*Herendiné Kónya Eszter*

# A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei

*Másodéves tanítóképzős hallgatók geometriai tudását vizsgáltuk a geometriai gondolkodás van Hiele-féle szintjei alapján. Cikkünkben a tesztfeladatok ismertetése után részletesen elemezzük az eredményeket, összehasonlítva azokat egy nemzetközi vizsgálat eredményével. A tapasztalatok tükrében jónéhány következtetésre juthatunk a tanítóképzés feladatait illetően.*

Két holland didaktikus, Pierre van Hiele és Dina van Hiele-Geldorf 1957-ben kifejlesztett egy olyan pedagógiai elméletet, mely alkalmasnak tűnik a geometriai gondolkodás folyamatának megismerésére.

Munkájukban a geometriai gondolkodás fejlődésének öt szintjét különböztetik meg.

*0. szint, a globális felismerés szintje*

Ebben a kezdeti szakaszban a tanulók a geometriai alakzatokat egységes egészként fogják fel, nem képesek elkülöníteni egymástól ezek alkotóelemeit, és nem látják az alakzatok között lévő összefüggéseket sem, de arra képesek, hogy felismerjék az alakzatokat, elkülönítsék egymástól, megnevezzék őket. Például: A formája alapján felismerik a téglalapokat, de a négyzetet nem sorolják közéjük.

Jellemző szófordulatok: „Úgy tűnik", „Ugyanúgy néz ki", a geometriai formák leírásához szemléletes szavakat használnak: sarok, ferde téglalap, beugrása van stb.

Indoklásaikban az észlelésre támaszkodnak.

Tipikus feladatok: A sík- és térbeli modellezőkészlettel, a papírból kivágott, hajtogatott síkidomokkal dolgoznak. Akár rajzos, akár cselekvéshez kötött feladatról van szó, az utasítás az alakzatok rajzolására, szétválogatására, megnevezésére irányul.

*1. szint, az elemzés szintje*

A tanulók kezdik felismerni az alakzatok alkotórészeit, megkülönböztetik őket az egésztől, megfigyelik az eltérő tulajdonságokat. Képessé válnak arra, hogy a megfigyelt tulajdonságok alapján csoportosítsák az ismert alakzatokat. Ezek a tulajdonságok azonban elkülönülten, a konkrét alakzatokhoz kötötten jelennek meg, és nem látnak kapcsolatokat egy alakzat különböző tulajdonságai, illetve különböző alakzatok tulajdonságai között.

Például megfigyelik a sokszögek oldalait, csúcsait, megkülönböztetik az átlót az oldaltól, de sem a definíció, sem a fogalmak közötti összefüggés megadására nem képesek.

Jellemző szófordulatok: „hasonló", „különböző", „mindegyik", „mindig", „néha", „soha" stb.

Tipikus feladatok: Csoportosítások, mérések, rajzolások, modellezések, hajtogatások, vágások, kísérletezgetések segítségével végzett elemzések.

*2. szint, az informális dedukció szintje*

Tulajdonságaik alapján kapcsolatba hozzák egymással a különböző alakzatokat, így képessé válnak a köztük lévő hierarchia megértésére. Már van értelme a definíciónak, mivel felismerik a tanulók az alakzat tulajdonságai közötti összefüggéseket.

Egyszerű, szemlélet alapján elfogadott tényeket felhasználó következtetési lánc megértésére is képesek. Döntéseik indoklásában az észlelés szerepét fokozatosan átveszi az ok-okozati összefüggések keresése. Például: a négyzet téglalap, mert rendelkezik minden olyan tulajdonsággal, amellyel a téglalapok rendelkeznek.

Jellemző szófordulatok: „Ebből következik…", „Ha…, akkor…."

Tipikus feladatok: Halmazba rendezések, állítások logikai értékének eldöntése, az alakzatok definiáló tulajdonságának, valamint a többi tulajdonságnak a meghatározása.

*3. szint, a formális dedukció szintje*

Ezen a szinten fogják fel a tanulók a dedukció értelmét. Adott, a szemlélethez közelálló axiómarendszerben képesek ok-okozati összefüggések megfogalmazására, egyszerűbb bizonyítások konstruálására. Képesek állítások általánosítására, szerkesztési feladatok diszkutálására. Megismerkednek különböző bizonyítási eljárásokkal (direkt, indirekt, szintetikus, transzformációs, koordinátageometriai, vektoros, teljes indukciós), egy állítás szükséges és elégséges feltételének fogalmával.

Jellemző szakkifejezések: definíció, tétel, bizonyítás, axióma, alapfogalom.

*4. szint, a formális logika szintje*

Ez a gondolkodás a Hilbert-féle axiomatikus gondolkodásnak felel meg. Lehetővé válik a formális logikai műveletek, következtetések megértése, elvégzése a konkrét geometriai interpretációtól függetlenül. Jellemző az általános logikai törvények felismerése, a nemeuklideszi geometriák, különböző axiómarendszerek közötti összefüggések megértése.

Jellemző szakkifejezések: a matematikai logika szimbólumai, fogalmai.

