

Kovács Szilvia

A Galois-gráf alkalmazása a fizika tanításában

Napjainkban igen széles a tankönyvek skálája, és a tanárnak döntenie kell, melyiket választja. Az egyes tankönyvek tananyag-feldolgozása ugyanis nem teljesen egységes, főleg sorrendi szempontból. Egyetemi éveim alatt gyakran találkoztam ebből adódó problémákkal. Saját tanítványaimnál tapasztalhattam, mennyire lényeges a tananyag tanítási sorrendje, illetve a jó tankönyv megválasztása. Felmerül tehát a kérdés: létezik-e optimális sorrend a tananyag feldolgozásában, és ha igen melyik az? A Galois-gráf, e korszerű matematikai eljárás segítségünkre lehet.

A Galois-gráf vizuálisan ábrázolja a tananyag szerkezetét, s így a kapott rajz alapján segíti a tanárt a tanítandó tananyag optimális elrendezésében, ennek révén a megfelelő tankönyv kiválasztásában is.

A Galois-gráf elkészítéséhez és a leírtak alkalmazásához előismeret nem szükséges, csupán a halmazelméleti egyesítés és metszés műveletére, valamint a számítógép szöveg-szerkesztőként való felhasználásának ismeretére épít, ugyanakkor a tudományosság és az objektív értékek szerinti elbírálás lehetőségét is megadja.

Az eljárást a fizika egy szűk területén, az optikán belül alkalmazom, de remélem, jól látható lesz, hogy az bármely más szakterületen is alkalmazható.

Röviden a Galois-gráfról

Objektumok (tanulók) és tulajdonságok (helyesen megoldott feladat) között létesítünk több-többértelmű kapcsolatot, vagyis egy adott objektumhoz több tulajdonság is tartozhat és viszont. A közös tulajdonságok (azonosak a jól megoldott feladatok) az objektumok egy részhalmaza és a tulajdonságok egy részhalmaza között egy-egyértelmű kapcsolatot létesít. Az ilyen részhalmaz-párt zártnak nevezzük, mert sem a tulajdonságok, sem az objektumok részhalmaza nem bővíthető anélkül, hogy a másik részhalmaz eleminek száma ne csökkenne. A zárt részhalmaz-párokat matematikai eljárás segítségével, számítógéppel meg tudjuk keresni. Ehhez a tulajdonságokat és objektumokat relációtáblába kell rendeznünk, ez lesz a számítógép számára inputként szolgáló relációtábla. Outputként a zárt részhalmaz-párok listáját kapjuk meg. A gráfot a zárt részhalmaz-párok alapján készítjük el. Minden zárt részhalmaz-párt egy körrel jelölünk. Eldöntjük, hogy az objektumok vagy a tulajdonságok szerint kívánjuk-e elkészíteni a gráfot. Rendezzük például tulajdonságok szerint. Rajzoljuk egymás mellé az egyelemű zárt tulajdonság részhalmazokat, föléljük egy másik szintre a kételeműeket stb. Így kapjuk a gráf szögpontjait. Az első emelet alá rajzoljunk egy nulla emeletet, a legfelső fölé pedig a minden elemet jelző kört. A pontokat a következő szabály szerint kötjük össze: válasszunk ki egy tetszőleges szögpontot, majd ezt kössük össze minden olyan alatta levővel, amely ennek legnagyobb részhalmazát jelölő kör. Az eljárást minden szögpontra ismétéljük meg. Ezután a szögpontok alá beírjuk azokat a részhalmaz-párokat, amely szerint rendeztünk, fölé pedig a hozzá tartozó objektum-részhalmazokat. Ezzel egy úgynevezett Galois-gráf áll előtünk.

Az elkészült gráf megadja a vizsgált dolgok és tulajdonságaik teljes fogalmi rendszerét, illetve hierarchiáját. Leolvasható, milyen szerkezetet alkot a fogalmak rendszere, illetve megállapítható, hogy melyek az össze nem hasonlítható fogalmak, ezek egymás mellett (egy szinten) találhatók a rajzon.

Összefoglalva: „A Galois-gráf véges számú objektum és tulajdonság közötti több-többértelmű összefüggést visszavezeti zárt objektumcsoportok és tulajdonságcsoporthoz közötti egy-egyértelmű összefüggésre úgy, hogy ezek ábrázolása megmutatja a köztük levő hierarchiát és struktúrát is. Az egy-egyértelmű összefüggések a felvett adatokból alakítható teljes fogalmi rendszert mutatják.”

A Galois-gráf a hálóelméleten alapul, tehát matematikai szemléletű, elkészítése algoritmikus, nem heurisztikus és objektív képet ad az adott témáról. Esetünkben egyszerű a tanulók tudásának szerkezetéről, illetve a tananyag ideális szerkezetéről. Az előbbi lehetőséget ad a tanárnak az osztályzásra, így a dolgozat megírása nem öncélú, az beépíthető a tanmenetbe, utóbbi pedig tájékoztatást ad egy követendő tanítási sorrendről, és ez az, amit igyekszem vizsgálódásom középpontjába állítani.

