NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 93, noviembre de 2016, páginas 93-110

La génesis histórica de la Geometría Analítica y la enseñanza en la Escuela Secundaria

Emmanuel Colombo Rojas, Viviana Carolina Llanos y María Rita Otero
(Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires[1]. Argentina)

Fecha de recepción: 1 de julio de 2015
Fecha de aceptación: 6 de julio de 2016

Resumen

En este trabajo se presenta una síntesis del desarrollo de la Geometría Clásica en la antigüedad y del Álgebra en la Edad Media y el Renacimiento, con el objetivo de interpretar los motivos que habrían impulsado la gestación de la Geometría Analítica por parte de Descartes y Fermat en la Edad Moderna. Se analizan los resultados de matemáticos representativos de cada momento; así como los problemas que enfrentaron y las estrategias, representaciones y métodos que se emplearon para resolverlos. Esta síntesis puede resultar un aporte significativo para la comunidad de Educadores en Matemática, dado que permitiría interpretar que la geometría analítica no podría haberse gestado separadamente de la Geometría Clásica y el Álgebra; y como consecuencia una enseñanza disyunta podría carecer de sentido.

Palabras clave

Geometría Clásica, Álgebra, Geometría Analítica, Historia de la Matemática, Enseñanza de la Matemática

Title

Historical genesis of Analytical Geometry and her relation with the Classical Geometry and the Algebra: some contributions to the teaching of Mathematics

Abstract

This paper presents a synthesis of the development of the Classical Geometry in the antiquity and of the Algebra in the Middle Ages and the Renaissance, in order to interpret the motives that have driven the gestation of analytic geometry by Descartes and Fermat in the Modern Age. There are analyzed the results of representative mathematicians of every moment; as well as the problems that faced and the strategies, representations and methods that were used to solve them. This synthesis can turn out to be a significant contribution for the community of mathematics educators, provided that it would allow to interpret that the analytical geometry might not have been separately of the Classic Geometry and the Algebra; and as consequence a separated education might lack sense.

Keywords

Classic geometry, Algebra, Analytical geometry, History of Mathematics, Teaching Mathematics

[1] Investigadores integrados en el Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT) así como al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

1. Introducción

La Matemática se habría iniciado con el conteo y la geometría, en un contexto fuertemente ligado al entorno y para resolver problemas concretos, de índole práctico. Ni el Álgebra ni la Geometría Analítica eran socialmente viables en el contexto en que se originó la Geometría Clásica, pero progresivamente, sus inicios y razones de ser se fueron entrelazando, a tal punto que hoy no es posible pensar en los fundamentos conceptuales de la Matemática sin hacer referencia a la Geometría Clásica, a la Geometría Analítica y al Álgebra.

La geometría es un área vasta dentro de la matemática contemporánea y se reconoce que sería la que permite establecer vínculos más estrechos con el mundo que experimentamos. Dentro de ella es posible clasificar un total de más de cincuenta geometrías diferentes (Jones 2000a) entre las que se destacan la Geometría Clásica y, como un lazo entre el carácter empírico-particular y el carácter abstracto-general, la Geometría Analítica. Ésta última ha permitido la resolución de varios problemas geométricos de una forma más sencilla en el plano algebraico; a la vez que, ha permitido resolver problemas del Álgebra dentro del marco geométrico. Con esta funcionalidad la Geometría Analítica consigue, por ejemplo, eliminar la limitación euclidiana de la homogeneidad dimensional en expresiones algebraicas, la necesidad de trabajar en la Geometría Clásica con una regla no marcada y un compás como únicos instrumentos, y la supuesta imposibilidad de asignar números a figuras geométricas (González Urbaneja, 2007). Así, la Geometría Analítica se presenta como un instrumento esencial para las Matemáticas.

Sin embargo, la escuela ha prescindido de hecho y promueve artificialmente, el estudio de estas ramas de la Matemática en su conjunto, en particular la Geometría escolar en el Nivel Medio está en riesgo. En este contexto, el trabajo de Gascón (2003, 2004) da cuenta de la *pérdida de sentido* de la Geometría Clásica, describiendo cómo el aislamiento temático en los programas de la escuela secundaria, atenta contra la razón de ser de la Geometría Clásica para los alumnos y para la sociedad en general. La Geometría propuesta en los programas, en los libros y la que se enseña en las aulas, es estudiada como si fuera "transparente" e incuestionable, dotada de sentido por sí y para sí misma; en lugar de considerarla como transversal al programa de estudio y vinculada con las demás organizaciones del programa. Incluso el porqué de muchas de las organizaciones matemáticas tienen respuesta en la Geometría y ésta se estudia como incuestionable en sí misma. La Historia de la Matemática da cuenta de esto. En este sentido, Piaget y García (1982) han señalado la relevancia de la Historia de las Ciencias para analizar el desarrollo de conceptos de un sujeto, a partir de la génesis socio-histórica de los mismos.

Paralelamente al desarrollo de las geometrías, la Historia de la Matemática permite interpretar y analizar modificaciones con relación a los niveles de abstracción y generalidad de los enunciados; desde la matemática empírica de los babilonios hasta el desarrollo del Álgebra abstracta. Podría establecerse entonces una analogía a grandes rasgos entre el desarrollo del conocimiento matemático, y el de un sujeto cuyo conocimiento se inicia en lo empírico-casuístico, y prosigue hasta los últimos años de la Secundaria, con desarrollos analíticos totalmente independientes de la realidad y con un alto grado de generalidad (Carson y Rowlands, 2007; Piaget y García, 1982).

Por otro lado, la investigación de Meavilla Seguí y Oller Marcén (2014) destaca el potencial de la Historia de la Matemática para comprender la relevancia de los conocimientos matemáticos que la sociedad preserva y transmite principalmente dentro de la institución escolar. En consecuencia, consideramos que el análisis histórico del desarrollo de la Geometría Analítica, y sus vínculos con el Álgebra y la Geometría Clásica es relevante para pensar organizaciones conceptuales apropiadas que las involucren y vinculen. En este trabajo, nos propondremos realizar una revisión histórica de los vínculos existentes entre estas disciplinas, utilizando entre otros, elementos de la Historia de la Matemática como vía de acceso al uso de herramientas que grandes matemáticos nos han legado.

El análisis histórico permite poner en discusión la supuesta dicotomía existente entre el Álgebra y la Geometría Clásica y como comprender los motivos que dieron origen a la Geometría Analítica Este análisis cobra relevancia a la hora de dotar de sentido a la geometría escolar ya que por un lado, el tomar en consideración los aspectos mencionados contribuye a la multidisciplinariedad dentro de la matemática y, por otro, se justifica la necesidad de emprender el estudio conjunto del Álgebra, la Geometría Euclidiana y la Geometría Analítica. En la opinión de Gascón (2002) esta "separación" que es un hecho, es fruto de un análisis epistemológico superficial, en el que la naturaleza de la geometría analítica se da por sentada, es transparente y, por tanto, no se cuestiona.

A partir de este análisis histórico de la Geometría sintética, el Álgebra y el desarrollo de la Geometría Analítica, se espera realizar un aporte a la comunidad en Educación Matemática, con el objetivo de dar una posible respuesta parcial al problema de la desaparición de la razón de ser de la geometría escolar en el Nivel Medio. A continuación, se presenta de manera sintética un análisis histórico de la Geometría Clásica y el Álgebra que permitiría establecer un aporte tendiente a vincular a las ramas de la Matemática mencionadas y considerar los motivos que dieron origen a la Geometría Analítica.

2. La Geometría Clásica y el Álgebra como bases para el desarrollo de la Geometría Analítica

El medio siglo comprendido entre 1637 y 1687 es la fuente de la matemática de la Edad Moderna. La primera fecha señala la publicación de la *Geometría* de René Descartes, y la segunda la de la publicación de los *Principia* de Isaac Newton. Es en este período histórico en el que se encuentra la Geometría Analítica de Descartes (1637); el cálculo diferencial e integral de Newton (1666, 1684) y Gottfried Leibniz (1673, 1675), el análisis combinatorio (1654) y, en particular, la teoría de las probabilidades de Pierre de Fermat y Blaise Pascal; y la aritmética superior (hacia 1630- 1665) de Fermat (Bell, 1949). Hay que considerar que muchos de los desarrollos matemáticos posteriores a Descartes hicieron uso de su Geometría Analítica, identificados como hechos fundamentales de la Matemática Moderna y Contemporánea. Esto da cuenta de la relevancia de ésta geometría para la Matemática en su totalidad.

