NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 92, julio de 2016, páginas 105-116

Análisis de progresos y dificultades en tareas de identificación del rombo en Educación Primaria con GeoGebra[1]

Alberto Arnal-Bailera, Ángel Lancis Fleta
(Universidad de Zaragoza. España)

Resumen

Se detectan dificultades de aprendizaje del concepto de rombo en el último curso de Educación Primaria. Como respuesta a las mismas se diseña una intervención didáctica con GeoGebra y se investiga su validez mediante una metodología cuantitativa y cualitativa, atendiendo a la tasa de éxito en la identificación de figuras y a las justificaciones presentadas. Se observa una clara mejora en la adquisición del concepto aplicado a la identificación de rombos, aunque poco sostenida en el tiempo y limitada por algunos obstáculos didácticos. También se concluye que las actividades favorecen una cierta transición de la identificación mediante la comparación con la imagen conceptual a la utilización de la definición.

Palabras clave

Geometría plana, GeoGebra, Programa informático didáctico, Imagen conceptual, definición.

Title

Analysis of progress and difficulties in identification tasks of the rhombus in Primary Education with GeoGebra

Abstract

Some learning difficulties have been detected about the concept of rhombus in the last year of Primary Education. A teaching intervention using GeoGebra is designed and its validity is investigated by quantitative and qualitative methods, including the comparison of the success rates in identifying figures and the corresponding explanations. It is observed a clear –although little sustained over time– improvement in the acquisition of the concept, with restrictions due to some didactic obstacles. It is also concluded that the activities promote some transition from identification by comparison with the conceptual image to identification using the definition.

Keywords

Plane Geometry, GeoGebra, Didactic Software, Conceptual image, definition.

1. Introducción y objetivos

Es más frecuente encontrar trabajos que ponderan GeoGebra como una herramienta de gran utilidad para la enseñanza de las Matemáticas en las etapas de Secundaria o Bachillerato (Santana y Climent, 2015; Sepúlveda, Vargas y Cristóbal, 2013). No obstante, los profesores de Educación Primaria cada vez están más involucrados en la utilización de este software en la enseñanza de las Matemáticas (Arnal-Bailera y Guerrero-Belloc, 2015). Se presenta en este artículo el análisis de una

[1]Este trabajo ha sido desarrollado por el grupo de investigación "S119-Investigación en Educación Matemática" financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo. También fue parcialmente financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España (Proyecto EDU2015-65378-P).

intervención didáctica en torno al concepto de rombo en 6º curso de Educación Primaria. Se trabaja en un contexto de baja utilización previa de medios tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas, predominando el uso del libro de texto. Queremos contrastar la adecuación de una intervención didáctica con GeoGebra y las posibilidades de este programa para ayudar a superar obstáculos de aprendizaje en sexto de Educación Primaria, concretamente:

1. Estudiar la mejora de la imagen conceptual del rombo.
2. Evaluar el uso de la definición de rombo como estrategia de identificación.

Para ambos objetivos, se estudiarán tanto la corrección de tareas de identificación como las justificaciones de la clasificación de rombos y su evolución tras las actividades con GeoGebra.

Vinner (1991) introduce la idea de imagen conceptual en referencia a aquello que se activa en nuestra memoria cuando leemos o escuchamos el nombre de un concepto conocido. Esto no suele ser la definición del concepto escuchado, sino más bien un conjunto de representaciones visuales o experiencias. En el caso de conceptos geométricos como el rombo, esta imagen conceptual está compuesta por un conjunto de ejemplos (provenientes de la enseñanza recibida y experiencias previas) de dicho concepto y –en ocasiones– de propiedades que el estudiante asocia al concepto. Según esto, una imagen de un concepto es completa y correcta cuando ese conjunto de ejemplos y propiedades es tan amplio que le permiten al estudiante construir e identificar ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades asociadas son correctas. Entenderemos por una mejora en la imagen conceptual el proceso de ampliar el rango de estos ejemplos y propiedades de modo que se adquiera un mecanismo que permita identificar o construir todos los ejemplos del concepto tal y como éste está concebido por la comunidad matemática. En todo ejemplo de concepto podemos encontrar atributos relevantes, que son las propiedades que lo definen como tal concepto, y atributos irrelevantes, que son propiedades no necesarias a ese concepto y que permiten diferenciar unos ejemplos de otros. En particular nos preocupamos por superar las imágenes estereotipadas de rombo (Moriena y Scaglia, 2003) y favorecer la transición desde la clasificación particional de los cuadriláteros hacia una jerárquica (Michael, 1994) como podemos observar en la Figura 1.