A fenti szinteket az iskolai követelményekkel összevetve megállapíthatjuk, hogy az általános iskola 1–2. osztályának a 0. szint, a 3–4. osztályának az 1. szint felel meg. A 2. szint a felső tagozatos anyaggal, a 3. pedig a középiskolással állítható párhuzamba. A 4. szint már nem szerepel a középiskolai tananyagban, ezzel csupán a matematikával egyetemen, főiskolán foglalkozó hallgatók találkoznak.

Miközben a tanuló egy adott szintről eljut a következőre, az alábbi tanulási fázisokon megy keresztül, függetlenül attól, hogy éppen melyik átmenetről van szó:

– 0. fázis (informálódás): beszélgetések során a tanár feltérképezi, mi az, amit a tanuló már tud az új témáról, a tanuló előtt pedig körvonalazódik, hogy miről lesz szó a következőkben;

– 1. fázis (irányított felfedeztetés): a tanuló konkrét, a tanár által gondosan megtervezett tevékenységek (rajzolás, hajtogatás, modellezés) révén ismerkedik meg az új fogalmakkal;

– 2. fázis (magyarázat): miközben a tanulók saját szavaikkal elmondják egymásnak megfigyeléseikkel, felfedezéseikkel kapcsolatos ötleteiket, a tanár bevezeti a lényeges fogalmak pontos matematikai megnevezéseit;

– 3. fázis (nem irányított felfedeztetés): a tanulók nyitott végű problémák vizsgálatával foglalkoznak a korábban szerzett tapasztalatokat felhasználva;

– 4. fázis (integráció): a tanulók áttekintik és összegzik az újonnan tanultakat, kiegészítik velük meglévő fogalmi és relációs rendszerüket.

A van Hiele-modell főbb jellemzői:

– A szintek sorrendje kötött, ahhoz, hogy valaki megfeleljen egy adott szint követelményeinek, előbb meg kell felelnie a megelőző szintek elvárásainak.

– Minden szintnek megvan a saját nyelvezete, saját szimbólumrendszere. Ugyanazt a fogalmat különböző szinten különbözőképpen jelenítjük meg. Ennek a megállapításnak lényeges következménye, hogy a tanárnak ugyanazon a szinten kell tanítania, mint amilyen szinten a tanulók állnak, annak ellenére, hogy az ő gondolkodása magasabb szintű követelményeknek is eleget tesz.

– Mindaz, amit az egyik szinten még csak implicit módon említünk, a következő szinten kifejtjük.

– Ha a tanár magasabb szinten tanít, mint amilyen szinten a tanulói vannak, akkor megértés helyett maximum a tananyag memorizálásáig jutnak el.

– Elképzelhető, hogy az egyes tanulók különböző geometriai fogalmak esetén különböző gondolkodási szinten állnak.

– Egy adott szint elérése elsősorban a tanulás minőségétől függ, nem pedig a tanuló életkorától.

## Felmérés a van Hiele-modell nyomán

Az elmélet állításának igazolására az 1980-as években több tanulmány is készült. (*Mayberry*, 1983; *Fuys – Geddes – Tischler*, 1988; *Burger – Shaughnessy*, 1986; *Usiskin*, 1982)

Az említett tanulmányokból átvett tesztek a geometriai gondolkodás fejlesztését célul kitűző munkák kiindulópontjává váltak. A tesztek rendszerint – néhány fogalomkör (háromszögek, négyszögek, hasonlóság stb.) alapul vételével – az egyes szinteknek megfelelően konstruált feladatsorok voltak. Ezeket a tanulók vagy közös írásbeli felmérés, vagy egyéni szóbeli beszélgetés (interjú) formájában kapták meg.

A válaszok alapján elvégezhető a tanulók szintekbe sorolása.

Felmérésemben a tanítóképző főiskolás hallgatók geometriai tudásának feltérképezésére s ezzel összefüggésben az egyes hallgatók van Hiele-szintjének meghatározására törekedtem. A geometriai gondolkodás fejlesztése végigkíséri az iskolai matematikatanítás minden időszakát. A hallgatók olyan réteget reprezentálnak, amely egyrészt már túl van a középiskolai oktatáson, leérettségizett, tehát végigjárta az iskolai fejlesztés minden lépcsőfokát. Ők azok, akik az alsós gyerekek geometriai gondolkodását megalapozzák. Ahhoz, hogy ezt megtegyék, szükségük van arra, hogy világosan lássák a fejlődési folyamat egyes lépéseit és tudják, hol és hogyan avatkozzanak be. Természetesen saját gondolkodási szintjükkel is tisztában kell lenniük.

A vizsgálat kezdetén az volt a hipotézisem, hogy a hallgatók a 0., 1., 2. szint mindegyikén biztos tudással rendelkeznek, a 3. szint követelményeinek azonban már kevésbé, esetleg csak formálisan felelnek meg.

*A felmérés körülményei*

Munkámban a debreceni Kölcsey Ferenc Református Tanítóképző Főiskola másodéves hallgatóit vizsgáltam. Ők az első évben részt vettek egy olyan elméleti geometria kurzuson, amely a középiskolai geometria tananyag elmélyítését, megerősítését, újragondolását szolgálta. Másodéven kerül sor a tantárgypedagógiai ismeretek elsajátítására, ez jelenti mind az alsó tagozatos tananyag, mind a követelmények, mind pedig a szükséges módszertani ismeretek elsajátítását.

