo [4] matriko prirejenega operatorja preoblikujemo do zgornje stopničaste in preberemo rešitve matrične enačbe:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz $u_1 = u_2, u_2 = -u_3$ dobimo, da so vsi vektorji oblike $\begin{bmatrix} u_1 & u_1 & -u_1 \end{bmatrix}^t$ v jedru prirejenega operatorja, torej λ_1-lastni vektorji.

Podobno postopamo za $\lambda_2 = 2$. Tu je

$$\mathrm{M}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathrm{id}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tudi za to lastno vrednost lahko kar razberemo, da je ničelnost operatorja $\mathcal{A} - \lambda_2\mathrm{id}$ enaka 2. Vsi vektorji oblike $\begin{bmatrix} u_1 & 0 & u_2 \end{bmatrix}^t$ so λ_2-lastni vektorji.

Bazo za posamezen λ_i-lasten podprostor sestavimo iz toliko linearno neodvisnih vektorjev, kolikor je razsežnost jedra prirejenega operatorja $\mathcal{A} - \lambda_i\mathrm{id}$, katerih koordinate so v takšnem odnosu, kakršnem morajo biti, da je vektor λ_i-lastni.

- Nadaljujemo:

  Razsežnost λ_1-lastnega podprostora je 1. Njegova baza je nek λ_1-lastni vektor, recimo $B_{\lambda_1} = \{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^t\}$. Premica skozi izhodišče, ki je predstavnica vseh vektorjev oblike $\begin{bmatrix} u_1 & u_1 & -u_1 \end{bmatrix}^t$ je λ_1-lastni podprostor.

  Razsežnost λ_2-lastnega podprostora je 2. Poiskati moramo dva linearno neodvisna λ_2-lastna vektorja, ki bosta predstavljala bazo λ_2-lastnega podprostora. Recimo $B_{\lambda_2} = \{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t\}$. Tu je λ_2-lastni podprostor je ravnina, razpeta na ta dva vektorja.

  V tem primeru je vsota razsežnosti obeh λ_i lastnih podprostorov enaka razsežnosti prostora, nad katerim deluje operator. Operator $\mathcal{A}$ je v tem primeru povsem reducibilen. Njegova matrika, podana v primerno sestavljeni bazi $B = B_{\lambda_1} \oplus B_{\lambda_2}$, bo vsebovala podmatrike induciranih operatorjev A_1,A_2 in jo lahko kar zapišemo.

$$\mathrm{M}_B^B(A) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

[4] Postopek in lastnosti Gaussove eliminacije si lahko pogledamo na [6].

3.4 Geometrijska kratnost lastne vrednosti

Definicija. *Naj bo* λ_i *lastna vrednost nekega operatorja. Razsežnosti* U_{λ_i}*-lastnega podprostora rečemo* geomertijska kratnost *lastne vrednosti* λ_i *in jo označimo z* $g(\lambda_i)$*. Definirana je torej kot:*

$$g(\lambda_i) = \dim(U_{\lambda_i})$$

Trditev 3.5 pove, da prostor razpade na premo vsoto samih enorazsežnih $\mathcal{A}$-invariantnih podprostorov natanko tedaj, ko je vsota vseh $g(\lambda_i)$ enaka razsežnosti prostora, na katerega operator deluje.

ZGLEDI:
Geometrijske kratnosti lastnih vrednosti operatorjev na strani 10.

1. Trivialni operator: $g(\lambda)$ je razsežnost celotnega prostora, na katerega operator deluje.
2. Identični operator: $g(\lambda)$ je razsežnost celotnega prostora, na katerega operator deluje.
3. Operator zrcaljenja: $g(\lambda_1) = k, g(\lambda_2) = n - k$.
4. Operator delnega raztega: $g(\lambda_1) = \dim(U_i), g(\lambda_2) = \dim(U_{i\perp})$.
5. Operator projekcije: $g(\lambda_1) = k, g(\lambda_2) = n - k$.
6. Operator rotacije: $g(\lambda_1) = 1$.

Vsota geometrijskih kratnosti lastnih vrednposti prvih petih operatorjev je res enaka razsežnosti prostora, nad katerim operator deluje. Razen pri rotaciji, prostori razpadejo na same enorazsežne, za dani operator, invariantne podprostore.

3.5 Karakteristični polinom operatorja

Najprej obrazložimo trditve o karakterističnem polinomu od prej. Trditev 3.2 je posledica podobnosti matrik operatorja, podanega v različnih bazah, namreč karakteristični polinomi podobnih matrik so enaki. Trditev 3.3 pa je posledica zahteve, da je vrednost determinante matrike prirejenega operatorja enaka 0. Ker se λ pri računanju determinante zmnoži po diagonali, si bo ta v $n \times n$ matriki prirejenega operatorja, nabrala stopnjo n.