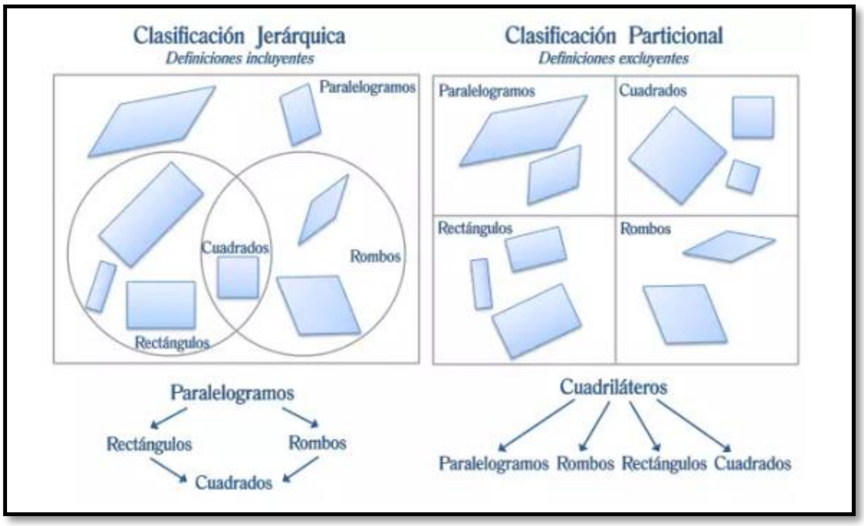

Figura 1. Clasificaciones jerárquica y particional de los cuadriláteros. (Michael, 1994, p. 12)

En los primeros cursos de primaria se forma y asienta el prototipo de rombo en la mente del niño, a partir de la experiencia y los ejemplos que se le han mostrado (Gutiérrez & Jaime, 2012). Este prototipo sirve como referencia con la que el niño compara un objeto para determinar si es o no un rombo. Entre las características del prototipo de rombo podemos citar: diagonales paralelas a los bordes de la página, un tamaño apreciable y dos ángulos claramente agudos. Si queremos una construcción completa del concepto de rombo debemos dotar a la enseñanza de herramientas que permitan superar la presentación de ejemplos estereotipados que construyan un prototipo cerrado y que suponga un obstáculo para aprendizajes posteriores.

Para esta investigación proponemos un uso reorganizador de la tecnología (Lee & Hollebrands, 2008), particularmente de GeoGebra. Este uso trata de proveer al estudiante con nuevas representaciones del conocimiento que enfaticen algún aspecto sobresaliente del mismo difícil de explicitar sin tecnología. De este modo, el programa cambia la forma de pensar del estudiante. Consideramos que las actividades propuestas promueven este uso reorganizador, dado que ofrece representaciones del rombo a partir de otros rombos de modo dinámico, es decir, no se construye un rombo a partir de la medida de su lado o de las diagonales sino deformando de forma continua otros rombos, lo que no podríamos hacer sin el programa.

Con el programa tratamos de superar una utilización predominante de la pizarra tradicional y el libro de texto que puede generar obstáculos al aprendizaje como la ilusión de transparencia –mientras los profesores interpretan un ejemplo como modelo o representante de una clase, los estudiantes ven solamente un ejemplo– expresada por Lasa y Wilhelmi (2014). En nuestras actividades se pueden observar –con matices– algunos de los momentos de utilización de GeoGebra en la enseñanza sugeridos por los autores: Exploración –diseñando una construcción que satisfaga las condiciones iniciales del problema–, dado que les proponemos puzles que se resuelven modificando de diversas formas los rombos que se adjuntan. Ilustración –observando a través de múltiples ejemplos la validez del enunciado propuesto–, discutiendo si los ejemplos propuestos son o no rombos genuinos.

2. Contexto de la intervención

Se realiza una intervención didáctica corta en dos grupos de 6º de Educación Primaria, que incluye actividades con GeoGebra para trabajar el concepto de rombo. Para valorar la efectividad de estas actividades se suministra un cuestionario a los dos grupos un mes antes de la intervención con preguntas relativas a la identificación y construcción de rombos y se vuelve a administrar tras la intervención. Este post-test se administra a uno de los grupos justo a continuación de la actividad y al cabo de una semana al otro grupo, los denominamos respectivamente pre-test, post-test inmediato y post-test diferido. Podemos ver los resultados cuantitativos de los mismos en las tablas 1, 2 y 3.

El contexto donde se realiza la intervención es un Centro Educativo Público de Zaragoza con dos grupos de características muy similares en 6º curso de Educación Primaria, uno de ellos con 21 alumnos y el segundo con 19 alumnos. Fundamentalmente el recurso didáctico más utilizado en la enseñanza con estos alumnos es el libro de texto, por lo que comentamos brevemente la parte referida al rombo.

En el momento en que se realizan las actividades (diciembre de 2015) todavía no han trabajado los polígonos en ese curso, por lo que nos referimos a su experiencia previa en 5º de Educación Primaria: Estudiamos el libro Matemáticas 5 de la editorial Santillana y de la serie Comunidad Entre Amigos de García, Rodríguez y Uriondo (2002a) que es el que utilizaron el pasado curso (ver Figura 2). Analizamos la unidad 8 *Figuras planas. Simetría*. Al igual que se puede observar en cursos previos, la definición del rombo es implícita (no se dice si es una definición o una propiedad de esta figura) y se sigue favoreciendo la clasificación particional de los cuadriláteros en la presentación de los cuadriláteros, aunque los enunciados que acompañan a cada figura no son explícitamente particionales. En cuanto a la presentación de rombos, encontramos 11 rombos en toda la unidad de los cuales 6 son cuadrados y el resto son representaciones estereotipadas de rombo.