Amellett, hogy a dolgozatokat objektíven értékeljük, akár az osztály, illetve csoport egészének teljesítményéhez viszonyítva, a tananyag olyan struktúráját is megkapjuk, amelynek alapján megállapítható, hogy a tananyagrészek tanításának melyik az az ideális sorrendje, amellyel a legjobb eredményt érhetjük el. Mindezt leolvashatjuk a megfelelően felrajzolt Galois-gráfról.

Gráfunk valamely szögpontja a valamely legnagyobb feladatcsoportot jól megoldó legnagyobb tanulócsoporthoz jelenti. A gráfot egészében tekintve pedig megtudhatjuk, hogy milyen ismeretelemek fordulnak elő együtt, ezek milyen más ismeretelemek együttesére épülnek, és hogy mely tanulók tartoznak ebbe a csoportba. Így ez az elrendezés megmutatja a csoport tudásszerkezetét. A gráf továbbá alkalmas hagyományos osztályzatok megállapítására is. Megállapítjuk, hogy a gráf melyik emelete hányas osztályzatnak felel meg, és eszerint meghúzzuk azokat a vízszintes vonalakat, amelyek az egyes osztályzatokat jelentik.

A kiértékelés alapjai és menete, elnevezések

A kitöltött dolgozatlapok alapján minden esetben elkészíthető a tanulók-feladatok relációtábla, melynek egyes sorait aszerint töltjük ki, hogy az adott tanuló a feltüntetett feladatot megoldotta-e – ebben az esetben a relációtáblában 1 szerepel, vagy nem oldotta meg – ebben az esetben az adott feladatszám alatt 0 szerepel. Mivel a relációtábla a Galois-gráf elkészítésének alapja, abban a feladatszámok természetesen a már feltüntetett feladatokat jelentik, vagyis azokat az elemi egységeket, amelyekről egyértelműen eldönthető, hogy a tanuló megoldotta-e vagy sem. Előfordulhat, hogy a relációtábla azonos sorokat vagy oszlopokat tartalmaz, melyek azonban a mi számunkra nem különbözöek, ezért ebben az esetben külön el kell készíteni egy relációtáblát, amely a számítógépes program inputjául szolgál, ennek minden sora és oszlopa különböző. Outputként e relációtáblázat zárt részalmaz-párjait adja ki a program, melyek alapján a gráf elkészíthető. Ezután meg kell keresnünk az úgynevezett optimális utat, s annak révén a problémáknak azt a tanítási sorrendjét, mellyel a legtöbb diákot a legteljesebb tudás birtokába juttathatjuk. Az optimális út megkeresésének algoritmusához meg kell értenünk, mit is jelentenek a kiválasztott szögpontok, ezért ennek ismertetését lényegesnek tartom.

A gráfokat tekintve azt látjuk, hogy az első emeleten az alapnak tekinthető ismeretek foglalnak helyet, ezekre épül aztán a többi ismeret. Az optimális út egy olyan út a gráfon, amely kevés, alapozó ismerettől több vagy esetleg a legtöbb ismerethez vezet. Ennek az útnak a megkeresésére használható az alábbi algoritmus.

Szögpont számossága

Egy $m + 1$ emeletes gráf x -edik emeletén levő P^x szögpontjából, az összes $x + k$ -edik emeletre haladó szakasz-gráfél-számát a $\#P^x$ jellel jelöljük, ahol $x + k \geq 0$ és $k \geq 1$, míg az összes x -ediknél kisebb emeletre haladó szakasz számát $\#P^x$ jellel jelöljük, ahol $x - k \geq 0$ és $k \geq 1$, és a P^x szögpont felső, illetve alsó számosságának nevezzük.

Egy gráf összes emeletének száma $m + 1$, így az emeletek száma x . Lehetséges értékei $x = 0, 1, \dots, m$.

$\#P_1^x > \#P_2^x$ esetén P_1^x a P_2^x -nél nagyobb felső, illetve $\#P_1^x > \#P_2^x$ esetén P_1^x a P_2^x -nél nagyobb alsó számosságú.

Maximális számú szögpont

Ha a gráf x -edik emeletének pontosan egy olyan P^x szögpontja van, amelyre $\#P^x = \text{maximum}$, akkor azt $\max \#P^x$ -szel jelöljük, és maximális felső számosságú szögpontnak mondjuk.

Hasonlóképpen vezetjük be a $\max \#P^x$ maximális alsó számosság jelét is.

Ekvivalens szögpontok

Ha $\#P_1^x = \#P_2^x$, akkor P_1^x és P_2^x felülről, ha pedig $\#P_1^x = \#P_2^x$, akkor alulról ekvivalens szögpontok.

Emeletugrás

Ha P^x -ből az x -edik emeletről olyan $P^x + k$ -ba halad egy szakasz, hogy $k > a$, akkor emeletugrásról beszélünk.

