NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 94 marzo de 2017, páginas 7-21

El teorema de PICK como pretexto para la enseñanza de la Geometría con Estudiantes para Maestro

Clara Jiménez-Gestal (Universidad de La Rioja. España)
Lorenzo J. Blanco Nieto (Universidad de Extremadura. España)

Fecha de recepción: 19 de julio de 2015
Fecha de aceptación: 1 de junio de 2016

Resumen

Presentamos un trabajo de innovación docente desarrollado en un aula de formación inicial de Maestros. Hemos detallado las actividades propuestas que, en algunos casos, acompañamos con diálogos mantenidos en el aula.
El Teorema de Pick fue el pretexto y las tramas cuadradas el recurso para experimentar una secuencia metodológica que podría ser desarrollada de forma similar en el aula de Educación Primaria. Asumimos, para este caso, la recomendación que nos sugiere un cierto paralelismo entre la enseñanza recibida por los estudiantes para profesores y la que posteriormente deberían desarrollar en las aulas de primaria, al igual que la resolución de problemas como contexto para el aprendizaje.

Palabras clave Geometría, Formación de Profesores, Metodología, Teorema de Pick.

Abstract

We present a work developed innovative teaching in a classroom for initial training of teachers. We have detailed the proposed activities, in some cases accompanied with dialogues in the classroom.
Pick's Theorem was the pretext and square frames the resource to experience a methodological sequence that could be developed similarly in the classroom of Primary School. We assume, for this case, the recommendation suggests a certain parallelism between the education received by students teachers and should develop later in the Elementary classrooms. We also assume problem solving as a context for learning.

Keywords Geometry, Teacher Training, Methodology, Pick Theorem

1. Introducción y objetivos

La *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación* señala, en el Artículo 17, apartado g, como objetivo de la Educación Primaria: "Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana". Este mismo párrafo es recogido de manera literal en Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

En ambas disposiciones, se indica que el trabajo en el área en la Educación Primaria estará basado en la experiencia de los aprendices y que la resolución de problemas tiene que ser el eje sobre el que construir el conocimiento matemático. Así, analizar, obtener información, buscar y encontrar modelos, patrones y regularidades y leyes matemáticas, identificar relaciones y estructuras, son algunos de los aspectos que se citan expresamente en la introducción del currículo actual de primaria en la introducción al apartado de Matemáticas.

Asimismo, la *Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de Universidades* establece en su Artículo primero como una de las funciones de la Universidad al servicio de la sociedad: "La preparación para el ejercicio de actividades profesionales que exijan la aplicación de conocimientos y métodos científicos y para la creación artística". Es por ello que entre las competencias específicas relacionadas con la Educación Matemática que se pretende que alcancen los estudiantes del Grado de Educación Primaria figura: "Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes".

Nuestra propuesta profesional parte de asumir estas dos referencias básicas en la formación inicial de los profesores de Primaria. Pero, igualmente, consideramos que debe existir un cierto paralelismo entre la enseñanza desarrollada en la formación inicial, en relación a la metodología, recursos utilizados,... y la que los futuros maestros deberían desarrollar en las aulas de Primaria. Por ello, hemos desarrollado una propuesta de trabajo que se ajusta a las orientaciones curriculares de Primaria, pero que intenta mostrar un modelo alternativo para trabajar la enseñanza de la geometría, o al menos algunos aspectos de la misma, tanto en la formación inicial de Maestros como en el nivel de Primaria, por supuesto teniendo en cuenta en cada caso el nivel educativo (Blanco y Márquez, 1987).

Como el objetivo es mostrar una forma alternativa de trabajar la Geometría, hemos escogido el teorema de Pick[1] (Bolt, 1987; Blanco y Márquez, 1987) que relaciona el cálculo del área de figuras simples –aquellas cuyos lados no se cruzan entre sí- construidas en un Geoplano o en una Trama Cuadrada (Smith, 1990; Arrieta, Álvarez, y González, 1997), con el número de clavos o puntos que soportan los lados de la figura y el de clavos o puntos que quedan en su interior. Si bien no es un contenido que aparezca específicamente en el currículo de Primaria, es un resultado que permite un acercamiento al enunciado del teorema mediante sucesivas aproximaciones en las que los estudiantes pueden hacer conjeturas.

En Blanco y Márquez, (1987) se describe el trabajo realizado con alumnos de 8.º de E.G.B. en el Colegio de Prácticas masculino en Badajoz, en el que se utilizó el Teorema de Pick como un recurso para mostrar que era posible trabajar la Geometría de manera diferente a la habitual e inducir, a los alumnos, a la investigación en matemáticas.

A pesar del tiempo transcurrido observamos que los estudiantes para Maestro (EMs) presentan dificultades similares a las que se indicaban en el artículo citado. Por ello, nos ha parecido interesante retomar esta experiencia y desarrollarla con los EMs que cursan 3º del Grado en Educación Primaria con tres objetivos generales:

- Iniciar a los EMs en la investigación matemática en el aula.
- Mostrar de manera aplicada el significado de construcción de conocimiento matemático.
- Revelar la utilidad de los recursos didácticos en la enseñanza de la Geometría.

De manera más específica, nos propusimos:

- Trabajar el Geoplano y las Tramas Cuadradas como recurso para la enseñanza/aprendizaje de las Geometría en Primaria.
- Desarrollar con los EMs una experiencia que les permita construir en clase el Teorema de Pick

[1] Georg Alexander Pick nació en Viena en 1859 y murió en 1943 en un campo de concentración nazi. Publicó su resultado en un artículo titulado Geometrisches zur Zahlenlehre, en la revista *Sitzungber. Lotos, Naturwissen Zeitschrift 19* (1899), páginas 311-319, Praga. (Elduque, 2007, p. 1).