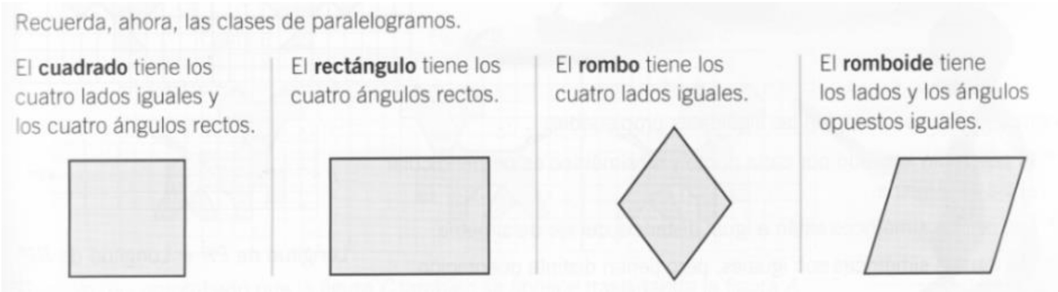

Figura 2. Presentación de los cuadriláteros. 5º Primaria. Ed. Santillana. Entre amigos. P. 95

En el curso en que los alumnos se encuentran aún no se ha estudiado la unidad correspondiente a las figuras planas ni en el momento del pre-test ni tampoco cuando se desarrolla la intervención o ninguno de los post-test. Sin embargo, insertamos la presentación de los paralelogramos utilizada en el libro Matemáticas 6 de Santillana de la serie Comunidad Entre Amigos de García, Rodríguez y Uriondo (2002b) y observamos de nuevo la presentación estereotipada de las figuras y la clasificación particional de los cuadriláteros esta vez sí de modo explícito al poner la condición de desigualdad entre las diagonales de los rombos (ver Figura 3).

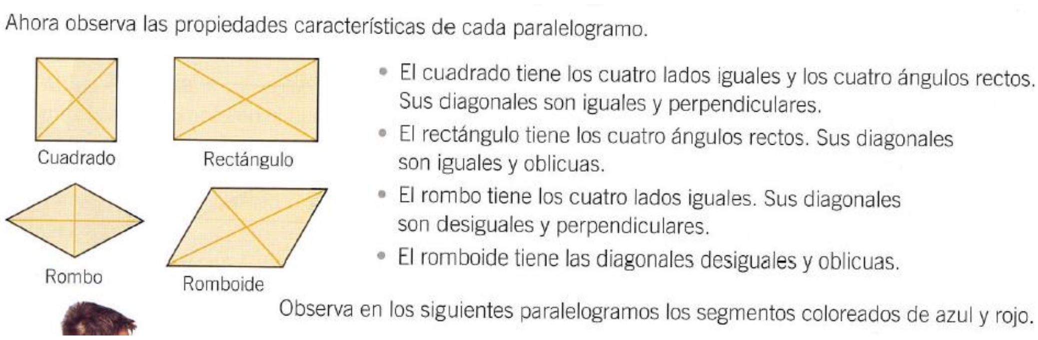

Figura 3. Presentación de los cuadriláteros. 6º Primaria. Ed. Santillana. Entre Amigos. P. 77

Tras la revisión anterior conjeturamos que los alumnos tienen una imagen conceptual del rombo pobre y confusa, formada a partir de pocos ejemplos y con poca reflexión sobre los mismos y que no parece que se vaya a resolver a lo largo de la enseñanza planificada para el presente curso. Por lo tanto consideramos normal que cuando construyan un rombo dibujen uno estereotipado, que cuando identifiquen un rombo tengan dificultades si no se presenta dibujado en su forma estereotipada y que no identifiquen como tipo particular de rombo al cuadrado.

3. Descripción de las actividades

A partir de este análisis inicial se plantean una serie de actividades con GeoGebra con el fin de mejorar el concepto de rombo incluyendo la introducción de una clasificación inclusiva del cuadrado como caso particular del rombo. Nos centramos aquí en lo relativo a las actividades de identificación. Analizaremos los resultados cuantitativa y cualitativamente.

Se formula la pregunta “¿Cuáles de los siguientes polígonos son rombos?” como parte de un cuestionario sobre la identificación y construcción de rombos previo a la intervención con GeoGebra (ver imagen 4). Esta pregunta ha sido adaptada de un cuestionario propuesto por Moriena y Scaglia (2003). En el diseño de la pregunta se tienen en cuenta 5 casos, los cuatro primeros son rombos y el último no lo es. De los rombos, los casos a y c son también cuadrados. Esperamos que los alumnos no identifiquen como rombos estos casos debido a la clasificación particional que han estudiado hasta ahora. Esperamos que el caso d también genere dificultades por estar en una posición no estereotipada. El caso e no es un rombo, pero se ha colocado imitando la posición estereotipada del rombo lo que puede generar dificultades, este caso no se considera por las autoras citadas, pero consideramos necesario estudiar las justificaciones que dan aquí los alumnos.