A felmérésre az őszi félév második és harmadik hetében került sor, tehát a tantárgypedagógiai kurzusnak még nem jelentkezhetett a hatása.

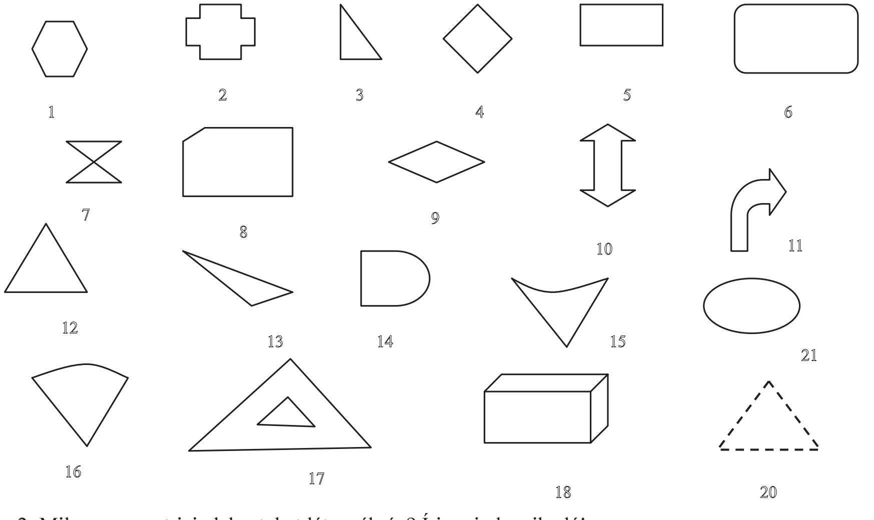
Az írásbeli felmérést ugyanazzal a hallgatói csoporttal végeztem el két részletben. Két egymást követő héten 30–30 perc idő állt rendelkezésükre. Az első alkalommal 20 fő, a második héten 17 (ekkor volt 3 hiányzó) vett részt. A hallgatók önállóan dolgoztak, arra törekedtem, hogy gondolataikat ne osszák meg egymással.

*A feladatok ismertetése*

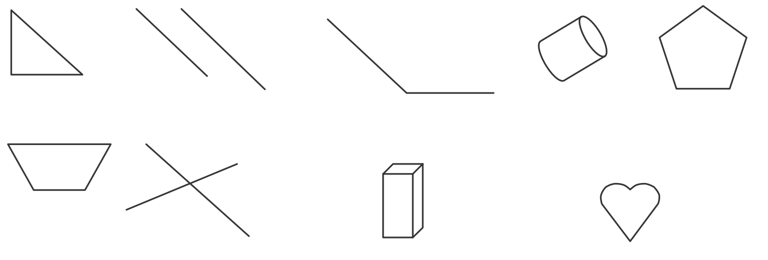
A teszt összesen 15 olyan feladatból állt, amely a háromszög, a négyszög, valamint a hasonlóság-egybevágóság fogalmára épült. A 0., 1., 2. szintek mindegyikéhez 3–3 feladat kapcsolódott, a további 6 pedig a 3. szintre vonatkozott, esetenként túl is mutatva azon.

A feladatok kiválasztásánál támaszkodtam az irodalomban fellelhető tesztekre, néhányat változtatás nélkül vettem át Mayberry (1983) cikkéből.

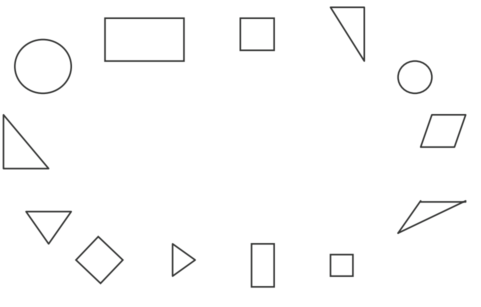
A 0. szint feladatai:
1. Válassza ki az alábbi alakzatok közül
A, a háromszögeket: B, a téglalapokat: C, a sokszögeket:




2. Milyen geometriai alakzatokat lát az ábrán? Írja mindegyik alá!



3. Kösse össze az ugyanolyan alakúakat! *(1)*

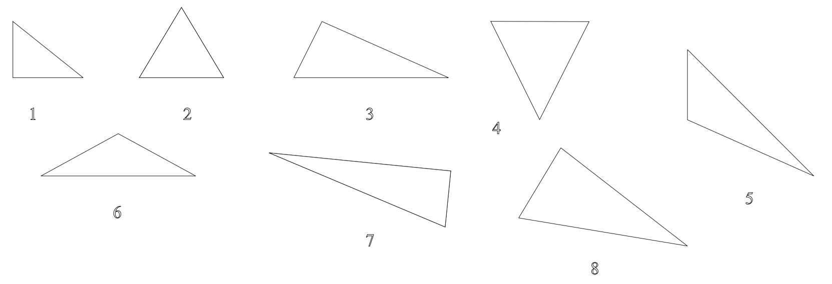


(Az első feladat különböző alakzatok kiválasztására, a második megnevezésére, a harmadik pedig a hasonló alakzatok felismerésére irányult.)