2. Familiarización con el uso de la Trama Cuadrada

Iniciamos la experiencia con la presentación de la trama cuadrada y una primera fase de manipulación libre del recurso con el objeto de que los estudiantes se familiaricen con sus propiedades y uso. A este respecto, recordamos la aportación de Z. P. Dienes (Zoltán Pal Dienes) en relación a los Principios Dinámicos y de Constructividad y a la necesidad de los juegos preliminares o de manipulación libre previos a las actividades de construcción de los conceptos (Dienes, 1970). Para esta experiencia, hemos elegido una trama de cuatro por cuatro (Figura 1) puesto que nos permite dibujar diferentes formas geométricas que serán suficientes para desarrollar nuestro trabajo y alcanzar los objetivos propuestos.

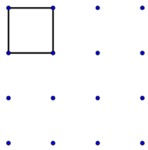

Figura 1. *Trama Cuadrada de cuatro por cuatro*

Por ello, tras la presentación del material y de las normas generales para su uso, indicamos a los estudiantes que dibujen diferentes figuras y realicen actividades en la trama dada. Mostramos algunos errores usuales al inicio del uso de la Trama que no pueden aparecer en el uso del Geoplano debido a su funcionamiento y que nos permiten diferenciar entre ambos materiales. La elección de la Trama en lugar del Geoplano para la realización de la actividad es puramente logística. Si bien en la mayoría de los colegios los geoplanos forman parte de los recursos de aula, no es probable que se disponga de ellos en número suficiente para trabajar con toda la clase a la vez, mientras que las tramas se pueden incluso improvisar utilizando el papel cuadriculado que usan habitualmente los estudiantes. En el trabajo con los EMs es necesario recordar las diferencias en el uso de ambos materiales que exigen niveles de abstracción diferentes.

Para iniciar la actividad de una manera sencilla, que permita el uso de la trama, formulamos la siguiente actividad:

Actividad 1. Dibujad, en la trama de cuatro por cuatro, todos los cuadrados que encontréis.

Los alumnos realizan la activad sin dificultad y al poner en común las figuras dibujadas nos encontramos con los cuadrados siguientes:

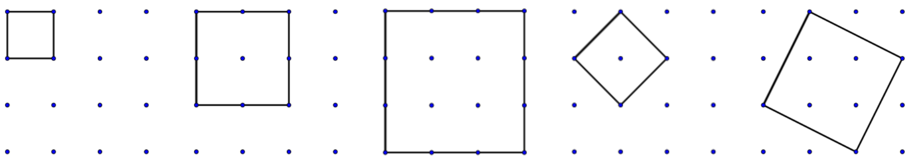

Figura 2. Solución de la actividad 1

De manera inmediata, aparece la confusión sobre 'rombo' y 'cuadrado' a partir de la cuarta figura. Ello nos obliga a recordar la definición de ambos conceptos, mostrando además algunas imágenes de materiales escolares actuales para aclarar que el cuadrado es un caso particular del rombo.

Rombo: *Cuadrilátero con cuatro lados iguales.*
Cuadrado: Cuadrilátero con cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales.

En Blanco, Cárdenas, Gómez y Caballero (2015), se muestra un trabajo con estudiantes para Maestro acerca de la clasificación de los cuadriláteros y simetría axial en el que se desarrolla un proceso constructivo que pone, así mismo, en evidencia las dificultades de los EMs en el aprendizaje de la Geometría, algunas de las cuales son profundizadas en Blanco y Contreras (2002).

De igual manera, aparece entre los estudiantes para Maestros el debate sobre la igualdad o no de los tres primeros cuadrados. Ello nos permite, recordar y trabajar los conceptos de igualdad, equivalencia y semejanza de polígonos.

Actividad 2. Dibujad todos los rectángulos que encontréis.

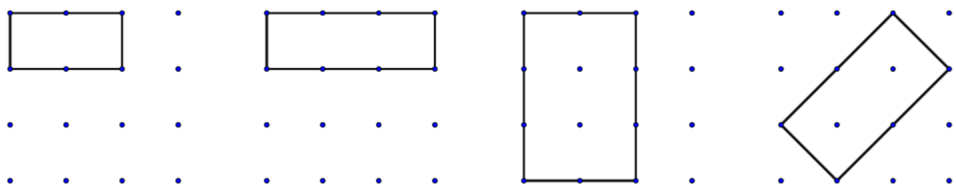

Figura 3. Solución dada por los EMs a la actividad 2

Al resolver esta actividad comprobamos la dificultad que tienen los estudiantes para asimilar el cuadrado como caso particular de rectángulo, en una situación similar a la de la relación entre rombo y cuadrado. Nuevamente, tenemos que retomar las definiciones de cuadrado y rectángulo y analizar sus variables y establecer una relación de inclusión.

Rectángulo: *Cuadrilátero con cuatro ángulos rectos.*

Cuadrado: *Cuadrilátero con cuatro lados iguales y cuatro ángulos iguales (rectos).*

En este momento ampliamos la actividad para dibujar todos los cuadriláteros, lo que nos permite repasar diferentes conceptos que implican su estudio (Blanco, Cárdenas, Gómez y Caballero, 2015).

Actividad 3. Dibujad todos los cuadriláteros que encontréis, sin repetir ninguno.