Trditev 3.6. *Stopnja karakterističnega polinoma operatorja je enaka razsežnosti prostora, nad katerim operator deluje.*

Po Osnovnem izreku algebre [5] se vse polinome nad $\mathbb{R}$ da razstaviti na produkt samih nerazcepnih polinomov stopnje ena in dva. Dobimo naslednje možnosti razcepa karakterističnih polinomov.

3.5.1 Možnosti razcepa karakterističnih polinomov nad $\mathbb{R}$

1. Karakteristični polinomi sode stopnje se lahko razcepi na same nerazcepne polinome
   1.1. stopnje 2: Polinom nima nobene realne ničle, torej nima nobene realne lastne vrednosti.
   1.2. stopnje 1: Polinom ima same realne ničle, torej ima lastne vrednosti.

1.3. stopnje 1 in stopnje 2: Polinom ima realne ničle, vendar ne vseh. Ima realne lastne vrednosti.

2. Karakteristični polinomi lihe stopnje se lahko razcepi na same nerazcepne polinome

   2.1. stopnje 1: Polinom ima same realne ničle, torej ima lastne vrednosti.

   2.2. stopnje 1 in stopnje 2: Polinom ima realne ničle, vendar ne vseh. Ima realne lastne vrednosti.

V tej nalogi nas posebej zanimajo operatorji nad realnimi prostori, ki imajo same realne lastne vrednosti. Njihovi karakteristični polinomi se razcepijo kot v točkah 1.2 ali 2.1.

Seveda vse enake člene razcepa lahko zapišemo kot potenco enega in iz te oblike preberemo ničle ter njihove stopnje.

Poglejmo karakteristične polinome induciranih operatorjev $\mathcal{A}_{\lambda_i}$ nad lastnimi podprostori U_{λ_i}. Vemo, da je stopnja Δ_{λ_i} enaka razsežnosti prostora, nad katerim operator deluje, torej $g(\lambda_i)$. Edina ničla, ki jo Δ_{λ_i} ima, je vrednost λ_i, torej bodo karakteristični polinomi induciranih operatorjev nad lastnimi podprostori:

$$\Delta_{\lambda_i} = (\lambda - \lambda_i)^{g(\lambda_i)}$$

ZLGED:

1. Karakteristične polinome prvih petih operatorjev na strani 10 lahko zapišemo na ta način. Operator rotacije pa nad $\mathbb{R}$ nima dovolj lastnih vrednosti in lastnih podprostorov, zato ga ne moremo generirati na ta način.

Seveda razsežnost lastnega podprostora nikoli ne more preseči razsežnosti celotnega prostora, saj smo v poglavju o bazah spoznali, da lahko v prostoru poiščemo največ toliko linearno neodvisnih vektorjev, kolikor je razsežnost prostora. Tako je lastni podprostor lahko del prostora ali pa je kar cel prostor lasten. Označimo z $U_{K(\lambda_0)}$, največji $\mathcal{A}$-invarianten podprostor, kateremu edini lastni podprostor je λ_0-lastni podprostor. Naj bo $\mathcal{A}_{K(\lambda_0)}$ induciran operator nad $U_{K(\lambda_0)}$. Kot smo razmišljali, je lahko $U_{\lambda_0} = U_{K(\lambda_0)}$, tedaj je cel prostor $U_{K(\lambda_0)}$ lastni, lahko pa je $U_{\lambda_0} < U_{K(\lambda_0)}$, torej njegov pravi podprostor. Pa naj bo $\mathcal{A}_{K(\lambda_0)}$ tak, da velja $U_{\lambda_0} < U_{K(\lambda_0)}$. Poglejmo karakteristični polinom operatorja $\mathcal{A}_{K(\lambda_0)}$. Ker je λ_0 edina lastna vrednost operatorja in ker smo predpostavili, da ima karakteristični polinom operatorja $\mathcal{A}$ same realne ničle, bo karakteristični polinom za $\mathcal{A}_{K(\lambda_0)}$ zagotovo neka potenca $(\lambda - \lambda_0)$. Ker je razsežnost lastnega podprostora U_{λ_0} manjša od razsežnosti prostora $U_{K(\lambda_0)}$, bo veljalo, da je stopnja Δ_{λ_0} manjša od stopnje $\Delta_{\mathcal{A}_{K(\lambda_0)}}$. Prostor $U_{K(\lambda_0)}$ je največji, torej je tudi njegova razsežnost natanko določena.