Noha a megfogalmazás és a jó megoldás egyaránt a 0. szintet feltételezi, a válaszokból helyenként következtethetünk magasabb szintű gondolkodásra is. Így az 1. feladatban a sokszögek felsorolásánál utalást találhatunk arra, hogy a háromszöget, négyszöget sokszögnek tekintik-e, a 2. feladatban pedig az alakzat elnevezésének összetettsége (pl. trapéz vagy szimmetrikus trapéz) jelenthet magasabb szintet.

A 3. feladatban az „ugyanolyan alakú” kifejezés a hasonlóság 0. szintű megfogalmazását adja.

Az 1. szint feladatai:
4. A felsorolt háromszögek közül melyekre igazak a következő állítások?




A, Van hegyesszöge………………………………..
B, Van derékszöge…………………………………..
C, Minden szöge hegyesszög…………………………..
D, Van tompaszöge……………………………………..
E, Tengelyesen szimmetrikus………………………………
F, Van két egyenlő oldala…………………………………….

5. Válaszoljon az alábbi kérdésekre! Válaszát röviden indokolja!
A, Lehet-e egy derékszögű háromszögnek leghosszabb oldala? *(2)*
B, Lehet-e egy egyenlőszárú háromszögnek legnagyobb szöge?
C, Lehet-e egy téglatestnek négy egybevágó lapja?

6. Sorolja fel az alábbi alakzatok 4–4 tulajdonságát!
A, paralelogramma
B, kocka
C, szabályos háromszög
(A konkrét háromszög-tulajdonságok megfogalmazásával a kvantoros állítások értelmezésére helyeződik a hangsúly. A 3. feladat szerepel a már említett Mayberry-féle tesztben is, hasonló körülmények között, tehát ott is a megelőző feladat részeként a tanulók rendelkezésére álltak a megoldást megkönnyítő ábrák.)

A 2. szint feladatai:
7. Karikázza be annak a tulajdonságlistának a betűjelét, amelynél mind a négy tulajdonság igaz bármely téglalapra!
A, Minden szöge derékszög.
Átlói felezik egymást.
Átlói derékszöget zárnak be egymással.
Szomszédos oldalai nem egyenlők.
B, Tengelyesen szimmetrikus.
Minden szöge egyenlő.
Átlói felezik egymást.
Szemközti szögeinek összege $90^o$.
C, Bármely két szomszédos szöge egyenlő.
Van szimmetriatengelye.
Szemközti oldalai párhuzamosak.
Átlói egyenlő hosszúak.

8. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis!
…. Van olyan paralelogramma, amely négyzet.
…. Ha egy téglalap átlói egyenlő hosszúak, akkor a téglalap négyzet.
…. Egy tompaszög és egy hegyesszög összege mindig kisebb $180^o$-nál.
…. Ha az ABC háromszög oldalait és szögeit elfelezzük, hozzá hasonló háromszöget kapunk.
…. Minden kocka téglatest.
9. Töltse ki az alábbi táblázatot, tegyen x-et a megfelelő cellába! *(3)*

| Hasonlóak? | Mindig | Néha | Soha | Nem tudom |
|---|---|---|---|---|
| 2 négyzet | | | | |
| 2 egyenlő szárú háromszög | | | | |
| 2 egybevágó háromszög | | | | |
| 1 téglalap és 1 négyzet | | | | |
| 1 téglalap és 1 háromszög | | | | |

(Mindhárom feladat megoldásához szükség van a háromszögek, négyszögek, illetve a hasonlóság témakörein belül előforduló fogalmak hierarchikus viszonyainak tisztán látására.)

További feladatok:

10. Az ABC háromszög AB oldalán felveszünk egy D pontot úgy, hogy a keletkezett ADC és DBC háromszögek egybevágóak legyenek. Mit mondhatunk az ABC háromszögről? Miért? Készítsen rajzot!
Válaszoljon az alábbi kérdésekre is!
AD=DB. Miért?
CD merőleges AB-re. Miért? *(4)*

11.Az n oldalú sokszöget az egy csúcsból kiinduló átlói n-2 db háromszögre bontják.
Egy háromszög belső szögeinek összege 180$^{o}$.
Mi következik ebből a két állításból?

12. Határozza meg azon pontok halmazát a síkban, amelyek két egyenes mindegyikétől 1 cm-re vannak! *(5)*

13. Hogyan kezdené el a következő állítás indirekt bizonyítását?
Két különböző sugarú körnek legfeljebb 2 közös pontja van.

14. Mi a térbeli megfelelője az alábbi síkbeli axiómának?
Létezik legalább három pont, amely nem illeszkedik egy egyenesre.

15. Hogyan szól a következő tételek megfordítása?
A, Ha egy háromszög egyenlő szárú, akkor 2 szöge egyenlő.
B, A derékszögű háromszög magasságvonalai a háromszög egyik csúcsában metszik egymást.

A 10. feladat egy nyitott végű probléma megoldására irányul. A „Mit mondhatunk a háromszögről?” típusú kérdés elsősorban az intuíciós meglátásokra vonatkozott. A rajzkészítés a probléma megértésének felmérését szolgálta. A további kérdések a bizonyítás irányított elvégzését segítették.