En este trabajo se analizan los resultados que justificarían los orígenes de la Geometría Analítica que empezaron a gestar Fermat y Descartes en el siglo XVII (Bell, 1949; González Urbaneja, 2007; Hernández, 2002; Klimovsky y Boido, 2005; Quintero Zazueta, 2001; Torre Gómez, 2006). En este contexto, se considera que fue de crucial importancia el desarrollo de una geometría suficientemente rigurosa como la desarrollada Euclides en el siglo III a. C. En la Figura 1 se presentan hitos en el desarrollo de la Geometría en la Antigüedad y, a su vez, se muestra un ejemplo (resaltado) dónde se intentan destacar las diferencias en el modo de trabajar en Geometría en cada una de las etapas que se fueron sucediendo.

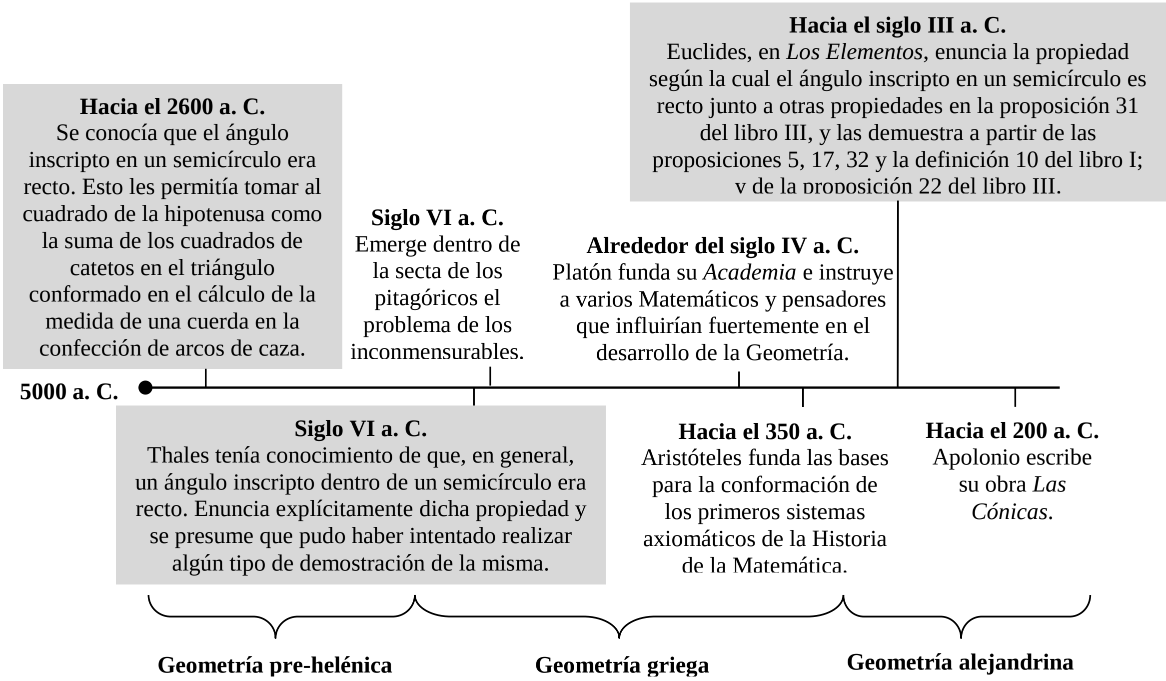

Figura 1. Representación de sucesos representativos de la Geometría en la Antigüedad

Los desarrollos del Álgebra Simbólica también son esenciales en la gestación y avance de la Geometría Analítica a partir del siglo XVII. Se sintetizan los desarrollos del álgebra y su simbolismo; a partir de Diofanto, en lo que se conoce como la Segunda Escuela Alejandrina, hasta la Edad Moderna en Europa, dónde se destacarían las matemáticas de Viète, Fermat y Descartes. En la Figura 2 se presentan sintéticamente estos hitos en el desarrollo del Álgebra y, a su vez, se muestra un ejemplo que intenta ilustrar cómo ha ido evolucionando el simbolismo en el tiempo:

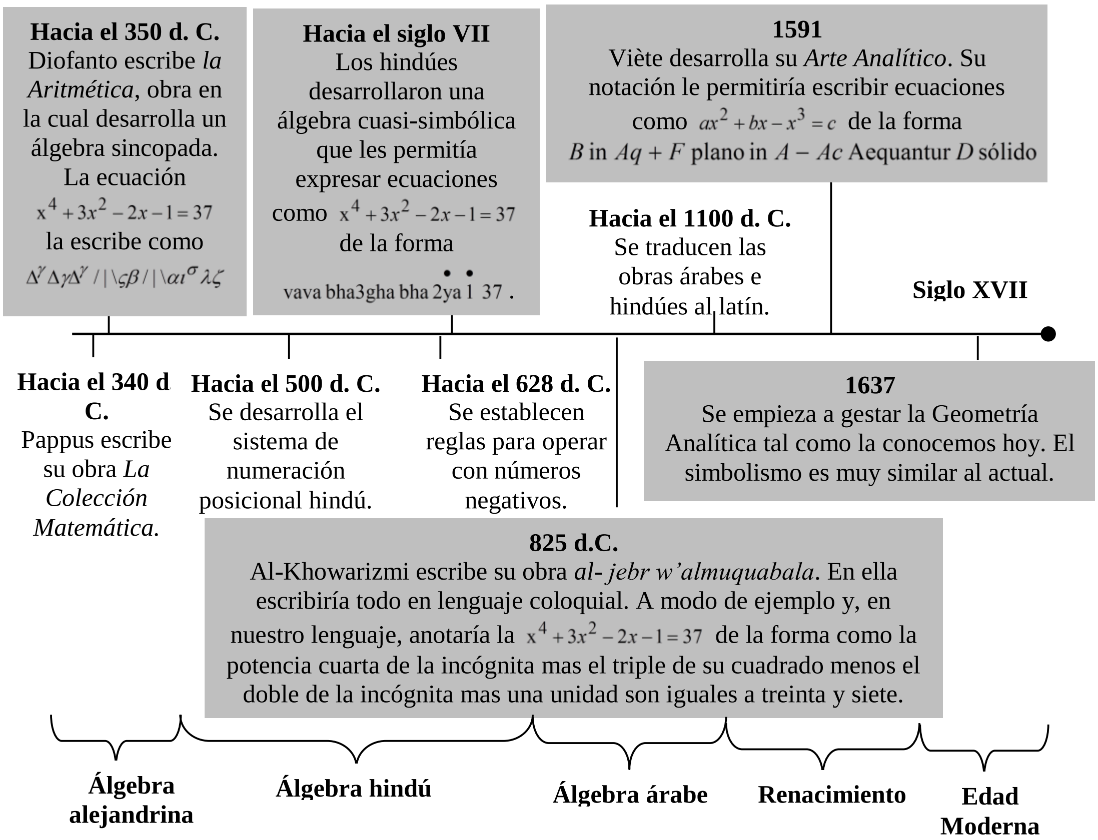

Figura 2. Representación de sucesos representativos del álgebra medieval y renacentista

En un punto intermedio entre el desarrollo histórico del Álgebra y de la Geometría Clásica se encuentra el Álgebra Geométrica desarrollada en la Antigüedad (principalmente en las civilizaciones babilónica y griega). Se reemplazan números por segmentos de recta y, las operaciones entre segmentos se resuelven mediante construcciones geométricas. De esta manera eran capaces de dar respuesta a problemas muy específicos que podrían considerarse algebraicos (Dávila Rascón, 2002). Sin embargo, por la forma de manipulación de las variables y la ausencia del simbolismo característico del Álgebra, se decidió tomar al Álgebra Geométrica como un antecedente importante para el desarrollo del Álgebra, más que como el origen de la misma y, por lo tant

> "La Geometría es la parte de las Matemáticas que estudia las propiedades de las formas y el espacio, originalmente (como sugiere su nombre) de la Tierra. Los griegos desde alrededor del 300 a. C. desarrollaron la Geometría sobre una base lógica, y muchos de los primeros resultados están recogidos en los *Elementos* de Euclides (Crystal, 1997)" (Bolt, 1998, p. 6)

Con Geometría Clásica (o Euclidiana) nos referiremos a aquella parte de la Geometría propuesta por Euclides. En esta sección se analizan los principales hitos en el desarrollo de la Geometría Euclidiana que tuvieron influencia en la génesis de la geometría de Descartes y Fermat. Se inicia con las primeras geometrías en las civilizaciones pre-helénicas (siglos LI a VI a. C.). Luego se presenta una suerte de "tematización" (Piaget y García, 1983) de las primeras geometrías, al transmitirse a matemáticos de la Antigua Grecia (siglos VII a IV a. C.), momento donde surge un interés por la naturaleza del conocimiento matemático y por argumentos que lo justifiquen. Por último, se desarrolla la geometría alejandrina (siglos IV a II a. C.) en la cual, Euclides, y Apolonio entre otros grandes geómetras agrupan de manera coherente y unitaria una gran cantidad de propiedades geométricas desarrolladas hasta la época.

