

# Periodikusan gerjesztett gázbuborék bifurkációs struktúrája

## Bifurcation structure of a periodically excited gas bubble

VARGA Roxána<sup>1</sup>, PhD hallgató  
HEGEDŰS Ferenc<sup>1</sup>, Ph.D., egyetemi adjunktus

<sup>1</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék  
H-1111, Budapest, Műegyetem rkp. 3. Tel.: +361-463-1680. Fax: +361-463-3091.  
E-mail: rvarga@hds.bme.hu, fhegedus@hds.bme.hu. Web: <http://www.hds.bme.hu>

### Abstract

*In the present paper the structure of the oscillation of a periodically driven gas bubble is investigated analytically and numerically as well. To describe the bubble radius evolution in time the Keller-Miksis equation is used. Results show that the liquid dynamic viscosity and the surface tension have significant effect on the oscillation. In water the first one is negligible, and the latter one has a greater effect for bubble radius lower than about 5  $\mu\text{m}$ .*

### Összefoglaló

*Jelen dolgozatban egy periodikusan gerjesztett gázbuborék radiális oszcillációját, annak struktúráját vizsgáljuk analitikus és numerikus úton egyaránt. A buboréksugár időbeli megváltozásának leírására a Keller-Miksis egyenletet használjuk. Megmutatjuk, hogy az oszcillációra a dinamikai viszkozitás és a felületi feszültség van nagy hatással. Vízben az előbbi elhanyagolható, míg az utóbbi körülbelül 5  $\mu\text{m}$  buboréksugár alatt játszik fontos szerepet.*

### Kulcsszavak

Bifurkációs struktúra, buborék dinamika, Keller-Miksis egyenlet, gázbuborék, nemlineáris dinamika.

## 1. BEVEZETÉS

Magas amplitúdójú és frekvenciájú hanghullámmal besugározva folyadékot, abban mikron méretű gázbuborékok keletkezhetnek [1,2]. Ezen buborékok radiális oszcillációjuk során olyan erősen tudnak összeroppanni, hogy a lokális környezetükben több ezer Kelvin hőmérséklet és bar nyomás alakulhat ki [3]. Ezek a következmények vezettek arra, hogy az ultrahangos technológiát számos ipari területen alkalmazzák, például az élelmiszeriparban [4-6] vagy orvostudományban [6-10].

Akusztikusan gerjesztett gázbuborékok viselkedésének vizsgálatát azonban nem csak ezek alkalmazási területei motiválják, hanem rezgésük nemlineáris volta is. Az elmúlt évtizedekben számos publikáció jelent meg, amely az ilyen buborékok oszcillációjával, azok bifurkációs struktúrájával foglalkozik [11-19]. Ezek között található olyan eredmények, melyek a nemlineáris oszcillátorokra általános eredményeknek tekinthetők, azonban akadnak olyanok is, melyek csak a gázbuborékokra oszcillációjára jellemzőek. Az utóbbiakra egy példa Behnia és társainak eredménye [18], Azt találták, hogy ha  $R_E\omega$  állandó ( $R_E$  az egyensúlyi buboréksugár,  $\omega$  a gerjesztés frekvenciája), akkor a gerjesztési amplitúdó függvényében a bifurkációs struktúra nem változik lényegesen, azonban erre semmilyen feltételt, vagy érvényességi tartományt nem határoztak meg. Jelen dolgozatban erre a problémára keresünk választ. A buboréksugár időbeli megváltozásának leírására a Keller-Miksis egyenletet használjuk, és a dimenziótlan egyenletből kiindulva analitikusan megvizsgáljuk, hogy az egyenlet hogyan viselkedik, amikor  $R_E\omega$  állandó. Vizsgálatunk eredménye azt mutatja, hogy az oszcillációra a dinamikai viszkozitás és a felületi feszültség hatással lehet akkor is, ha  $R_E\omega$  állandó. Vízben a dinamikai viszkozitás hatása elhanyagolható, míg a felületi feszültség az 5  $\mu\text{m}$  sugárnál kisebb buborékok esetében fontos.