A 11. feladat egy, a hallgatók körében jól ismert összefüggésre kérdezett rá a megszokottól kicsit eltérő módon. A formális dedukció része, hogy két feltétel egyidejű teljesüléséből következtetünk valamire.

A 12. feladat az általánosítás, a diszkutálás képességét vizsgálta.

Az utolsó három feladat az euklideszi geometria axiómarendszerén belül maradt ugyan, de megoldásuk feltételezett bizonyos formális logikai jártasságot is.

*1. táblázat. A hallgatói tesztek eredményei*

| *Hallgatók* | *0. szint (%)* | *1. szint (%)* | *2. szint (%)* | *Elért szintek* | *Legmagasabb szint* |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 79 | 65 | 47 | 0 | 0 |
| 2 | 83 | 74 | 73 | 012 | 2 |
| 3 | 86 | 77 | 80 | 012 | 2 |
| 4 | 89 | 54 | 50 | 0 | 0 |
| 5 | 87 | 74 | 53 | 01 | 1 |
| 6 | 84 | 41 | 57 | 0 | 0 |
| 7 | 82 | 71 | 47 | 01 | 1 |
| 8 | 89 | 69 | 53 | 0 | 0 |
| 9 | 76 | 48 | 50 | 0 | 0 |
| 10 | 79 | 74 | 53 | 01 | 1 |
| 11 | 82 | 63 | 23 | 0 | 0 |
| 12 | 81 | 62 | 63 | 0 | 0 |
| 13 | 77 | 39 | 50 | 0 | 0 |
| 14 | 79 | 79 | 57 | 01 | 1 |
| 15 | 88 | 57 | 57 | 0 | 0 |
| 16 | 78 | 51 | 53 | 0 | 0 |
| 17 | 86 | 75 | 50 | 01 | 1 |

*Értékelés*

Az eredményesség kritériumainak meghatározása eltérő az egyes szerzőknél. Mayberry az egyes szintek eredményességi kritériumait sorrendben 50, 80, 65, 60 százalékban jelölte meg. Mások általában 5 feladatból 4 megoldása esetén tekintették az adott szintet a tanuló sajátjának. Azt a tanulót, aki az általa elért legmagasabb szint alatt nem teljesített minden szintet, nem vették figyelembe a tudásszint megállapításánál.

Én a feladatok értékelésénél egységesen 70 százalékos teljesítményt tekintettem sikeresnek. *(1. táblázat)*

A felmérés eredménye szerint a 17 hallgatóból tíz a nulladik, öt az első, kettő pedig a második szinten van.

A további feladatok alapján a csoportból senki nem érte el sem a harmadik, sem a negyedik szintet. A 12., 14., 15. feladattal senki nem foglalkozott érdemben, a 10-dikre nem született jó megoldás, a 11-diket hatan, a 13-dikat tizenegyen oldották meg hibátlanul.

A csoport átlagos teljesítménye feladatonként:

| *Feladat* | *1.a.* | *1.b.* | *1.c.* | *2.* | *3.* | *4.* | *5.a* | *5.b..* | *5.c.* | *6.a.* | *6.b.* | *6.c.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Teljesítmény | 89% | 94% | 62% | 81% | 83% | 90% | 83% | 21% | 82% | 56% | 19% | 76% |

| *Feladat* | *7.* | *8.* | *9.* | *10.* | *11.* | *12.* | *13.* | *14.* | *15.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Teljesítmény | 75% | 55% | 68% | 20% | 35% | 0% | 68% | 0% | 0% |

## A hallgatói válaszok elemzése

*0. szint*

1. feladat: A 20-as alakzatot tizenkilencen, a 17-est tizenhatan sorolták a háromszögek közé, és volt négy, illetve hat fő, aki a 16-ost, illetve 15-öst is háromszögnek tekintette. Az eredmény mindenképpen meglepő, hiszen nagyon egyszerű fogalomról van szó. A téglalapok kiválasztásánál is találkoztunk tipikusnak mondható alsó tagozatos hibákkal. Így tizenegyen csak az 5. alakzatot tekintették téglalapnak, és volt három olyan hallgató, aki a 6-ost és a 8-ast is oda sorolta, sőt egyikük a 18-ast is.

A sokszögek esetében jól felismerhető volt az a gondolatmenet, hogy a már kiválasztott háromszögeket, téglalapokat (12 fő), illetve egyáltalán a négyszögeket, háromszögeket nem írták be (6 fő).

Négyen a konkáv sokszögeket kihagyták, nyolcan görbevonalút is beírtak. A 7-es, illetve a 17-es alakzatot tizennégyen sorolták ide, ketten pedig a téglatestet is sokszögnek tekintették.

A 2. feladatban nem értékeltem külön, ha a hallgató összetett elnevezést adott, ugyanis ez nem szükséges a 0. szint követelményeinek teljesítéséhez. Egyedül az i. alakzat megnevezése jelentett problémát, csupán két hallgató írt geometriailag helyes elnevezést. (síkidom, konkáv alakzat)

A 3. feladatban az „ugyanolyan alakú" megfogalmazásra senki nem kérdezett rá, úgy tűnt, hogy mindenki hasonló síkidomokat keresett. Volt két olyan hallgató, aki a 2 négyzetet nem kötötte össze, valószínűleg azért, mert helyzetük eltért, s egy olyan is, aki a két derékszögű háromszöget a tompaszögűvel ugyanolyan alakúnak tekintette.

