

## Képességfejlesztés a matematikaórán

*A matematika ismeretanyagának feldolgozása a legtöbb tantárgynál kedvezőbb lehetőséget biztosít a gondolkodási műveletek fejlesztésére. Ez a tény különösen indokoltá teszi a fejlesztésközpontúság elvének megfelelő módszerek alkalmazását.*

### A tanár személyiségéről

Nehezen tanítható korszerű matematika korszerű módszerek nélkül. Viszont nincs egyetlen üdvözítő módszer. Nincs legjobb módszer. Csak jó módszerek léteznek. Mindig az a jó módszer, amely a konkrét közösségben az esedékes didaktikai feladat vonatkozásában a legjobb eredményt adja. A közösség tevékenységének eredménye elválaszthatatlan a pedagógus személyiségétől. Ezért legtöbbször még ugyanazokkal a tanulókkal, ugyanazon didaktikai feladat megoldásakor is más-más a jó módszer – a nevelő szaktudásától, beállítottságától, kreativitásától függően. Különböző didaktikai feladatokat tekintve ez még inkább igaz.

A tantárgyhoz való kötődés elválaszthatatlan a pedagógus személyétől. Nehezen ébreszthet lelkesedést a pedagógus, ha ő maga nem lelkesedik. A tudás, az iskola, a tanulás, a tantárgy iránti nagyobb lelkesedést nem várhat a tanítványaitól a pedagógus, mint amennyi az ő viselkedésén észrevehető, mint amennyire ő lelkesedik. A nevelő hatás szempontjából egyformán fontos a tanító szakmai-módszertani tudása és emberi magatartása. A tanulók számára a tanító-tanár-professzor modellt is jelent, a pedagógus viselkedéséből is lehet tanulni. Legtöbbször anélkül, hogy ez tudatos lenne, a tanulók gondolkodásmódot, értékítéleteket, magatartási mintákat is átvesznek nevelőiktől. Ez nem véletlen, tudja is minden pedagógus, vagy legalábbis sejti. A tanulás és a tanítás problémáinak döntő többsége lélektani probléma. Az eredményes nevelői tevékenységhez alapos pszichológiai, szociológiai, szociálpszichológiai, pedagógiai kulturáltság szükséges.

Az eredményes képességfejlesztés következetes igényességgel vezetett tanítási órákon alapszik. Ez az igényesség a tartalmi kérdések mellett a feldolgozás módjára is vonatkozik. A következetes igényességgel végzett tanári munka a legjobb alap a megfelelő kötődés kialakításához. Különösen, ha a tanítási órákon „munkahangulat” uralkodik. Ha lehet gondolkodni, kérdezni, válaszolni az azonnali osztályozás rémének fenyegetése nélkül. Az a mód, ahogyan a tanító a lényegre kiemeli, éppen olyan fontos, mint maga a lényeg.

Gyakran a problémahelyzet megoldásához szükséges erőfeszítést, az érdeklődés kiváltásától a megoldás ellenőrzéséig elegendő késztetést a tanulók csupán az iskolai siker, a pedagógushoz való kötődés motívumaiból nyerik. Ezért a tanulók számára rokonszenves tanítói-tanári személyiség a tanulás eredményességére is pozitív hatással van. A számukra rokonszenves pedagógus óráját várják a tanulók, az órán biztosítva van az érdeklődésük, figyelmük, illetve a rend, s teljesítik a követelményeket. Az ilyen tanítói-tanári személyiség legfontosabb jellemzője a tanulók irányában a jóindulat, a figyelem, a megértés és a szeretet, de ugyanígy az igazság maradéktalan képviselője, valamint példamutatás a pedagógus önmagával szemben támasztott követelményeit, az órákra történő felkészülését és az órák mintaszzerű levezetését illetően.