Ha több $k - k_1, k_2 \dots$ van, akkor $k_1 > k_2$ esetén a k_1 mentén az emeletugrás nagyobb.

Lépésszám

Lépésszámnak nevezzük és α^x -szel jelöljük az x -edik emeletről, P^x szögpontból az m -edik (utolsó) emeletre vezető, az emeleteket összekötő szakaszok számának összegét: $\alpha^x = \sum_{m_k=x}^m k$, minden P_k -ra, $k \leq m - x$.

Ha egy P^x -re van olyan α^x , ahol $\alpha_i^x = m - x, i \leq (x^m)$, ahol $x < m$, akkor nincs emeletugrás.

Ha egy P_1^x -hez tartozó minden α_i^x -re $\alpha_i^x \leq m - x$, akkor van emeletugrás, és $m - x - \alpha_i^x$ egyenlő az emeletugrások számával.

Az optimális út megkeresésének algoritmus

1. Ha az x -edik emeleten van felső maximális szögpont, akkor ezt a P^x -et választjuk.
2. Ha nincs, akkor azt a P^x -et választjuk a legnagyobb felső számosságú, felülről ekvivalens szögpontok közül, amelyből halad gráfél a $\max \#P^{x+1}$ -nek megfelelő szögpontba, ha van felső maximális szögpont az $x + 1$ -edik emeleten.
3. Ha nincs, akkor azt a P^x -et választjuk, amely $\max \#P^x$, ha van alsó maximális szögpont az x -edik emeleten.
4. Ha nincs, akkor azt a P^x -et választjuk, amelyet összeköt gráfél a $\max \#P^{x+1}$ -gyel, ha van maximális szögpont az $x + 1$ -edik emeleten.
5. Ha nincs, akkor a legnagyobb felső számosságú, felülről ekvivalens, x -edik emeleti szögpontok közül azt a P^x -et választjuk, amelyre $\alpha^x = \text{maximum}$, azaz amelynek legnagyobb a lépésszáma.
6. Emeletugrást az x -edik emeleten csak akkor választunk, ha az 1–5. szabályok egyike sem dönt a P^x kiválasztásában. Ebben az esetben azt a P^x -et választjuk, amelyhez tartozó α^x bármely más α_i^x -nél nagyobb.
7. Ha az 1–6. szabályok alkalmazása nem dönt a P^x kiválasztásában, akkor az x -edik emelet ekvivalens szögpontjai közül azokat a P^x -eket választjuk, amelyekből az $x + 1$ -

edik emelet ekvivalens szögpontjai közül azonos P^{x+1} -be vezetnek gráfélek az x -edik emeletről.

8. Az eljárást $x = 0$ -tól kezdve, rendre $x = m$ -ig elvégezzük.

9. A kiválasztott szögpontokat az elemek növekvő sorszámának sorrendjében összekötjük. Az eljárás eredményeként egy olyan törött vonalat kapunk, amely a gráf 0-dik emeleteről az m -edikig vezet. Ezt nevezzük optimális útnak.

Ha az optimális út egy része elágazik, majd újra egyesül, akkor hurokról beszélünk. A hurok két végpontja közötti utak ekvivalens utak.

A vizsgálat tárgya, illetve célja

A vizsgálat tárgya az optika, ezen belül is főleg a geometriai optika kiegészítve néhány, az általános iskolában is tanult hullámoptikai fogalommal. A megtanítandó fő témakörök, fogalmak és képletek:

Az általános iskola 8. osztályában

A síktükör

- a síktükör képalkotása;
- a kép nagysága, állása, képtávolság, a kép természete;
- valódi kép, látszólagos kép;
- a síktükörben látott kép jellemzése.

A gömbtükörök

- fajtái;
- fénytani középpont, geometriai középpont, optikai tengely, görbületi sugár;
- fókusz, fókusz-távolság;
- $f = r/2$;
- a homorú, illetve domború tükör képalkotása.

A tükörképek. (1. táblázat)

A fénytörés lencséken

- optikai lencse, lencsék fajtái;
- dioptria: a méterben kifejezett fókusz-távolság reciproka.

A lencsék képalkotása (2. táblázat)

- jellegzetes sugármenetek;
- leképzési törvény mint tapasztalati tény;
- a nagyítás $N = K/T = k/t$.

A gimnázium 3. osztályában

Az optikai lencsék és tulajdonságaik;

- az optikai lencse definíciója;
- az optikai lencsék fajtái, a vékonylencse fogalma;
- optikai tengely, optikai középpont;
- fókuszpont (valódi, illetve látszólagos), fókusz-távolság;
- törőerősség $D = 1/f = (n-1)(1/r_1 + 1/r_2)$;
- nevezetes sugármenetek.