3.6 Algebrska kratnost lastne vrednosti

Definicija. *Naj bo $\Delta_{\mathcal{A}}$ karakteristični polinom operatorja. Stopnji ničle karakterističnega polinoma pravimo* algebrska kratnost *pripadajoče lastne vrednosti in jo označimo z*

$$a(\lambda_i).$$

Algebrska kratnost λ_i lastne vrednosti je enaka razsežnosti največjega prostora, kateremu λ_i-lastni podprostor je edini lastni podprostor, torej $\dim(U_{K(\lambda_i)}) = a(\lambda_i)$. Ker je vsota stopenj ničel polinoma enaka stopnji polinoma velja, da je vsota algebrskih kratnosti vseh λ_i-lastnih vrednosti nekega operatorja, enaka stopnji karakterističnega polinoma operatorja. Algebrska kratnost λ_i-lastne vrednosti pa je natanko razsežnost prostora $U_{K(\lambda_i)}$, torej bo vsota razsežnosti vseh $U_{K(\lambda_i)}$ enaka razsežnosti prostora, nad katerim operator deluje. Prostor U je njihova prema vsota.

Podprostor U_{λ_i} definira prirejeni operator $\mathcal{A} - \lambda_i\mathrm{id}$, podprostore $U_{K(\lambda_i)}$ pa lahko dobimo kar z njegovimi potencami.

3.7 Korenski podprostori

Definicija. *Naj bo λ_i lastna vrednost operatorja $\mathcal{A}$. Podprostoru, ki ga prirejeni operator $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathrm{id})^{a(\lambda_i)}$ slika v ničelni vektor, pravimo* λ_i-korenski podprostor *in je definiran kot*

$$U_{K(\lambda_i)} = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i\mathrm{id})^{a(\lambda_i)}.$$

Trditev 3.7. *Korenski podprostori prostora, na katerega deluje operator $\mathcal{A}$, so $\mathcal{A}$-invariantni.*

Dokaz. Produkt operatorja komutira s skalarnim operatorjem. Operator komutira tudi sam s sabo. Tako je $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathrm{id})\mathcal{A} = (\mathcal{A}^2 - \lambda_i\mathrm{id}\mathcal{A}) = (\mathcal{A}^2 - \mathcal{A}\lambda_i\mathrm{id}) = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda_i\mathrm{id})$. Po indukciji to velja za vsako potenco prirejenega operatorja, torej velja

$$(\mathcal{A} - \lambda_i\mathrm{id})^{a(\lambda_i)}\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda_i\mathrm{id})^{a(\lambda_i)}.$$

Iz tega sledi, da je $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i\mathrm{id})^{a(\lambda_i)}$ invarianten za delovanje $\mathcal{A}$. □

(Povzeto po [3] stran 91.)

Tako smo definirali $a(\lambda_i)$ razsežen $\mathcal{A}$-invarianten podprostor. Algebrska in geometrijska kratnost λ_i lastne vrednosti sta lahko enaki, ali pa je algebrska kratnost večja od geometrijske. Kakor koli že, v vsakem primeru znamo definirati dovolj razsežene $\mathcal{A}$-invariantne podprostore.

Navedimo še trditev, katere dokaz in potrebno dodatno teorijo lahko preberemo v [3] na straneh 86-90.

Trditev 3.8. *Presek korenskih podprostorov različnih lastnih vrednosti operatorja je trivialen.*

Po trditivi 2.1 sledi

Trditev 3.9. *Naj bo $\mathcal{A}$ operator katerega karakteristični polinom ima vse ničle v $\mathbb{F}$. Naj ta deluje na prostor U in naj bodo $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ njegove lastne vrednosti. Prostor U pri delovanju $\mathcal{A}$ razpade na premo vsoto λ_i-korenskih podprostorov.*

$$U = U_{K(\lambda_1)} \oplus U_{K(\lambda_2)} \oplus ... \oplus U_{K(\lambda_k)}.$$

Če je geometrijska kratnost lastne vrednosti enaka algebrski, sta λ_i-korenski in λ_i-lastni podprostor enaka. Nad takšnim podprostorom deluje operator, ki je povsem reducibilen in inducira operatorje nad enorazsežnimi $\mathcal{A}$- invariantnimi podprostori. Če pa $a(\lambda_i) > g(\lambda_i)$, potem operator, ki deluje na ta korenski podprostor ni povsem reducibilen na inducirane operatorje nad enorazsežnimi podprostori in njegova matrika, ne bo diagonalna.