Az 1–3. feladat elemzése után megállapíthatjuk, annak ellenére, hogy a 70 százalékos követelményszintet mindenki elérte, volt néhány olyan hiba, mely az 1–2. osztályban tipikus, a hallgatók esetében azonban meglepő. Ezek a hallgatók (szaggatott vonallal rajzolt háromszög, háromszög alakú vonalzó képe, szív alakzat) későbbi tanulmányaiktól függetlenül csak észlelésükre támaszkodtak, s így ténylegesen a 0. szintnek megfelelő válaszokat adtak. Háromszögnek tekintették a „háromszög-szerű" alakzatokat is.

*1. szint*

A 4. feladat konkrét háromszögek tulajdonságainak meghatározására vonatkozott. A B tulajdonság esetén öten voltak azok, akik a 8-as háromszöget derékszögűnek tekintették (ennek egyik hegyesszöge valóban kevéssel tér el a 90°-tól), nem érezték szükségét annak, hogy ezt egyszerű módszerrel (derékszögű vonalzó, papírlap) ellenőrizzék. Volt olyan, aki a C tulajdonságot olyan háromszöghöz is hozzárendelte, amelyet az előbb a B csoportba is besorolt. Nyilván ő nem látott kapcsolatot az egyes háromszög-tulajdonságok között. Az E és F tulajdonságok kölcsönösen feltételezik egymást, mégis volt hat olyan hallgató, aki az 1-es háromszöget egyenlő szárúnak tekintette, de nem tengelyesen szimmetrikusnak. Ebben az esetben valószínűleg a háromszög helyzete befolyásolta, mert itt a tengely nem volt függőleges.

Az 5. feladat a hallgató előtt lévő ábrák segítségével a háromszögek általános tulajdonságaira kíváncsi. Az A kérdésre mindenki helyes választ adott, az indoklás azonban már nem volt teljes: tizenegyen írták azt, hogy azért van a derékszögű háromszögnek leghosszabb oldala, mert az átfogó a leghosszabb, de nem fejtették ki, hogy miért. Ez a válasz azonban így is kedvezőbb, mint a Mayberry-cikkben lévők, mert ott a hallgatók 63 százaléka gondolta úgy, hogy a derékszögű háromszögeknek nincs leghosszabb oldaluk. A B kérdésre adott válaszok már árnyaltabb képet mutattak: hét hallgató adott igen választ, de egyikük indoklása sem volt elfogadható. A 10 „nem" válasz között figyelmet érdemel, hogy öten az egyenlő szárú és az egyenlő oldalú háromszög fogalmának keverése miatt döntöttek rosszul. A C részre 5 hallgató válaszolt igennel és indokolt rajzzal. További négyen indoklás nélkül írtak igent, nyolcan pedig nem vagy rosszul válaszoltak.

A 6. feladat három alakzat 4 tetszőleges tulajdonságának felsorolását kérte. Általánosságban megállapíthatjuk, hogy mindhárom esetben nehézséget jelentett 4 tulajdonság találása. A paralelogrammáról hatan írták, hogy átlói merőlegesek egymásra. Ugyancsak hat esetben olvasható a „belső szögeinek összege 360°", ami helyes, de természetesen minden négyszögre igaz, kilencen a kockának egyetlen helyes tulajdonságát sem tudták megfogalmazni. A négyzet jellemzőit hat fő sorolta fel, tizenegyen pedig valószínűleg a kockára gondoltak ugyan, de az oldal, a szög szavakat használták a lap, az él, a csúcs szavak helyett. A legtöbb jó választ a szabályos háromszög esetében kaptuk. Itt is tizennégy volt azok száma, akik a „szögeinek összege 180°"-ot írták. Több esetben tulajdonság helyett definícióval találkoztunk: „Magasságvonala 2 derékszögű háromszögre bontja." vagy „egy csúcsából a szemközti oldalra állított merőleges a magasságvonal".

Az *1. táblázat* szerint 17-ből hét hallgató felelt meg ezen szint követelményeinek. A hibák egyrészt a fogalmak pontatlan ismeretére utalnak, másrészt arra, hogy az egyes alakzatok tulajdonságait nem felfedezés, gyakorlatok megoldása során ismerték meg, hanem csupán mechanikusan megtanulták, így az idő elteltével ezeket keverik.

Válaszaik előrevetítik, hogy az alakzatok alá-, fölérendeltségi viszonyai, a tulajdonságok közötti összefüggések felismerése problémát jelent.

*2. szint*

A 7. feladatra 20-ból 15 jó válasz született, sajnos, itt a feladat jellegéből adódóan nem tudunk a hibás válaszok okaira következtetni.

A 8. feladat állításai közül az utolsó kettő jelentette a legnagyobb problémát. A negyedik állításról („Ha az ABC háromszög oldalait és szögeit elfelezzük, hozzá hasonló háromszöget kapunk.") tizenhatan vélték azt, hogy igaz. Csupán négyen, a hallgatók 20 százaléka válaszolt helyesen. (Mayberry (1983) cikkében a jó válaszok aránya 76 százalék volt.)

Az utolsó állítást („Minden kocka téglatest.") csak öten tartották helyesnek.

A 9. feladat eredményeit a *2. táblázat*ban hasonlítjuk össze a már többször említett Mayberry-cikk (1983) eredményeivel.

*2. táblázat. Felmérésünk eredményei a Mayberry-tesztek eredményeivel összevetve*

| | *Saját eredményeink* | *Mayberry eredményei* |
|---|---|---|
| *2 négyzet hasonló* | | |
| Mindig | 94% | 74% |
| Néha | 6% | 26% |
| *2 egyenlő szárú háromszög hasonló* | | |
| Mindig | 53% | 53% |
| Néha | 47% | 37% |
| Soha | 0% | 5% |
| Nem tudja | 0% | 5% |
| *2 egybevágó háromszög hasonló* | | |
| Mindig | 65% | 58% |
| Néha | 24% | 21% |
| Soha | 0% | 16% |
| Nem tudja | 11% | 5% |
| *1 téglalap és 1 négyzet hasonló* | | |
| Mindig | 12% | 26% |
| Néha | 35% | 37% |
| Soha | 53% | 37% |
| *1 téglalap és 1 háromszög hasonló* | | |
| Mindig | 0% | 11% |
| Néha | 0% | 16% |
| Soha | 100% | 73% |

A táblázatból egyrészt az tűnik ki, hogy hallgatóink eredményei az 5 kérdés közül 4-ben jobbak, mint az amerikai vizsgálatban szereplőké, másrészt az, hogy a bizonytalanságok ugyanott jelentkeztek mindkét esetben. Jól megfigyelhető ez a két egyenlő szárú háromszög, illetve egy téglalap és egy négyzet hasonlóságának problémájánál.

A 2. szint feladataira adott hibás válaszok jól mutatják a különböző alakzatok közötti kapcsolatok, a fogalmak hierarchikus viszonyainak (pl. hasonlóság és egybevágóság) hiányát.

*További feladatok*

A 10. egy egyszerű bizonyítás lépésenkénti konstruálását kívánta. Mindenki a szövegnek megfelelő, jó rajzot készített. A „Mit mondhatunk a háromszögről?" kérdésre heten egyenlő szárú, nyolcan egyenlő oldalú háromszöget írtak. A 8 válaszból sejthető, hogy a már korábban említett fogalmi zavarról van szó. Az indoklások egyértelműen bizonyítják, hogy nem veszik figyelembe a szövegben szereplő feltételt. (Az ADC és a DBC háromszög egybevágó.)

A lépések indoklása sem értékelhető: Az „AD=DB" állítást tizenöten indokolták azzal, hogy D felezőpont, de nem látták szükségesnek, hogy ezt megokolják.

Hasonlóan a „CD merőleges AB-re" állításra 14 olyan indok érkezett, hogy CD magasságvonal (esetleg felező merőleges vagy szimmetriatengely). Mindössze egy hallgató akadt, aki a feladat szövegében szereplő egybevágóság követelményére utalt.

A 11. feladatban szereplő tétel és bizonyítása elvileg jól ismert a hallgatók előtt, az 1. éves vizsgaanyagban is szerepelt. Ennek ellenére mindössze hat jó válasz született, hárman csak az egyik állítást vették figyelembe, ketten próbálkoztak (sikertelenül) a megtanult képlet felidézésével (($n$-2)/180°).

A 12. feladat válaszai nem voltak értékelhetők: négyen semmit nem írtak, a többiek rajzoltak két párhuzamos egyenest. Közülük egy hallgató utalt a diszkusszióra (csak akkor van ilyen pont, ha az egyenesek párhuzamosak), nyolcan a pontok mértani helyét a két párhuzamos középvonalában jelölték meg. Senkinek sem jutott eszébe az, hogy a két párhuzamos egyenes távolsága nem feltétlenül 2 cm, sem pedig a metsző egyenesek esete. Nem figyeltek arra, hogy a feladatban megfogalmazott helyzet nem ugyanaz, mint a bennük élő szemléletes kép. Általánosítás, esetvizsgálat tehát nem történt.

Az utolsó három feladat csupán formális logikai ismereteket igényelt annak ellenére, hogy az állítások az euklideszi geometria körébe tartoztak. A 13. feladat az indirekt bizonyítási módszerre utalt, s az első bizonyítási lépés (tegyük fel, hogy az állítás nem igaz) meghatározását várta el. Csupán 2 hallgató próbálta megfogalmazni az állítás tagadását, a többiek nem értették meg a feladatot.

A 14. feladatra nem kaptunk jó választ, 10-en nem írtak semmit, 7-en megpróbálták értelmezni azt, amit az axióma állít.

A 15. feladat két tétel formális megfordítását kérte. Az elsőnél egyértelmű volt a feltétel és a következmény szerepe, ennek megfordítása 15 hallgatónak sikerült. A másodikban nem különült el explicit módon a két rész, itt 12 helyes válasz született.