Az optikai tükrök és tulajdonságaik

- definíciója és fajtái;

tükör	a tárgy			a kép	
	helye	természete	állása	nagysága	helye
síktükör	tetszőleges	látszólagos	egyező	tárggyal megegyező	tükör mögött
domború tükör	tetszőleges	látszólagos	egyező	kicsinyített $K < T$	tükör mögött $k < t$
homorú tükör	$t < f$	látszólagos	egyező	nagyított $K > T$	tükör mögött
	$t = f$	nincs kép			
	$t > 2f$	valódi	fordított	kicsinyített $K < T$	tükör előtt $k < t$
	$f < t < 2f$	valódi	fordított	nagyított $K > T$	tükör előtt $k > t$

1. táblázat. Tükröképek

lencse	a tárgy			a kép	
	helye	természete	állása	nagysága	távolsága
homorú	tetszőleges	látszólagos	egyező	kicsinyített $K < T$	lencse előtt $-k < t$
domború	$t < f$	látszólagos	egyező	nagyított $K > T$	lencse előtt $-k > t$
	$t = f$	nincs kép			
	$f < t < 2f$	valódi	fordított	nagyított $K > T$	lencse mögött $k > t$
	$t = 2f$	valódi	fordított	megegyező $K = T$	lencse mögött $k = t$
	$t > 2f$	valódi	fordított	kicsinyített $K < T$	lencse mögött $k < t$

2. táblázat. A lencsék képalkotása

- geometriai középpont, optikai középpont, optikai tengely;
- gömbtükör sugara, fókusz távolsága $f = r/2$;
- nevezetes sugármenetek.

A leképezés lencsékkel és tükrökkel

- képtávolság, tárgytávolság;
- leképezési törvény $1/t + 1/k = 1/f$, illetve $k = tf/(t - f)$;
- nagyítás $N = K/T = k/t$;
- képtulajdonságok;
- síktükör képalkotása $-k = t$.

A fénytörés új közeg határán, az optikailag sűrűbb, illetve ritkább közeg fogalma.

Jól látható az is, hogy az általános iskolában, illetve a gimnáziumban a tananyagot teljesen fordított sorrendben dolgozzák fel. Talán azért, mert az általános iskolában a tárgyalás sokkal inkább a tapasztalatokon alapul.

Ennek megfelelően a kiértékelés két fő fejezetre tagolódik.

Az első részben az általános iskolában íratott dolgozatok, illetve a gimnáziumban íratott dolgozatok alapján optimális utat keresünk az egyes iskolatípusokban külön-külön, a második részben a két optimális út összehasonlítása zajlik tartalmi szempontok alapján. Mivel a gimnáziumi tananyag az itt részletesen tárgyaltnál jóval bővebb, és az itt elemzett feladatok egy témazáró feladatlap részeként szerepeltek, ezért lehetőség adódott arra is, hogy a teljes gimnáziumi optikaanyag struktúráját megkíséreljem elkészíteni, de ez technikai okok miatt nem járt sikerrel, ugyanis több mint 500 szögponthoz gráfokat kellett volna megrajzolni és kielemezni.

A vizsgálat módja

A felméréseket a következő iskolákban és körülmények között végeztem el:

Az általános iskolai felmérések

– helye: Horváth István Általános Iskola, Pétfürdő;

– időpontja: 1998. május;

A felmérésben résztvevő osztályok: 8. A, 8. B.

Fizikatanár: *Lukácsi Imréné.*

A feladatmegoldás ideje: 45 perc. Segédeszköz nem használható.

A tananyagrészt tárgyalása előtt a tanár számára már ismertek voltak a feladatsorok, melyeket utólagosan módosítani kellett néhány pontban, mivel az idő rövidege miatt néhány rész részletesebb tárgyalására nem volt lehetőség. Így a megíratott dolgozat a következő példákából állt:

Feladatsorok az általános iskola 8. osztálya számára

A csoport

1. Rajzold meg a tárgy képét a nevezetes sugármenetek felhasználásával! Tüntesd fel az összes nevezetes sugármenetet! Jellemezd a képet! Nevezd el a betűvel jelölt pontokat! (Homorú tükör, kétszeres fókusz távolságon kívüli tárgy.)

2. Egy domború lencse fókusz távolsága 10 cm. Milyen messze kell helyezni a tárgyat a lencsétől, hogy valódi képet kapjunk? Kicsinyített képet kapjunk? Tárggyal megegyező állású képet kapjunk?

3. Egy síktükörtől 6 cm-re áll egy 3 cm magas tárgy. Szerkeszd meg a tárgy képét! Jellemezd ezt a képet!

4. A fénysugár vízből levegőbe lép. A törési szög egyenlő a beesési szöggel, hogyan lehetséges ez? Hány fokos a törési szög?

5. Egészítsd ki a mondatot!

Ha a fény optikailag sűrűbb anyagából ritkábbba lép, akkor...

A merőlegesen beeső fénysugár...

Más szögben beeső fénysugár esetén...

Javítókulcs

1. feladat

A 4 sugármenet megrajzolása 1-1 pont.