3.1. La geometría pre-helénica

La primer Geometría se habría gestado en el seno de las civilizaciones pre- helénicas (5000- 500 a. C.), como respuesta a problemas de la vida cotidiana de la época. Según Klimovsky y Boido (2005) en sus inicios la Geometría estuvo fuertemente ligada a la realidad física, y su origen se remonta al nacimiento de la humanidad. Es en la abstracción de estas formas comienza el primer acercamiento (informal e intuitivo) a la Geometría Clásica.

Dentro de las civilizaciones existentes en este período, se reconoce a los babilonios que fueron capaces de emplear reglas exactas para calcular el área de cualquier rectángulo, triángulo rectángulo, triángulo isósceles, trapezoide con un lado perpendicular a la base, y de cualquier círculo; aunque en este último c0aso empleaban el número tres como aproximación de pi. Sin embargo, uno de sus mayores logros ha sido la solución del problema que consiste en el cálculo de la longitud de una cuerda dado el diámetro y la longitud de la flecha en un problema para elaborar arcos (Crespo Crespo y Guasco, 1998). Además, se evidencia en su geometría el conocimiento de diversas propiedades como el teorema de Pitágoras, propiedades de congruencia por simetría y propiedades angulares.

Los conocimientos de geometría que nos quedan de estas civilizaciones son concretos y de aplicación. No había fórmulas generales ni demostraciones ya que los geómetras de éste período, antes que geómetras eran artesanos, sacerdotes, arquitectos, etc. Un ejemplo de ello es la aplicación de la identidad pitagórica: los arquitectos del Antiguo Egipto sabían que para construir un ángulo recto bastaba con tomar las medidas de tres, cuatro y cinco (o semejantes) para sus lados; sin embargo, desconocían por completo la naturaleza de ese conocimiento y no se interesaron por justificar su validez (Klimovsky y Boido, 2005). Otro ejemplo se observa en el cálculo de la seket (medida de la cotangente del ángulo) para conocer la inclinación de las caras de las pirámides y conseguir que se uniesen en un único vértice (García Cruz, 1988).

En ese momento, la matemática fue un medio para estudiar y manipular el entorno. No había búsqueda de rigurosidad en los cálculos. Un resultado aproximado tenía el mismo valor que uno exacto en la medida en que diera resultados suficientemente aceptables. La Matemática entonces daba respuesta al problema de la organización, explicación y predicción de ciertos aspectos de la realidad; sin ingresar en la preocupación por aspectos formales relativos a la exactitud y validez de los procedimientos empleados.

3.2. La geometría griega

Se podría afirmar que los griegos retomaron muchas de las propiedades y fórmulas empleadas por las civilizaciones que los antecedieron (Bell, 1949, Rey Pastor, Babini, 1951). Sin embargo, se habrían diferenciado en su tratamiento: mientras que las civilizaciones pre-helénicas se preocuparon por los cálculos y la utilidad de los mismos, los griegos se abocaron a estudiar la naturaleza de estos conocimientos matemáticos y su razón de ser.

Muchos de los conocimientos de Geometría obtenidos por civilizaciones de la antigüedad fueron recopilados y estudiados por Thales de Mileto (640– 535 a. C.), considerado como uno de los eslabones más importantes para la transmisión del conocimiento de los babilonios y egipcios a la cultura griega. Aunque no se destacaron sus aportes en cuanto a la resolución de problemas, se reconoce en su obra el tratamiento deductivo y racional alcanzado (Díaz Gómez, 2002). A diferencia de la Matemática pre-helénica, la griega busca procedimientos y resultados generales. Dentro de la

Grecia Antigua el enfoque sobre la geometría empieza a cambiar: con los primeros matemáticos griegos ya emergía la necesidad de independizar los objetos matemáticos del mundo concreto. De esta manera, demostraciones y generalizaciones empezarían a abundar en la matemática helena.

En este contexto, un grupo de matemáticos que conformaban la denominada *secta* de los pitagóricos (siglo VI a. C.), concibieron la posibilidad de que el mundo pudiese ser representado mediante los números enteros, una entidad abstracta independiente de la realidad. Buscaron demostrar la propiedad de la conmensurabilidad según la cual dados dos segmentos arbitrarios es posible dividirlos en una cantidad entera *n* de secciones. . Por ejemplo, entre un segmento de medida 21 y uno de medida 49 la alícuota común es 7. La alícuota común a todos los segmentos es conocida como *punto extenso* (Klimovsky y Boido, 2005). y esta idea indica que todo segmento estaría conformado por una cantidad finita de secciones o puntos.

Otro problema crucial al que debieron hacer frente los pitagóricos fue el de los inconmensurables. Al estudiar triángulos rectángulos y aplicar la relación pitagórica entre sus lados, descubrieron que ciertas magnitudes no podían expresarse como cociente de dos números enteros. A partir de este problema, los helenos decidieron evitar asociar números a lados, áreas y volúmenes, dando lugar al Álgebra Geométrica (González Urbaneja, 2008). Esta imposibilidad de asociar números a figuras geométricas es afirmada con las paradojas de Zenón de Elea (490 -430 a. C.) quien argumentó sobre la existencia de infinitos puntos entre dos puntos dados. Así, la geometría griega que estudia figuras en un espacio determinado, se ve afectada por los cuestionamientos de Zenón y como consecuencia, todo trabajo matemático que incluyera algún tipo de procedimiento asociado a la infinitud carecía de rigor y veracidad. Sin embargo, las críticas no disuaden fácilmente a los proselitistas: Platón (427- 347 a. C.) adopta y transmite muchas de las ideas de los pitagóricos a sus discípulos en el seno de la *Academia*, entre los que se destacan tres grandes pensadores y matemáticos: Eudoxo, Menecmo y Aristóteles. Entre las principales contribuciones se mencionan:

- Eudoxo (408-355 a.C.), logró resolver parcialmente el problema de los inconmensurables estableciendo un estilo sintético que oculta la vía heurística del descubrimiento. Esto, limitó la introducción de nuevas curvas a su construcción. Es decir, el estudio de las curvas se llevaría a cabo mediante la intersección de superficies o lugares geométricos definidos a través de relaciones de áreas o longitudes en forma de proporciones**,** y no por medio de ecuaciones (González Urbaneja, 2007).
- A Menecmo (380 a. C.- 320 a. C.), discípulo de Platón y de Eudoxo, se le atribuye el descubrimiento de las curvas cónicas, entendidas como cortes de un plano con conos. En palabras de González Urbaneja (2007): *“hay una gran similitud entre los desarrollos de Menecmo en relación a expresiones equivalentes a ecuaciones y la utilización de coordenadas [...] De hecho ignorando el lenguaje de ésta (la Geometría Analítica) se hace difícil interpretar el hallazgo de Menecmo”*. Dicho parentesco también lo heredará Apolonio de Perga (262- 190 a. C.), su sucesor en la temática de las curvas cónicas y de quien se realizará un análisis más adelante.
- Aristóteles (384– 322 a. C.) tuvo un papel fundamental en la organización y justificación de los conocimientos científicos y, en particular, geométricos de la época; pues fue el primero en concebir a la ciencia como un sistema. Para Aristóteles existen, para cada rama del conocimiento, un conjunto de términos primitivos (que se comprenden *per se*) y términos definidos que se comprenden a partir de relaciones establecidas entre términos primitivos y/o otros términos definidos. Además, existen un conjunto finito de verdades auto-evidentes (axiomas) a partir de las cuales se pueden construir conocimientos seguros (teoremas) mediante el uso de la lógica que permite la transmisión de la verdad desde las premisas a las conclusiones. Esta forma de organizar y comprender el conocimiento matemático se conoce

como Tradición Axiomática (Klimovsky y Boido, 2005) y considera a la Matemática como conformada por Sistemas Axiomáticos Formales, de aquí en adelante SAF.