Minden pedagógus tudja, hogy milyen jelentősége van a tanítási órák légkörének. Ha a tanulók szeretik a matematikát, ha érzik a fontosságát, akkor képességeiknek megfelelő

en dolgoznak. A fegyelmetlenség kialakulásának legtöbbször az az oka, hogy a tanulók nem képességeiknek megfelelő feladatot kapnak. A túl könnyű és a túl nehéz feladat egyaránt oka lehet az üresjáratok kialakulásának, a tanulói motivátlanságnak. Nyilván nem lehet minden tanuló legkedvesebb tantárgya a matematika. Nem lehet minden tanulótól azonos teljesítményt elvárni, de még „kipréselni” sem. Nagyon nehéz annak megállapítása, hogy egy-egy tanuló alacsony teljesítménye milyen mértéken függ össze képességbeli vagy a terhelést nem bíró fiziológiai problémákkal, milyen mértékben függ össze a magatartás és a munkához való rossz hozzáállás okozta problémákkal, illetve milyen mértékben magyarázható a tanuló motivátlanságával. Közismert, hogy a kimagasló értelem is meddő maradhat, ha birtokosa apatikus, következtelen, ambíció nélküli, nem szorgalmas.

A tanári elvárásnak jelentős szerepe van a tanulók teljesítményének alakulásában. A pozitív elvárás legtöbbször jobb eredményre buzdít, míg a negatív elvárás nagyon gyakran csüggesztően hat. A merev és tartós negatív tanári elvárás hatása általában negatív és gyakran maradandó. Negatív tanári elvárás csak rövid távon válthat ki pozitív hatást, de azt is csak pozitív tanulói énkép esetén. Ugyanis a negatívan értékelt pozitív énképű tanuló sajátos kihívást érezhet, úgynevezett tiltakozó motiváció alakulhat ki benne, amely magasabb törekvésű szinthez vezethet, de ez mindenkor csak rövid távon következhet be. Ennek ellenére nem értünk egyet az olyan pedagógiai magatartással, amely minden áron – akár elvtelen engedékenységgel, liberálizmussal – meg akarja kímélni a tanulókat a kudarcától. Mint minden munkavégzés, az iskolai tevékenység is lehetőség a siker és a sikertelenség megélésére. A sikerek és kudarcok váltakozása egyaránt fontos személyiség fejlődése szempontjából. A siker fejleszti az önbizalmat. Igaz, hogy a kudarc lehangolhat, jogos vagy jogtalan méltatlankodást válthat ki, de forrása lehet olyan elhatározásnak is, amely nagyobb erőfeszítésre ösztönöz.

A tanulási eredmények alapvetően a tanulási készségtől függenek. A tanulás, a matematika tanulása is lényegében képességfejlesztés. Viszont a fejlődés alapfeltétele a tevékenykedés (intellektuális értelemben is!). A képességek a megfelelő tevékenységek gyakorlása során alakulnak ki, ehhez viszont erőfeszítésre van szükség. Tartós erőfeszítés motiváció nélkül elképzelhetetlen. A megfelelő motiváció biztosítása a konkrét tantárgyi ismeretek, az aktuális ismeretanyag feldolgozásához kapcsolható lehetőségek kihasználásánál (bár ez is fontos) sokkal tágabb értelemben fontos. A tanulás korszerű felfogásának jellemző vonása a motivációs-érzelmi szféra fontosságának felismerése. Ugyanis napjainkban már nyilvánvaló, hogy a tanulás eredményessége messzemenően összefügg az iskola és az egyes tantárgyak iránti kötődések, érzelmi-akarati beállítottságok kialakulásával. A motiváció (a képességek mellett) a tevékenység hatékonyságának legfontosabb tényezője. Meghökkenőek azok a különbségek, amelyek a hasonló képességű (szándékosan nem az egyenlő adottságaikat ha-

*Matematikából a tantervi követelményekben rögzített jártasságok, képességek elérése jó néhány számításos feladat megoldását feltételezi, ami a monotónia veszélyével jár. Hiszen a többször ismétlődő tevékenység elveszti pozitív felszólító jellegét, egyre gyengül a tevékenység jellegéből fakadó motiváció. Gondos, előre jól megtervezett munkával érhető el az, hogy egy konkrét típusból minden feladat egy kicsit más legyen, mint a többi. A csak formai különbségeket tartalmazó feladatoktól lényegesen kevesebb fejlesztő hatás várható el, mint azoktól, amelyek az előzőleg megoldott feladatokhoz képest tartalmaznak valami újszerűt.*

sonlítottuk össze), de eltérően motivált tanulók teljesítményszintjeit jellemzik. Eredményes személyiségfejlesztés megfelelő motiváció nélkül elképzelhetetlen. A motiváció szinten tartásának viszont fontos feltétele, hogy a tanulók elegendő sikerélményhez jussanak.