4 pont

Jellemzés: Valódi, fordított állású, kicsinyített kép.

3 pont

Elnevezések: C – geometriai kp, A – optikai kp, B – fókuszpont.

3 pont

Összesen

10 pont

2. feladat

Valódi kép: $t > 10$ cm

1 pont

Kicsinyített kép $t > 20$ cm

1 pont

Tárggyal megegyező állású kép. $t < 10$ cm

1 pont

Összesen

3 pont

3. feladat

Szerkesztés

2 pont

(mivel 2 sugármenetet igényel).

Jellemzés: látszólagos, egyező nagyságú és állású.

3 pont

Összesen

5 pont

4. feladat

A fénysugár a felületre merőlegesen érkezett.

1 pont

A törési szög 0 fokos.

1 pont

Összesen

2 pont

5. feladat

a, nem törik meg

1 pont

b, megtörik vagy teljesen visszaverődést szenved

2 pont

Összesen

3 pont

A dolgozat pontszáma összesen:

23 pont.

B csoport

1. Rajzold meg a tárgy képét a nevezetes sugármenetek felhasználásával! Tüntesd fel az összes nevezetes sugármenetet! Jellemezd a képet! Nevezd el a betűvel jelölt pontokat! (Homorú tükör, kétszeres fókusz távolságon kívüli tárgy.)

2. Egészítsd ki a mondatot!

Ha a fény optikailag sűrűbb anyagból ritkábbba lép, akkor...

A merőlegesen beeső fénysugár...

Más szögben beeső fénysugár esetén...

3. Egy domború lencse fókusz távolsága 20 cm. Milyen messze kell helyezni a tárgyat a lencsétől, hogy valódi képet kapjunk? Kicsinyített képet kapjunk? Tárggyal megegyező állású képet kapjunk?

4. A fénysugár vízből levegőbe lép. A törési szög egyenlő a beesési szöggel, hogyan lehetséges ez? Hány fokos a törési szög?

5. Egy síktükörtől 5 cm-re áll egy 4 cm magas tárgy. Szerkeszd meg a tárgy képét! Jellemezd ezt a képet!

Javítókulcs

1. feladat

A 4 sugármenet megrajzolása 1-1 pont.

4 pont

Jellemzés: Valódi, fordított állású, kicsinyített kép.

3 pont

Elnevezések: C – geometriai kp, A – optikai kp, B – fókuszpont.

3 pont

Összesen

10 pont

2. feladat

a, nem törik meg

1 pont

b, megtörik vagy teljesen visszaverődést szenved

2 pont

Összesen

3 pont

3. feladat

Valódi kép $t > 20$ cm

1 pont

Kicsinyített kép $t > 40$ cm

1 pont

Tárggyal megegyező állású kép $t < 20$ cm

1 pont

Összesen

3 pont

4. feladat

A fénysugár a felületre merőlegesen érkezett.

1 pont

A törési szög 0 fokos.

1 pont

Összesen

2 pont

5. feladat

Szerkesztés

2 pont

(mivel 2 sugármenetet igényel).

Jellemzés: látszólagos, egyező nagyságú és állású.

3 pont

Összesen

5 pont

A dolgozat pontszáma összesen:

23 pont.

Mint látható, az egyes csoportok csupán a feladatok sorrendjében, illetve néhány számbeli adatban különböznek egymástól, ami a feladatmegoldás szempontjából nem jelent lényegi különbséget, így a két csoport azonosnak vehető, csupán a kiértékeléskor kell arra figyelni, hogy a megfelelő számokhoz a megfelelő részfeladatot rendeljük hozzá.

Teljes relációtábla (folytatás a következő oldalon):

Tanulók/feladatok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
1. Baranyai Dániel	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
2. Vit Viktor	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
3. Farkas Andrea	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4. Keresztes Gábor	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1
5. Csanyiga Péter	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

Tanulók/feladatok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
6. Horváth Gergő	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	
7. Bendei Alexa	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	
8. Lázár Csaba	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9. Ámán Andrea	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	
10. Nádasi Mihály	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	

Azonos oszlopok: $1 = 2 = 3$

Ezek figyelembevételével az inputként szolgáló relációtábla:

```

110111110001110101111
111110010010000101111
111110111111111111110
100011010001111001101
011000000000000011000
111100010001010111000
010011010000110101110
01011000000000001000
100111010000010001100
011111000101000001000

```

A zárt részhalmaz-párok listája (folytatás a következő oldalon):