A két legmagasabb szint követelményeinek egy hallgató sem felelt meg, noha a feladatok nem haladták meg a középiskolai tananyagot. Helyenként találkozhattunk formális tudással, de a deduktív gondolkodás nem észlelhető.

## Néhány következtetés

A felmérés szerint a hallgatók a 0. szintet biztosan uralják, azonban több esetben láthattuk, hogy nyelvezetük, fogalmaik a gyerekek (1–2. osztály) szintjén áll. Feltehető, hogy később szerzett ismereteik nem voltak kellően megalapozottak, gyakorlati tevékenységgel, alkalmazással nem párosultak, a mechanikus tanulással szerzett tudás pedig elveszett.

Az 1. és a 2. szint elvárásaiban megmutatkozó hiányosságok még elgondolkodtatóbbak. Hipotézisemmel ellentétben a 17 hallgató közül 7 érte el az 1. szintet s csak 2 a 2. szintet. Ez úgy is értelmezhető, hogy 10 hallgató (a csoport több, mint fele) nem rendelkezik azzal a biztos tudással, amit egy 4. osztályos tanulótól elvárunk.

Az utolsó 6 feladat sikertelensége a középiskolai geometria-tanítás hiányosságaira utal. A hallgatók nemhogy rálátással nem rendelkeznek az alsós tananyagra, maga a tananyag ismerete is kérdéses.

A van Hiele-elmélet és az elmélet érvényességét vizsgáló tanulmányok egyaránt utalnak olyan szempontokra, melyeket fejlesztőmunkánkban mi is hasznosíthatunk.

A szintek hierarchiája a jelen felmérésben is kimutatható. Egyetlen olyan hallgató sem volt, aki például a 2. szintnek megfelelt volna, de a 0-diknak vagy az 1-sőnek nem.

Az is látható azonban, hogy a szintek nem különíthetők el teljesen, például egy 0. szintű válasz helyességét befolyásolhatják magasabb szintű ismeretek (sokszögek az 1. feladatban).

Felmérésünkben nem vállalkoztunk arra, hogy az egyes fogalmi körökben külön-külön vizsgáljuk a hallgatók gondolkodási szintjét. Az elmélettel összhangban azonban mi is észrevettünk olyan jeleket, amelyek arra utalnak, hogy egy-egy hallgató különböző fogalmakat különböző gondolkodási szinten sajátított el. Például a kocka esetében meglévő félreértések azt mutatják, hogy az illető itt még a 0. szint követelményeinek sem felel meg, míg a többinél jóval magasabb szinten áll.

Végül kiemelném az elméletnek azt a megállapítását, hogy a geometriai gondolkodás fejlesztése elsősorban nem az életkor, hanem az alkalmazott módszerek függvénye. Ennek alapján joggal bízhatunk abban, hogy a tanítójelöltek tudásában észlelt hiányosságok pótolhatók. Megfelelő elméleti, gyakorlati képzéssel elérhetjük, hogy mindegyikük rendelkezzen legalább az első két szint követelményeinek biztos ismeretével. Az 1. éves elméleti kurzusokon nagyobb hangsúlyt kell helyeznünk az egyes fogalmak biztos ismeretére, különös tekintettel az alsó tagozaton is előforduló fogalmakra. Meg kell győződnünk arról is, hogy hallgatóink birtokában vannak a fogalmak közötti hiererchikus rendszerek ismeretének. A szemináriumokon elsősorban a fogalmak elmélyítésére, rendszerezésére kell törekednünk. A hallgatókat változatos problémaszituációk elé állítva fejleszthetjük érvelési, indoklási képességeiket. 2. éven a tantárgy-pedagógiai kurzuson meg kell ismerkedniük nemcsak az alsó tagozatos tananyaggal, hanem a geometriai gondolkodás fejlesztését leíró általános elméletekkel is. Az egyes tanulási fázisokat tudatosan alkalmazva, mindegyikhez kellő feladatmintát összegyűjtve, különböző munkaeszközöket megismerve hallgatóink geometriatanítása tudatosabbá válhat.

Ha mindez megtörténik, hallgatóink eredményesebben fogják alakítani, fejleszteni majdani tanítványaik geometriai gondolkodását.

## Jegyzet

*(1)* A feladat a Hajdu – Novák – Scherlein: *Matematika 1.* tankönyvben szerepel.
*(2)* Az A és B kérdés Mayberry (1983) munkájában szerepel.
*(3)* A feladat Mayberry (1983) munkájában szerepel.
*(4)* A feladat szerepel Mayberry (1983) munkájában.
*(5)* A feladat szerepel a *Geometriai feladatok gyűjteményének* I. kötetében.

## Irodalom

Burger, W. F. – Shaughnessy, J. M. (1986): Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 31–48.

Fuys, D. – Gedde, D. – Tischler, R. (1988): The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph No. 3.*

Mayberry, J. (1983): The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 58–69.

Usiskin, Z. (1982): *Van Hiele levels and achievment in secondary school geometry. Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project Department of Education*. University of Chicago, US.

*Köszönetet mondok Ambrus Andrásnak, az ELTE TTK docensének hasznos tanácsaiért, észrevételeiért.*