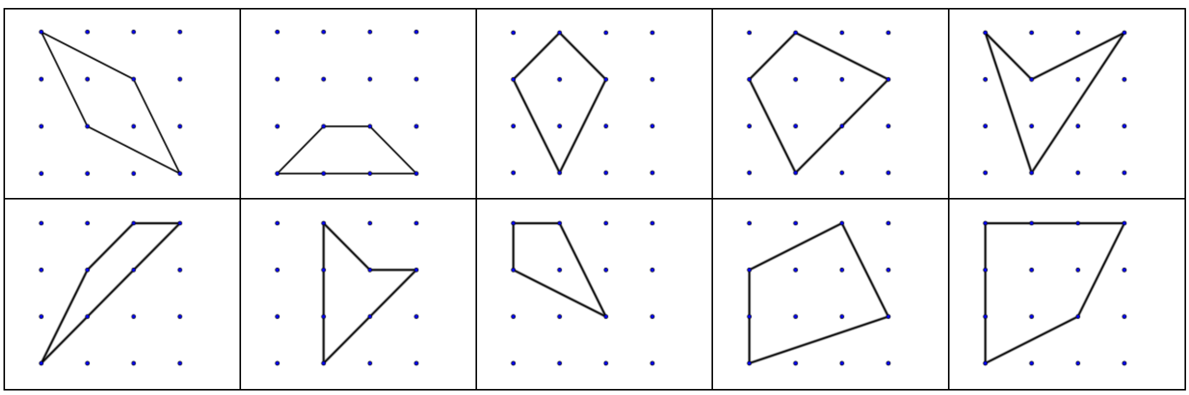

Figura 4. Solución de la actividad 3

Los estudiantes son capaces de encontrar las diferentes figuras en un proceso de trabajo colaborativo, mostrando más dificultades cuando el trabajo se realiza individualmente. Queremos recordar las dudas de algunos estudiantes sobre la consideración de los cuadriláteros no convexos que aparecen entre los dibujados.

3. Algunas actividades previas. Cálculo del perímetro

Para no quedarnos solamente en la forma, y poder trabajar también los problemas de áreas o perímetros, es evidente que deberemos determinar las unidades de longitud y de superficie en la Trama Cuadrada. Señalamos la distancia en vertical o en horizontal entre dos puntos consecutivos como unidad de longitud y el cuadrado más pequeño que se puede construir como unidad de superficie.

Nuevamente, el desarrollo de estas actividades nos muestra algunos errores y dificultades de los EMs, en relación a algunos conceptos básicos en la Geometría escolar, que no suelen aparecer con el modelo tradicional de enseñanza de la Geometría basada en la definición, ejemplo y aplicaciones.

Partiendo de la unidad de longitud considerada, señalamos actividades sobre el perímetro de figuras planas.

Actividad 4. Calcular el perímetro de los cuadrados de la figura.

Figura 5. Cuadrados de la actividad 4

Actividad 5. Calcular el perímetro del cuadrado de la figura.

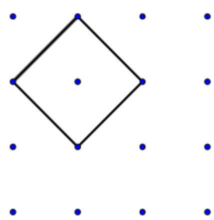

Figura 6. Cuadrado de la actividad 5

Las dudas y errores para hallar la solución de la actividad 5, nos muestran las dificultades de los EMs para el cálculo de longitudes y del perímetro cuando los lados no aparecen en posición horizontal o vertical, así como las dificultades con el concepto ‘unidad de medida’.

Es frecuente que un número significativo de EMs indiquen “cuatro” como solución a la actividad 5, al considerar la diagonal del cuadrado pequeño como la unidad de longitud. Otros muestran la dificultad para conocer la medida del lado del cuadrado. Extraemos parte del diálogo desarrollado en el aula.

Clase: Mide 4.
EM 1: No, porque el lado es más grande que el de arriba y entonces no puede ser 4. Puede ser 5.
EM 2 (en voz baja, sin seguridad): No mide 1, mide más.
Prof.: ¿Es mayor o menor?
Clase: Es mayor.
EM 1: Lo hacemos por Pitágoras. $\sqrt{2} \cdot 4$, *que es 5,65.*

Cuando les presentamos la actividad 6, los EMs vuelven a manifestar sus dificultades para indicar la longitud de los lados del cuadrado, siendo mayoría los que indican que mide 2 unidades. Recordamos la actividad 5 e insistimos, a partir de un diálogo similar al anterior, y nos indican que medirá más de dos pero vuelven a mostrar dificultades para aplicar el Teorema de Pitágoras y para señalar el valor exacto. Son muy escasos los EMs que responden utilizando correctamente el Teorema de Pitágoras, y menos los que dan la respuesta correcta de $4\sqrt{5}$ unidades.

Actividad 6. Calcular el perímetro de la figura.

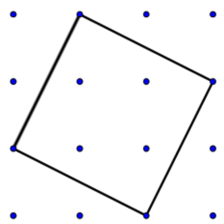

Figura 7. Cuadrado de la actividad 6

A modo de repaso y consolidación planteamos las actividades siguientes:

Actividad 7. Calculad el perímetro de los cuadrados y/o rectángulos dibujados en la figura 4.
Actividad 8. Dibujad cuadriláteros de perímetro seis unidades.
Actividad 9. Dibujad figuras cuyo perímetro sea menor de seis unidades.
Actividad 10. Dibujad figuras cuyo perímetro sea mayor de seis unidades.
Actividad 11. Dibujad figuras cuyo perímetro sea ocho unidades.
Actividad 12. Dibujad figuras cuyo perímetro sea mayor de ocho unidades.
Actividad 13. Calculad el perímetro de los cuadriláteros dibujados en la actividad 3.