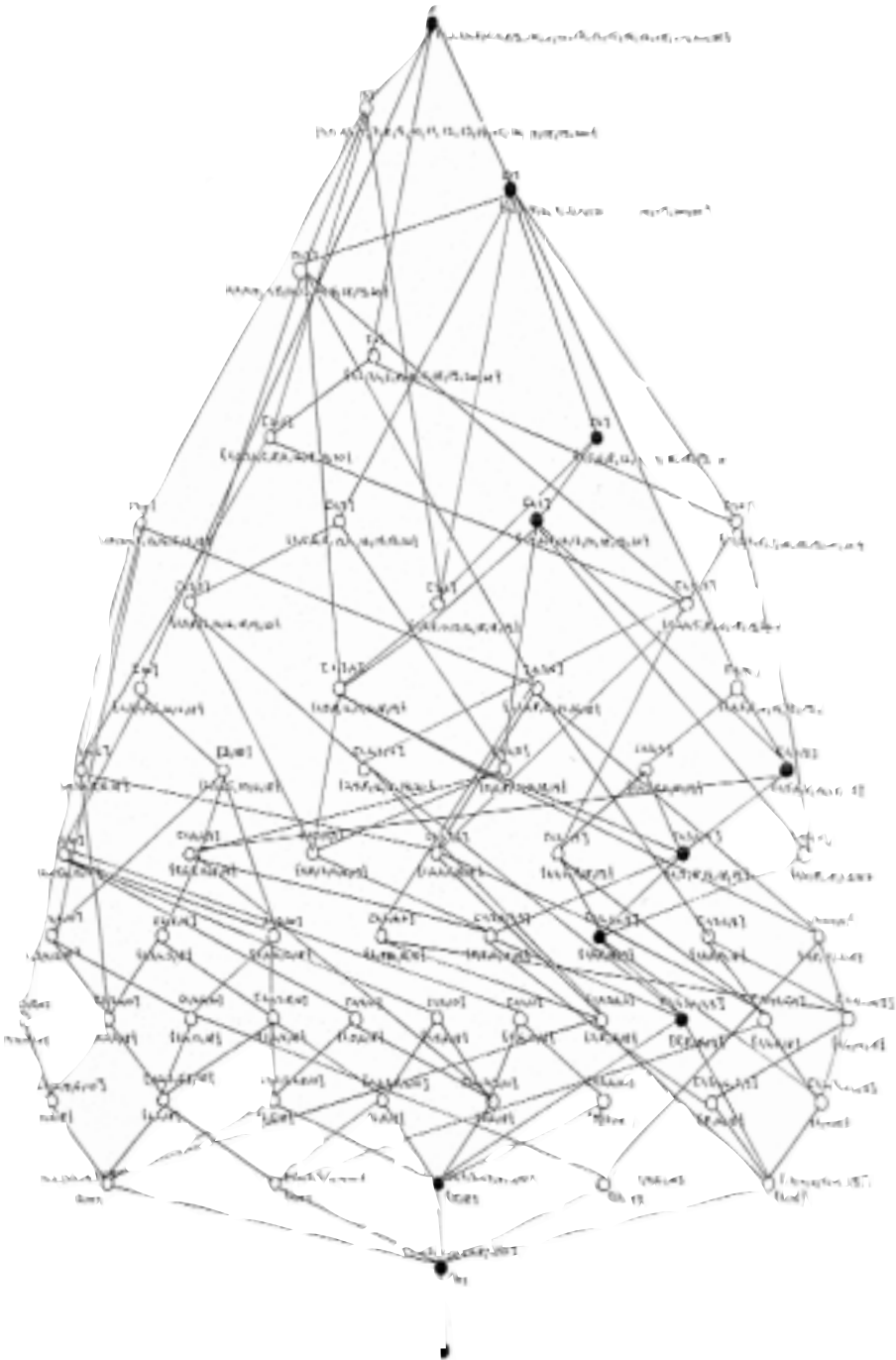
- | | | |
|-----|--|---------------|
| 1. | > {1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20} | : (3) |
| 2. | > {1,2,4,5,6,7,8,12,13,14,16,18,19,20,21} | : (1) |
| 3. | > {1,2,4,5,7,8,12,13,14,16,18,19,20} | : (1,3) |
| 4. | > {1,2,3,4,5,8,11,16,18,19,20,21} | : (2) |
| 5. | > {1,2,3,4,5,8,11,16,18,19,20} | : (2,3) |
| 6. | > {1,5,6,8,12,13,14,15,18,19,21} | : (4) |
| 7. | > {2,5,6,8,13,14,16,18,19,20} | : (1,7) |
| 8. | > {1,5,6,8,12,13,14,18,19,21} | : (1,4) |
| 9. | > {1,2,4,5,8,16,18,19,20,21} | : (1,2) |
| 10. | > {1,2,3,4,8,12,14,16,17,18} | : (3,6) |
| 11. | > {2,5,8,13,14,16,18,19,20} | : (1,3,7) |
| 12. | > {1,2,4,5,8,16,18,19,20} | : (1,2,3) |
| 13. | > {1,5,8,12,13,14,15,18,19} | : (3,4) |
| 14. | > {1,4,5,6,8,14,18,19} | : (1,9) |
| 15. | > {1,2,4,8,12,14,16,18} | : (1,3,6) |
| 16. | > {1,5,8,12,13,14,18,19} | : (1,3,4) |
| 17. | > {2,3,4,5,6,10,12,18} | : (10) |
| 18. | > {1,5,6,8,14,18,19} | : (1,4,9) |
| 19. | > {5,6,8,13,14,18,19} | : (1,4,7) |
| 20. | > {1,4,5,8,14,18,19} | : (1,3,9) |
| 21. | > {2,5,8,16,18,19,20} | : (1,2,3,7) |
| 22. | > {1,2,3,4,8,16,18} | : (2,3,6) |
| 23. | > {2,3,4,5,10,12,18} | : (3,10) |
| 24. | > {2,4,5,6,12,18} | : (1,10) |
| 25. | > {5,6,8,14,18,19} | : (1,4,7,9) |
| 26. | > {1,5,6,14,18,19} | : (1,2,4,9) |
| 27. | > {5,8,13,14,18,19} | : (1,3,4,7) |
| 28. | > {1,5,8,18,19,21} | : (1,2,4) |
| 29. | > {1,4,5,8,18,19} | : (1,2,3,9) |
| 30. | > {1,2,4,8,16,18} | : (1,2,3,6) |
| 31. | > {2,4,5,12,18} | : (1,3,10) |
| 32. | > {1,4,8,14,18} | : (1,3,6,9) |
| 33. | > {2,8,14,16,18} | : (1,3,6,7) |
| 34. | > {5,8,14,18,19} | : (1,3,4,7,9) |
| 35. | > {1,8,12,14,18} | : (1,3,4,6) |
| 36. | > {1,5,8,18,19} | : (1,2,3,4,9) |
| 37. | > {2,3,4,5,18} | : (2,3,10) |
| 38. | > {2,3,4,12,18} | : (3,6,10) |