Matematikából a tantervi követelményekben rögzített jártasságok, képességek elérése jó néhány számításhoz feladat megoldását feltételezi, ami a monotonia veszélyével jár. Hiszen a többször ismétlődő tevékenység elveszti pozitív felszólító jellegét, egyre gyengül a tevékenység jellegéből fakadó motiváció. Gondos, előre jól megtervezett munkával érhető el az, hogy egy konkrét típusból minden feladat egy kicsit más legyen, mint a többi. A csak formai különbségeket tartalmazó feladatoktól lényegesen kevesebb fejlesztő hatás várható el, mint azoktól, amelyek az előzőleg megoldott feladatokhoz képest tartalmaznak valami újszerűt. Nyilván az a legjobb, ha a tevékenység tárgya, a konkrét matematikai probléma egyúttal a motiváció erősítésének funkcióját is betölti. Ezt olyan feladatok megoldásával érhetjük el, amelyekben az ismeretek egymásra épülnek (feladatsorok); amelyek a tanulókhöz közel álló problémákkal foglalkoznak; amelyek a tanulókat érdeklő kérdésekre adnak választ; amelyeknek érdekes, figyelmet lekötő tartalma vagy megfogalmazása; amelyeknél többféle megoldási mód lehetséges, valamint a paradox, megtévesztő jellegű, de tanulságos befejezésű feladatok; amelyekben szokatlan, meglepő adatok szerepelnek, vagy megoldásuk vezet szokatlan eredményre.

### A tanulók tevékenységének szervezése

A matematika tanításával kapcsolatos társadalmi és tantervi elvárások megvalósítása szerteágazó feladatrendszert hárít a pedagógusokra és a tanulókra. A követelmények teljesítése egyértelmű korrelációban van a tanulás, a tanítás folyamatában alkalmazott módszerekkel. A megismerés módja legalább olyan mértékben hatással van az oktatás eredményességére, mint maga a megismerés anyag. A tanítási-tanulási folyamatban feldolgozott művelődési anyag csak aktív elsajátítás során válik a tanulók személyiségének szerves részévé. A tananyag feldolgozásának módszerei közül a jól irányított tanulói tevékenységet célszerű előnyben részesítenünk. Ez a tevékenység a tanulói aktivitásra épített munkáltatás. A munkáltatás fogalma manipulatív és spekulatív tevékenységek sorozatát jelenti.

A kifogástalan színvonalon történő olvasás, írás, számolás, kommunikálás megtanítása mellett az alapfokú iskolai oktatás legfontosabb feladata a problémamegoldó gondolkodás képességének kifejlesztése, a gondolkodási műveletek gyakorlása.

A matematika ismeretanyagának feldolgozása a legtöbb tantárgynál kedvezőbb lehetőséget biztosít a gondolkodási műveletek fejlesztésére. Ez a tény különösen indokoltá teszi a fejlesztésközpontúság elvének megfelelő módszerek alkalmazását. Azaz nem a tárgyi (szaktudományi) ismeretanyag fejlődéstörténetéhez való igazodás az elsődleges, hanem a tanulók képességeinek fejlesztése, amelynek természetesen a konkrét matematikai képességek fejlesztése is a része. Kiemelkedő jelentősége van a helyes gondolkodási képesség kialakításának, fejlesztésének. Ez a fejlesztés tartalmilag a gondolkodás alapvető művelteinek, az analízisnek, a szintézisnek, az absztrakciónak, az általánosításnak, az analógia felismerésének, a fogalom meghatározásnak, a fogalmak osztályozásának, az ítéletalkotásnak, a hipotézisek felállításának, az induktív és deduktív következtetéseknek az ismeretét és helyes használatát jelenti. Matematikaórákon a gondolkodás logikai szigorúsága és az alkotó fantázia egymást kiegészítő egységét célszerű megvalósítani. Olyan értelemben, hogy az alkotó fantázia sugalmazza a felmerült probléma megoldásának megvizsgálandó változatait, a szigorú okoskodáson alapuló gondolkodás pedig ellenőrzi, igazolja a sejtéseket, illetve megcáfolja, elveti a hibás feltevéseket.

Az intellektuális erőfeszítésekhez, a tanuláshoz való viszony kisiskolás életkorban alakul ki. A problémamegoldó gondolkodásra való nevelést, a gondolkodási műveletek gyakoroltatását nem lehet elég korán kezdeni. Nyilván e vonatkozásban akkor a legered-

ményesebb a tevékenység, amikor a gyermek egészséges spontaneitása, plaszticitása és eredetisége még nem szenvedett károsodást.