Actividades de cálculo de área. El Teorema de Pick

Al igual que para las actividades de longitud, fijamos la unidad de superficie a partir de la consideración de un cuadrado de lado una unidad.

En el momento en que hemos asumido el cuadrado de lado una unidad como unidad de superficie, podemos iniciar actividades para calcular el área de algunos triángulos y rectángulos sencillos (Figura 8). Las respuestas iniciales de los estudiantes muestran la utilización de métodos de descomposición y complementación y, en algún caso, la aplicación de la fórmula del área del triángulo. Esto parece interesante por cuanto estos tres métodos son, específicamente, señalados en los currículos para resolver problemas de cálculo de superficie, aunque las actividades de aula en Primaria y Secundaria muestran un abuso del tercer método.

En la figura 8 mostramos las respuestas de los EMs.

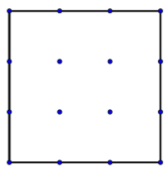	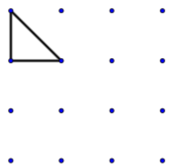	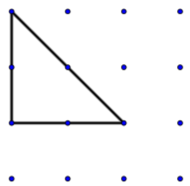	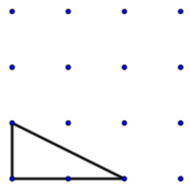	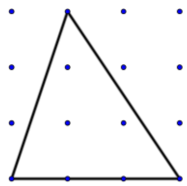
- Nueve. *- Porque son nueve cuadrados.*	*- ½* *- Porque es la mitad del cuadrado.*	*- Dos* *- Porque es un cuadrado y dos mitades.*	*- Uno* *- Porque el rectángulo entero es dos y la mitad es 1.*	*- 3·3/2* *- Base por altura partido por dos.*

Figura 8. Figuras que nos permiten iniciar el cálculo de área de figuras planas

Una vez que parecen familiarizados con la Trama cuadrada como recurso para trabajar la Geometría, y con las unidades de medida de longitud y de superficie que podemos considerar, iniciamos la parte final de la actividad presentando algunas cuestiones sobre el Teorema de Pick como paso previo a su desarrollo.

Prof.: Para calcular el área de las diferentes figuras que podemos construir en la trama habéis utilizado diferentes estrategias. Unas veces hemos descompuesto la figura original y calculado cada una de las partes, en otras la hemos complementado con alguna igual y, finalmente, hemos utilizado las fórmulas conocidas del triángulo y rectángulo. Se trata de elegir en cada momento el método que mejor nos convenga o más nos guste. En 1899, un matemático vienés, George Pick, dio una fórmula para calcular el área de polígonos que se pueden construir sobre una trama cuadrada, a partir del número de puntos de la trama que contiene la figura en su interior y el número de puntos de la trama que tiene en su frontera.

Hemos diseñado una secuencia de actividades para que descubráis lo que dice el teorema, que nos servirá para mostrar que hay una forma diferente de trabajar la Geometría y que se refleja en las propuestas curriculares. Es decir, encontrar la expresión dada por G. Pick es un pretexto para que experimentéis una forma diferente de trabajar la Geometría escolar.

Os propondremos calcular el área de diferentes figuras y haremos conjeturas para encontrar una expresión general a modo de fórmula para el cálculo de área de esas figuras.

Vamos a iniciar la secuencia didáctica proponiendo figuras con uno, dos, tres... puntos interiores, indicando a los y las estudiantes que calculen su área, por alguno de los procedimientos anteriores, y recojan los resultados en una tabla para poder analizarlos e intentar establecer alguna relación entre ellos.

Actividad 14. Calculad el área de las figuras siguientes que tienen un único punto en su interior y rellenar la tabla.

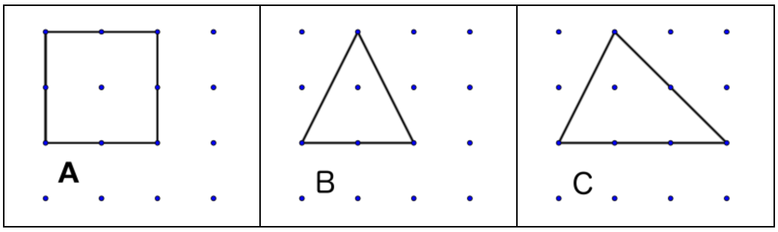

Figura 9. Figuras para la actividad 14

Figura	Puntos Frontera	Puntos Interiores	Área
A	8	1	4
B	4	1	2
C	6	1	3

Tabla 1. Solución dada a la actividad 14

La observación de los resultados en el cuadro permite a los estudiantes señalar que cuando las figuras tienen un punto interior, el área de la misma es la mitad que el número de puntos frontera.

Mostramos nuevas figuras y completamos de nuevo el cuadro (Figura 10).