39.	> {4,5,6,18}	:(1,9,10)
40.	> {2,5,6,18}	:(1,7,10)
41.	> {5,6,12,18}	:(1,4,10)
42.	> {2,4,12,18}	:(1,3,6,10)
43.	> {1,8,14,18}	:(1,3,4,6,9)
44.	> {2,4,5,18}	:(1,2,3,8,10)
45.	> {1,4,8,18}	:(1,2,3,6,9)
46.	> {2,8,16,18}	:(1,2,3,6,7)
47.	> {5,8,18,19}	:(1,2,3,4,7,9)
48.	> {2,3,4,18}	:(2,3,6,10)
49.	> {2,3,17,18}	:(3,5,6)
50.	> {5,6,18}	:(1,4,7,9,10)
51.	> {5,12,18}	:(1,3,4,10)
52.	> {8,14,18}	:(1,3,4,6,7,9)
53.	> {4,5,18}	:(1,2,3,8,9,10)
54.	> {2,5,18}	:(1,2,3,7,8,10)
55.	> {2,4,18}	:(1,2,3,6,8,10)
56.	> {1,8,18}	:(1,2,3,4,6,9)
57.	> {2,3,18}	:(2,3,5,6,10)
58.	> {8,18}	:(1,2,3,4,6,7,9)
59.	> {5,18}	:(1,2,3,4,7,8,9,10)
60.	> {2,18}	:(1,2,3,4,5,6,7,8,10)
61.	> {4,18}	:(1,2,3,6,8,9,10)
62.	> {12,18}	:(1,3,4,6,10)
63.	> {18}	:(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)

A gráf összesen tehát 63 szögpontból áll. A zárt részalmaz-párok alapján elkészített „feladatadatok-tanulók gráf”-ot az *1. ábrán* láthatjuk.

A gráfról leolvasható optimális út feladatszámokkal, illetve tartalmukkal leírva:

- 18: A tárgy csúcspontján átmenő sugár megszerkesztése (5)
- 5: Az optikai tengellyel párhuzamosan érkező sugár a fókuszponton keresztül verődik vissza (1)
- 8: Optikai középpont megnevezése (1)
- 19: A tárgy talppontján átmenő sugár megrajzolása (5)
- 1: Valódi; fordított állású; kicsinyített kép keletkezik (1)
- 14: A tárggyal megegyező állású kép keletkezésének helye (3)
- 6: Fókuszpont megnevezése (1)
- 12: A valódi kép keletkezésének helye (3)
- 13: A kicsinyített kép keletkezésének helye (3)
- 21: A keletkező kép az eredetivel egyező állású (5)
- 2: A fókuszponton keresztül érkező sugár az optikai tengellyel párhuzamosan verődik vissza (1)
- 4: Optikai középponthez a szögben érkező sugár visszaverődése (1)
- 15: A beeső fénysugár merőleges a felületre (4)
- 20: A keletkezett kép a tárggyal egyező nagyságú (5)
- 7: Geometriai középpont megnevezése (1)
- 3: Geometriai középponton átmenő sugár megrajzolása (1)
- 11: A merőlegesen beeső fénysugár nem törik meg (2)
- 9: A felületre nem merőlegesen beeső fénysugár megtörik (2)
- 10: A nem merőlegesen beeső fénysugár vissza is verődhet (2)
- 16: A törési szög is 90 fokos (4)
- 17: A keletkezett kép látszólagos (5)