Az egyes matematikai problémák implicite mindig valamilyen összefüggést, törvényszerűséget is tartalmaznak, amit célszerű explicite is megfogalmaztani. Jelenlegi matematikaoktatásunk egyik hiányossága, hogy gyakran megelégszünk azzal, ha a tanuló műveleteiből, következtetéseiből kiderül a fogalom ismerete, és nem kívánjuk meg annak megfogalmazását. Pedig az értelmes szóbeli megfogalmazás segíti a probléma, az összefüggés tudatosulását. A tanítás, a tanulás hatékonyabb, ha a gondolkodási gyakorlat tudatosulása is megtörténik.

A megbízható matematikai ismeretek kialakítása, matematikai fogalmak egyértelmű használata véleményünk szerint feltételezi a meghatározások (definíciók), összefüggések (tételek) és eljárások (algoritmusok) megfogalmazását. Természetesen nem a fogalmak definícióval történő kialakítására gondolunk, viszont amikor tanítványaink vagy valamilyen tanítványunk a tanulás során szerzett tapasztalatai alapján felismer, illetve megállapít valami lényegeset, akkor azt célszerűnek tartjuk rögzíteni és a megfelelő megerősítés érdekében arra többször visszatérni. A tapasztalatokon alapuló megfogalmazások elősegítik és mélyítik a fogalom fejlődését.

Az ismeretsajátítás folyamatát fokozatosra szervezve, manuális tevékenységgel kezdve, gyakorlati tapasztalatokra alapozva lehet leghatékonyabban eljutni az absztrakt fogalmi szintre. Az alapfokú matematika-oktatás során az elnevezések, jelölések bevezetését meg kell előzniük a megfelelő fogalmak megérlelődésének. A fogalmak, összefüggések, törvényszerűségek megértését konkrét, tapasztalati anyagon kell megérlelni.

A tevékenykedés természetesen nem mindig jelent cselekvést. A tevékenykedés, sőt a tanulás eredményessége szempontjából különösen fontos tevékenység az emlékezés, a gondolkodás, illetve azok a megismerési (kognitív) műveletek, amelyekhez tényleges cselekvés nem kötődik.

A matematikában alapvető szerepe van a szabatos fogalmazásnak. A pedagógus szavainak ismétlésénél rendszerint jobban fejleszti a tanulókat saját gondolataik megfogalmazása, esetleges pontatlan kifejezéseik szembesítése a tényekkel.

A gondolkodás fejlődését hátráltatja, ha a tanuló olyan segítséget kap, amely őt az érdemi gondolkodás alól felmenti. Rendszeresen fokozni kell a gondolkodási műveletek mennyisége és minősége iránt támasztott követelményt.

A tapasztalatgyűjtés szükségessége, módjának helyes kiválasztása kisiskolások esetén különös jelentőségű. A tárgyi cselekvéses szinten megvalósítható megismerési folyamatok fontos szerepet töltenek be a matematikai gondolati tevékenységek alapozásánál. Véleményünk szerint a biztos megértéshez sokat kell foglalkoztatni a tanulókat.

Az alsó tagozatos tanulók gondolkodása erősen kötődik a tárgyi valósághoz. Ezért a matematikai fogalmak kialakításakor a legkonkrétabb dolgoktól indulva manuális tevékenységgel (modelleket, rajzokat használva) indokolt eljutni az elvontig. Ez nem jelenthet gondot (illetve nincs elvi akadálya), mert a matematikai fogalmaknak valóságos alapjuk van. Sok példa tanulmányozása, a fogalom többszörös konkretizálása, modellezése a feltétele annak, hogy a gyerekek felismerjék a kialakítandó fogalom lényes jegyeit, hogy képesek legyenek az absztrahálásra.