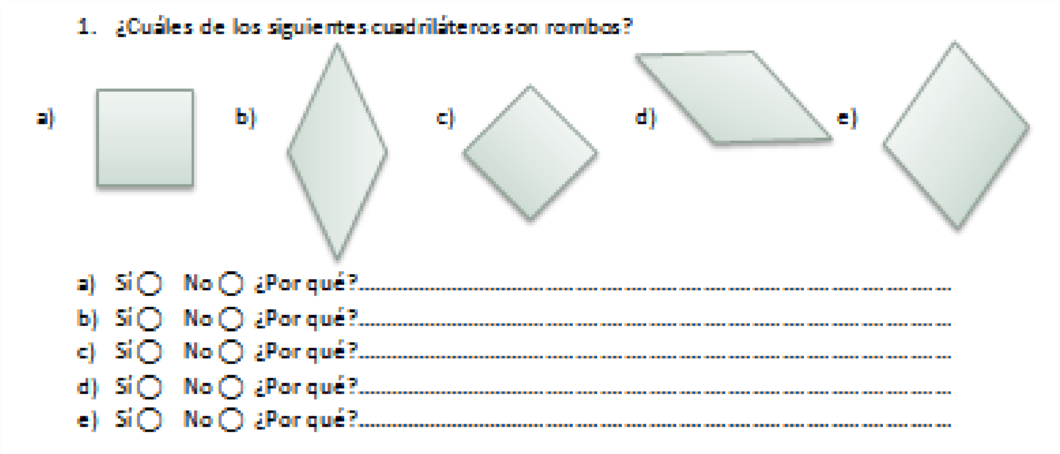

Figura 4. Cuestionario sobre identificación razonada de rombos

Sabemos que los alumnos acuden a su imagen conceptual cuando se enfrentan a un problema de construcción o identificación de polígonos. Hemos seleccionado las actividades con GeoGebra teniendo en cuenta la importancia de que dichas imágenes conceptuales sean completas, así se proponen ejemplos y contraejemplos variados que se pueden someter a las transformaciones del plano que mantienen sus propiedades esenciales de rombo (giro, traslación y homotecia). Las actividades son *Puzle con rombos fijos*, *Puzle de rombos 2* y *Rombos mentirosos*.

Construimos con estas tres actividades una secuencia didáctica de dificultad progresiva con la que conseguir los objetivos didácticos que perseguimos, a medida que explicamos las actividades concretas las tratamos de relacionar con la correspondiente fase de enseñanza de Van Hiele.

La sesión comienza con una breve introducción verbal en la que el investigador explica que se va a trabajar sobre el concepto de rombo y que se va a utilizar un software llamado GeoGebra para ello. Esta introducción de sesión corresponde con la fase 1 de Van Hiele (encuesta/información), en la que el profesor determina mediante el diálogo dos aspectos, el conocimiento previo del concepto a tratar y la dirección que tomará el estudio posteriormente. Se introduce el vocabulario específico del nivel que se trate. Después de la introducción se da paso a la realización de las actividades.

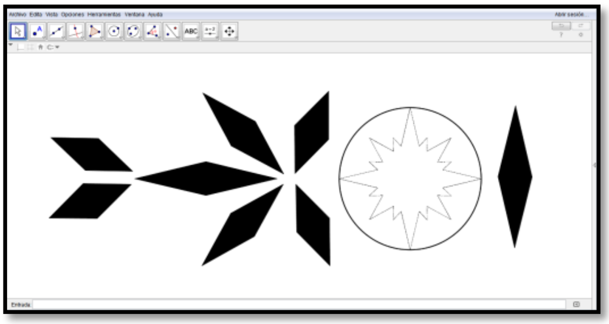

Figura 5. Puzle con rombos fijos

La primera actividad *Puzle con rombos fijos* (ver Figura 5) es muy sencilla y de introducción. Los alumnos, por parejas, tienen que construir un puzle con las piezas que se presentan. Las piezas son rombos y tienen la particularidad de que son fijos, lo que quiere decir que se pueden trasladar pero no se pueden rotar o cambiar de tamaño. Esta particularidad facilita la actividad y la convierte en una actividad de introducción tanto al concepto como a GeoGebra. Durante este proceso de actuación frente a la actividad se presenta la fase 2 de Van Hiele (orientación dirigida) en la que los estudiantes exploran de forma secuenciada el concepto a tratar a través de los materiales que les presenta el profesor. Tras mover las piezas a su lugar correspondiente los alumnos han de contestar por parejas a las preguntas que se proporcionan en la hoja de preguntas. ¿Qué características de las figuras son importantes para que sean rombos? y ¿Cuáles no son importantes? (fase 3 de explicitación en la que los estudiantes expresan y comparten sus opiniones acerca de las estructuras observadas). Señalar que el papel del profesor debe promover que el lenguaje del alumno sea apropiado a su nivel y debe limitarse a repreguntar o rehacer el enunciado de las preguntas para favorecer las intervenciones de los alumnos.