Es en la Grecia Antigua donde se sientan las bases para desarrollos posteriores en Geometría Clásica y, en Geometría Analítica. Ejemplos de esto son:

- Las obras de Pitágoras y Zenón que se problematizan sobre la existencia de números que no pueden ser expresados como cociente de enteros positivos, problema que sería resuelto por Descartes luego de varios siglos.
- Los aportes de Thales y Platón, quienes contribuyen a la distinción entre entidades del mundo matemático y el mundo concreto.
- La lógica aristotélica que contiene las bases para la constitución de SAF, ideas que serían adoptadas posteriormente por Euclides en su obra.
- La obra de Menecmo, quien avanza en el estudio de las cónicas, que posteriormente serían retomadas por Apolonio siendo éste uno de los grandes precursores en el uso de ejes de coordenadas.

Según Rey Pastor y Babini (1951) la geometría griega se ha caracterizado, a diferencia de sus antecesoras, por un marcado interés en la fundamentación de las propiedades de las figuras, siendo éstas despojadas de todo tipo de asociación numérica. Se ha establecido una separación clara entre la Aritmética (base del Álgebra) y la Geometría. Se desarrolla así un Álgebra Geométrica que no contribuye en el desarrollo de una Geometría Analítica para el estudio de las figuras.

3.3. La geometría alejandrina

En este período se avanzaría con base en los conocimientos alcanzados por los helenos, con énfasis en las demostraciones y en la rigurosidad procedimental. Proporcionalidad, propiedades triangulares, propiedades angulares, cuerpos geométricos, álgebra geométrica, teoría de los números, un gran cúmulo de conocimientos atraviesan toda la obra de *Los Elementos* de manera organizada bajo un SAF siendo ésta revisada y continuada por sus sucesores (Klimovsky y Boido, 2005; Rey Pastor y Babini, 1951).

El espíritu demostrativo y generalizador de los griegos en la antigüedad fue crucial para la formación de una geometría lógica, sistemática y abstracta, como la de los alejandrinos. La geometría alejandrina tiene como representantes más destacados a Euclides (siglo IV a. C.) y Apolonio (siglo III a. C.). Estos geómetras se habrían preocupado por la naturaleza del conocimiento matemático, su método y su universalidad.

Klimovsky y Boido (2005), sostienen que la obra *Los Elementos* de Euclides y la de sus sucesores alejandrinos se distinguió de la matemática helena en el sentido de que se trataba de una "obra de especialistas", esto es, los tratados de geometría no se presentaban mezclados con contenidos de política, filosofía, religión, etc. Tal es el caso que en la obra ni siquiera se hace referencia a aplicaciones de la geometría que ahí se desarrolla. Podría decirse que Euclides busca una aproximación a un "mundo ideal", sin abocarse a casos particulares del mundo concreto. Por otro lado, *Los Elementos* guarda un cierto parentesco con la concepción aristotélica de la Matemática, en el sentido que se recopila una gran cantidad de conocimientos de la geometría griega, así como contenidos previos desarrollados por los egipcios y babilonios entre otras civilizaciones; y los organiza dentro de un SAF, semejante al que concibió Aristóteles en su época. Tan sistemática y detallada es la obra de Euclides que su influencia se extendería hasta varios siglos luego de la muerte de su creador.

Euclides no fue el único gran geómetra de este período. Apolonio de Perga (262- 190 a. C.) es también reconocido por su obra *Sobre las secciones Cónicas*, de gran relevancia si se desea estudiar los orígenes de la Geometría Analítica. Según Nápoles Valdes (2004), este matemático continuó con los estudios sobre cónicas realizados por Menecmo. Allí explicita el descubrimiento de que, a partir de un cono único, pueden obtenerse los tres tipos de secciones: *elipse, parábola* e *hipérbola* variando la inclinación del plano que corta al cono. Esto constituyó un resultado clave en el proceso de unificar el estudio de los tres tipos de curvas. El lenguaje de Apolonio es sintético y retórico, utilizando la técnica pitagórica de la "*aplicación de las áreas*", pero sus métodos de coordenadas ya guardan cierta similitud con los de la Geometría Analítica. Se le atribuye a Apolonio el primer hito en la Historia de la Matemática por la aplicación de coordenadas, al estudio de las propiedades de las curvas aunque sin simbolización (Nápoles Valdes, 2004).

Las diferencias más notables del sistema de ejes de Apolonio con el sistema cartesiano actual son:

1) No se consideraron las magnitudes negativas.
2) Nunca se fija un sistema de coordenadas de referencia a priori. Según Apolonio, las curvas no venían determinadas por las ecuaciones que verifican las coordenadas de sus puntos, esto es, se pasa de construcciones geométricas a una escritura algebraica y no viceversa.

La segunda diferencia muestra claramente un punto de vista platónico: lo que importa es la esencia de las entidades matemáticas, no como se representen. Esta filosofía contuvo a Apolonio y no permitió que su obra llegase más lejos. Además, podemos decir que Apolonio no contó con el álgebra con la que contaron los matemáticos durante el siglo XVII (Hernández, 2002). Fue un pionero y ha sido tal la magnitud de su obra, que influenció fuertemente en los geómetras y algebristas que lo sucedieron.

En un intento por recuperar la parte perdida de la obra de Apolonio, se desarrolla la Geometría Analítica (González Urbanea, 2007). Si bien ha habido avances posteriores en Geometría Clásica, consideramos que ya en este punto se empieza a evidenciar la necesidad del Álgebra en la formación de la Matemática Moderna y, en particular, de la Geometría Analítica. Por otro lado, consideramos que estos avances posteriores sobre la Geometría Clásica no serían indispensables si se quiere poner en consideración la génesis de la Geometría Analítica.

4. El Álgebra y los orígenes de la Geometría Analítica

Desde los inicios de la Geometría Analítica, se evidencia una fuerte influencia del Álgebra sobre ésta. De hecho, el nombre Geometría Analítica alude al Álgebra. Si bien la palabra Álgebra viene del árabe, con Viète ésta área de la Matemática empieza a ser conocida como *Arte Analítica* haciendo referencia al Método Analítico Griego. Éste método consiste en empezar de las conclusiones y arribar, por deducciones lógicas, a las hipótesis iniciales; y, en este sentido, tiene cierta similitud con los procedimientos algebraicos que parten de trabajar con la solución del problema (De la Torre Gómez, 2006). De ahí el "Analítica" de la Geometría Analítica. Por lo tanto, si estamos interesados en conocer la génesis y desarrollo de la Geometría Analítica, nos vemos en la necesidad de clarificar lo que se entiende por Álgebra.

A diferencia de la Aritmética, que estudia los números y las operaciones elementales, en el Álgebra se introducirá el uso generalizado de símbolos (usualmente letras) para representar cantidades desconocidas (llamadas incógnitas) y cantidades conocidas (llamadas parámetros). Las expresiones así formadas junto a símbolos operatorios y de orden, se conocen como "fórmulas algebraicas" y expresarían una regla o principio general (Baldor, 1980). Haremos referencia a un Álgebra "aritmetizada" cuando se haga alusión a variables desconocidas habiendo, a su vez, una ausencia del simbolismo algebraico que facilite los cálculos, y de procedimientos resolutivos que permitan obtener una solución exacta y única para el problema algebraico tratado.

Respecto al tratamiento del desarrollo histórico del Álgebra, de la misma manera en que concluimos el análisis de la Historia de la Geometría Clásica con Apolonio, en este trabajo iniciaremos la Historia del Álgebra con los últimos griegos, más específicamente, con Diofanto y con los aportes del álgebra hindú. Sin embargo, esto no implica que no haya habido avances en la Geometría Clásica luego de Apolonio ni que los inicios del Álgebra no fueran previos a Diofanto. Por el contrario, se sabe que antes de Diofanto se desarrollaron álgebras aritméticas (Egipto y Babilonia) y álgebras geométricas (Grecia) en las que no llegó a explicitarse el conocimiento algebraico (Dávila Rascón, 2002). A su vez, los desarrollos en Geometría Clásica posteriores a la Época de Euclides tampoco se detuvieron, como es el caso de los trabajos con cuadriláteros de Brahmagupta y la fórmula de Herón para calcular el área de un rectángulo.