A tanulók problémamegoldó gondolkodásra való neveléséhez felhasználható tárgyak nemcsak a tanterv által előírt munkaeszközök közül kerülhetnek ki. Környezetünk tárgyaiban többsége alkalmas arra, hogy manipulációs tevékenység eszköze, vagy matematikai tapasztalatok biztosításához szükséges megfigyelés tárgya legyen, illetve manipuláció útján a gyermekek matematikai ismeretszerző és alkalmazó tevékenységének forrásaiként szolgáljanak. A gyermekek matematikai ismerete akkor lesz megbízható, ha gazdag tapasztalati anyagra támaszkodik. Ezért olyan fontos, hogy minden anyagrészt sokféle módon közelítsünk meg, változatos tevékenységgel dolgozzunk fel. Ugyanazt a matematikai

tartalmat különböző tárgyi eszközökkel is jelenítsük meg, s ügyeljünk arra, hogy az ismeretsajátítás folyamatát praktikus cselekvésekkel indítsuk, és tanítványaink konkrét érzékszervi szemlélet alapján jussanak el az absztrakt fogalmi szintre.

A tárgyi cselekvéses szinten megvalósítható megismerési folyamatoknak a matematikai gondolati tevékenységek alapozásánál betöltött alapvető szerepe indokolja, hogy lehetőleg minél több alkalmat biztosítsunk tanítványainknak manipuláción alapuló ismeretszerzésre. A manuális foglalkoztatáshoz használt tárgyak természetesen csak munkaeszközei az ismeretszerzésnek. Alkalmazásuk csak akkor igazán indokolt:

- ha az a tanító tanítási módszerével összhangban van;
- ha a tanító azzal a meggyőződéssel választja az ismeretek ilyen feldolgozását, hogy oktatási-nevelési célkitűzései megvalósításához így juthat legközelebb.

A munkaeszközök használatának a tanulók tevékenységének ellenőrzésénél is megvan a maga előnye. A tanító ellenőrzéskor szinte egyszerre láthatja az egész osztály tevékenységének eredményét. Értékelése ezért konkrét lehet, a tanító és a tanuló egyaránt gyors visszajelzést kaphat. Természetesen itt még inkább igaz, hogy a tanulási időszakban nem helyes érdemjeggyel értékelni, sőt még a témakör anyagának értékelésére tervezett időszakban is gondolni kell arra, hogy a munkaeszközzel megoldott feladat érdemjeggyel való értékelése sem mindig reális teljesítményt tükröz. Ugyanis a gyerekeknek lehetőségük van szomszédjaik „gondolatmenetének” lemásolására is, így teljesítményük kevésbé lesz egyéni.

A gyermekek értelmi fejlődése kisiskolás korban a megismerés, az összefüggések felismerése vonatkozásában a tényleges cselekvéshez, illetve tárgyhoz kötött. Kisiskolások egyik leggyakoribb tevékenysége a játék; ismereteik, tapasztalásaik is nagyrészt a játékhoz kötődnek. A matematika tananyaga nem tartozik a könnyen elsajátítható ismeretekhez. Ezért különösen fontos, hogy minden módszert és eszközt felhasználjunk a matematikával való foglalkozás megszerettetéséhez, a kötődés kialakítására, erősítésére. Kisiskolás korban a játékos módszerek alkalmazása ezért nagyon indokolt.

A játéknak komoly szerepe van a gyermeki személyiség fejlődésében. Nagyon sok mindent meg lehet tanulni játékosan, a játékon keresztül. Viszont a tanulás és a munka nem tanulható meg játékként. A játék bizonyos szabályok betartása mellett tetszés szerinti kezdhető és befejezhető, alapvetően önkéntes tevékenység (vagy annak kellene lennie), míg a tanulásról és a munkáról ez nem mondható el, sőt a magyar társadalom munkafogalma sajnálatos módon nélkülözi annak lehetőségét, hogy a munka, a tanulás örömteli tevékenység legyen.

A tanulást nem lehet helyettesíteni játékkal, de segíteni igen. Kisiskolás életkorban ezt különösen fontosnak tartjuk. Nem mondhatunk le a játék, a játékos tanulás motivációs lehetőségének kihasználásáról.

Sikerélményt biztosító tanulásirányítással, változatos tevékenységgel, a mindennapi élethez kapcsolódó problémafelvetéssel, sokféle érdekes, tréfás, játékos feladattal, jutalomfeladatokkal, rendszeresen alkalmazott fejlesztő értékeléssel, sok dicsérrel és biztatóssal, a tanulók által is könnyen felismerhető gyermekszeretettel biztosítható a tanulási folyamat egészében a megfelelő motivációs bázis. Önmagában az eszközhasználat, vagy az a tény, hogy a feladat kitűzésben szerepel az „érdekes” vagy a „játék” szó, csak egészen csekély mértékben alkalmas motivációra. A manipuláció befolyásoló hatása szertefoszlik, ha a tanító túlszabályozza az eszközhasználatot, ha megfosztja a tanulókat a probléma önálló felfedezésének-megoldásának örömeitől.