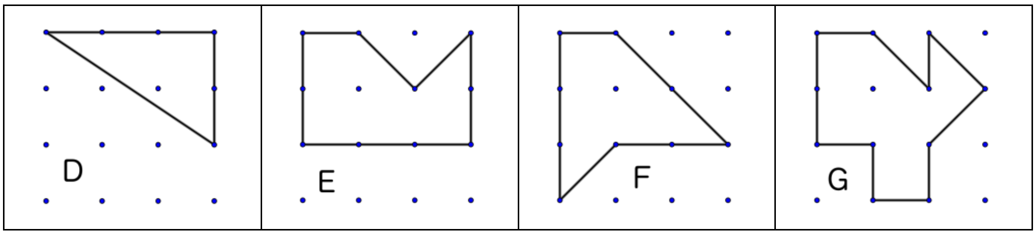

Figura 10. Figuras para completar la actividad 14

Figura	Puntos Frontera	Puntos Interiores	Área
D	6	1	3
E	10	1	5
F	9	1	4,5
G	11	1	5,5

Tabla 2. Conclusión de la actividad 14

Prof: ¿Podemos expresar cómo calcular el área de estas figuras?
EM 1. Cuando hay un solo punto interior el área es la mitad del número de puntos frontera.
EM 2. Cuando hay un punto interior, el área es el número de puntos frontera dividido por 2.
Prof. Dibujad libremente figuras con un punto interior y comprobad que se verifica esta afirmación en todos los casos.

Debemos observar que los EMs utilizan expresiones literales para expresar las fórmulas y nunca expresiones algebraicas, que eran traducidas en la pizarra por el profesor. Una vez escritas en la pizarra las diferentes expresiones algebraicas podía hacerse la comparación entre ellas.

Esta situación nos permite avanzar y trabajar con figuras que tengan dos puntos interiores y calcular su área. Así, planteamos la siguiente actividad.

Actividad 15. Calculad el área de las figuras siguientes que tienen dos puntos en su interior y rellenar la tabla.

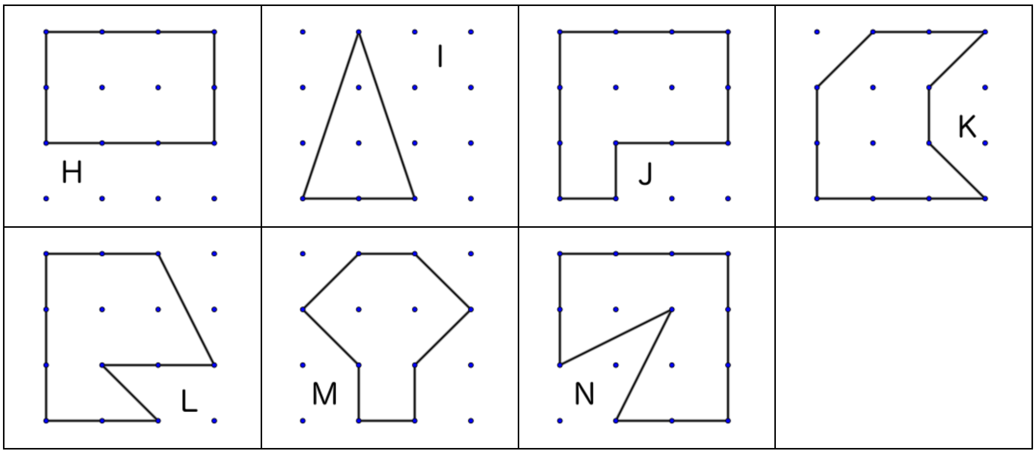

Figura 11. Figuras para la actividad 15

Figura	Puntos Frontera	Puntos Interiores	Área
H	10	2	6
I	4	2	3
J	12	2	7
K	11	2	6,5
L	11	2	6,5
M	8	2	5
N	12	2	7
H	10	2	6

Tabla 3. Solución dada a la actividad 15

De nuevo, proponemos encontrar alguna expresión general que valga para todas las figuras dibujadas en esta actividad.

Prof: ¿Hay alguna relación?
EM 1. Sumas los puntos frontera más los puntos interiores y lo divides entre 2.
EM 2. El número de puntos frontera entre 2 más 1.
Prof: Entonces, ¿tenemos dos expresiones diferentes?
Varios. Es lo mismo.

Una simple representación simbólica de las dos afirmaciones les permite ver que ambas expresiones son iguales, dado que en este caso el número de puntos interiores es dos.

Prof. Para un punto interior el área es la mitad de los puntos frontera, y para dos puntos interiores el área es la suma de los puntos frontera y los interiores dividida entre dos o el número de puntos frontera entre dos, más 1.

¿Vale esta expresión para las figuras con un punto interior?

Varios. No.

En este momento podemos ir indicando las expresiones anteriores:

Con un punto interior: *La mitad de los puntos frontera*

Con dos puntos interiores: *La mitad de puntos frontera entre dos, más 1.*

Suma de puntos frontera más puntos interiores y lo divides entre 2.

Partiendo de esta situación seguimos avanzando para trabajar ahora con figuras que tengan tres puntos interiores y calcular su área. Así, planteamos la siguiente actividad.

Actividad 16. Calculad el área de las figuras siguientes que tienen tres puntos en su interior.

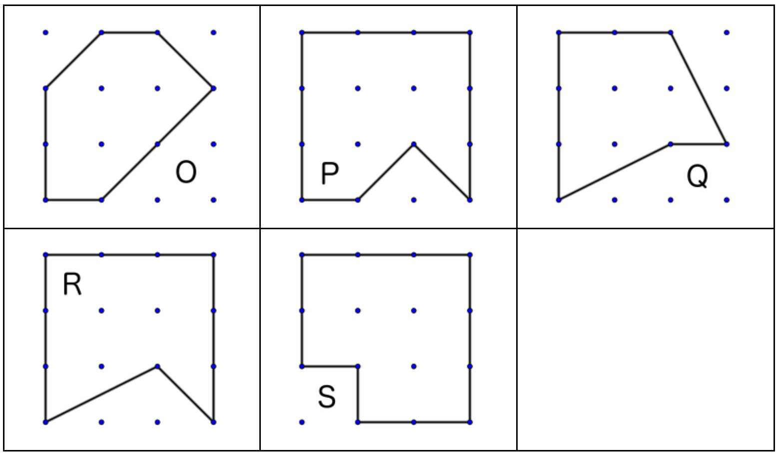

Figura 12. Figuras para la actividad 16

Figura	Puntos Frontera	Puntos Interiores	Área
O	8	3	6
P	12	3	8
Q	8	3	6
R	11	3	7,5
S	12	3	8