1. ábra. Feladatok-tanulók gráf

Néhány tanulság

Az optimális út keresésére eredetileg megadott algoritmus (1–9-ig) nem intézkedett arról, hogy mi történjék, ha egy emeleten kijelölt legjobb pont nincs összekötve a következő emelet legjobb pontjával. Ez azért okoz gondot, mert csakis ilyen pontok mentén vezethet az optimális út. Miért? Mert így egyre bővülő halmazok keletkeznek a felfelé haladás során. Pedagógiai értelemben ez azt jelenti, hogy valamit megtanítunk, s ezt az ismeretanyagot bővítjük a tanítás következő lépésében. Míg ha egy bizonyos (mondjuk x -edik) emelet legjobb pontja után a következő ($x + 1$ -edik) emelet legjobb pontja nincs az előbbivel összekötve, akkor az azt jelenti, hogy az (x -edik) emelet legjobb pontja nincs az előbbivel összekötve, s az x -edik emeleten levő pont által reprezentált halmaz az $x + 1$ -edik emeleten lévő pont által jelzett halmazban egyrészt nem egy, hanem több elemmel bővült, másrészt viszont a kisebb halmaz bizonyos eleme hiányzik belőle. Például (1, 2, 6, 9, 16) után, ha (1, 2, 36, 9, 18) következik, akkor igaz ugyan, hogy egy elemmel bővült a halmaz, de egyrészt új a 2 és a 18. Másrészt hiányzik a 16. Tehát olyan, mintha emeletugrás volna, mert két új elem van, de ráadásul valamilyen ismeretelem hiányzik is. Tanítás szempontjából egyszerre két új ismeretet tanítunk, és kihagyjuk, hogy építsük a már tanított 16-ra. Egyszóval az optimális út – a mi céljaink értelmében – nem lehet olyan, hogy a gráfon össze nem kötött pontok mentén haladjon. Vagy legalábbis nem célszerű. A probléma megoldásához Takács Violától kaptam segítséget. Az ő javaslata és a saját elképzeléseim alapján az algoritmus kiegészült a 0. és 10. ponttal, illetve egy, az emeletugrásokhoz kapcsolódó megjegyzéssel.

0. pont: minden emeleten kiválasztunk egy „legjobb” pontot az 1–7 szabályok szerint. Egy adott emeleten csak olyan legjobb pont választható, amely össze van kötve az előző emeleten választott legjobb ponttal, s amelyet választva a következő emeleten választott pont is össze van kötve a szóban forgóval.

10. pont: ha ellentmond a 0. szabály az 1–7-nek, akkor nem maximális felső, illetve alsó számosságú pont választandó, hanem az alsó és felső számosság összegének maximumát jelentő pont, akkor is, ha ez emeletugrást jelent. Ha egyenlő a felső és alsó számosság összege egynél több pontnál, akkor azt választjuk, amelyik pont össze van kötve a következő emelet legjobb pontjával.

Megjegyzés: amennyiben mégis emeletugrást kényszerülünk választani – ami az általam készített gráfok esetén mindegyik esetben így történt –, akkor az optimális út megállapításánál azt a feladatot helyezem előbbre, amelyik alsóbb emeleten jelent meg először.

Mint már említettem, a felmérések bármely területre elvégezhetők. Ahhoz azonban, hogy a felmérések kiértékelése ne okozzon gondot, célszerű azokat 8–10 fős csoportokkal végezni, és olyan egységekre bontani a tananyagot, illetve olyan kérdéssorokat készíteni az egyes egységekhez, amelyek nem állnak körülbelül húsznál több egységből. Még ekkor is előfordulhat, hogy annyira különböző a gyermekek tudásszintje, hogy igen sok szögpontról álló gráfot kapunk, melynek ábrázolása nehézségekbe ütközik.

Így az eljárás továbbfejleszthető, a gráfokat számítógéppel megrajzolva. Ha erre külön programunk lenne, semmi nem szabhatna határt a módszer alkalmazásának.

Irodalom

- TAKÁCS Viola: *A tudásszerkezet mérése*. JPTE TKI PSZMP Programiroda, Pécs, valamint Iskolakultúra 1997/6–7. sz. melléklet
- TAKÁCS Viola: *A tananyag, a tudás és a közösség szerkezete*. Bp, 1997. kézirat
- HOLICS László: *Fizika III.* (Gimnázium) Tankönyvkiadó, Bp, 1991.
- HÜBÉR Magdolna: *Fizika az általános iskola 8. osztálya számára*. Konsept-H Kiadó, Bp, 1994.
- ZÁTONYI Sándor – Ifj. ZÁTONYI Sándor: *Fizika 2. Elektromosságán és fénytan*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Bp, 1994.