Az oktatás rendszerességére vonatkozó didaktikai alapelv betartása a pedagógustól meghatározott ritmikusságot kíván az oktatási feladatok elvégzéséhez. A megfelelő ritmus hiánya a tanítási órán abban jelentkezik, hogy az óra egyes részei között nincs meg a helyes arány, mert a pedagógus és a tanulók nem az oktatási-nevelési részfeladat, illetve probléma jelentőségével arányos időt töltenek el valamivel, vagy teljesen lényegtelen dolgokra vesztegetik az idejüket. A megfelelő ritmus hiánya megmutatkozhat az iskolai

év munkabeosztásán is, amikor egy ideig mind a pedagógus, mind a tanulók elég rendszeresen dolgoznak, majd bizonyos időszakokban túlzottan intenzív munkával járó hajrá következnek. Ezt tudatos időbeosztással lehet elkerülni.

A matematika tanítása és tanulás folyamata. Ennek a folyamatnak a tanítási óra időben határozottan elkülönülő része, de ebből még nem következik az, hogy a folyamatot állandóan szakaszolni kell. Nem szabad mindenáron arra törekednünk, hogy a tanítási óra kerek egész, lezárt egység legyen, hogy az óra utolsó öt percében okvetlenül összefoglaljuk azt, amit az előző negyven percen vettünk. Ilyen szemlélettel nagyon nehezen sikerülhet a tananyag feldolgozását természetes részeire osztani. Általában hasznos, ha az óra végén marad nyitott probléma (persze nem túl sok), amin a gyerekek odahaza gondolkozhatnak, amivel azután a következő óra kezdődhet. A házi feladatokat a már elsajátított ismeretek gyakorlásán túl célszerű a szomszédos tanórak anyaga közötti kapcsolat erősítésére is felhasználni. Ez a folyamatszempont természetesen nem a rendszerezések, összefoglalások szükségességét tagadja; azok nagyon fontosak, mert különben szétfolynak a tanult ismeretek. Csupán a rendszerezés időpontját nem tartjuk indokoltnak okvetlenül a tanítási óra végére időzíteni. Minél alacsonyabb osztályban tanítunk, annál gyakrabban van szükség megbeszélésre, következtetésekre levonására, összefoglalásra. Egy-egy tanítási órán akár többször is.

#### Az önálló problémamegoldás

A tanítás eredményességére kiható pszichológiai feltételek közül a megoldandó problémákkal való találkozás, a problémamegoldás körülményei nagyon lényegesek. Helyes választás esetén a problémahelyzetek megfogalmazása megfelel a tanulók életkori sajátosságainak. Célszerű lehetőséget biztosítani a problémák többoldalú megközelítésére, a megsejtések problémamegoldás előtti megfogalmazására, a megoldás eredményének előzetes becslésére, különféle megoldási módok keresésére. A problémamegoldáshoz szükséges időtartam vonatkozásában nagyon jelentős különbségek tapasztalhatók a tanulók között. Ennek következtében a frontálisan vezetett tanítási órákon a tanulók aktivitása meglehetősen kiegyensúlyozatlan.

Frontális tevékenység esetén csak néhány gyorsabban gondolkodó tanuló oldja meg a problémát, a többiek csak a helyes megoldás menetének ismertetéséből okulhatnak, sőt még az is előfordulhat, hogy csak az eredményről értesülnek. Tudjuk, profán a hasonlat, de ez nagyon hasonlít ahhoz a naiv módszerhez, amikor valakit úgy akarunk megtanítani úszni vagy kerékpározni, hogy a medence, illetve a pálya széléről figyeljük a versenyzők úzását, kerékpározását. Nagyon nehéz, szinte lehetetlen úgy megtanulni kerékpározni, hogy a stadion lelátóján ülve figyeljük a kerékpárversenyzőket. Hiába van ott a versenyzők között az Európa-bajnok, hiába kifogástalan az összes versenyző technikája. Aki meg akar tanulni kerékpározni, annak fel kell ülnie a kerékpárra. Úszni is csak vízben lehet megtanulni. Így van ez a matematikával is. Nem elég figyelni és nézni, csinálni kell! Véleményünk szerint tanítványaink fejlődésében összehasonlíthatatlanul eredményesebb a