Por otro lado, si nos detenemos a pensar en la diferencia entre la Geometría Analítica y la geometría que empleó Euclides nos daremos cuenta en principio, que hay un simbolismo y una "suerte de correspondencia" entre una figura geométrica y su expresión algebraica; aspectos de crucial importancia para el desarrollo de la Matemática. En particular, el simbolismo del Álgebra cumple un papel fundamental en la síntesis de problemas para facilitar su tratamiento (González Urbaneja, 2007). Interesa analizar cómo se habría desarrollado el simbolismo dentro del Álgebra, y el vínculo que esta rama de la Matemática va estableciendo con la Geometría Clásica, describiendo cómo estos aspectos gravitaron en la génesis de la Geometría de Descartes y Fermat en el siglo XVII.

En la Historia de la Matemática se identifican distintas formas de representar un problema, que va desde el uso del lenguaje cotidiano hasta complejas formas de notación simbólica. En este trabajo se distinguirán tres formas de plantear y resolver problemas algebraicos (Quintero Zazueta, 2001):

1. Álgebra retórica. No existen abreviaturas, ni símbolos especiales. Se usa el lenguaje verbal escrito. Ejemplo: época babilónica entre 2000 y 1600 a. C.
2. Álgebra sincopada. Se usan ya algunos términos técnicos y abreviaturas. Ejemplo: *la Aritmética* de Diofanto. Siglo III.
3. Álgebra simbólica. Es un álgebra más parecida a la que usamos hoy, con símbolos especiales, incógnitas, parámetros, etc. Ejemplo: Siglos XVI y XVII, Viète.

Se analiza cómo estas tres formas se sucedieron en el tiempo, hasta el establecimiento del Álgebra Simbólica, próxima a la que hoy usamos, que sería la más adecuada para lograr avances en esta rama de la Matemática. Cabe señalar, asegún Bell (1949) que la sucesión de estos tres tipos de álgebras no fue lineal, se identifican avances y retrocesos en el uso del simbolismo propio de cada álgebra. Sin embargo, sí puede considerarse que la sucesión histórica de estas álgebras fue influenciada por contextos sociales y culturales, y que su papel fue crucial para el desarrollo de la Geometría Analítica. Entre los resultados destacados, se seleccionan los que evidencian con mayor claridad las características del desarrollo histórico del simbolismo en el Álgebra: su no linealidad, su vínculo con la forma de abordar los problemas y su variación.

Él álgebra hindú se desarrolló principalmente entre los siglos V y XII d. C. Ellos consiguieron avances importantísimos en lo referente a la aritmética y el conteo, y a los sistemas de representación. En lo referente a los aportes a la aritmética, se pueden nombrar el desarrollo de un sistema de numeración posicional análogo al actual y una serie de propiedades para los números negativos y el cero. Además, se les reconoce una gran habilidad en la resolución de ecuaciones indeterminadas, como es el caso de las ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2-Ny^2=1$, donde N es un entero de raíz cuadrada irracional, aunque lo hacían de una manera más mecánica que general listando todas las soluciones, por engorroso que fuese, hasta cifras exorbitantes. Con respecto a la simbolización, esta civilización desarrolló un nivel de abreviación para las operaciones que facilitó mucho el cálculo.

Los hindúes, de quienes se cree construyeron su matemática entorno a *la Aritmética* de Diofanto y al álgebra china, adoptaron un simbolismo parcial, esto es, hicieron uso de un álgebra sincopada. En este sentido se puede destacar que:

- la resta fue indicada poniendo un punto encima del sustraendo;
- la suma fue usualmente indicada por yuxtaposición;
- la multiplicación escribiendo *bha* (la primera sílaba de la palabra *bhavita* “el producto”), y después los factores;
- la división escribiendo el divisor debajo del dividendo, casi de la manera actual, pero sin la barra (por ejemplo: ${}^{3}{}_{4}$);
- la raíz cuadrada escribiendo *ka* (de la palabra *karana*, “irracional”) antes de la cantidad.

Además de las operaciones, Brahmagupta indicaba la incógnita por *yā* (de *yāvattāvat*, “tanto como”). Algunos enteros conocidos fueron también prefijados, por ejemplo, por *rū* (de *rūpa*, “el número absoluto”). Incógnitas adicionales fueron indicadas por las sílabas iniciales de palabras de diferentes colores. Así una segunda incógnita podía ser denotada por *kā* (de *kalaka*, “negro”). De esta manera, $8xy+\sqrt{10}-7$ en la notación actual, podía aparecer como *yā kā 8 bha ka 10 rū 7* en la notación del álgebra sincopada; y del mismo modo, $3xy+2x+2y+\sqrt{13}-8$, sería en hindú antiguo *yā kā 3 bha yā 2 bha kā 2 bha ka 13 rū 8* (Carrillo Navarro, 2003).

Los árabes tomaron de los hindúes su gusto por las matemáticas y las llevaron a Europa nuevamente. Sin embargo, los algebristas árabes que sucedieron a los hindúes y que adoptaron buena parte de los logros matemáticos de éstos y de los griegos, escribieron todo, hasta los números, en palabras en su álgebra retórica. Pero no todo en este período fue un retroceso. En la numeración de las páginas del libro y dibujos figuraba el sistema de numeración hindú que luego sería adoptado por los algebristas europeos de la Edad Media (ibíd., 1949).

Se destaca la importancia del Álgebra Simbólica para el desarrollo del Álgebra y de la Matemática en general. Su brevedad sintáctica facilita la “operacionalidad” y la obtención de nuevos resultados; tarea que resulta en una misión casi imposible con el uso del lenguaje usual (ibíd., 1949). Pero cometeríamos una falta grave al considerar como Álgebra Simbólica sólo al simbolismo del Álgebra actual. A este respecto podemos tomar una serie de ejemplos (Bosch, 1994, p.123):

- Buteo (1559): $1\Diamond P6\rho P9[I\Diamond P3\rho P24$. Forma actual: $x^3+6x+9=x^2+3x+24$.
- Grosselin (1577): $12LMIQP48\,aequalia\,144M\,24LP2Q$. Forma actual: $12x-x^2+48=144-24x+2x^2$.
- Viète (c. 1590): $1QC-15QQ+85C-225Q+274N$ aequantur 120. Forma actual: $x^6-15x^4+85x^3-225x^2+274x=120$.
- Descartes (1637): $yy\infty cy-\frac{cx}{b}y+ay-ac$. Forma actual: $y^2=cy-\frac{cx}{b}y+ay-ac$.
- Wallis (1693): $x^4+bx^3+cxx+dx+e=0$. Forma actual: $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

Como se puede observar, todos estos avances distan mucho del simbolismo actual y, sin embargo, pertenecen a lo que se conoce como Álgebra Simbólica. Incluso Viète, quien es el más cercano temporalmente, tiene una escritura bastante distinta a la que actualmente utilizamos. Pero a él se le atribuye el empleo de letras para los parámetros, dado que distinguió a las variables con vocales

(A, E, I, O, U) y a los parámetros con consonantes (B, C, D, F, G). Fue recién con Descartes que aparecen las primeras letras del alfabeto para designar parámetros y las últimas para las variables mostrando un simbolismo mucho más análogo al que se emplea actualmente (ibíd., 1994).

4.1. La geometría en la Historia del Álgebra y la génesis de la Geometría Analítica

En las secciones del trabajo hemos planteado inicialmente una “separación” entre la Geometría Clásica y el Álgebra que no es tal, ni tiene sentido sostener, dado que desde los orígenes del Álgebra se puede observar un vínculo estrecho con la Geometría Clásica de Euclides. Pero esto no es en un marco de aplicación del Álgebra a la Geometría sino en un marco justificativo. Ello se debe a que, en los inicios del Álgebra, no se tenía plena confianza en la capacidad de esta nueva rama de la Matemática para afrontar y resolver problemas, como sí se confiaba en la geometría desarrollada por Euclides (Dávila Rascón, 2002). Con el transcurso de los siglos, más precisamente, para la época de Fermat y Descartes, empezó a evidenciarse la capacidad de cada uno de estos marcos resolutivos para enfrentar y resolver distintos tipos de problemas como es el caso del “problema de Pappus”, irresoluble en su versión general desde un marco exclusivamente geométrico (González Urbaneja, 2007).

Según González Urbaneja (2007), los orígenes del Álgebra se le atribuyen a Diofanto (325- 409 d. C.) porque su obra es clave en la gestación de la Geometría Analítica; y el Álgebra Simbólica es el instrumento algorítmico básico de su desarrollo. Con su obra *La Aritmética*, Diofanto da lugar a un Álgebra Sincopada y se registran antecedentes muy importantes con relación a la notación algebraica. Con los cimientos construidos a partir de letras o expresiones como abreviaturas para las cantidades indeterminadas, las potencias y operaciones; se fundan las primeras notaciones algebraicas.