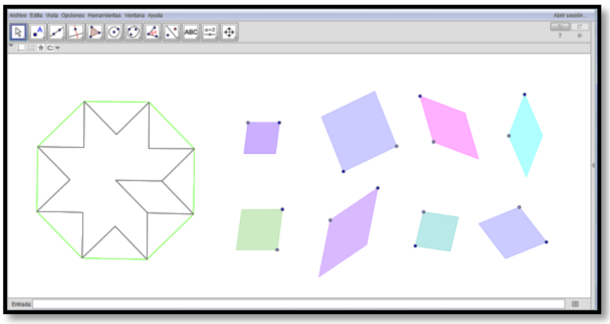

Figura 6. Puzle con rombos 2

A continuación, se presenta la segunda actividad de la sesión (ver Figura 6) *Puzle de rombos 2*, que resulta bastante más compleja. Sigue siendo un puzle en el que se proporcionan rombos como piezas, pero en este caso permite trasladarlos, rotarlos y cambiarlos de tamaño. Modificar las piezas hasta que encajen en la estrella no es tarea fácil si no sabes la técnica concreta, y requiere de muchas modificaciones de los rombos (que se traducen en ejemplos del concepto). Esta actividad forma parte de la fase 4 de Van Hiele (orientación libre) en la que el alumno se enfrenta a tareas con etapas que pueden concluirse a través de distintos procedimientos (las piezas se rotan y se modifican). Se busca la consolidación de los conocimientos aprendidos y su aplicación a situaciones nuevas aunque de similar estructura a las estudiadas previamente. Tras completar el puzle, el alumno ha de contestar la siguiente pregunta: Habéis cambiado el aspecto de los rombos, ¿ha dejado alguno de ser un rombo? Explicad vuestra respuesta.

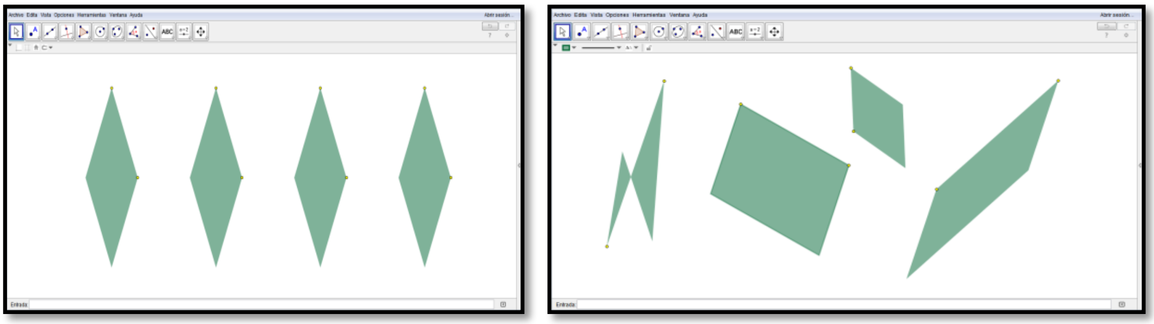

Figura 7. Rombos mentirosos

Para finalizar, se lleva a cabo la actividad *Rombos mentirosos* (ver Figura 7), en la línea de Arnal-Bailera y Guerrero-Belloc (2015) con la que se enriquece la secuencia didáctica ya que se introducen los contraejemplos y la discusión sobre ellos mediante la utilización del test de arrastre –mover los puntos definitorios de una figura con el fin de distinguir si estamos ante un rombo genuino (figura) o ante un rombo aparente (dibujo)–. Esta actividad permite introducir la discusión entre los alumnos de qué es esencial en un rombo y qué no lo es, lo que constituye un trabajo esencial en el proceso de elaboración de una definición. Consideramos adecuado que los estudiantes sean los constructores de sus propias definiciones de los conceptos. Para ello hay que proporcionarles una larga batería de ejemplos y contraejemplos para cada uno de los conceptos a definir:

> Una presentación cuidada de ejemplos y contraejemplos a los estudiantes les ayudará a formar una mejor imagen conceptual y a discriminar con eficacia los ejemplos de los contraejemplos. (Gutiérrez & Jaime, 2012, p. 65)

La tarea de los alumnos en la tercera actividad consiste en manipular las cuatro figuras y decidir cuál de ellas es el único rombo verdadero (ejemplo del concepto) e identificar cuáles son rombos mentirosos (contraejemplos) además de justificar cada elección completando las siguientes frases:

El rombo nº__ es verdadero / falso porque………………………………………………………

En esta última actividad comienza la fase 5 (integración) de Van Hiele en la que el estudiante revisa y unifica los nuevos conceptos y sus relaciones. No se presenta nada nuevo; es una síntesis o incluso revisión de los orígenes que dieron lugar a dicha síntesis.

4. Resultados

Presentamos ahora en forma de tablas los resultados obtenidos a través del pre-test (ver tabla 1) y de los post-test inmediato (ver tabla 2) y diferido (ver tabla 3). Consideraremos una respuesta como correcta cuando se ha identificado correctamente la figura y se ha dado alguna razón para ello. Estas razones pueden ser relativas a la imagen conceptual del rombo o bien a alguna característica matemáticamente relevante. Cuando se clasifica una respuesta en la categoría “imagen conceptual” puede que el alumno haga referencia en su justificación a la posición del rombo “si lo giras sigue siendo un rombo” o a compararlo con su idea gráfica de rombo: “No, porque es un cuadrado”, lo que nos da idea de los ejemplos de rombo que forman parte o no de su imagen conceptual. Cuando se clasifica una respuesta en la categoría "definición" puede que el alumno haga referencia en su justificación a características definitorias del rombo "tiene los cuatro lados iguales" o a otras características que, si bien no definen al rombo o contienen imprecisiones, sí pueden dar idea de que la forma de razonar del alumno se aproxima a una utilización de argumentos más formales "tiene los vértices iguales dos a dos".