Tabla 4. Solución dada a la actividad 16

Prof. Nuevamente, nos preguntamos ¿aparece alguna regularidad?
EM 1. Divides entre dos los puntos frontera y sumas dos.
EM 2. Para tres puntos el área es la mitad de los puntos frontera más dos. Pero esa fórmula no sirve para los otros casos.
EM 3. Podemos dividir los puntos frontera entre dos y sumar los interiores menos uno.

De nuevo escribimos simbólicamente en la pizarra las afirmaciones propuestas, buscamos relaciones entre todas las expresiones diferentes y continuamos:

Prof. ¿Sirven estas expresiones para los casos anteriores?

Varios. Alguna también sirve para cuando hay un punto interior y dos.

Aunque ya podríamos señalar el Teorema de Pick, nos parece oportuno profundizar y consolidar los conocimientos en relación a los conceptos y procesos implicados y al proceso de enseñanza seguido. Y ofrecer la oportunidad a aquellos que todavía presentan dudas para que interactúen con sus compañeros e intenten descubrir la expresión buscada.

Actividad 17. Calculad el área de las figuras siguientes con 4 puntos interiores.

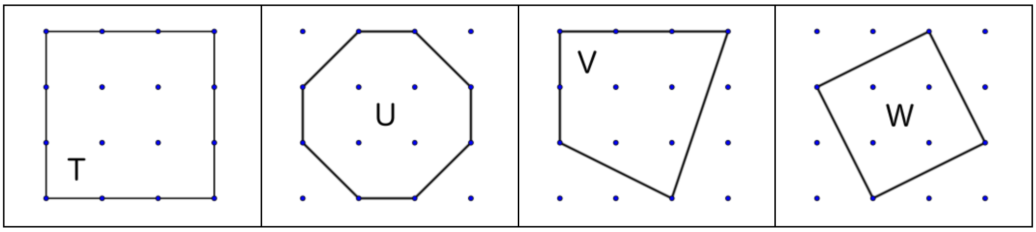

Figura 13. Figuras para la actividad 17

Figura	Puntos Frontera	Puntos Interiores	Área
T	12	4	9
U	8	4	7
V	7	4	6,5
W	4	4	5

Tabla 5. Cuadro para figuras con cuatro puntos interiores

Prof: ¿Se cumple alguna de las fórmulas que hemos visto?
Clase: Si, la tercera.
Prof. ¿Cuál es la tercera?
Varios. Dividir el número de puntos frontera entre dos y sumar el número de puntos interiores menos uno.
Prof. Pues esa es la fórmula de Pick.
Vosotros la habéis sacado. Podría haberla enunciado desde el inicio y luego comprobar que se cumple, pero hemos invertido el proceso. Hemos partido de actividades secuenciadas y vosotros la habéis deducido.
Prof. El área de un polígono dibujado en una trama cuadrada es la mitad del número de puntos frontera más los puntos interiores menos 1.

Somos conscientes de que el proceso que se ha desarrollado no es una demostración del teorema de Pick, pero sirve como ejemplo para que los EMs experimenten cómo se puede llegar a obtener un resultado general a partir de situaciones concretas planteadas en clase. Algo que debe hacerse en el nivel de Primaria.

La demostración del teorema se puede realizar mediante inducción, a partir de la demostración de la fórmula para triángulos y del hecho de que es posible la triangulación de cualquier polígono de vértices enteros (Elduque, 2007), pero ello no era objeto de esta actividad desarrollada en la formación inicial de Maestros.

Para verificar que el teorema se cumple, no sólo para los polígonos sencillos que hemos trabajado, proponemos utilizar tramas cuadradas generales y que dibujen figuras diferentes.

Actividad 18. En una trama cuadrada dibujad figuras diferentes y calcular el área siguiendo alguno de los tres procedimientos primeros -complementación, descomposición o aplicación de fórmulas conocidas- y el teorema de Pick, para comprobar la veracidad del enunciado propuesto.

Por nuestra parte, proponemos las que se muestran en la figura 14, que nos sirve para comprobar la fórmula propuesta en el teorema de Pick y repasar los procedimientos de cálculo de áreas que hemos trabajado.

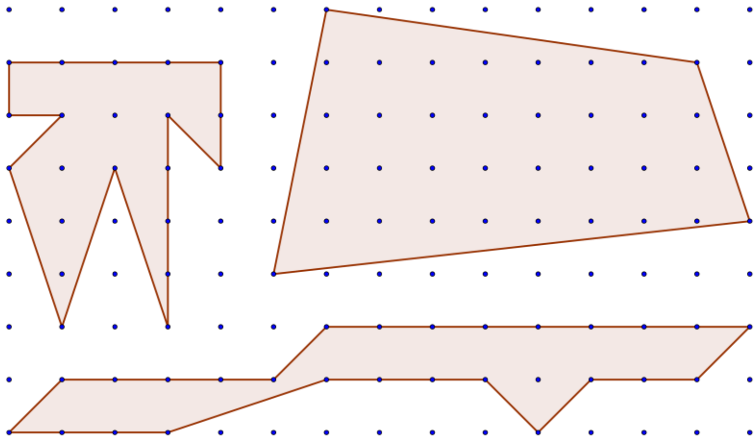

Figura 14. Figuras propuestas para comprobar el Teorema de Pick

Al llevar a cabo la comprobación, los EMs se percatan de la potencia del resultado obtenido. En el caso de estas figuras el uso del Teorema de Pick resulta más fácil que cualquiera de los métodos utilizados previamente de complementación y descomposición.