Diofanto da inicio al Álgebra con problemas de búsqueda de números que cumplen con determinadas condiciones iniciales. En su obra hizo uso de distintos métodos, aunque no buscó todas las soluciones para sistemas indeterminados. Esta problemática sobre las múltiples soluciones será abordada tiempo más tarde por la civilización hindú.

El Álgebra de Diofanto y más tarde los aportes de los hindúes, contribuyen, en buena medida, a la gestación de un Álgebra Simbólica y, en consecuencia, constituyen un aporte indirecto al nacimiento de la Geometría Analítica. Sin embargo, los árabes (siglos VII a XII d. C.), que heredaron el espíritu por el cálculo de los hindúes y el demostrativo de los griegos; desarrollaron una matemática vinculada a lo práctico en base a una lógica clara y precisa (Bell, 1949; Mora Meneses 2001). .

Los árabes combinaron los aportes de los hindúes y los griegos dando a conocer a la Europa medieval grandes avances matemáticos, entre los que se destaca un potente sistema de numeración, varios textos hindúes y griegos traducidos al árabe (y años más tarde al latín), problemas particulares relativos a la inscripción de un cuadrado en un triángulo isósceles, reglas para descubrir pares de “números amigos”, desarrollos en trigonometría y un método general y geométrico para la resolución de ecuaciones de segundo grado; con lo que se inicia el desarrollo del Álgebra en Europa (Mora Meneses, 2001). Además, dentro del contexto de problemas de comercio, los algebristas árabes plantean soluciones a problemas relacionados con ecuaciones de tercer y cuarto grado, generando la necesidad de encontrar un método general para resolver dichas ecuaciones (Dávila Rascón, 2002). Sin embargo, es muy fuerte la influencia de la Geometría Clásica y, en particular, del Álgebra Geométrica griega en el álgebra medieval. Esto se debe al reconocido *status* que tenía la Geometría desarrollada por Euclides en *Los Elementos*. Así, en la obra *Al- jebr w’almuquabala* de Al- Khowarizmi, principal representante de los algebristas árabes de este período, se omiten resultados negativos de ecuaciones cuadráticas y, además, se recurre a construcciones geométricas para justificar su álgebra. Un ejemplo de “cuadrados y raíces iguales a números” del álgebra árabe es tomado de la obra de Al-Khowarizmi:

> "un cuadrado y diez raíces son iguales a treinta y nueve unidades […] ¿Cuál es el cuadrado que combinado con diez de sus raíces dará una suma total de treinta y nueve? (Dávila Rascón, 2002, p. 8)

La manera de resolver este tipo de ecuación es tomar la mitad de las raíces mencionadas. Ahora, las raíces del problema son diez. Por lo tanto, toma cinco, que multiplicado consigo mismo da veinticinco, una cantidad que agregas a treinta y nueve, y lo cual da sesenta y cuatro. Habiendo tomado entonces la raíz cuadrada de esto la cual es ocho, resta de esto la mitad de las raíces, cinco, lo que deja tres. El número tres representa por tanto una raíz de este cuadrado, mismo que es, por supuesto, nueve. Nueve por lo tanto da ese cuadrado." (Dávila Rascón, 2002, p. 8). En el álgebra simbólica actual el problema se plantea y resuelve de la siguiente manera:

$$x^2 + 10x = 39$$
$$x^2 + 10x + \left(\frac{1}{2}.10\right)^2 = 39 + \left(\frac{1}{2}.10\right)^2$$
$$x^2 + 10x + 25 = 64$$
$$(x+5)^2 = 8^2$$
$$x + 5 = 8$$
$$x = 8 - 5$$
$$x = 3$$

y, por lo tanto, $x^2 = 9$ (ibíd., 2002). Es con este problema que Al –Khowarizmi nos otorga su primera demostración geométrica, recuperando resultados de la matemática clásica griega.

El análisis hasta aquí realizado nos permite inferir a grandes rasgos que, la Geometría se ocuparía del estudio de las figuras y el Álgebra de una generalización de propiedades aritméticas a partir de un simbolismo. Pero el desarrollo de ambas ciencias no fue aislado, sino que, muy por el contrario, se evidenciaron múltiples interrelaciones como es el caso de los árabes y el estudio las ecuaciones de segundo grado, y por otro lado, Apolonio y el estudio de las secciones cónicas. Estos problemas no se habrían resuelto de manera aislada, ni tampoco se hubieran planteado otros. Son ejemplos de esto la resolución general del problema de Pappus y el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral a partir de la Geometría Analítica.

Por otro lado, desde el punto de vista didáctico, se podría afirmar que el ámbito de desarrollo de la Geometría Analítica es un ámbito de investigación y de cuestionamiento de todo lo preexistente. Si se hubiese aceptado todo como fue propuesto en los orígenes, no hubiese existido el Álgebra, ni estaríamos en condiciones de desarrollar una Geometría que la integre. Con esto no tenemos intención de mostrar a la Matemática como una ciencia en la que se derriban teorías, sino por el contrario, como una ciencia en la que van emergiendo nuevos descubrimientos que engloban a los anteriores dándonos un punto de vista diferente (Boido, 2007). Éste es el caso de la geometría de Descartes y Fermat.

Descartes y Fermat fueron dos de los más grandes matemáticos, físicos y filósofos de su época. A ellos se debe la interpretación algebraica de la Geometría y, en consecuencia, muchos de los conocimientos que derivaron de esta nueva forma de hacer matemáticas (cálculo de rectas tangentes y normales a una curva, cálculo de áreas encerradas por curvas, máximos y mínimos, entre otros problemas infinitesimales; soluciones al problema de la consistencia de la geometría; etc.). Dicha interpretación geométrica terminaría de validar al Álgebra como vía para resolver problemas y alentaría a realizar estudios posteriores en esta Área.

Descartes y Fermat desarrollaron en el siglo XVII un análisis geométrico muy semejante, y a pesar de ser contemporáneos, se suele atribuir el descubrimiento de la Geometría Analítica a Descartes y no a Fermat, por el año de publicación de sus obras. Descartes publica en 1637 el *Discurso del método*; mientras que la de Fermat se publica póstumamente. Además de esta ventaja temporal en lo relativo a las publicaciones, los matemáticos posteriores se guiaron principalmente por la obra de Descartes, sobre todo con relación a la notación (Bell, 1949).

Respecto a la herencia de la Geometría Clásica y del Álgebra en la Geometría Analítica se puede decir que, por ejemplo, Menecmo, Apolonio y Pappus utilizaron el equivalente de un sistema de coordenadas, pero carecieron del Álgebra Simbólica para su evolución, mientras que Viète dispuso del instrumento algorítmico del Álgebra Simbólica pero no llegó a utilizar coordenadas. El descubrimiento de la Geometría Analítica tendrá lugar al aunar ambos aspectos en el estudio de las curvas: la introducción de coordenadas y la mecánica operatoria del Álgebra simbólica en la aplicación a los lugares definidos por una ecuación de dos incógnitas.

Fermat y Descartes se basaron en obras griegas, como las de Diofanto, Euclides y Apolonio; obras más recientes como la de Viète; hicieron uso de un sistema de numeración posicional similar al desarrollado por los hindúes; y también, en mayor o menor medida, de un simbolismo que empezaba a predominar en el Álgebra de su época (Quintero Zazueta, 2001). Tanto el trabajo matemático de Fermat como el de Descartes giran en torno al problema de Pappus (290- 350 d. C.), que se enuncia como sigue:

> "Dadas tres (respectivamente cuatro) rectas en un plano, encuéntrese el lugar geométrico de un punto que se mueve de forma que el cuadrado de la distancia a una de las tres rectas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos (respectivamente el producto de las distancias a dos de ellas es proporcional al producto de las distancias a las otras dos), si las distancias se miden en direcciones tales que formen ángulos dados con las líneas correspondientes" (González Urbaneja, 2007, p. 210).

Como respuesta al problema de Pappus, Descartes introduce la construcción del producto, el cociente y la extracción de raíces de segmentos dados sobre la base del segmento unidad, evitando de este modo, la restricción griega de no asignar números a determinados segmentos y la regla de homogeneidad planteada por Viète (ibíd., 2001, p. 54). Fermat, por su parte, utiliza el concepto de "propiedad específica", esto es, concibió el modo de construir las curvas mediante ecuaciones representativas (Hernández, 2002). Así, mientras que Descartes parte de la Geometría Clásica para arribar al Álgebra; Fermat parte de ecuaciones del Álgebra Simbólica de Viète para arribar a las curvas geométricas que representan. Es en este sentido que se considera que Descartes y Fermat realizan, un trabajo inverso y complementario.