		a)	b)	c)	d)	e)
Correcto	Imagen conceptual	2,5%	43,5%	20,5%	24%	7,5%
	Definición	2,5%	15,5%	10%	9,5%	10,5%
	Total	**5%**	**59%**	**30,5%**	**33,5%**	**18%**
Incorrecto	Imagen conceptual	54%	2,5%	21%	20,5%	30%
	Definición	5%	2,5%	-	-	10%
	Total	**59%**	**5%**	**21%**	**20,5%**	**40%**
Sin justificar		**36%**	**36%**	**48,5%**	**46%**	**42%**

Tabla 1. Resultados pre-test

Respecto del pre-test (ver tabla 1), un primer resultado es que los alumnos justifican poco sus respuestas, observándose que, en el mejor de los casos, un 36% de los alumnos no aportan razones para su elección. Respecto de la corrección en la identificación, la figura más reconocida por los alumnos es la b, como era previsible ya que corresponde con la imagen presentada habitualmente en los libros de texto. La figura menos reconocida es la a, que corresponde con la presentada habitualmente en los libros de texto como cuadrado unido esto al hecho de que la enseñanza ha promovido una clasificación particional. En todos los casos de respuesta correcta es mayoritario el recurso a razones relacionadas con la comparación con ejemplos que forman su imagen conceptual de rombo por encima de comentarios relacionados con las características definitorias del rombo.

		a)	b)	c)	d)	e)
Correcto	Imagen conceptual	28%	34%	10%	25,5%	14%
	Definición	20%	38,5%	14,5%	24%	14%
	Total	**48%**	**72,5%**	**24,5%**	**49,5%**	**28%**
Incorrecto	Imagen conceptual	30%	-	33%	9,5%	9,5%
	Definición	-	-	9,5%	-	14,5%
	Total	**30%**	**-**	**42,5%**	**9,5%**	**24%**
Sin justificar		**22%**	**27,5%**	**33%**	**41%**	**48%**

Tabla 2. Resultados post-test inmediato

Respecto del post-test administrado de forma inmediatamente posterior a las actividades (ver tabla 2), un primer resultado es que los alumnos justifican bastante más sus respuestas en general, reduciéndose los porcentajes de respuestas sin justificar sobre todo en los casos a y c (rombos cuadrados), aunque aumentando ligeramente en el e (caso de cuadrilátero no rombo). Todas las figuras se reconocen por porcentajes mayores de alumnos, excepto la c (caso de cuadrado en posición de rombo). Aumenta el porcentaje de alumnos que utiliza características definitorias para sus justificaciones de forma correcta. También aumenta el porcentaje de alumnos que ha enriquecido su imagen conceptual con nuevos ejemplos de rombo salvo en el caso b (algunos alumnos que antes reconocían la figura vía su imagen conceptual ahora la reconocen vía la definición) y en el c (donde se observa un obstáculo de aprendizaje didáctico que explicaremos más adelante). Asimismo, se reduce el porcentaje de alumnos que utiliza la imagen conceptual erróneamente.

Respecto del post-test administrado una semana después de las actividades (ver tabla 3), un primer resultado es que los alumnos mantienen la tendencia observada con el post-test inmediato de justificar más sus respuestas que en el pre-test (casos a, c y d) aunque también se observa una cierta regresión a una situación similar a la inicial (casos b y e), mención aparte merece el caso e ya que la ausencia de justificación incluso aumenta, señal de las dificultades de los alumnos de justificar que una figura no es un rombo y de que son conscientes de esa dificultad y prefieren no dar una justificación. Respecto de las respuestas correctas, se mantiene una cierta mejoría en los porcentajes respecto al pre-test, pero en algunos casos la mejoría es claramente menor que en el post-test inmediato (casos a y b). Dentro de las respuestas correctas justificadas a partir de características definitorias del rombo se ve una clara recesión respecto del post-test inmediato pero manteniendo un avance respecto del pre-test en todos los casos salvo en el c y el e (casos del cuadrado puesto en posición "de rombo" y del contraejemplo).

		a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**
Correcto	Imagen conceptual	30%	38%	26%	42%	27%
	Definición	10%	21%	5%	16%	5%
	Total	**40%**	**59%**	**31%**	**58%**	**32%**
Incorrecto	Imagen conceptual	35%	-	39%	5%	4%
	Definición	-	-	-	-	10%
	Total	**35%**	**-**	**39%**	**5%**	**14%**
Sin justificar		**25%**	**41%**	**30%**	**37%**	**54%**

Tabla 3. Resultados post-test diferido

Dado lo llamativo del caso c, "cuadrado en posición estereotipada de rombo", lo vamos a analizar por separado. En el pre-test fue correctamente identificado y justificado por el 30,5% de los alumnos, pasando a un 24,5% de los alumnos en el post-test inmediato y a un 31% en el post-test diferido. Para una mejor comprensión de este hecho, hemos considerado las respuestas sin justificar y contando con ellas podemos señalar que recibe unos porcentajes de 68% de identificaciones correctas (con o sin justificación) en el test previo frente a unos porcentajes de 38 y 44% en los test posteriores. Estos datos muestran que esta representación se ha identificado más como cuadrado y menos como rombo tras la secuencia didáctica. Estos datos hacen que nos cuestionemos el progreso señalado anteriormente con el caso a de la integración del cuadrado como tipo particular de rombo. Pues los datos indican en primer lugar que en algunos casos se ha integrado el dibujo de cuadrado como tipo particular de rombo. Y en segundo lugar que se ha fortalecido la no inclusión del cuadrado como tipo particular de rombo. Tal contradicción entre el caso a y el caso c supone que nuestra actuación posee limitaciones didácticas. Achacamos dicha contradicción a un uso indiscriminado de los alumnos a la hora de utilizar el giro como técnica para identificar figuras geométricas, asumiendo algunos de ellos que "siempre" hay que girar la figura para compararla con su imagen conceptual. Los alumnos tratan de forma independiente los casos a y c, sin identificar que ambos polígonos son iguales. En el caso a, los alumnos manipulan mentalmente el cuadrado girándolo y observan que "se forma un rombo", es por ello que en el pos-test más alumnos lo identifiquen como tal. En el caso c los alumnos realizarían el mismo giro de forma mental y observan que "se forma un cuadrado", y por ello lo identifican como tal.

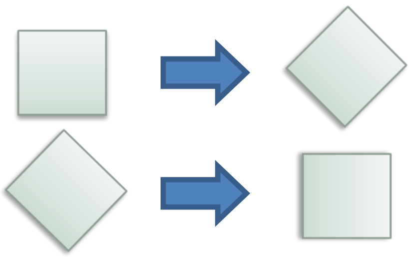

Figura 8. Uso indiscriminado del giro

		a)	b)	c)	d)	e)
Alumno A	Pre-test	Sí. Porque si lo giras es un rombo.	Sí. Porque todos los lados son iguales.	Sí. Porque todos los lados son iguales.	Sí. Porque si lo giras es un rombo.	No. Porque los lados no son iguales.
	Post-test	Sí. Si lo giras sigue siendo un rombo.	Sí. Porque tiene 4 lados iguales, 4 ángulos y 4 vértices.	No. No tiene los 4 lados iguales.	Sí. Si lo giras sigue siendo un rombo.	No. No tiene los 4 lados iguales.
Alumno B	Pre-test	No. Porque los rombos tienen los vértices largos	Sí. Porque sí que es un rombo.	Sí. Porque los rombos suelen ser así.	No. Porque los rombos no están boca abajo.	No. Porque los rombos no tienen un lado más largo que otro lado.
	Post-test	No. Sus 4 lados son desiguales.	Sí. Sus cuatro lados son iguales.	Sí. Sus cuatro lados son iguales.	Sí, porque los lados de los rombos miden igual.	No. Los cuatro lados son iguales.

Tabla 4. Justificaciones de dos alumnos en tareas de identificación de rombo

Tras el análisis de los resultados cuantitativos, ilustraremos los mismos con extractos relevantes sobre algunas justificaciones para una mejor exposición de los avances observados en algunos alumnos (ver tabla 4). De entre las justificaciones de los alumnos, destacan la comparación con la forma estereotipada de rombo combinadas con las alusiones a la relevancia o no de la posición de cada rombo. El alumno A evoluciona desde una concepción del rombo en que la posición es relevante hacia una nueva concepción en que no lo es. Podemos observarlo en la representación del cuadrado estereotipado: de "Sí, porque si lo giras es un rombo" (posición relevante) pasa a "Sí, si lo giras sigue siendo un rombo" (posición irrelevante). Observamos las mismas respuestas para la representación del rombo "tumbado". En el resto de casos justifica sus respuestas mediante la definición de rombo (aludiendo a la igualdad de lados).

Observamos que el alumno B evoluciona hacia la definición del concepto pues pasa de justificar las preguntas aludiendo a la forma estereotipada del rombo a justificarlas mediante la definición. Por ejemplo, para el rombo estereotipado: De "Sí, porque sí que es un rombo" a "Sí, porque sus cuatro lados son iguales". Para el dibujo de cuadrado "en posición de rombo": de "Sí, porque los rombos suelen ser así" a "Sí, porque sus cuatro lados son iguales". O para el rombo en posición no estereotipada: de "No, porque los rombos no están boca abajo" a "Sí, porque los lados de los rombos miden igual".

5. Discusión de los resultados y conclusiones para la docencia

Procedemos en este apartado a poner en relación los resultados observados con los objetivos planteados en la investigación y a realizar una crítica de la intervención con el fin de aportar ideas para una propuesta de intervención fundamentada.

Respecto del objetivo 1, "estudiar la mejora de la imagen conceptual del rombo", podemos decir que hemos tratado de incluir el cuadrado como caso particular e ilustrar el concepto con suficientes ejemplos y contraejemplos, como sugieren Gutiérrez y Jaime, (2012) para mejorar las tasas de acierto en las tareas de identificación. Los alumnos mejoran la imagen conceptual del rombo aunque de forma limitada, pues no incluyen el ejemplo de cuadrado. En la situación previa los alumnos poseen una imagen conceptual del rombo constituida por los ejemplos de rombo estereotipado, rombo "tumbado" y cuadrado en posición estereotipada de rombo. Nuestra secuencia didáctica ha enriquecido su imagen mental a través de numerosos ejemplos y contraejemplos de rombos, aunque el hecho de que no mejore el porcentaje de alumnos que no justifican la identificación del único caso que no es realmente un rombo podría indicarnos la necesidad de enfatizar más aún los contraejemplos en nuestra secuencia. Como resultado, tras la secuencia las tasas de identificación correcta han subido claramente en casi todos los casos estudiados. Una posible explicación de lo expuesto anteriormente estaría relacionada con que la secuencia didáctica promueve el uso del giro como herramienta de identificación de figuras geométricas, lo que unido a que los alumnos de sexto de Educación Primaria no entienden el cuadrado como tipo particular de rombo, da lugar a efectos indeseados en algunas tareas de identificación, mostrándose dificultades matemáticas durante la adquisición o instrumentación de las herramientas que GeoGebra nos pone al alcance como ya se muestra en Arnal y Planas (2013). Esto habría tenido como consecuencia que los alumnos de sexto de primaria habrían girado el cuadrado en "posición de rombo" haciéndolo coincidir con su imagen conceptual de cuadrado y alejándolo de su imagen conceptual de rombo. Deberíamos transmitir también en futuras intervenciones que no siempre es necesario girar una figura geométrica para identificarla.

Respecto del objetivo 2, "evaluar el uso de la definición de rombo como estrategia de identificación", podemos decir que se ha tratado de superar la mera utilización de la comparación con imágenes estereotipadas. En general los alumnos de sexto de primaria de nuestro estudio utilizan inicialmente su imagen conceptual para la identificación correcta de rombos, por encima de la utilización de la definición en coincidencia con muchos autores (Gutiérrez y Jaime, 2012; Moriena y Scaglia, 2003 y Turégano, 2006). Después de la intervención ambas técnicas de identificación se equilibran e incluso el porcentaje de alumnos utilizando la definición superan a la imagen conceptual. Desafortunadamente esta tendencia no se mantiene cuando evaluamos esta identificación una semana después de las actividades con GeoGebra. Dentro de estos cambios sobre la utilización de la imagen conceptual se sitúa una evolución similar de los alumnos que realizan alusiones en sus justificaciones sobre las imágenes estereotipadas de rombo. Concluimos pues, que los cambios son positivos, pero no permanentes, en coincidencia con Planas y Alsina (2006) donde se muestran otros ejemplos de adquisición progresiva y no acelerada del conocimiento geométrico. De cara a situaciones posteriores de enseñanza se concluye que habría que trabajar en este sentido para otros polígonos también, de modo que el objetivo de promoción de la definición sería reforzado desde otras actividades.

Bibliografía

Arnal-Bailera, A. & Guerrero-Belloc, B. (2015). *Construyendo la idea de cuadrado: Un ejemplo de la integración de GeoGebra en el currículo de 1º de primaria.* ReiDoCrea, 4, 129-135.

Arnal, A. & Planas, N. (2013). Uso de tecnología en el aprendizaje de la Geometría con grupos de riesgo: un enfoque discursivo. En Berciano, A.; Gutiérrez, G.; Estepa, A. & Climent, N. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII.* Bilbao: SEIEM, 157-164.

Lasa, A. & Wilhelmi, M. R. (2013). Use of GeoGebra in explorative, explanatory and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 2*(1), 52-64.

Lee, H. & Hollebrands, K. (2008). Preparing to teach mathematics with technology: An integrated approach to developing technological pedagogical content knowledge. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *8*(4), 326-341.

García, P., Rodríguez, M. & Uriondo, J. (2002a). *Matemáticas 5 – Entre amigos.* Madrid: Santillana.

García, P., Rodríguez, M. & Uriondo, J. (2002b). *Matemáticas 6 – Entre amigos.* Madrid: Santillana.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 32, 55-70.

Michael, D. V. (1994). The Role and Function of a Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

Moriena, S. & Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, *15*(1), 5-19.

Planas, N., & Alsina, A. (2006). Argumentos para los futuros maestros en torno al conocimiento matemático. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 42*, 51-63.

Santana, N. M., & Climent, N. (2015). Conocimiento Especializado del Profesor para la utilización de Geogebra en el Aula de Matemáticas. *Números*, *88*, 75-91.

Sepúlveda, A., Vargas, V., & Cristobal. C. (2013). Problemas geométricos de variación y el uso de software dinámico. *Números*, *82*, 65-87.

Turégano, P. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación el el aula. *Ensayos. Revista de Estudios de la Escuela Universitaria de Magisterio de Albacete*, (21), 35-48.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En Tall, D. (ed.), *Advanced mathematical thinking*, 65-81. Kluwer: Dordrecht.

Alberto Arnal-Bailera. Área de Didáctica de las Matemáticas. Facultad de Educación. Universidad de Zaragoza. Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona. Intereses de investigación en la Didáctica de la Geometría y particularmente en las aportaciones de GeoGebra a la enseñanza de la demostración y de la construcción de conceptos en Geometría. albarnal@unizar.es
Grupo de investigación "S119-Investigación en Educación Matemática" (Gobierno de Aragón).
Proyecto de investigación nacional: EDU2015-65378-P (MINECO)

Ángel Lancis Fleta. Graduado en Magisterio en Educación Primaria por la Universidad de Zaragoza. angelancis@hotmail.com