4. Otras actividades con área y perímetro en la trama cuadrada

Para concluir con el trabajo en la trama cuadrada que hemos utilizado y al objeto de consolidar los aprendizajes, se propone a los estudiantes algunas nuevas actividades sobre área y perímetro.

Actividad 19. Construid las figuras de menor área en la trama cuadrada.

La reacción inicial es dibujar el cuadrado de lado uno, luego, el triángulo rectángulo mitad. Finalmente, como resultado de su interacción y colaboración, encuentran y dibujan otras posibilidades (Figura 15).

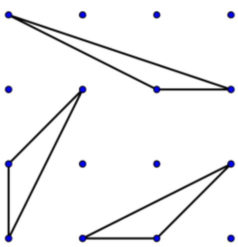

Figura 15. *Figuras de menor área*

Actividad 20. Construid las figuras de mayor área en la trama cuadrada.

Cuando se trata de dibujar las figuras de áreas mínimas dan varios ejemplos en diferentes posiciones, que les permiten visualizar que el mínimo se alcanza para los triángulos de base 1 y altura 1. Se establecen discusiones en la clase acerca de la igualdad de los diferentes triángulos dibujados, lo que permite hablar acerca de los efectos de las transformaciones en el plano -giros, traslaciones, simetrías- sobre las figuras geométricas y sus áreas. En el caso del polígono de mayor área no les cabe duda de que se trata del cuadrado de lado 3, que ocupa toda la trama.

Trasladamos estas actividades al cálculo de perímetros.

Actividad 21. Construid las figuras de menor perímetro en la trama cuadrada.

En cuanto a la figura de menor perímetro, la primera respuesta de la clase es el cuadrado de lado 1, pero enseguida se dan cuenta de que el triángulo mitad tiene perímetro menor.

Actividad 22. Construid las figuras de mayor perímetro en la trama cuadrada.

Para encontrar el polígono de mayor perímetro parten del cuadrado exterior y van añadiendo aristas con mayor o menor éxito. La observación de las figuras les permite señalar las que consideran de mayor perímetro, mostrando dificultades importantes para realizar el cálculo con exactitud.

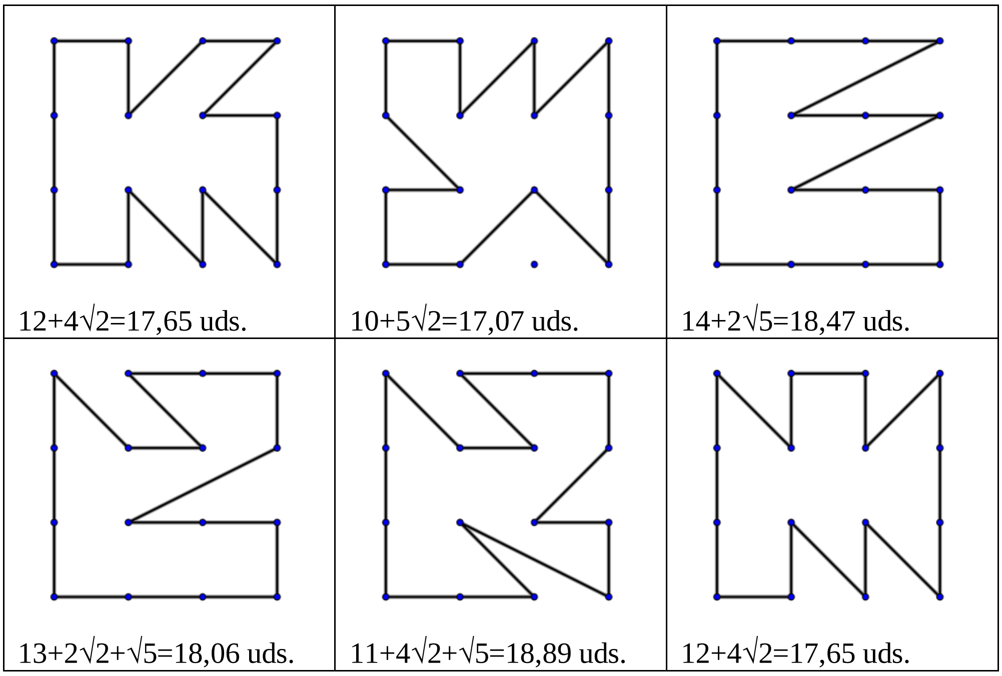

Figura 16. Figuras de mayor perímetro en la trama de cuatro por cuatro

Aunque desde el primer momento son conscientes de que la figura tiene que tener "picos", a la mayoría de los alumnos les cuesta discernir la diferencia de medida entre los distintos segmentos oblicuos, e incluso los consideran iguales, a pesar de ser una de las primeras observaciones en el desarrollo de esta unidad. Una vez advertido el error, son capaces de calcular la medida aproximada de los perímetros con la precisión suficiente para determinar cuál es el mayor.