Trditev 3.10. *Naj bo operator $\mathcal{A}$ tak, da ima njegov karakteristični polinom vse ničle v $\mathbb{F}$. Vsakemu prostoru U, na katerega deluje operator $\mathcal{A}$, lahko z obravnavo lastnih in korenskih podprostorov poiščemo toliko najmanjših $\mathcal{A}$-invariantnih podprostorov, da bo prema vsota med njimi celoten prostor U.*

ZGLED:

1. Algebrske in geometrijske kratnosti lastnih vrednosti prvih petih operatorjev na strani 10 so enake. Za vsak operator velja, da so vsi korenski podprostori prostora, na katerega ta operator deluje, enaki lastnim.

3.7.1 Računanje korenskih podprostorov

Naj bo λ_i lastna vrednost operatorja. Spodnja matrika je matrika λ_i prirejenega operatorja,

$$\mathrm{M}(\mathcal{A} - \lambda \mathrm{id})(u) = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_i & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda_i \end{bmatrix}$$

Matriko λ_i prirejenega operatorja zmnožimo samo s sabo in preverimo, kateri vektorji so v jedru te potence prirejenega operatorja. Matriko moramo zmnožiti samo s sabo največ $a(\lambda_i)$-krat, da dobimo vse vektorje λ_i-korenskega podprostora. Lahko pa se zgodi, da je celoten λ_i-korenski podprostor v jedru kakšne manjše potence prirejenega operatorja. Kaj stoji za tem, ni predmet te naloge, povem pa le, da je mogoče.

ZGLED:

- Naj bo spodnja matrika, matrika operatorja $\mathcal{A}$, podanega v poljubni bazi.

$$\mathrm{M}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Karakteristični polinom je

$$\Delta_{\mathcal{A}} = -(\lambda - 1)^3.$$

Lastna vrednost in algebrska kratnost sta

$$\lambda = 1,$$

$$a(\lambda) = 3.$$

Matrika prirejenega operatorja je

$$\mathrm{M}(\mathcal{A} - \mathrm{id}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Geometrijska kratnost je v tem primeru

$$g(\lambda) = 2.$$

Ker $g(\lambda) < a(\lambda)$, je korenski podprostor večji od lastnega.

$$\mathrm{M}(\mathcal{A} - \mathrm{id})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V jedru druge potence prirejenega operatorja so že trije linearno neodvisni vektorji. V tem primeru že druga potenca operatorja definira celoten korenski podprostor. Celoten prostor, na katerega operator $\mathcal{A}$ deluje, je λ-korenski podprostor. Prostora ni moč zapisati kot premo vsoto manjših $\mathcal{A}$-invariantnih podprostorov.

4 Zaključek

Invariantne podprostore je za operatorje, ki imajo vsaj kakšno ničlo karakterističnega polinoma v polju $\mathbb{F}$, vedno moč poiskati. Z vsako lastno vrednostjo operatorja, v prostoru, nad katerim operator deluje, lahko poiščemo vsaj en enorazsežen $\mathcal{A}$-invarianten podprostor. V resnici lahko za vsako lastno vrednost poiščemo toliko enorazsežnih $\mathcal{A}$-invariantnih podprostorov, kolikor je razsežnost pripadajočega lastnega podprostora. Tako bo operator porodil razpad prostora na same enorazsežne $\mathcal{A}$-invariantne podprostore natanko tedaj, ko bo vsota razsežnosti lastnih podprostorov enaka razsežnosti prostora, na katerega operator deluje. Za takšne operatorje velja, da so vsi lastni podprostori kar enaki pripadajočim korenskim podprostorom. Popoln razpad prostora se lahko zgodi le, če ima karakteristični polinom operatorja vse ničle v polju $\mathbb{F}$.

Kadar se neki korenski podprostor od lastnega razlikuje, bo razpad prostora na tem delu ustrezal korenskemu podprostoru, v katerem ne moremo poiskati razpada na manjše $\mathcal{A}$-invariantne podprostore. Ker je vsota razsežnosti korenskih podprostorov vedno enaka razsežnosti celotnega prostora, lahko za operatorje, katerih karakteristični polinomi imajo vse ničle v $\mathbb{F}$, vedno poiščemo razpad prostora na kar se da veliko $\mathcal{A}$-invariantnih podprostorov.

Literatura

[1] Grasselli, J. (1975). *Linearna algebra*. Ljubljana: DZS.

[2] Kurepa, S. (1967) *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*. Učbenik. Zagreb: Tehnička knjiga.

[3] Malnič, A. (2016). *Algebrske strukture (Zapiski iz predavanj)*. Ljubljana: Pedagoška fakulteta.

[4] Malnič, A. (2016). *Osnove linearne algebre (Zapiski iz predavanj)*. Ljubljana: Pedagoška fakulteta.

[5] Wikipedia (2017) *Fundimental Theorem of Algebra*
https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_algebra(9.8.2017)

[6] Wikipedia (2017) *Gausssian elimination*
https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_elimination(3.8.2017)