*A játéknak komoly szerepe van a gyermeki személyiség fejlődésében. Nagyon sok mindent meg lehet tanulni játékosan, a játékon keresztül. Viszont a tanulás és a munka nem tanulható meg játékként. A játék bizonyos szabályok betartása mellett tetszés szerinti kezdhető és befejezhető, alapvetően önkéntes tevékenység (vagy annak kellene lennie), míg a tanulásról és a munkáról ez nem mondható el, sőt a magyar társadalom munkafogalma sajnálatos módon nélkülözi annak lehetőségét, hogy a munka, a tanulás örömteli tevékenység legyen.*

jól irányított önálló tevékenységre alapozott tanulás, mint a tanulótársak tevékenységének figyelése, például a táblai munka másolása. A legeredményesebb tanulási módszer, amikor a tanulók egyéni munkával, tapasztalati úton, próbálkozással, korábbi ismereteik felhasználásával, újrászervezésével vagy analógia alapján igyekeznek megtalálni a kitűzött probléma, problémák helyes megoldását, amelyhez a pedagógus folyamatos, személyre szóló segítséget nyújt.

A tanulás lényegéhez tartozik az is, hogy amit tanultunk, azt alkalmazni is szeretnénk. Az alkalmazás során láthatók az elsajátított ismerete alkalmazhatóságának korlátai. A sikertelen, hibás alkalmazásnak ezért fontos fejlesztő, nevelő értéke van. Az új ismeretek önálló, kiscsoportos tevékenységgel történő feldolgozásának természetes velejárója a hiba, a tévedés, s annak megvitatása. E tévedésekből, hibákból nagyon sokat lehet tanulni, ha megkeressük, hol hibáztunk. Közismert aforizma: „A tapasztalat az az elnevezés, amellyel az emberek a sikertelen kísérleteket illetik.” A bizonyítás módszereinek megtanítása mellett a cáfolás technikáját is el kell sajátítatnunk. Másrészt, ha komolyan gondoljuk, hogy a tanulók önállóan dolgozzanak, ha minimálisra akarjuk csökkenteni azokat az alkalmakat, amikor a tábláról másolnak, akkor természetesnek kell tekintetnünk, hogy munkájukban tévedések, hibák is találhatók. A munkatankönyvben, a füzetben előfordulhatnak félbehagyott próbálkozások, felismert tévedések, javítások, hibás megoldások, de ezek a feladat megbeszélése után javítandók, a jó megoldás pótolandó. Nem célszerű a munkatankönyv, a füzet szépsége miatt feláldozni az önálló munkát, de szükséges a megoldások ellenőrzése.

Ha a tanulóknak csak a számonkéréskor kell önállóan dolgozniuk, ha minden problémát a pedagógus és néhány kiemelkedő képességű tanuló dolgoz ki, ha a tanulók zöme passzív szemlélő az órákon, akkor nem várható jó eredmény. Az eredményes matematikatanítás feltétele, hogy ne csak a jó tanulók dolgozzanak önállóan.

Az aktív, önálló munka sikerélményt jelent a gyerekeknek, motiváló hatása is jól kihasználható. Az viszont nyilvánvaló, hogy az egyszerű, többször előforduló feladat már igazán csekély sikerélményt nyújt a jobb képességű gyerekeknek, míg a gyengébbek számára önálló munkával még ugyanaz a feladat is megoldhatatlannak bizonyulhat. Ezért elengedhetetlen a differenciálás.

Differenciált feldolgozási módszereket, változatos tanítási-tanulási stratégiát, a különböző képességű tanulók ismeretszintjéhez igazodó, eltérő nehézségi fokozatú feladatok kitűzését, sokfajta didaktikai fogás alkalmazását tartjuk célszerűnek. Nyilván a tanuló egyéni sajátosságainak figyelembevételével ilyen „rugalmas igazodást” feltételező tanítási stratégia esetén már a tanítási órák tervezésének időszakában sem kezelhető elsődleges célként a konkrét matematikai tartalom elsajátítása. Sőt, ez a szemlélet feltételezi, hogy a matematikai tartalom nem elkülöníthető célként jelentkezik, hanem csak olyan eszközként, amelynek segítségével kialakíthatjuk a problémamegoldó képesség, ítélőképesség, találékonyság, rugalmasság stb. tulajdonságokat, mint a matematikai tartalommal adekvát intellektuális tulajdonságokat. A fejlesztésközpontú matematikatanítás egyik fontos feltétele, hogy a tanulók ne készen kapják az ismereteket, hanem tárgyi vagy gondolati tevékenységre alapozva, mintegy felfedezzék azokat. Ahhoz, hogy a feladatok megoldása során a tanulók felhasználhassák az előző feladatok megoldásakor szerzett tapasztalataikat, a megoldandó problémáknak – úgynevezett feladatrendszerben – egymásra kell épülniük.