5. Algunas reflexiones finales

La actividad descrita se ha llevado a cabo dentro de la asignatura Didáctica de las Matemáticas II, en la Universidad de Extremadura, y en la asignatura Matemáticas y su Didáctica II, en la Universidad de La Rioja. En ambos casos se trabajó en una de las sesiones de prácticas de la asignatura correspondiente, y al finalizar la misma se pidió a los EMs que la recogieran en un dosier, que sirve como instrumento de evaluación, con el resto de actividades llevadas a cabo en las distintas sesiones.

Al revisar las producciones de los alumnos acerca de la actividad, podemos observar que la mayor parte de ellos se limitan a recoger el desarrollo de la misma, quedándose en muchos casos con la anécdota de la actividad, y sin reflejar el principal objetivo de desarrollar un nuevo proceso para la enseñanza de la Geometría, pese a que en la presentación y en el desarrollo de la actividad se hace explícito por parte del profesor. No obstante, los EMs reconocen el trabajo realizado como novedoso y diferente de lo que estaban acostumbrados a realizar en clase de Matemáticas, y califican la experiencia de interesante y divertida.

Solamente uno de los trabajos revisados se acerca al objetivo, cuando dice que: "es posible diseñar secuencias de actividades para que los alumnos saquen los teoremas o definiciones", el resto se dedica a describir las actividades y plantear como objetivo la consecución de la fórmula, "utilizando la trama cuadrada, averiguar la fórmula del Teorema de Pick que relaciona los puntos frontera e interiores de las figuras que se pueden dibujar en la trama con su área", en el mejor de los casos, o "enseñanza e iniciación a la Geometría en Primaria", en otros.

Cabe destacar la falta de rigor a la hora de expresar tanto los objetivos como los conceptos implicados, así como la dificultad para describir correctamente la actividad, utilizando expresiones de un registro más adecuado a una conversación entre amigos que para un trabajo universitario. Este aspecto es de especial importancia por tratarse de estudiantes que van a ser maestros algún día, y que tienen que ser capaces de adecuar su discurso al ámbito en el que se encuentren en cada momento. Ello sugiere profundizar en estos aspectos en algún momento de nuestra actividad docente.

De la observación del desarrollo de la actividad en clase, y los trabajos elaborados con posterioridad por parte de los estudiantes, podemos obtener algunas conclusiones:

- La actividad les resulta interesante y motivadora. El hecho de tener que descubrir ellos mismos el teorema, en lugar de partir del enunciado y tener que demostrarlo, hace que se enfrenten a la tarea con curiosidad.
- El uso de la trama de puntos o el Geoplano también supone un cambio en el desarrollo de la clase que aceptan con agrado.
- Aparecen dificultades relacionadas con contenidos matemáticos básicos, como el teorema de Pitágoras, la semejanza de polígonos o las fórmulas de cálculo de áreas de figuras sencillas, que se resuelven rápidamente, pero que no deberían surgir en estudiantes universitarios.
- Para resolver la dificultad con el cálculo de áreas, utilizan estrategias no convencionales (composición y descomposición de figuras) aunque señaladas en el currículo, tal vez propiciadas por el uso de la trama de puntos.
- Les resulta complicado establecer la fórmula general a partir de los casos particulares, aunque lo consiguen con un proceso de interacción y colaboración, y la guía del profesor programada en la secuenciación establecida de actividades y preguntas. Así como en el diálogo en el aula durante el desarrollo de la actividad.
- Los estudiantes muestran poca capacidad para comunicar adecuadamente resultados matemáticos.

Bibliografía

Arrieta, J., Alvarez, J.L., y González, A.E. (1997). El teorema de Pitágoras a partir de la manipulación con Geoplanos. *Suma,* 25, 71-86

Blanco, L., y Márquez, L. (1987). En torno al teorema de Pick: Una experiencia de Enseñanza de la Geometría. *Números,* 16, 41-53.

Blanco, L.J., y Contreras, L.C. (2002). Un modelo formativo de Maestros de Primaria, en el área de Matemáticas, en el ámbito de la Geometría. En Contreras, L.C. y Blanco, L.J. *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente.* 93 – 124. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Blanco, L.J., Cárdenas, J., Gómez, R y Caballero, A. (2015). *Aprender a enseñar Geometría en Primaria. Una experiencia en formación de Maestros.* Servicio de Publicaciones de la UEx. Recuperado el 29/08/2016. http://mascvuex.unex.es/ebooks/sites/mascvuex.unex.es.mascvuex.ebooks/files/files/file/Geometria_9788460695004.pdf

Bolt, B. (1987). *Divertimentos matemáticos*. Labor.

Dienes, Z.P. (1970): *La construcción de las matemáticas.* Teide. Barcelona.

Elduque, A. (2007). *El Teorema de Pick.* Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza. Recuperado el 15 de julio de 2015 de http://www.unizar.es/ttm/2006-07/Pick.pdf.

Smith, L. R. (1990). Areas and perimeters of geoboard polygons. *Mathematics Teacher*. 392.398

Clara Jiménez-Gestal. Profesora del Didáctica de las Matemáticas, en la Facultad de Letras y de la Educación de la Universidad de La Rioja. Actualmente, sus líneas de investigación están relacionadas con la formación de profesores de Matemáticas y el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil.
Dirección electrónica: clara.jimenez@unirioja.es

Lorenzo J. Blanco Nieto. Profesor Titular de Universidad de Didáctica de la Matemática, en la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. Autor de diferentes trabajos sobre educación matemática y formación de profesores de Matemáticas.
Dirección electrónica: lblanco@unex.es.