Fermat empleó en su obra el álgebra de Viète para sus estudios y, en sus intentos de recuperar la obra perdida titulada *Las Cónicas* de Apolonio, desarrolla la Geometría Analítica (González Urbaneja, 2007). Descartes, en cambio, concibe una notación propia, rica en símbolos; capaz de permitir desarrollos propios del Álgebra Simbólica. Por ejemplo, transgrede la regla de homogeneidad de Viète afirmando que se puede expresar el producto x^2 sobre una misma línea y, de esta manera, se reduce todo a dimensión uno. De hecho, fue él el que ideó la notación actual para potencias: xx, x^3, x^4, x^5, etc. Esta notación se hizo necesaria con el descubrimiento de Descartes, y de este modo las potencias superiores al cubo empezaron a cobrar sentido.

Otro logro importante de Descartes es el de definir una curva en el plano mediante una propiedad determinada, que sea válida para todos sus puntos. Así, se establece una correspondencia inequívoca entre las propiedades algebraicas y analíticas de la ecuación $f(x, y)=0$, y las propiedades geométricas de la curva (Bell, 1949). De esta manera, el Álgebra Simbólica se empieza a adaptar con la geometría desarrollada en la antigüedad, en un proceso que tendría como producto final a la Geometría Analítica.

Los desarrollos de Descartes y Fermat permitirían interpretar cómo se vinculan los cálculos aritméticos con las operaciones geométricas y, en un nivel mayor de abstracción, cómo se vinculan las ecuaciones algebraicas de dos variables con determinadas curvas geométricas. Esta forma de analizar la matemática permite plantear y resolver nuevos problemas. Así, en general, el Álgebra contribuiría a completar la Geometría Clásica; y la Geometría Clásica permitiría nuevos desarrollos algebraicos.

A modo de síntesis se puede decir que el análisis realizado comprende obras matemáticas abordadas tanto por geómetras y por algebristas, cuyos productos decantarían en la Geometría Analítica. Los resultados de este estudio analítico nos permitirían interpretar que la Matemática se habría iniciado con la Geometría, con el estudio de las formas y que, casi en simultáneo, se desarrollan técnicas de conteo. Así, se gestaría una Aritmética (con diversos sistemas de numeración) hasta llegar a las generalizaciones, y obtener como consecuencia resultados absolutos, originándose una Geometría Clásica y, más tarde, un Álgebra sincopada o retórica. Con el desarrollo de un sistema de numeración decimal y posicional (el hindú), y un simbolismo en el Álgebra; se generan las condiciones para la génesis de la Geometría Analítica, que establece un fuerte vínculo entre el Álgebra y la Geometría Clásica.

El retorno a la asociación de números a figuras en el plano, con el análisis en el primer cuadrante del eje cartesiano, es el ejemplo más ilustrativo de la reconciliación de la geometría en el plano, la Aritmética y, en las generalizaciones, el Álgebra; resultados alcanzados por Descartes y Fermat con la Geometría Analítica. En este punto podría considerarse que con esta Geometría se da una especie de vuelta a lo primitivo, a las figuras y formas de la geometría empírica y a la aritmética, pero con un grado de abstracción y generalidad muy superior.

5. Consideraciones acerca de la Geometría escolar

El desarrollo histórico propuesto en este trabajo, tiene por objetivo establecer un posible marco de referencia para la enseñanza conjunta del Álgebra, la Geometría Clásica y Analítica en el Nivel Medio. Esta síntesis puede resultar un aporte significativo para la comunidad de Educadores en Matemática, dado que permitiría interpretar que la geometría analítica no podría haberse gestado separadamente de la Geometría Clásica y el Álgebra; y como consecuencia, una enseñanza disyunta podría carecer de sentido.

La enseñanza de la geometría en la escuela secundaria, no escapa del problema del "autismo temático" (Gascón, 2003) o del encierro de los temas; y ha generado y genera mucha preocupación y una variedad de estudios como consecuencia. Por un lado, se identifican investigaciones que manifiestan la necesidad de revalorizar la enseñanza de la geometría en la escuela secundaria (Gascón, 2002; de Lorenzo, 1980; Sgreccia, Massa, 2012) que es un hecho que ha desaparecido, y que se manifiesta en la disminución de contenidos que se proponen para enseñar. Por medio del diseño de materiales didácticos también se procura reivindicar el estudio de la Geometría escolar, como es el caso de las investigaciones de Llanos y Otero (2013) y Ferrari y Farfán (2008) que lo hacen para el estudio de funciones. Otras desarrollan una discusión acerca de qué geometría hay que enseñar (Galván, 2005; Sgreccia, et. al, 2009; Arrieta, Illarramendi, 1992); entre las que se identifican las que abordan el problema de la separación entre la enseñanza de la Geometría y el Álgebra (Lluis, 1982) y entre la enseñanza de geometría sintética versus la geometría analítica (Gascón 2002, 2003). Según Jones (2000) todo lo anterior podría encuadrarse en el problema de que no hay una delimitación clara del currículum de geometría escolar, problema que no es nuevo y que se ve agudizado por la cantidad de contenidos de geometría que sería deseable incluir en un programa.

Gascón (2003, 2004) por otro lado, sostiene que la imposibilidad de delimitar un currículum es consecuencia de la desaparición de la razón de ser de la geometría escolar. Describe cómo el *"encierro en los temas"* en los programas de la escuela secundaria atenta contra la razón de ser de la Geometría Clásica para los alumnos y para la sociedad en general, que se pone en evidencia en la separación artificial entre la enseñanza de la Geometría Sintética, el Álgebra y la Geometría Analítica. Es en este sentido, que este trabajo puede resultar una contribución para los Educadores en Matemática, dado que permite poner en conocimiento la continuidad y complementariedad que de hecho existe entre estas áreas de la Matemática, y en consecuencia procurar una delimitación unificada del currículum escolar y de los contenidos a enseñar en el nivel medio.

6. Conclusiones

La síntesis colocada en este trabajo permite dar cuenta de la estrecha relación entre la Geometría Clásica y el Álgebra, y la posterior aparición de la Geometría Analítica. Desde los inicios, dentro de la civilización griega, se buscó despojar a la geometría de toda asociación con los números, pero permanecía la idea de medida. Esto llevó a desarrollar un Álgebra Geométrica plasmada en parte en la obra de Euclides, y a algo muy semejante a un eje de coordenadas que permitió a Apolonio estudiar las curvas cónicas. Más adelante, con el desarrollo del simbolismo algebraico y los sistemas de numeración, la relación Geometría Clásica - Álgebra procuró varios desarrollos, aunque sin mucho reconocimiento. Los matemáticos árabes se gestaron en el ámbito de lo práctico, haciendo uso de una retórica para resolver problemas algebraicos, y donde la Geometría de Euclides serviría para confirmar los mismos, lo que permitiría dar indicios de la relación entre Álgebra y Geometría a la que se ha hecho referencia. Se empieza a reconocer como consecuencia, una semejanza entre el mundo algebraico y el mundo geométrico. Con el desarrollo de la Geometría Analítica en el siglo XVII esta relación queda plasmada.

Consideramos en el marco de este trabajo que es preciso tomar en cuenta las razones de ser de estos conocimientos en la cultura, las rupturas y continuidades y las etapas intermedias e iniciales, para proponer una enseñanza con sentido en el siglo XXI, funcional a las necesidades de los ciudadanos.

Como hemos destacado la relación Geometría Clásica, Álgebra, Geometría Analítica es estrecha. Sus orígenes y razones de ser se fueron entrelazando, a tal punto que hoy es importante que los ciudadanos posean nociones básicas de geometría clásica, analítica y de álgebra. Pero en la actualidad la escuela ha escindido artificialmente estas obras matemáticas, y les ha quitado su razón de ser y sentido, sobre todo, abriendo mano de la Geometría escolar. Pero la solución no consistiría en proponer ejercicios descuidando su sentido y su relación con otros conocimientos escolares. Es decir, se requiere tomar en cuenta el sentido intra y extra- matemático de las obras a enseñar. Esto podría dar lugar a nuevos interrogantes tales como ¿Cuál es la Geometría que resultaría funcional y viable para estudiar en la escuela actual? ¿Qué contenidos de Geometría Clásica y Analítica son importantes para vivir en la sociedad actual y continuar estudiando? Queda abierta la necesidad de investigar las razones de la pérdida de sentido de la Geometría en la Escuela Secundaria, lo que involucraría un estudio de los diseños curriculares y un análisis de libros de texto de Secundaria, pertenecientes a distintos períodos históricos. La posibilidad de conocer cómo es que se ha planteado en las referencias la enseñanza de la geometría en diferentes momentos, permitiría dar respuesta a los motivos de la pérdida de sentido de la geometría escolar en la actualidad.