Az eredményes tanítás feltétele, hogy a feldolgozandó feladatokat az egy osztályba járó tanulók zöme erőfeszítéssel bár, de meg tudja oldani. Ellenkező esetben csak elkedvetlenedésre számíthatunk, nem pedig több tudásra. Viszont bármely konkrét osztálytanulóit tekintjük, képességeik, adottságaik több-kevesebb mértékben eltérnek egymástól. Ha valakitől kevesebbet követelünk, mint amennyit bír, az tékozlás a tehetségével. Csak frontális óravezetéssel nem lehet mindenki képességeinek megfelelően foglalkoztatni. Az

„átlagos tanulóhoz” igazodó órán a tehetséges tanuló először csak unatkozik, majd lassan visszafejlődik. Differenciált foglalkozásra van szükség. A feladatokat és a követelményeket úgy célszerű differenciálni, hogy minden tanuló találhasson magának a felkészültségéhez igazodó, fejlődését biztosító feladatot a feladatsorban. Ez sok munkát igényel a tanítási óra való felkészülés során, mert nyilván úgy kell kiválasztani a feladatokat, hogy azok a gyengébb előmenetelű tanulók által is megoldhatók legyenek (egészen pontosan olyanok, amelyeket ezek a tanulók is meg tudnak oldani), de még a jó felkészültségű tanulók is találjanak köztük erőfeszítést igénylőket.

A különböző adottságú, képességű, készségszintű, motiváltságú tanulókkal való eredményes foglalkozás különböző eljárásokat, különböző módszereket igényelnek. Akiknek más-más a munkához (tanuláshoz) való viszonya, a képességbeli vagy fiziológiai terhelhetősége, azok elé más-más célt kell kitűznünk, más-más feladatokkal lehet egyéni teljesítményük szintjét a legjobban emelni. Ez viszont feltételezi a differenciált óravezetést, a tananyag differenciált módon történő feldolgozását.

Nagy létszámú osztályokban a frontális óravezetés keretében is lehet eredményesen differenciálni. Adható azonos feladat valamennyi tanulónak, de az egyes feladatokon belül különböző nehézségű részfeladatokkal. Ilyen szervezéssel az önellenőrzéskor remélhetőleg az összes tanuló aktív, figyel, mert akik a nehezebb részfeladatokat is megoldották, azok beszámolnak megoldásaikról, indokolnak, érvelnek, vitatkoznak, akik pedig nem oldottak meg minden részfeladatot, azokat érdekli a helyes megoldás módja. Azonos időpontban különböző feladatokat megoldva, frontálisan szervezett önellenőrzéskor, azok a tanulók, akik más feladatot oldottak meg, nem érthetik, hogy miről van szó, ezért nem tudnak bekapcsolódni az órai munkába, így nyilván unatkoznak, esetleg fegyelmetlenkednek is.

A szabad feladatválasztással történő differenciálás csak akkor lehet hatékony, ha a tanulók tisztában vannak azzal, hogy melyik az a nehézségi fok, amit még teljesíteni tudnak.

Frontális osztálymunka esetén nagyon nehéz a szóbeli kérdéseket úgy megfogalmazni, hogy azok a tanulók számára közepesen nehéz problémát jelentsenek. Ezt a nehézséget kétfázisú kérdésfeltevési technika alkalmazásával győzhetjük le. Először hozzávetőlegesen közepes nehézségi szintű kérdést feltéve, s a második, illetve a további kérdésekben történhet a nehézségi fok további összehangolása. Ez az összehangolás – a gyengítés irányában – esetleg csak további gondolkodási idő biztosításával, közbülső rávezető kérdéssel, nézőpont adásával, esetleg tényszerű helyesbitéssel történhet, míg azonnali jó válasz esetén kiegészítő kérdéssel oldható meg az erősítés irányában.