## 2. MATEMATIKAI MODELL

A gömbszimmetrikus gázbuborék sugarának időbeli megváltozására a Keller-Miksis egyenletet használjuk [11]:

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c_L}\right) R \ddot{R} + \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c_L}\right) \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \left(\frac{1}{\rho_L} \left(1 + \frac{\dot{R}}{c_L}\right) + \frac{R}{\rho_L c_L} \frac{d}{dt}\right) (p_L - P_\infty - p_A \sin(\omega t)), \quad (1)$$

ahol  $R=R(t)$  a buborék sugara az idő függvényében. A buborék belsejében és a buborékon kívül a nyomások kapcsolata a buborék falánál:

$$p_G + p_V(T_\infty) = p_L - \frac{2\sigma}{R} - 4\mu_L \frac{\dot{R}}{R}, \quad (2)$$

$T_\infty=25$  °C és  $P_\infty=1$  bar a környezeti hőmérséklet és átlagnyomás.  $\rho_L$ ,  $\mu_L$  és  $c_L$  rendre a folyadék sűrűsége, viszkozitása és a folyadékbeli hangsebesség,  $p_V$  a gőznyomás,  $p_G$  a gáznyomás,  $\sigma$  a felületi feszültség. Ezen anyagjellemzők  $T_\infty$  és  $P_\infty$  függvényében számíthatók ki a Haar-Galagher-Kell [20] állapotegyenletből. Adiabaticus állapotváltozást feltételezve az  $n$  politropikus kitevőt 1,4-nek választottuk, ezzel a gáznyomás a buborékban:

$$p_G = p_{g0} \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3n} \quad (3)$$

$R_E$  az egyensúlyi sugár és a referencianyomás  $p_{g0}=2\sigma/R_E+P_\infty-p_V$  meghatározzák a buborékban lévő gáz mennyiségét.  $p_A$  és  $\omega$  a gerjesztés amplitúdója valamint körfrekvenciája.

## 3. DIMENZIÓTLAN EGYENLETRENDSZER KONSTANS $R_E\omega$ ESETÉN

Behnia és társai eredményének analitikus vizsgálatához a dimenziótlan egyenletet használjuk, melyhez a következő dimenziótlan mennyiségeket vezetjük be: a  $\tau=t(\omega/2\pi)$  dimenziótlan időt, és a  $y_1=R/R_E$  dimenziótlan buboréksugarat.  $y_2=y_1'$  esetén a dimenziótlan egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \frac{N}{D}, \end{aligned} \quad (4)$$

ahol ' a dimenziótlan idő szerinti deriváltat jelenti. Bevezetve a  $C=R_E\omega/2\pi$  mennyiséget a számláló  $N$  és a nevező  $D$  a következőképp írhatók:

$$\begin{aligned} N &= \frac{p_G + p_V}{\rho_L C^2} + \frac{1}{\rho_L C y_1} \frac{2\sigma}{R_E} - \frac{y_2}{y_1 C} \frac{4\mu_L}{\rho_L R_E} \\ &+ \frac{y_2}{y_1 c_L C \rho_L} (p_G(1-3n) - P_\infty - p_A \sin(2\pi\tau) + p_V) \\ &- \frac{1}{2\pi} \frac{p_A \cos(2\pi\tau)}{c_L C \rho_L} - \left(3 - \frac{y_2}{c_L} C\right) \frac{1}{2} \frac{y_2^2}{y_1} \\ D &= 1 - \frac{y_2}{c_L} C + \frac{1}{y_1 c_L} \frac{4\mu_L}{\rho_L R_E}. \end{aligned} \quad (5)$$

A fentiek alapján, ha  $C$  konstans, akkor csak két paraméter nem az, mégpedig:

$$\frac{2\sigma}{R_E} \text{ és } \frac{4\mu_L}{\rho_L R_E} \quad (6)$$

Ennek értelmében, ha a felületi feszültség és a folyadék dinamikai viszkozitása elhanyagolható, akkor a buborék bifurkációs struktúrája nem változhat lényegesen, amikor  $C=R_E\omega/2\pi$  konstans.

A numerikus számításokhoz szükséges még bevezetni a dimenziótlan gerjesztési frekvenciát is:  $\omega_f=\omega/\omega_0$ , ahol  $\omega_0$  a buborék sajátfrekvenciája Brennen alapján [1] :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{3n(P_\infty - p_v)}{\rho_L R_E^2} + \frac{2(3n-1)\sigma}{\rho_L R_E^3} - \frac{4\mu_L^2}{\rho_L^2 R_E^4}}, \quad (7)$$

Érdeemes észrevenni, hogy a (7)-ben lévő tagokat elhanyagolhatónak tekintve a buborék sajátfrekvenciája konstans. Ez az érték, az előző fejezetben említett paraméterek esetén  $\omega_o R_E \approx 20,1$  m/s. Megjegyezzük továbbá, hogy ha  $R_E \omega$  állandó, akkor a relatív frekvencia is az  $\sigma \rightarrow 0$  és  $\mu \rightarrow 0$  esetén mivel:

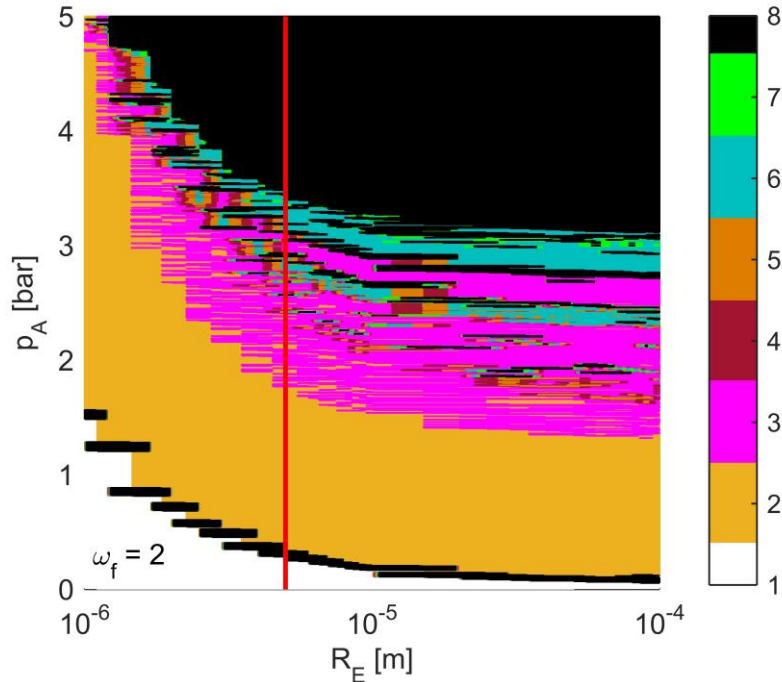
$$\omega_f = \frac{\omega}{\omega_o} = \frac{R_E \omega}{R_E \omega_o}. \quad (8)$$

Ezért a relatív frekvenciával való számítás nem változtat Behnia és társai feltételén.

### 3. A BUBORÉK BIFURKÁCIÓS STRUKTÚRÁJA

A (3)-as egyenletrendszer kezdeti feltétel problémaként kezelve numerikusan is érdemes megoldani. Egy rögzített kezdeti feltétel esetén, addig integráltuk ki az egyenletet az időben, míg a megoldás rá nem konvergált egy stabil attraktorra. Miután egy megoldás bekonvergált, a stabil orbit Poincaré metszetének pontjait mentettük el. Minden paraméter esetén 5 véletlen kezdeti feltételt választottunk annak érdekében, hogy minden lényeges stabil megoldást megtaláljunk. A változtatott paraméterek az egyensúlyi buboréksugár és a gerjesztés amplitúdója voltak. Előbbit  $1 \mu\text{m}$  és  $0,1 \text{ m}$  között változtattuk, összesen 19 esetet vizsgálva, míg utóbbit 0 és 5 bar között változtattuk  $0,01 \text{ bar}$  lépésközzel. Az egyenlet többi paraméterét  $T_\infty = 25 \text{ }^\circ\text{C}$  és  $P_\infty = 1 \text{ bar}$  esetén, víz közegre a Haar-Galagher-Kell állapotegyenlet segítségével számítottuk ki.

Az eredményeket az 1. ábrán egy kétparaméteres bifurkációs struktúrán mutatjuk be  $\omega_f = 2$  relatív frekvencia esetén. A színskála a megoldások periodusát mutatja, a fekete szín kaotikus megoldásra utal. Ahol több megoldás együtt létezik, ott a legnagyobb periodusú megoldás periodusa van ábrázolva. Az ábrán jól látszik, hogy kb.  $5 \mu\text{m}$  (piros függőleges egyenes) egyensúlyi buboréksugár felett a struktúra nem változik lényegesen. Ezen buboréksugár alatt a buborék oszcillációs struktúrája jellegre nem változik, azonban a stabil attraktorok egyre nagyobb gerjesztési paraméter esetén jelennek meg, ahogyan a buborék mérete egyre kisebb.



1. Ábra: Bifurkációs struktúra  $\omega_f = 2$  relatív frekvencia esetén. A színskála a stabil megoldások periodusát jelenti.

## 4. ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen dolgozatban egy akusztikusan gerjesztett gömbszimmetrikus gázbuborék oszcillációját vizsgáltuk meg analitikus és numerikus módon is. A buborék sugarának időbeli megváltozására a Keller-Miksis egyenletet használtuk. Vizsgálatunk célja az volt, hogy a Behnia és társai által meghatározott feltételre [18] érvényességi tartományt határozzunk meg. Ők azt találták, hogy a buborék oszcillációja nem változik lényegesen, ha  $R_E\omega$  állandó. Ez a feltétel azonban nem feltétel nélkül igaz. A dimenziótlan egyenletet analitikusan megvizsgálva azt kaptuk, hogy ebben az esetben a felületi feszültség és a folyadék dinamikai viszkozitása még hatással van az oszcillációra. Ez a két mennyiség víz esetén kb. az  $5 \mu\text{m}$  sugárnál nagyobb buborékok esetében elhanyagolható, azonban az ennél kisebb buborékok esetében már nem.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást az Országos Tudományos Kutatási Alap (OTKA) K81621-es számú pályázata támogatta. A kutatás a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai János ösztöndíj programja támogatta.

## IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Brennen C E, Cavitation and Bubble Dynamics, Oxford: University Press, 1995
- [2] Leighton T G, The Acoustic Bubble, London: Academic, 1994
- [3] R. Mettin, C. Cairós, A. Troia, Ultrason. Sonochem. 25, 24 (2015)
- [4] Y. Iida, T. Tuziuti, K. Yasui, A. Towata, T. Kozuka, Innov. Food Sci. Emerg. 9(2), 140 (2008)
- [5] D. Knorr, M. Zenker, V. Heinz, D.U. Lee, Trends Sci. Tech. 15(5), 261 (2004)
- [6] R. Seshadri, J. Weiss, G.J. Hulbert, J. Mount, Food Hydrocolloids 17(2), 191 (2003)
- [7] S. Mitragotri, Nat. Rev. Drug. Discov. 4, 255 (2005)
- [8] Z. Xu, A. Ludomirsky, L.Y. Eun, T.L. Hall, B.C. Tran, J.B. Fowlkes, C.A. Cain, IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control 51(6), 726 (2004)
- [9] J.E. Kennedy, G.R.t. Haar, D. Cranston, Brit. J. Radiol. 76(909), 590 (2003)
- [10] C.H. Chaussy, W. Brendel, E. Schmiedt, Lancet 316(8207), 1265 (1980)
- [11] W. Lauterborn, T. Kurz, Rep. Prog. Phys. 73(10), 106501 (2010)
- [12] Z.C. Feng, L.G. Leal, Annu. Rev. Fluid. Mech. 29(1), 201 (1997)
- [13] M.S. Plesset, A. Prosperetti, Annu. Rev. Fluid Mech. 9(1), 145 (1977)
- [14] R. Varga, G. Paál, Chaos Solitons Fract. 76, 56 (2015)
- [15] A.J. Sojahrood, O. Falou, R. Earl, R. Karshafian, M.C. Kolios, Nonlinear Dyn. 80(1-2), 889 (2015)
- [16] F. Hegedűs, K. Klapcsik, Ultrason. Sonochem. 27, 153 (2015)
- [17] F. Hegedűs, Ultrasonics 54(4), 1113 (2014)
- [18] S. Behnia, A.J. Sojahrood, W. Soltanpoor, L. Sarkhosh, Ultrasonics 49(8), 605 (2009)
- [19] W. Lauterborn, T. Kurz, Rep. Prog. Phys. 73(10), 106501 (2010)
- [20] Haar, L., Gallagher, J.S., Kell, G.S. NBS/NRC Wasserdampf Tafeln. Springer, Berlin. 1988