Bibliografía

Arrieta Illarramendi, M. (1992). Bases para un planteamiento actual de la geometría en la enseñanza secundaria obligatoria (12-16*). Suma, 10,* pp. 9-14.

Baldor, A. (1980). *Álgebra*. España: Ediciones y distribuciones Códice S.A.

Barreto García, J. C. (2009). Deducción geométrica de la ecuación cuadráticay su aplicación didáctica en el proceso de enseñanza aprendzaje de la matemática. *Premisa*, 43, pp. 33-49. Disponible en: www.soarem.org.ar/Documentos/43%20Barreto.pdf.

Bell, E. T. (1949). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Boido, G. (2007). Realidad, verdad y lógica matemática. En Otero, M. R., et. al (Ed) *Actas del 1° Encuentro Nacional sobre Enseñanza de las Matemáticas (ENEM)*, LIV-LXV. UNCPBA:Tandil, Argentina.

Bolt, B. (1998). ¿Qué es la geometría? *SUMA*, 29, pp. 5-16.Bosch, M. (1994). La dimensión ostensiva de la actividad matemática: el caso de la proporcionalidad. *Departament de Matemàtiques, Facultat de Ciències, Universitat Autònoma de Barcelona.*

Boyer, E. (1995). *Historia de la matemática*. España: Ed. Alianza Universidad.

Carrillo Navarro, F. A. (2003). Álgebra india. *Apuntes de historia de las matemáticas*, 2 (1), pp. 5-10.

Carson, R. N. y Rowlands, S. (2007). Teaching the Conceptual Revolutions in Geometry. *Science & Education*, 16 (9-10), pp. 921- 954.

Chevallard, Y. (2012). Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement. *Journal du seminaire TAD/IDD*. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/

Crespo Crespo, C. y Guasco, M. J. (1998). *Geometría: su enseñanza* (1ª ed.). CONICET: Buenos Aires, Argentina.

Crystal, D. (1997). Cambridge Paperback Encyclopedia (2ª. ed.). Reino Unido, Cambridge University Press.

Dávila Rascón, G. (2002). El desarrollo del álgebra moderna. Parte I: el álgebra en la antigüedad. *Apuntes de historia de las matemáticas*, 1 (3), pp. 5-21.

de Lorenzo, J. (1980). La muerte de la Geometría. *Revista de Bachillerato, 13*, pp. 31-34.

Díaz Gómez, J. L. (2002). Thales de Mileto. *Apuntes de Historia de la Matemática*. 1(1), pp. 13-18. Disponible en: http://euler.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-2-tales.pdf.

Ferrari, M. y Farfán, R. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(3), 309-354.

Galván, C. (2005). Cuadratura de polígonos. *UNION, 1*, pp. 7-15.

García Cruz, J. A. (1988). Geometría egipcia (y II). *Revista Números*, 17, pp. 27-34.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, *39*, pp. 13-25.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *SUMA*, 44, pp. 25-34.

Gascón, J. (2004). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *SUMA*, 45, pp. 41-52.

González Urbaneja, P. M. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Revista Sigma*, 30, pp. 205-236.

González Urbaneja, P. M. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables: la teoría de la proporción y el método de exhaución. *Revista Sigma*, 33, pp. 101-129.

Hernández, V. M. (2002). La geometría analítica de Descartes y Fermat: ¿Y Apolonio? *Apuntes de historia de las matemáticas*, 1 (1), pp. 32-45.

Jones, K. (2000). Critical Issues in the Design of the Geometry Curriculum. In Bill Barton (Ed), *Readings in Mathematics Education*, pp. 75-90. Auckland, New Zealand: University of Auckland.

Klimovsky, G. y Boido, G. (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático* (1ª ed.) Buenos Aires: AZ editora.

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2013). Operaciones con curvas y estudio de funciones. *SUMA*, 73, pp. 17-24.

Malisani, Elsa (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico: visión histórica. *Revista IRICE*, 13, pp. 1-26.

Meavilla Seguí, V. y Oller Marcén, A. M. (2014). El simbolismo algebraico en tres álgebras españolas en el siglo XVI. *Revista Números*, 87, pp. 59-68.

Mora Meneses, E. (2001). Las matemáticas del Islam. *EUITA explotaciones.* Disponible en: http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/5/5_las_matematicas_en_el_islam.pdf.

Nápoles Valdes, J. E. (2009). *Elementos para una historia de las matemáticas griegas*. Corrientes: Editorial de la Universidad Tecnológica Nacional.

Piaget, J. y García, R. (1983) *Psychogénése et histoire des sciences*. París: Flammarion.

Puertas Castaños, Mª L. (trad.) (1991). *Euclides: Elementos*. Madrid: Editorial Gredos S.A.

Quintero Zazueta, R. (2001). La invención de Fermat de la geometría analítica. *Miscelánea Matemática*, 4. p. 43-58.

Rey Pastor, J.; Babini, J. (1951). *Historia de la Matemática*. Espasa-Calpe: Buenos Aires, Argentina.

Sgreccia, N., Massa, M. (2012). 'Conocimiento especializado del contenido' de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. El caso de los cuerpos geométricos. *Educación Matemática*, *24(3)*, pp. 33-66.

Sgreccia, N., Benetti, C., Menichelli, L., Mezzelani, S., Pittaro, J., Cismondi, E., Duzevic, J., Frattini, J. y Paschero, B. (2009). Análisis de la enseñanza de la geometría en una escuela secundaria argentina. *UNION*, *19*, pp. 93-109.

Smith D. E. (1951). *History of Mathematics*, vol. I y II, Dover Publications, Nueva York 1958.

Torre Gómez, A. de la (2006). El método cartesiano y la geometría analítica. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 8 (1), pp. 1-13. Disponible en: http://revistaerm.univalle.edu.co/otros/adtorre.pdf.

Viète, F. (1983). *The analytic Art: nine studies in algebra, geometry and trigonometry*, Trad. T. Richard Witmer. Kent, Ohio.

Emmanuel Colombo Rojas. Lugar de residencia: Tandil. Lugar y fecha de nacimiento: Azul, 15/07/1987. Dirección para correspondencia: NIECyT, Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Pinto 399, (7000) Tandil, Buenos Aires, Argentina. ecolombo@exa.unicen.edu.ar. Centro de trabajo: Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Tandil, Buenos Aires, Argentina. Títulos: Licenciado en Educación Matemática. Profesor en Matemática. Facultad de Ciencias Exactas.

Viviana Carolina Llanos. Lugar de residencia: Tandil. Lugar y fecha de nacimiento: Tandil, 10/01/1984. Dirección para correspondencia: NIECyT, Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Pinto 399, (7000) Tandil, Buenos Aires, Argentina. vcllanos@exa.unicen.edu.ar, https://www.researchgate.net/profile/Viviana_Llanos. Centro de trabajo: Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Tandil, Buenos Aires, Argentina. Títulos: Doctor en Enseñanza de las Ciencias, Mención Matemática. Licenciada en Educación Matemática. Profesor en Matemática. Facultad de Ciencias Exactas. Investigador Asistente del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

María Rita Otero. Lugar de residencia: Tandil. Lugar y fecha de nacimiento: Tandil, 03/03/1961. Dirección para correspondencia: NIECyT, Departamento de Formación Docente, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA. Pinto 399, (7000) Tandil, Buenos Aires, Argentina. http://rotero.sites.exa.unicen.edu.ar/, rotero@exa.unicen.edu.ar. Centro de trabajo: Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA). Tandil, Buenos Aires, Argentina. Títulos: Doctor en Enseñanza de las Ciencias. Magister en Educación con Orientación en Psicología de la Educación. Profesor en Matemática y Física. Facultad de Ciencias Exactas. Investigador Principal del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Director del Núcleo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias. Facultad de Ciencias Exactas (NIECyT). Coordinador del Programa de Posgrado en Enseñanza de las Ciencias de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA.