UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

NORBERTO CUESTA DUTARI
Catedrático de la Facultad de Ciencias

ALGUNOS ASPECTOS DEL PENSAMIENTO MATEMATICO

Discurso pronunciado en la solemne apertura del Curso Académico 1966-1967

SALAMANCA
1966

Depósito Legal: S. 154 - 1966

GRÁFICAS EUROPA. - Sánchez Llevot, 1. - Teléf. *7806. - SALAMANCA

Dame inteligencia, y viviré.

(Ps. 119 v. 144)

PROLOGO

Dedicamos esta lección, leída en la inauguración del curso 1966-67 de la Universidad de Salamanca, al examen de algunos aspectos lógicos, ontológicos y humanos de las Matemáticas.

Ya la operación de contar, que exponemos en forma nueva, nos ofrece dos hechos considerables:

a) *Es una construcción recursiva de signos físicos, que nos permite definir al número natural como signo.*

b) *Todos estamos seguros de que jamás, por mucho que prolonguemos el proceso, se repetirá ninguno de los signos numéricos ya obtenidos.*

Este enunciado expresa una verdad real y necesaria, referente a un proceso físico: el de construcción.

Y es que, por bajo de la Matemática formal, se nos presenta una Matemática combinatoria natural, cuyos enunciados se nos ofrecen como leyes ontológicas y necesarias de los conjuntos finitos. Si las alteramos, no podríamos montar formalismo alguno.

La ventaja del formalismo, además de su control sensible, radica en que el signo, y los procesos con el signo, admiten generalmente muchas interpretaciones concretas. Se presta, por tanto, para expresar la forma común a todos los procesos lógicos subyacentes en todas ellas, los cuales se encuentran enmascarados por circunstancias, que ninguna influencia tienen en la concatenación lógica.

El aspecto topológico de la deducción, lo exponemos con bastante detalle, siguiendo publicaciones nuestras.

Insistimos en las diferencias que hay entre axioma y postulado, malamente confundidos con las proposiciones de una base de una ciencia deductiva.

Complementamos algunos puntos de dichas publicaciones, exponiendo lo referente a la refutación de proposiciones desde una ciencia deductiva.

Finalmente indicamos algunas de las tareas apasionantes del profesor de Matemáticas, cuyo intento general debe de ser enseñar el vuelo de la inteligencia. Pocas disciplinas más adaptadas para hacerlo que las Matemáticas.

1. La operación de contar, una génesis recursiva de infinitos signos.

La formación sistemática, de los signos numéricos decádicos, en que consiste la operación de contar por escrito, es quizá la invención matemática más considerable y profunda. Como en la escritura fonética, disponemos aquí de un «abecedario» de signos atómicos: las «cifras». En el sistema usual, el decádico, son diez los signos simples, cuya formación es arbitraria: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9[1].

Los signos numéricos son sucesiones finitas, linealmente ordenadas, de cifras: se trata de «palabras» escritas con el alfabeto de las cifras.

La definición fundamental es la del operador «siguiente a».

Si n designa, en forma global, al signo numérico de partida, y n' al siguiente, éste se construye mediante este doble proceso:

a) Dispuestas las cifras ordenadamente en un disco, como en el teléfono, el operador * produce la inmediatamente siguiente, en el sentido anti-horario del giro. Por ejemplo: 5* = 6; 9* = 0.

b) Dado cualquier signo numérico n, se forma el siguiente n', aplicando el asterisco a todas las cifras del grupo final de cifras 9 (que puede ser vacío) y a la inmediata precedente (un 0, si sólo hubiera cifras 9). Por ejemplo: 5299' = 52*9*9* = 5300; 52' = = 52* = 53; 99' = 099' = 0*9*9* = 100.

Definición formal de los números naturales:

Números naturales son los signos numéricos, obtenidos por el operador secuencial, iniciando su actuación sobre el 0[2].

---

[1] En el diádico, propugnado por Leibniz (1646-1716), empleado por las máquinas electrónicas de cálculo, porque las situaciones son dos —no pasa la corriente, y pasa— las cifras son dos: 0, 1.

[2] Desconocemos la obra de Dingler, *Die Methode der Physik* (1937), cuya definición del número coincide, al parecer, con la del texto. Ver Abbagnano, *Diccionario de Filosofía* (México 1963), «Número».

El teorema fundamental afirma:

Todo signo numérico difiere de los precedentes[3].

Por tanto, hay infinitos números naturales.

Y, en consecuencia, es posible nombrar, con una «palabra decádica» bien determinada, a cualquier colección finita, aunque se trate de la que forman los granos de arena de una playa. Es lo que admiraba Arquímedes (287-212), y a lo que alude el título de su monografía «El Arenario»[4] dedicada a la numeración.

Examinando, con atención, los celebrados axiomas de Peano (1858-1932)[5], que hoy se consideran el más riguroso fundamento de la Aritmética, se ve que están calcados sobre la operación de contar. He aquí la versión de ellos, dada por Kleene[6]:

I. 0 es un número natural.

II. Si n es un número natural, lo es n'.

III. Los únicos números naturales son los dados por I y II.

Por no definirse el operador «apóstrofo» en I, II, III, nada asegura que los números naturales sean, todos ellos, distintos. Para asegurarlo, se añaden:

IV. $n' = m'$ implica $n = m$.

V. Para todo número natural n, $n' \neq 0$.

Como se ve, el operador «apóstrofo» sigue sin definir. En II, IV, V, solamente se enuncian unas leyes que lo regulan.

Con la definición dada por nosotros del apóstrofo, como *operación física,* que se realiza sobre signos *físicos,* las leyes IV y V, así como el teorema fundamental, enuncian hechos *físicos.* Son verdades *ontológicas,* referentes a un proceso *real* de construcción de signos. Su certeza está tan arraigada, en todos los que cuentan, que ninguno ha sentido la necesidad de demostrarlas. Quizá esto se deba también a no haberse enunciado, con bastante claridad, las reglas de formación del signo siguiente a uno dado, las cuales son el fundamento de los *hechos* afirmados por esos teoremas.

---

[3] Su demostración jamás ha sido intentada. No deja de ser extraño.

[4] *Les oeuvres complètes d'Arquimède* I (Liege 1960), pág. 353-374.

[5] *Arithmetices principia nova methodo exposita* (1889).

[6] *Introduction to Metamathematics* (1952), pág. 20.

Una sucesión es finita, cuando sus signos puedan contarse con los números naturales. También estamos seguros de que, toda sucesión finita de cifras, no iniciada por 0, caso de tenga varias, es un número natural. Por tanto, que esta cuestión *física* —¿aparece la «palabra decádica» 372 entre los numeros naturales?— tiene contestación afirmativa, y que se contesta negativamente a la cuestión isomorfa sobre 0372.

Insistimos en esas observaciones, porque está bastante extendido, en la hora actual, entre filósofos casi sin excepción, y entre matemáticos con algunas, que «la Matemática»[7] no constituye un saber, porque ninguna de sus proposiciones, según ellos, informa sobre hechos reales, sino que es un legnuaje, o, mejor dicho aún, un puro juego de signos, donde no hay otra verdad que el respeto a los convenios que regulan el juego[8].

2. Matemática formal y matemática ontológica[9]

Para un niño, y para un salvaje, el número natural es un sucesión, finita y totalmente ordenada, de figuras. La situación de ambos, ante el número, es idéntica a la del arqueólogo ante la inscripción, que no sabe descifrar, grabada en una estela.

Cuando el niño realiza una cuenta de multiplicar, somete, los signos de los factores, a las manipulaciones ordenadas por la regla. Al final, obtiene otra sucesión de signos, a la que llama el producto.

El niño asegura que su cuenta «está bien», aunque no sepa justificar la regla operatoria: está seguro de la coincidencia formal con su regla.

---

[7] Menéndez Pelayo (1856-1912) atribuye eso de «la Matemática» al grupo krausista. *La Ciencia española* I (1933), pág. 98.

[8] Ortega y Gasset (1883-1955), *La idea de principio en Leibniz, y la evolución de la teoría deductiva* (1958), pág. 87, cita de Einstein, *Geometrie und Erfahrung*, «Las proposiciones matemáticas, en cuanto que se refieren a la realidad, no son válidas, y, en cuanto que son válidas, no se refieren a la realidad». Este dicho, no matiza entre proposiciones aritméticas y geométricas. Por la pluralidad de las estructuras geométricas heteromorfas, que son posibles combinatoriamente, sería dificilísimo acertar con la correspondiente, en un cierto instante, al espacio físico. A eso nos parece alude el dicho, finamente irónico, de H. Poincaré (1854-1912): «La Géométrie n'est pas vraie: elle est... avantageuse».

[9] A quien nos censure el uso de la palabra «ontológico», le rogamos tenga en cuenta el número enorme de teoremas llamados, precisamente, de «existencia» que se dan en las Matemáticas. Por ejemplo, la célebre, y no resuelta cuestión de Goldbach (1690-1764), ¿Existe un número natural par que no sea suma de dos números primos?, pregunta por la «existencia».

Un algebrista abstracto dice: este niño construye siempre una parte del mismo grupoide asociativo, conmutativo, y con neutro, para los números naturales.

Un lógico simbólico dice: Como yo me atengo al formalismo, la justificación de la regla no me interesa: lo que me interesa es que el niño opere bien; esto es, que se atenga a la regla.

Un matemático combinatorio, platónico y cantoriano, dice: a mí, lo mismo me da que el niño opere bien que mal. Esto último, para mí, carece de sentido: siempre construirá un grupoide, entre los «dos elevado a aleph-cero» que hay, todos igualmente interesantes, y los únicos factibles.

Su profesor, un humanista, dice: A mí lo que me interesa es el niño; lo que yo intento es darle la conciencia de su propio entendimiento. En cuanto tenga edad competente, para seguir un razonamiento algo complicado, le enseñaré a deducir, la regla operatoria, que ya sabe mecánicamente, de la definición de la multiplicación, bien como suma reiterada, bien como composición cartesiana de conjuntos.

El nominalismo, en que convienen el algebrista abstracto y el lógico positivista, tiene su justificación metodológica: deben separarse nítidamente los problemas de la expresión y los de la significación. Y ellos se preocupan de los de la expresión. Pero, cuando da en exclusivismo que niega lo que no es signo, es científicamente inadmisible, y ha conducido a la afirmación, cuando menos, aventurada de que, en las Matemáticas, no hay más que lenguaje convencional: que jamás enuncian proposiciones objetivas, cósmicas, válidas para los seres físicos, como las enunciadas por el naturalista o el historiador. Total, como dicen que ha escrito Bertrand Russell[10], que, «en Matemáticas, jamás sabemos de qué hablamos, ni si lo qué decimos es verdad».

Dudamos que tal afirmación la admitan todos los matemáticos, sin excepción. Es difícil pensar, para muchos teoremas de la teoría de números, que no enuncien verdades cósmicas, físicas, verdaderos principios ontológicos sobre las colecciones finitas

[10] La frase, sin puntualizar la cita, la han repetido muchos. En lo que yo leí de RUSSELL, no recuerdo haberla encontrado, aunque tiene el estilo de sus «boutades». Es posible que se encuentre en *Los principios de la Matemática* (1948).

efectivas. Muchos es imposible pensarlos como relaciones verbales, obtenidas por unas reglas de juego deductivo puramente convencionales, y que, de lo que ellos afirman —o niegan— podría suponer lo contrario, en ninguna circunstancia, un físico, un biólogo, un economista, un historiador. Jamás podré pensar que 7 objetos pueda repartirlos en clases, todas con el mismo número de objetos, cada una con más de 1 y con menos de 7. Jamás podré repartir 8 objetos en grupos de a 3. Con 12 objetos jamás podré hacer 5 rectángulos distintos. Sé que jamás podré señalar un número primo que sea el supremo entre los números primos.

Es más: si el dicho atribuido a Bertrand Russell fuera otra cosa que una de sus muchas «boutades» sería imposible construir la misma Matemática formal, la del signo. Bajo la Matemática formal subyace la Matemática combinatoria, cuyos teoremas tampoco puedo pensarlos como convenios verbales, sino como verdades ontológicas, físicas, de las que no puedo pensar, como de los convenios, que falten jamás. Sé, por ejemplo, que, con tres signos, jamás podré construir más de dos grupos heteromorfos[11]. Cuando digo que, con 4 letras, puedo construir 256 palabras de 4 letras, y ni una más, ni una menos, sé lo que digo, y sé que lo que digo es verdad. Si no lo supiera, no me pondría a construir la Matemática formal, pues no entendería qué me proponía hacer. Y es que la Matemática combinatoria está debajo de la Matemática formal.

Más exacta nos parece la agudeza, también famosa, de Kronecker (1823-1891): «Los números naturales los hizo el buen Dios: los demás, son invención de los hombres»[12]. Por esa «naturalidad», de los números naturales, bajo la Matemática, con más pretensiones de formal y simbólica, reaparece la Aritmética eterna, la de siempre, la que es *ciencia física de los conjuntos finitos*, cuyas verdades se nos presentan como necesarias. Los signos atómicos, de cualquier sistema formal, constituyen un conjunto fisico y finito. El sistema formal, es una combinatoria particular, entre las muchas —pero determinadas en número— que pueden hacerse con

---

[11] Los grupoides son $3^9 = 19.683$.

[12] También Sócrates (470-399) distinguía dos Aritméticas: la vulgar y la de los filósofos (*Filebo*).

ellas. En la enunciación, de las «reglas»[13] para manejarlos, no puedo contravenir jamás a las propiedades, físicas y necesarias, de ese conjunto. Y no se puede contar con más sucesiones que las que, como posibles, nos da esa ciencia física que es la Aritmética combinatoria.

También por eso, cuando se monta una máquina de cálculo, para que, con más precisión, y sin ningún fallo por distracción, realice el proceso de signos en que consiste el cálculo, su montaje está condicionado, no sólo por las propiedades físicas de los materiales empleados, sino por los enunciados de la Aritmética combinatoria natural, cuyas proposiciones son leyes ontológicas de los conjuntos finitos. El formalismo absoluto, que no exigiría nada ajeno al formalismo parece, por tanto, una quimera.

3. Aprendizaje formal del formalismo.

Tenemos delante, una máquina de cálculo, un niño que sabe muy bien «las cuatro reglas», y un salvaje de vista muy aguda, y dotado de una memoria prodigiosa.

Con ellos están: un algebrista, que presume de muy moderno[14], y que no escatima declamaciones contra la intuición y la evidencia: un matemático platónico-cantoriano[15]. Por lo que tiene de platónico, gusta de agotar la combinatoria de los signos, que señala todas las posibilidades ideales. Por lo que tiene de cantoriano, analiza ingenuamente, sin forzarlas con esquemas previos, sus intuiciones, que dice son las fuentes de la invención matemática, aprovechando, en sus razonamientos, todas sus evidencias, por personales que sean, sin ocultar, en su enseñanza, sus propias

[13] Prefiero ese nombre al de «axiomas». Hemos demostrado, en *¿Postulado = axioma?* que el concepto de axioma requiere más precisión de la que, ordinariamente, se da a esa palabra, y que, de ninguna manera, equivale a «postulado».

[14] En el *Algebra* (6.ª ed. 1964) de Van der Waerden, se reproduce el prólogo de la 4.ª (1955). Suprimió el *Moderne,* del título de las anteriores, por consejo de Brandt: «que el título no induzca la sospecha de seguirse una moda, y que la excelente matemática que enseña, ayer era desconocida, y mañana será olvidada». Y Lang, en su *Algebra* (1965) reproduce estas palabras de Severi en 1949: «Prefiero llamarla Algebra abstracta y no moderna, porque vivirá, sin duda, largo tiempo, y acabará siendo el Algebra antigua.

[15] Lentin-Rivaud. *Leçons d'Algèbre moderne* (1961), pág. 136: «Cantor contra la hostilidad y sarcasmos de muchos de sus contemporáneos, creó la teoría de conjuntos, que ejerce una gran influencia sobre las matemáticas modernas».

motivaciones[16]. También está con ellos un lógico, atenido a la positiva manipulación del signo. Se comprometen a no enseñar nada al salvaje. Uno de ellos maneja la máquina.

Propone la misma cuenta de multiplicar, a la máquina y al niño. El salvaje observa atentamente. Cuando concluye el niño, coge la pluma y el papel, y reproduce, en el mismo orden, y rápidamente, el cálculo entero del niño.

Es maravilloso —pondera el lógico—: sin apelar a nada distinto del signo, ha realizado todo lo positivo y sensible del cálculo. Y como es el cálculo lo que interesa al formalismo, véanlo ustedes aquí en su grado más absoluto.

A mí —dice al algebrista moderno— lo que me interesa es el resultado, que es el que, con los datos, y el signo =, estructura en ternas el conjunto de números naturales como grupoide asociativo, conmutativo y con neutro. Si hubiera puesto sólo el resultado, como la máquina, yo me hubiera quedado más satisfecho. Me agrada mucho, no obstante, que no haya apelado a su personal evidencia, ni a la significación de los signos.

El platónico-cantoriano propone que se le cambien los datos al salvaje. Este, ahora, no hace nada con su papel y pluma.

Parece que dejó de funcionar, para la nueva cuenta, el formalismo absoluto —dice el clásico cantoriano—.

Proponen que el niño realice varias cuentas ante el salvaje, para que éste aprenda el manejo multiplicativo de las cifras. Mas como el niño cansado se equivoca, el salvaje no llega a conclusión ninguna sobre el proceso que sigue el niño para multiplicar las cifras.

Si el niño se equivoca —dice el lógico— es imposible que el salvaje obtenga la regla constante para multiplicar las cifras.

Combinatoriamente —contesta el clásico— el niño no puede equivocarse nunca. Siempre construirá una parte común a muchos

---

[16] En *Oeuvres de Fermat* (1601-1665), III (1896), pág. 439, se leen unas discretísimas palabras contra quienes ocultan las vías de sus invenciones. Por hacerlo, censura a Arquímides y a otros antiguos.

Asimismo LAPLACE (1749-1827) *Oeuvres* VII (1885), pág. 478, aplaude las palabras de FERMAT, y censura a NEWTON (1642-1727) por tapar las huellas de sus descubrimientos. También hoy, pero muchos por incapacidad, hay profesores que dan, a sus alumnos, una eseñanza sin motivaciones intuitivas. Como no saben escalonar el interés, aconsejan a sus alumnos se repasen, en los descansos del cine, sus definiciones y reglas vacías, que sólo dicen cómo se manipulan los signos.

grupoides, todos ellos tan interesantes, para mí, como el que hace la máquina.

Dejemos que el salvaje manipule la máquina —propone el lógico—.

El salvaje, que se fijó cómo le sirvieron los datos a la máquina, realiza el isomorfismo mecánico, y obtiene el resultado correcto de todas las cuentas de multiplicar que le proponen.

Todos admiran la inteligencia del salvaje, quien, a la primera, captó el tipo de la operación en la máquina.

Como el cálculo es una sintaxis de signos —dice el lógico— y la máquina es una sintaxis de piezas, es natural que, cogido el tipo de la manipulación, obtenga con la máquina el resultado correcto.

Pero ¿quién calcula? —pregunta el cantoriano— ¿la máquina, o el salvaje?

Cada uno hace su parte —responden los otros—.

El lógico propone que se destape la máquina, y que se le den piezas y herramientas al salvaje. Este echa una ojeada a la máquina, coge las herramientas, y monta otra máquina igual: con ella realiza los cálculos.

Ahora —dice el lógico— todo cálculo debe atribuirse al salvaje.

Es cierto —contesta el clásico—. Pero la construcción de la máquina, aunque la realiza de un modo semejante a como realiza las cuentas que ve hacer al niño, no es una cuenta de multiplicar.

Si ustedes me lo permiten —dice el algebrista— yo enseñaría al salvaje a realizar todas las cuentas de multiplicar. Me basta, dadas su prodigiosa memoria e inteligencia, con descomponer polinómicamente los dos factores (en los que pondré todas las cifras) aplicar luego la distributiva, y llevar todo el cálculo en cadena de igualdades.

Tendrá usted que enseñarle a sumar previamente —dicen el clásico y el lógico—.

Eso está claro —contesta el algebrista moderno—.

Yo no lo veo tan claro, desde mi punto de vista combinatorio —dice el clásico—. Si usted reduce la multiplicación a la suma,

¿no utiliza usted la malhadada definición, intuitiva y clásica, de multiplicar? Lo interesante formalmente, sería enseñarle a multiplicar sin presuponer otro cálculo.

Es lo que hizo —dice el lógico— cuando reprodujo la primera cuenta del niño.

Pero si los que el niño llama productos parciales —dice el clásico— en vez de sumarlos, los multiplica, la cuenta no tendrá fin, por que se va complicando más cada vez.

4. Plurivalencia significativa de la expresión formal

Expresiones exageradas, como la de Bertrand Russell, no sirven más que para confundir. No faltan simples, poco críticos, que las toman al pie de la letra. Tratemos de ver claro, para poner las cosas en su punto.

Las enormes ventajas del formalismo, están en la interpretación plural del signo.

Tomemos un ejemplo. El problema de la división aritmética entera, presenta infinitas modalidades físicas. Recuerden ustedes los múltiples casos concretos, en que se vieron obligados a ejecutar una cuenta de dividir. Fijémonos en el modelo más cercano a un niño. Hay que repartir, por igual, entre los niños del aula, los caramelos contenidos en una gran blosa. La persona más inculta, daría al problema esta solución física. Pondría en una fila a los niños, y los haría pasar varias veces ante la mesa, entregándoles cada vez un caramelo, hasta que notara que, haciéndolos pasar una vez más, no iba a tener caramelos para todos. El número de caramelos rocogidos por cada niño es el cociente. El número de los que quedan sobre la mesa es el resto.

Si quisiéramos averiguar el número de horas, correspondientes a cierto número de minutos, la realización física de la operación, si no imposible, ofrecería dificultades bastante serias. Mas supongamos que los datos numéricos coincidieran con los del caso precedente; quizá se le ocurriera, al inculto calculador, hacer un isomorfismo, en el sentido preciso que tiene este palabra en el Algebra estructural abstracta: substituir los minutos, uno a uno, por caramelos, y el conjunto de minutos de la hora, por el de los niños del curso. Ahora ya podría operar con los niños físicamente.

Invirtiendo, al final, el isomorfismo, nos diría cuántas horas había, por el número de caramelos en poder de cada niño. Los que quedarán sobre la mesa, le permitirían contestar cuáles eran los minutos restantes.

Esos dos problemas, físicamente muy diferentes, son isomorfos en el sentido de la Matemática estructural. Es claro que hay infinitos problemas isomorfos a uno concreto de división. Cuando substituimos, el dividendo y el divisor, por sendos signos numéricos concretos —v. gr. 1234 dividido entre 56— nuestra mente ha realizado una primera abstracción: ha reducido esos infininos problemas, físicamente distintos, a la unidad abstracta de su tipo estructural, que es el de la operación de dividir realizada con los símbolos, con las palabras decádicas que designan a las colecciones.

El concepto de «tipo estructural» responde a la forma idéntica (id-ente) de las estructuras isomorfas, y descarnadamente lo expresan los signos. Este concepto es una de las grandes adquisiciones de las Matemáticas. Por primera vez fue conscientemente percibido en 1824 por Gergonne (1771-1859) y Poncelet (1788-1867), quienes se disputaron la prioridad del isomorfismo llamado entonces «ley de dualidad». Naturalmente ya antes —como le aconteciera a M.ᵉ Jourdain con la prosa— se habían hecho isomorfismos, y se había manejado el tipo estructural, en las ciencias y en las artes. Del enfermo que tiene delante, el cirujano solamente conoce el tipo estructural anatómico-fisiológico. Asimismo, la maqueta de un edificio, y el mismo edificio, son figuras isomorfas.

El salvaje, de nuestro pasado cuento, que reproduzca de momoria la división de 1234 entre 56, porque se la vio hacer al niño, tendrá resueltos formalmente todos los problemas concretos correspondientes al tipo estructural de esos datos, pero desconocerá lo que tiene que hacer, cuando, por cambiarle los signos numéricos, le cambiemos el tipo del problema.

Una segunda abstracción, que nos lleve, desde la particularidad de un dividendo y divisor numéricamente concretos, a la división general de los signos numéricos, es la que realiza el maestro que enseña al niño la regla general de dividir. Y tan mecánicamente se nos graba a todos esta rutina, que son poquísimas las personas que saben razonar, desde una definición de la división entera, la regla mecánica de la operación con los signos.

Y observen ustedes que la regla de dividir se enuncia en el lenguaje común. En cambio, el lenguaje de los cálculos aritméticos, es el de las cifras decádicas. Este es el «lenguaje-objeto» de los lógicos. El lenguaje común, al enunciarnos la regla de dividir, nos habla de una manipulación con sucesiones de cifras que constituyen los números. El lenguaje común habla, por tanto, del «lenguaje-objeto». En relación a éste, constituye lo que los lógicos llaman el «meta-lenguaje».

Esta regla de dividir signos numéricos cualesquiera, congloba todos los tipos de problemas concretos de división que pueden presentársenos. Si ya una división, hecha con signos numéricos particulares, contenía, en forma plurivalente, a todas sus traducciones físicas concretas, la regla general de dividir, contiene plurivalentemente a todas las divisiones con signos numéricos particulares, y está al mismo nivel de abstracción que cualquier teorema general referente a grupos, que vale para todos los tipos heteromorfos de grupos.

5. Cálculos demostrativos con proposiciones

Al escribir las proposiciones, se traducen por sucesiones finitas de signos. Como la demostración consta de una sucesión finita de proposiciones, al escribirla, nos da una sucesión finita de signos elementales. Pongamos un ejemplo. Piensen ustedes en los números naturales. Con notación abreviante, los designaremos por letras. Consideremos el universo de proposiciones $a' = A$, $a + b = c$, que consta de infinitas proposiciones. Definimos las siguientes reglas de demostración inmediata:

I. Deducción por secuencia. Tras la proposición $a + b = c$, podemos colocar cualquiera de estas dos $a' + b = c'$, $a + b' = c'$.

II. Deducción por sustitución. Tras las proposiciones $a = A$, $b = B$, $c = C$, $a + b = c$, podemos colocar la proposición $A + B = C$.

He aquí, ahora, la «demostración» de la proposición $2 + 3 = 5$, mediando esas dos reglas, y partiendo de las «proposiciones» básicas $0 + 0 = 0$; $0' = 1$; $1' = 2$; $2' = 3$; $3' = 4$; $4' = 5$.

Deducción por secuencia	$0 + 0 = 0$	
	$0' + 0 = 0'$	Deducción por substitución
» »	$1 + 0 = 1$	
	$1' + 0 = 1'$	» »
» »	$2 + 0 = 2$	
	$2 + 0' = 2'$	» »
» »	$2 + 1 = 3$	
	$2 + 1' = 3'$	» »
» »	$2 + 2 = 4$	
	$2 + 2' = 4'$	» »
	$2 + 3 = 5$	

Para que el lector no se acuerde más de los número naturales, ni de su igualdad ni de su suma, efectuamos esta substitución de signos.

$$\left\{\begin{matrix} + & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ , & . & a & b & c & d & e & f \end{matrix}\right\}$$

Y ahora, como se acostumbra, le atizamos tres «llamamos»:

Llamam os «axiomas» a las sucesiones a,a.a ,, a'.b ,, b'.c ,, c'.d ,, d'.e ,, e'.f .

I. Llamamos deducción por secuencia, a escribir, tras m, n. p ,, m',n.p' ó m,n'.p' .

II. Llamamos deducción por sustitución, a escribir, tras m.M ,, n.N. ,, p.P ,, M,N.P .

Desvanecidas así las huellas de los pasos dados hasta llegar aquí, cuando ustedes construyan la «demostración», la evidencia y el interés se habrán volatilizado. Pero nadie, seguramente, querrá seguirlos en sus extra-vagancias[18].

La «teoría de la demostración» se ocupa de los cálculos demostrativos con proposiciones. En cada cálculo, de codificar las manipulaciones mecánicas que deben realizarse con los signos, para construir las demostraciones. Sistematizar, finalmente, todos esos cálculos, con arreglo a sus tipos, en una estructura superior[19].

Realizado un cálculo demostrativo por una máquina, en los problemas concretos —cuyas apariencias pueden ser muy diferentes, sin que tengan influencia en el proceso deductivo— ya no sería necesario dar una nueva demostración, pues evidentemente bastaría: *a*) encajarlos en sus tipos; *b*) traducir, al caso concreto que interese, las conclusiones simbólicas obtenidas por la máquina. Las proposiciones obtenidas de este modo, esto es, rellenando los signos con los significados concretos competentes al caso, serían válidas. Y porque esto lo sabemos sin nueva demostración, que se haría fácilmente traduciendo el proceso simbólico establecido por la máquina, se habla —quizá no muy acertadamente— de una «economía del pensamiento». Se alude, como se ve, a la plurivalente interpretación del signo. Y es que el signo, precisamente por su descarnada desnudez, es apto para exhibir, sin enmascararlos con los aspectos particulares deductivamente circunstanciales, lo común a dos demostraciones isomorfas, que, por referirse a diferentes asuntos, pueden engañar al lector, haciéndole pensar se trata de demostraciones diferentes.

Mas, y puesto que «todo tiene sus ventajas y sus inconvenientes», el signo compensa esa ventaja con su pérdida de interés y de evidencia, que son lo decisivo a la hora de inventar y de aprender. Sería, en efecto, no sólo absurdo, sino grotesco, y el colmo de la simpleza, tratar de inventar montando un tinglado de signos que

---

18 De la frugalidad y extravagancia en la elección de los símbolos (hay uno, el de par, que sólo se usa cuatro veces) y de comentarios inusuales (se refiere al carácter temporal que da a los teoremas, en la evolución deductiva) se queja HALMOS, en la reseña publicada en *Math. Rev.* 16 (1954), pág. 454, de la *Théorie des ensembles* chap.1, 2 (1954) de BOURBAKI Interesan también las reseñas del *Journal of Symbolic, Logic* 24 (1959), pág. 71-73, y la de *Z. blatt Math.* 55 (1955), pág. 279.

19 RASIOWA, SIKORSKI. *The Mathematics of Metamathematics* (Warszawa 1963). página 5.

impida pensar en nada concreto e interesante. Economizando el pensamiento, no se inventa absolutamente nada[20].

6. Estructuras topológico-deductivas

Aspecto muy interesante, en la deducción, es el topológico[21].

Sea P un universo determinado, finito o infinito, de proposiciones. Cualquiera que sea el subconjunto X, de proposiciones premisas, al aplicarle unos mecanismos deductivos, globalmente designado por la letra φ, operador topológico-deductivo, se obtiene otro conjunto $X\varphi$ de proposiciones dentro del universo P, deducido del conjunto de premisas X. Para que φ traduzca las propiedades intuitivas de la deducción lógica, debemos imponerle estas leyes, que limitan sus posibilidades combinatorias:

1. X queda incluido en $X\varphi$. La deducción amplifica el conjunto de premisas.
2. Si X estuviera incluido en Y, también $X\varphi$ estaría incluido en $Y\varphi$[22].

Reiterando el operador φ, tendremos $(X\varphi)\,\varphi = X\varphi_2$ etc. Esta reiteración, combinada con la recapitulación asintótica, o formación límite, y poniendo $X\varphi_0 = X$, $X\varphi_1 = X\varphi$, determina la sucesión $X\varphi_i$, para cualquier número ordinal i, finito o transfinito. Como jamás se sale, por hipótesis, del universo proposicio-

---

[20] La expresión se atribuye a Arthur March del Círculo de Viena. El gran Hilbert (1862-1943). en «Die Grundlagen der Mathematik» (*Abh. Hamb.* 6 (1928) 65-85) escribe: «La Matemática, como cualquier otra ciencia, nunca podrá fundarse solamente sobre la Lógica. Como pre-condiciones, para aplicar la deducción lógica, y para realizar las operaciones lógicas, nos tiene que ser dado algo en la representación, más, ciertos objetos concretos y extralógicos que, intuitivamente, están ahí, ante nosotros, con anterioridad a todo pensamiento». Los mismos Bourbaki, en «La arquitectura de las Matemáticas» (*Las grandes corrientes del pensamiento, matemático*, pág. 45. B. Aires 1962) escriben: «Hoy, menos que nunca, se puede reducir la Matemática a un juego, puramente mecánico, de fórmulas aisladas. Hoy, más que nunca, impera la intuición en el origen de los descubrimientos».

[21] Tarski, Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik (*Comp. Rend. Soc. Sci. Let. Varsovie* 23 (1930) 22-29); Untersuchungen Über Aussagenkalkül (*Id.* 23 (1930) 30-50); Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften (*Monat. Mat-Phys.* 37 (1930) 361-404); Grundzüge des Systemenkalkül (*Fund. Math.* 25 (1935) 503-526; 26 (1936) 283-301); Todos estos artículos, en versión inglesa incluidos en el libro Tarski *Logic Semantics, Metamathematics* (1956). Cuesta. Estructuras deductivas (*Rev. Mat. Hisp-Am.* 14 (1954) 104-117).

[22] Esta condición se atribuye a Riesz (1880-1956) Stetigkeit und abstrakte Mengenlehre (*Atti. IV Cong. Mat. Roma* 2 (1908), pág. 18-24; *Oeuvres* I (1960), pág. 155-161).

nal P[23], el proceso acaba agotándose. Esto quiere decir que llegamos a un conjunto deductivamente cerrado $A = X\bar{\varphi}$, sobre el cual, el operador deductivo φ, no produce ya ningún efecto. O sea $A\varphi = A$. Estos conjuntos de proposiciones, deductivamente cerrados, del universo proposicional P, serán plausiblemente llamados las Ciencias deductivas de la estructura deductiva $(P\varphi)$.

7. Bases de una ciencia deductiva, postulados, axiomas

Si A fuera una ciencia, de la estructura deductiva $(P\varphi)$, plausiblemente deberían considerarse como bases de A, a los conjuntos de proposiciones que resuelvan, en la incógnita X, la ecuación $X\bar{\varphi} = A$. En particular, A mismo es una base obvia de la ciencia A.

Partiendo de una base X, la ciencia deductiva A, queda estratificada según esta sucesión de conjuntos, sin elementos comunes dos a dos:

$$X, \ (X\varphi_1\text{-}X\varphi_0), \ (X\varphi_2\text{-}X\varphi_1), \dots \ (X\varphi\omega_{+1}\text{-}X\varphi\omega), \dots$$

Dada una proposición b de la ciencia A, combinatoriamente pueden pensarse dos casos:

1. A-b es base de A. Entonces la proposición b puede deducirse del conjunto restante.
2. A-b no es base de A. Entonces, puesto que la proposición b, dentro de la ciencia deductiva A, no se deduce de las restantes, es necesario postularla.

Tenemos, pues, esta definición plausible de postulado:

Postulado, en una ciencia deductiva A, de la estructura deductiva $(P\varphi)$, es cualquier proposición b que no se deduzca de las restantes A-b.

Hemos dado[24] ejemplos de ciencias deductivas sin postulados.

Si X fuera una base de la ciencia A, tomada en X una proposición «a», combinatoriamente podrían pensarse los dos casos siguientes:

---

[23] Parece interesante, pero difícil, el caso en que P y φ se vayan ampliando, en ciertas etapas de los procesos deductivos. Quizá esto es lo que acontece en la deducción natural con graves riesgos.

[24] N. Cuesta. ¿Postulado = Axioma? (*Coll. Math.* 14 (1962), pág. 81-94).

1'. X-a es también base de A. La proposición «a» no es necesaria en la base X, y puede deducirse de las que quedan al quitarla de X.

2'. X-a no es base de A. La proposición «a» es necesaria en la base X.

Tenemos, en consecuencia, esta definición plausible de axioma:

Axioma, en la ciencia deductiva A, es toda proposición «a» que figure necesariamente en alguna base de A.

Es evidente, por tanto, que *todo postulado de A es un axioma de A.* La recíproca, empero, no es cierta en general.

El conjunto de axiomas de la ciencia A, puede pensarse —y todos los casos son realizables— muy variado: desde el conjunto vacío, hasta el A.

Asimismo puede pensarse —y ambos casos son realizables— que el conjunto de axiomas sea una base de A, y que no lo sea. Resulta, en consecuencia, inaceptable la identificación con los axiomas de las proposiciones de una base[25].

Cuando el conjunto de axiomas sea vacío, toda base es reducible[26]. No hay, pues, bases mínimas. En este caso, es absurda la investigación de una base de proposiciones independientes[27].

Claro es que, cuando A tenga bases finitas, dentro de éstas, hay bases irreducibles o mínimas[28].

Una base ínfima de A, es una base contenida en toda otra base de A. Es claro que no la hay, cuando no haya bases mínimas, ni cuando haya varias. Pero el que haya una base mínima solamente, no asegura el que ésta sea ínfima. Cuando haya una

---

[25] Esta identificación se viene haciendo, por todos los autores universalmente, censurando a los antiguos por distinguirlos.

[26] Dimos un modelo deductivo, en que de toda base puede quitarse cualquier proposición, en «Modelos deductivos ordinales» (*Rev. Mat. Hisp—am.* 13 (1953) páginas 211-223).

[27] Que es una de las tareas propuestas entre las fundamentales por los tratadistas de «axiomática». En tales modelos, se ve que es desacertado llamar «axioma» o «postulado» a cualquier proposición de una base A, como hacen dichos tratadistas, muchos de ellos con su declamación correspondiente contra los «antiguos» que distinguían ambos conceptos.

[28] Pero puede acontecer que dos bases mínimas no tengan una proposición común. Ver mi artículo «Ciencia deductiva con bases irreducibles separadas» (*Coll. Math.* 8 (1955) pág. 73-83). También en este caso no parece muy adecuado llamar «axiomas» a las proposiciones de una base mínima, pues se las demuestra desde otra.

base ínfima, todas sus proposiciones son los postulados de A. Pero puede acontecer que los postulados de A, aun en el caso de haberlos, no constituyan una base de A[29].

8. Estructuras deductivas con negación

Supongamos asociada, a cada proposición q, del universo proposicional P, otra $q\nu$. Para que el operador ν interprete a la negación intuitiva, debemos de imponerle estas leyes, que restringen sus posibilidades combinatorias:

1. $q\nu \neq q$. Son distintas una proposición y su negación.
2. $q\nu\nu = q$. La negación, de una proposición negativa, es la afirmativa correspondiente.

Los conjuntos de proposiciones, que contengan un par de proposiciones opuestas, son *contradictorios*. Los restantes, *no contradictorios*.

Es claro que las bases, de las ciencias deductivas no contradictorias, son, todas ellas, no contradictorias.

Los conjuntos de proposiciones, cuyo cierre deductivo sea contradictorio, plausiblemente serán llamados *deductivamente inconsistentes*. Los restantes, *deductivamente consistentes*.

Evidentemente, la consistencia implica la no contradicción. Asimismo, la contradicción, implica la inconsistencia.

Problema importantísimo, generalmente muy dificultoso, es. *dado un conjunto no contradictorio, decidir si es consistente o inconsistente*.

Las ciencias deductivas contradictorias, son matemáticamente inviables para nuestro pensamiento[30]: exigencia imprescindible, en las ciencias deductivas, es su no contradicción. Que dos ciencias deductivas sean contradictorias, no impide a nuestro pensamiento su construcción separada. Incluso, como acontece con las

---

[29] Todos estos conceptos los hemos expuesto varias veces. Pero conviene repetirlos, porque los ignoran los expositores de la «axiomática», que se repiten unos a otros, sin desvariar un punto, como si la «axiomática» hubiera alcanzado ya la bienaventurada perfección absoluta.

[30] Podría cuantificarse la contradicción de una ciencia deductiva, por el conjunto de parejas contradictorias que contenga, en relación al conjunto de cuestiones dialécticas a que conteste.

A las cuestiones, cuya contestación es «sí» o «no», las llamó Aristóteles (384-322) dialécticas. Su lógica es muy interesante.

Geometrías euclideas y no euclideas, pueden coexistir modelos de una y otra, cosa que no tiene nada de particular, pues la afirmación y la negación no se refieren a lo mismo.

Entre las ciencias deductivas no contradictorias, cabe pensar dos clases:

1. De cualquier par de opuestas, siempre figura una. Todas las cuestiones dialécticas tienen decisión. La ciencia, en tal caso, es *deductivamente decisiva*.

2. Hay, en el universo proposicional P, algún par de proposiciones opuestas, del cual ninguna de las dos aparece en la ciencia considerada. Diremos que estas ciencias *no son decisivas deductivamente*[31].

Suponiendo que A sea una ciencia deductiva no contradictoria, para las proposiciones del conjunto complementario P-A, cabe pensar dos clases:

1. Las *refutables desde A:* lo es una proposición b, cuando el conjunto (A,b) sea deductivamente inconsistente. Evidentemente, cuando bν esté contenida en la ciencia A, la proposición b es refutable desde A[32].

2. Las *irrefutables desde A:* lo es una proposición b, cuando el conjunto (A,b) sea deductivamente consistente. Si B = $\overline{(A,b)\varphi}$, la ciencia B sería una *prolongación no contradictoria de A.*

Si toda proposición de P-A fuera refutable desde A, la ciencia A sería *improlongable.*

Si A fuera una ciencia no contradictoria y deductivamente indecisiva, en P-A habría algún par de proposiciones opuestas. Si uno de ellos fuera (b,bν) combinatoriamente cabría pensar estos dos casos:

21. Ninguna de las dos (b,bν) es refutable desde A. Esta puede prolongarse con cualquiera de las dos. Una ciencia A, que se encuentre en este caso, *no es decisiva por refutación.* Las restantes serían *decisivas por refutación.*

---

31 También se podría cuantificar el grado de decisión: sería el conjunto total de cuestiones dialéct.cas decidibles, dentro de la ciencia considerada, en relación al conjunto total de cuestiones dialécticas planteables.

32 Los libros que hemos visto, llaman refutable a la proposición b, cuando bν esté en la ciencia deductiva A. Ver, por ejemplo, HAO WANG, *A survey of mathematical Logic* (1963).

22. Una de las dos (b,bν) es refutable desde A, la otra irrefutable.

23. Las dos del par (b,bν) son refutables desde A. En las ciencias de la realidad, a nuestra intuición ontológica, este caso le resulta inconcebible[33]. De la ciencia A, si se encontrara en este caso —cosa combinatoriamente, casi con seguridad, factible— podríamos decir que era *ónticamente inconsistente*. De las restantes, *ónticamente consistentes*.

El caso 21, desde los estudios referentes a la «independencia de los axiomas», es conocidísimo[34]. Es también el caso, dentro de la Geometría deductiva, de la cuestión referente a la unicidad de la paralela por un punto. Y es también el caso, según un reciente resultado de Paul Cohen[35], para el célebre problema del continuo, propuesto ya por Cantor (1845-1918), en la teoría deductiva de conjuntos, edificada sobre la base proposicional de Zermelo-Fraenkel y mediante la «logische Schlüsse».

9. La verdad en su aspecto combinatorio-formal

El razonamiento, más que por sí mismo, interesó siempre como un método para descubrir, partiendo de hechos bien seguros, sus consecuencias necesarias. Lo que interesa, por tanto, es llegar a proposiciones verdaderas[36].

En su aspecto expresivo, esto obliga a considerar, sobre el universo proposicional, una bipartición en dos subconjuntos complementarios W y P-W[37]. Para que W refleje la verdad, y P-W la no

---

[33] «Nunca se puede refutar lo que es verdad», Platón (427-348); *Gorgias*.

[34] Ver Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (1930) cap. 2, pág. 34 y ss. Con inexplicable ligereza, olvidando cosa tan conocida, Godement, *Cours d'Algèbre* (1963), pág. 28, afirma que no se conocen proposiciones indecidibles. Luego, en la página 95, rectifica, pero contando como único caso conocido, en todas las Matemáticas, el del problema del continuo.

[35] The independence of the continuum-hypothesis» (*Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 50 (1963) pág. 1143-1148; 51 (1964)) pág. 105-110). Estos trabajos están enlazados con el de Gödel, *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum-hypothesis, with the axiom of the set theory* (1940).

[36] La verdad de un libro, como la de una conjunción de proposiciones, podría cuantificarse, por la relación, entre las proposiciones verdaderas, y el número total de proposiciones contenidas.

[37] Combinatoriamente, esta bipartición de P, y la considerada mediante la negación, son independientes.

verdad (falsedad), tal como se ofrecen a nuestra intuición ingenua, es menestar legalizar esta bipartición, relacionándola con la negación y con la deducción, mediante este código, que, en todo caso, da una estructura combinatoriamente pensable:

1. En W jamás se incluyen dos proposiciones opuestas. Corresponde a que no podemos pensar que la realidad sea contradictoria. Ley ontológica de no contradicción.

2. El conjunto W es una ciencia deductiva de (Pφ). Traduce la vieja ley lógica: de proposiciones verdaderas, en una deducción lógica, sólo se deducen proposiciones verdaderas[38].

3. En P-W jamás hay dos proposiciones opuestas. O sea: no pueden ser falsas dos proposiciones opuestas. Equivale a que, entre dos proposiciones contradictorias, una siempre es verdadera. Por tanto, la realidad siempre es decisiva. Ley ontológica del tercio excluso.

Es frecuente hoy, entre matemáticos y lógicos[39], considerar como criterio de verdad, en las ciencias deductivas, la «deducibilidad». Para que ésta tenga sentido, hay que dar previamente la base X, y los mecanismos deductivos φ.Para hablar con precisión habría que hablar de la «φ —deducibilidad desde X». Es claro que $X\overline{\varphi}$ es el conjunto de las «φ —deducibles desde X» y que P-$X\overline{\varphi}$ es el de las «no φ -deducibles desde X».
La viabilidad exige que $X\overline{\varphi}$ no sea contradictorio. En cambio P-$X\overline{\varphi}$ podría contener dos opuestas.

La identificación de la «φ-deducibilidad desde la base consistente X» con la «verdad», aparte de hacerse sin necesidad ninguna, puesto que sobran denominaciones, tiene dos inconvenientes: 1) no precisar, ni la base, ni los mecanismos deductivos; 2) equivocar a quien lee, porque el término «verdad», en su uso común, tiene otro sentido, en el que es inevitable que piense quien lee.

Es claro que esta «verdad», idéntica a la «φ-deducibilidad desde la base consistente X», verifica a las leyes 1 y 2, pero no a la 3.

---

[38] La menciona expresamente SAN AGUSTÍN (354-430) en *Los cuatro libros sobre la ciencia cristiana* (versión española de Daniel Ruiz Bueno (1947) pág. 168).
[39] Ver, por ejemplo, SCHÜTTE, *Beweistheorie* (1960).

Podría pensarse el caso en que todas las proposiciones de W fueran postulados. Entonces, la deducción no serviría para obtener íntegramente el conjunto W. Pero si X fuera un subconjunto estricto del W, $X\overline{\varphi}$ también lo sería. Habría verdades que, desde la base consistente X, no serían deducibles. Y tendríamos que distinguir entre «verdad», que se refiere a una clase de bipartición de P, y «φ-deducibilidad desde la base consistente X».

Sobre las estructuras polimórficas, conviene hacer una advertencia. Como las leyes generales no determinan un tipo estructural, sino varios, pueden plantearse cuestiones aparentes —las referentes a ellas de un modo indeterminado; por ejemplo, si preguntamos ¿tiene un grupo 10 elementos?— que, por su indeterminación del tipo concreto, no tienen contestación. La pregunta se determina, definiendo, con condiciones suplementarias a las leyes generales, el tipo de la estructura a la que la pregunta se refiere. Esto es lo que acontece para la cuestión sobre las paralelas en las estructuras geométricas, definidas polimórficamente por las leyes llamadas «axiomas de la Geometría», excluyendo el postulado de Euclides.

Una cosa análoga podría acontecer, dentro de las «estructuras aritméticas de Peano», para la cuestión de si tiene solución la doble relación $2 < \chi < 2^2$. Si se refiere a la estructura ordinal 1, 2, 3, 4, 5,..., la contestación sería afirmativa. Si se refiere a la 1, 2, 4, 5,..., la contestación sería negativa.

Lo mismo podría acontecer para la cuestión de Goldbach —¿es todo número par suma de dos primos?— Si, suprimiendo los eventuales números pares que no fueran suma de dos primos, se tuviera una «estructura de Peano»; para ésta, la cuestión tendría contestación afirmativa, mientras que la sucesión completa daría una «estructura de Peano» en que la cuestión se contestaría nagativamente.

Al parecer, según los artículos ya citados de Paul Cohen, una cosa similar acontece para las que podríamos llamar «estructuras conjuntistas de Zermelo-Fraenkel».

10. ¿Se puede formalizar la Aritmética sin apoyarse en la Aritmética?

La Aritmética es la Matemática de los conjuntos finitos. Como la formalización se realiza mediante sucesiones finitas, y totalmente ordenadas, de signos, parece que toda formalización necesita de la Aritmética. Desconociéndola absolutamente, no puede establecerse ninguna formalización. Las posibilidades combinatorias exigen la Aritmética natural, y el lenguaje, con el cual se la establece, utiliza necesariamente proposiciones de la Aritmética. Por consiguiente, cuando la formalización que pretende establecerse es la de la Aritmética, parece que se da una clara petición de principio[40].

Como ya hemos indicado, la definición formal del número natural, podría ser: «Número natural es toda sucesión decádica, originada por el operador de secuencia, cuando se parte del 0». Ahora bien, yo hago, confiando en mi evidencia, esta afirmación física: «la sucesión «000» no aparece jamás en ese proceso». Y sé lo que digo, y sé que lo que digo es verdad, y esta es una verdad aritmética. Con el criterio empírico de aparición efectiva, jamás podré decidir si «000» es, o no, un número natural. En cambio, podré decidir que «549» es un número natural. Pero tendré que escribir toda la sucesión de signos numéricos, desde el «0» hasta el «549». Por consiguiente: la cuestión «¿es «000» un número natural?» no puede decidirse con el mecanismo de contar, aunque yo estoy bien convencido de que su contestación es negativa. En cambio, la cuestión «¿es «549» un número natural?» puede decidirse con el mecanismo de contar.

Intenta el formalismo obtener, con la objetividad sensible del signo, una explicación más rigurosa, menos expuesta a la apreciación de la evidencia personal. Mas, si no conseguimos formalizar la Aritmética del cardinal «uno» sin emplear «un» signo, no vemos cuál es el rigor que conseguimos. En consecuencia, no tengo más remedio que contentarme, me plazga o no, con la intuición del «uno», y con la evidencia de sus propiedades.

---

[40] Objeta DENJOY. *L'énumération transfinie* (1954), pág. 620, la pretensión de TARSKI, en su artículo «Sur les ensembles finis» (*Fund. Math.* 6 (1924) pág. 45-95) de fundar la teoría de conjuntos finitos sin utilizar el concepto de «orden», porque «el instrumento de su demostración es un artículo de 50 páginas, compuesto de un conjunto finito de proposiciones. El orden en que las presenta, es consubstancial con el artículo. Si se lo cambia, no hay artículo. Por tanto: para refutar la opinión de ser imprescindible el concepto de orden, en la teoría de los conjuntos finitos. TARSKI nos argumenta con un artículo, que es un conjunto finito, y necesariamente ordenado, de palabras».

Y torna a presentársenos el problema de la expresión escrita de los números naturales: al escribir ciertos números —el «uno» y el «dos», 1, 10 en el sistema diádico, el primer ordinal transfinito de Cantor, y, entre éstos, otros muchos más— tengo que usar una colección ordenada de signos atómicos[41], cuyo nombre es el correspondiente al mismo número que trato de expresar. Debido a esta clara petición de principio, que nos parece inevitable, los hemos llamado «números mal nombrados»[42].

Y son estos números naturales —los del mercado de abastos, los de la escuela primaria, los intuitivos, los de siempre— los que, con tanta frecuencia, irrumpen en el Algebra mecánica y abstracta, contando y significando las «veces» que aparece repetido un signo puro, sin significado. Para los Grupos, por ejemplo, en α^n, α es un signo puro, sin significación, pero n es un signo significativo, que designa las «veces» que el signo α se ha repetido en la multiplicación por sí mismo considerada por el grupo. Y he aquí cómo falló, en el Algebra formal, el formalismo puro, que sólo querría emplear signos sin significado. Y las leyes de esta potencia «natural», se reducen a la Aritmética del concepto de «vez». Por ejemplo, la igualdad $\alpha^n \alpha^m = \alpha^{n+m}$, se razona utilizando la intuitiva Aritmética «natural», no la Aritmética «formal». Y la suma $n + m$, es la «reunión» intuitiva de los números «naturales» n y m, y no una mera composición binaria de signos.

11. La presencia inmediata de los modelos y la evidencia de su conocimiento

Una visión, a nuestro entender, parcial de la realidad, ha conducido a que muchos mal-entiendan la plurivalencia del for-

[41] Para el habituado a la geometría gráfica, los signos «atómicos», aunque de un rasgo, se forman con «infinitos puntos». Para cualquier persona, con un número indeterminado de puntos. Y no deja de ser un hecho considerable, que la exprexión de lo finito, exija la intuición de lo indeterminado, si es que no exige la de lo infinito.

[42] «Generadores matemáticos» (*Actas I Reunión Mat. Esp.* (1961) pág. 183-198). En Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Chap. I, «Description de la Mathématique formelle» (1954), págs. 4 y 6, los autores despachan con harta ligereza, la objeción referente a la utilización de los recursos de la Aritmética natural. Tampoco quieren entrar en la, a mi entender gravísima, de no disponerse de ningún criterio formal para reconocer como idéntico a un signo todas las veces que aparezca. La misma falta de criterio formal hay, para asegurarse de que aplicamos correctamente una regla, cada vez que hacemos uso de ella. Todas estas cuestiones, se deciden con la intuición más descarada, y con un acto de fe en mi memoria sensible.

malismo, y el rigor que, a la manipulación mecánica del signo, confiere su control sensible.

Esto, y cierto afán de generalizaciones fáciles, explican las declamaciones contra la evidencia, luego gregariamente repetidas, sin devariar un punto, por quienes son incapaces de matizar. Total: es ya lugar común entre ingenuos, todavía en la luna de miel de los formalismos[43] que el enemigo malo es el conocimiento evidente e intuitivo[44]. Parodiando a Cayley (1821-1895) podrían decir: «La manipulación mecánica del signo es toda la Matemática»[45].

Alguna vez leí, como argumento decisivo: «las máquinas no tienen evidencia». Y pensé: ¡tanto peor para las máquinas![46].

Si hay algo evidente, es que la evidencia no puede darse al nivel de la representación simbólica En ese plano, la «proposición» y «el proceso demostrativo» no son más que sucesiones finitas y ordenadas de figuras. Quien no entienda el lenguaje en que están escritos —tal el niño, tal el extranjero salvaje— como no les adscribe, ni objetos, ni relaciones sensibles, no tiene evidencias, ni tocantes a las proposiciones, ni tocantes al proceso demostrativo. Para esa persona, ser «proposición» o ser «demostración»,

---

[43] Y eso que ya van siendo viejos teoremas limitativos, como el de GODEL, «Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandte Systeme» (*Mon. Math. Phys.* 38 (1931), pág. 173-198).

[44] Si «el progreso está en eliminar evidencias», TIERNO GALVÁN, *La realidad como resultado* (1957), pág. 125, la que los había realizado extraordinarios, era aquella alumna del pre-universitario que, para calcular la distancia entre los puntos (—1, 0) (—1, y), en vez de dibujar, y abrir los ojos, aplicaba el formulón de la distancia. Yo le puse: «ni ve, ni oye, ni entiende». Otra, alumna del selectivo, completamente formalizada, me dio esta definición: «circunferencia es una figura goemétrica que carece de término rectangular». Y otra calculaba ¡por determinantes!, y ¡descomponiendo en triángulos!, el área de un cuadro con los lados paralelos a los ejes.

[45] Así lo escribe GODEMENT, *Cours d'Algèbre* (1963) pág. 22, «Lo que únicamente cuenta en Matemáticas, son los símbolos, que, combinados observando ciertas «reglas de juego», enunciadas explícitamente, sirven para formar los entes matemáticos y sus relacciones». Hace ya 64 años, en 1902, BERTRAND RUSSELL, *Los principios de las Matemáticas* (versión española B. Aires 1948, parte 1ª, cap. I., se arriesgaba a dar una «Definición de la Matemática pura» Y resultaba, que no hay más que teoremas hipotéticos (= implicaciones). Afirmación difícil de sostener frente a la observación. Para mí, son categóricas afirmaciones como éstas: «Hay infinitos números primos», «El 7 sólo tiene dos divisores», «Las permutaciones con tres letras son 6». También MARC BLANC-LAPIERRE, *La mathématique moderne* (1961), pág. 227, contesta, de una vez y para siempre, con el recurso verbal «on appelle théorie mathématique», a la dificilísima pregunta «qu'est ce que la mathématique?».

[46] GROMAIRE afirmaba: «el Arte no es evasión, ni juego, sino búsqueda del conocimiento intuitivo». Lo mismo puede decirse de la Matemática.

no es más que pertenecer a un conjunto de figuras Y esta pertenencia se decide sensiblemente, como si, por ejemplo, las proposiciones se escribieran en tinta roja, y las demostraciones iniciándolas con una cruz azul, separando sus proposiciones con un punto azul, y señalando su final con dos trazos verticales azules. Hasta un salvaje las reconocería.

La evidencia se da en el plano de lo significado, del modelo, y en mi percepción de él: o sea, en alguna de las plurivalentes interpretaciones particulares del signo, y por la presencia del modelo ante nuestra inteligencia: presencia tan inexplicable como la del signo ante nuestros ojos.

Es cierto que la evidencia es un estado de conciencia, causado por la inmediata presencia del modelo, y que se produce en el acto de entender. Que es personal, íntimo, y, en lo que tiene de iluminación mía, incomunicable. Pero eso también le acontece a mi evidencia sensible de tener delante el signo, a mi seguridad de que lo estoy viendo. Es cierto que se dan evidencias aparentes, que engañan si no se atiende y critica bien; pero también mis sentidos padecen alucinaciones, y podríamos sufrirlas ante un texto formalizado.

Es cierto que hay personas —las llamamos torpes— que no se conmueven ante la proposición más universalmente evidente, ni ante la inferencia más inmediata y obvia. Pero también hay ciegos, y desde su nacimiento lo es el profesor Potrjagin, de la Universidad de Moscú, matemático muy notable entre los muy buenos matemáticos rusos. Ignoramos su concepción del formalismo, que, posiblemente se haya desarrollado con el uso de la escritura en relieve de los Braille.

Si atendemos a lo que acontece, en nuestra conciencia mental, cuando estudiamos un texto matemático, cuyo asunto nos sea desconocido, notaremos que, en ocasiones, al leer,no entendemos qué afirma o niega el autor en sus teoremas. Cuando, al fin, tras múltiples reflexiones y vueltas sobre lo leído, captamos su sentido, quizá sus demostraciones no nos convencen. Y que nos convencemos, cuando brilla, dentro de nuestra inteligencia, la evidencia, ya la directa, ya la de reducción a otra proposición antecedente, que recordamos haber entendido.

Si observamos también, a lo que acontece en nuestra conciencia mental, cuando inventamos, nos encontramos imaginando modelos y dibujando esquemas, y que lo que buscamos, y con lo que nos convencemos de nuestras suposiciones, es con las evidencias. Que nunca usamos signos sin que signifiquen algo.

Y, si pensamos en las posibilidades combinatorias de una colección de signos, posibilidades generalmente enormes, y las poquísimas entre ellas que interpretan procesos interesantes (ver nota 11), uno se explica, sin dificultad ninguna, que, para seleccionar éstas, tengamos que dejarnos guiar de la intuición que, con su evidencia, nos ilumina entre esa maraña. Y por eso, la misma invención de los sistemas formales, es imposible hacerla sin la ayuda de la intuición.

12. Inhumanidad de la didáctica formalística.

Cuando lo que interesa son los resultados obtenidos, aplaudimos la «economía de pensamiento» que comporta un método plurivalente. En realidad, lo economizado no es el pensamiento, sino las tediosas repeticiones del mismo pensamiento. La síntesis abstracta, que realiza el cálculo, de los razonamientos isomorfos, ahorra inútiles repeticiones.

Ahora bien; cuando lo que interesa no es lo enseñado, sino la agilidad mental que se consigue aprendiéndolo —y me atrevo a decir que tal debe de ser el propósito del profesor de Matemáticas, en todos los niveles de la enseñanza— la economía del pensamiento tiene unas consecuencias catastróficas[47]: quien economice mucho su pensamiento, se encontrará, al final, completamente entontecido. El pensamiento es de naturaleza paradójica: cuanto más se lo derrocha, más se tiene.

Una persona reflexiva, que no se deje impresionar por la moda, cuando los celebrados «Elementos de Matemática» por N. Bourbaki, comienzan, sin pre-ámbulo ninguno que los motive[48], soltando signos, y, sin decir a qué aluden, codifican unas reglas

[47] Máxima excelente —según Platón, en el *Filebo*— volver dos, y hasta tres veces, sobre lo que está bien. Y en el *Gorgias*, insiste en que es muy bello decir y considerar, hasta dos y tres veces, las cosas bellas. Y un refrán marroquí: «las cosas se entienden mejor la segunda vez que la primera».

[48] Ver libro 1.º capítulo 1.º, «Descripción de la Matemática formal» (1954).

para manipularlos, se acuerda de sus primeros pasos en la Escuela primaria. Sólo echa de menos la música, para cantar en coplas dichas reglas. En la Escuela primaria, nos enseñaron a dibujar los signos numéricos, que maldito lo que, para nosotros, significaban, y el código, para combinar las cifras, lo aprendíamos poniendo en coplas las respectivas tablas de sumar y multiplicar.

Y no deja de ser pintoresco el recurso a la paciencia[49] —que no es menester poca en un adulto— para aguantar tan desatinada enseñanza, sin motivación ninguna que la haga interesante. Como si el aprendizaje no fuera también la construcción de una estructura mental.

El método expositivo bourbakista[50], consiste en borrar cuidadosamente todas las huellas, dejadas en su paso por la intuición inventora[51]. Con eso, el camino que ha de seguir el aprendiz, por una selva de zarzas y cambroneras, resulta penosísimo[52]. En muchas ocasiones, los autores han resuelto este problema de máximos y mínimos: decir lo más sencillo, en la forma más complicada. El método para hacerlo, es emplear el concepto sin sensación.

Estamos seguros, con toda la tradición docente media, que constituye un progreso enorme, en la formación intelectual de los niños, hacerles entender la justificación de las reglas que aprendieron mecánicamente, sin evidencias, en la Escuela primaria, aunque tal justificación no mejore los resultados de sus cálculos. Que sepan, no sólo la técnica de la división mecánica de los signos numéricos, sino dar razón de por qué se procede así. Esto presupone dar un significado concreto a la operación: por tanto, examinar a fondo un modelo.

---

[49] En el «Mode d'emploi», nos dicen los autores: «El texto se consagra a la exposición *dogmática* de una teoría. El modo de exposición, es axiomático y abstracto; procede de lo general a lo particular...La utilidad de ciertas consideraciones, no la verá el lector más que *si ya posee conocimientos bastante extensos* (¿para qué quiere entonces un texto de *Elementos*?) o si tiene *la paciencia* de suspender su juicio, hasta que llegue la ocasión de convencerse (¿no será de habituarse, como hizo el niño con el cálculo numérico?).

[50] Muy ostensible en § 35, pág. 35, *Théorie des ensembles. Résultats* (1958).

[51] Ver nota 16.

[52] Precisamente de ello se queja B. Jonsson, y de la trivialidad de muchos resultados, en la reseña de *Théorie des ensembles* chap. 4 (1957), publicada en *Math. Rev.* 20 (1959), pág. 629.

En la elección de modelos, se puede llegar a virtuosismos mágicos. El inolvidable Puig Adam (1900-1960) aseguraba que los chicos construyendo —pero bajo su inteligente dirección— el máximo cuadrado, factible con una colección de botones automáticos, llegaban a enunciar las manipulaciones a que había que someter el «nombre numérico» de la colección, para obtener el nombre que expresaba el número de botones por cada lado[53].

Sólo un modelo concreto, inteligentemente elegido, puede interesar a quien aprende. Sólo sobre el modelo, y por su presencia ante el que aprende, se da la evidencia. Y sólo con evidencias, en los principios y en las conexiones deductivas, se convencen las personas. Sólo cuando, por torpeza nuestra en la elección del modelo, o por torpeza del alumno, quizá por insuficiente desarrollo de su sensibilidad, o por falta de frecuentación con aquellos objetos, no conseguimos interesarlo, si el asunto lo merece, lo obligamos a aprenderse de memoria la regla mecánica con el signo. Pero tomar esto como la quintaesencia más exquisita de la didáctica, nos parece un dislate mayúsculo. Alegar que, en un cálculo, lo único matemáticamente decisivo es realizarlo bien, es un despropósito. Y las finuras del dicho aprendizaje, consisten en retraernos a las viejas coplas sobre la tabla de sumar que cantábamos de niños.

La Historia ilustra, con el caso ejemplarísimo de los teoremas isomorfos de Pascal (1623-1662) y de Brianchon (1785-1854), descubiertos respectivamente en 1640 y 1806, las diferencias que

[53] Poco antes de su muerte, le manifesté mis dudas. Le pregunté: ¿puso usted a escribir a los chicos, después de su explicación? Sólo el documento escrito por los muchachos, permitiría asegurar que realizan el tránsito desde la manipulación con los cartones de botones, a la regla operativa con el signo numérico. Contestó: es que los recursos expresivos de los chicos son muy reducidos. Repliqué: pero nosotros debemos de enseñar a los niños a expresarse por escrito. Después de resolver un problema, teniendo el borrador delante, yo obligo a todos los alumnos a que dicten, al muchacho que escribe en la pizarra, la explicación de todo lo realizado para resolver el problema. Cuando no aciertan con las frases, dicto yo, y seguimos así hasta terminar. Luego, borrando lo redactado, obligo a los chicos a reproducir, en sus cuadernos, lo borrado. Me dijo: eso es muy interesante. Yo, pensando si no se ilusionaría con los resultados que obtenía, en sus diálogos entusiastas con los chicos, le recordé el *Menón* platónico. Le dije: recuerde usted, cómo allí el muchacho contesta atinadamente y desatinadamente, a placer del irónico Sócretes, en el problema de la duplicación del cuadrado. Que el diálogo, a que usted obliga a sus alumnos, avive su inteligencia, es cosa segura. De lo que dudo es de que los chicos encuentren nada: quien encuentra es usted.

pueden darse, en orden a su intuitividad, entre dos modelos geométricos isomorfos: el plano punteado y el plano reglado.

Confundir la enseñanza matemática de las personas, con el montaje de una máquina de cálculo, nos parece harto confundir. Si sería grotesco tratar de persuadir, a las piezas de la máquina, para que adopten sus posiciones mutuas, y se enlacen como vemos conviene para el funcionamiento, en vez de imponérselo dogmáticamente, también es absurdo ordenar a una persona que adopte ciertos hábitos mecánicos, y que no se inquiete en averiguar por qué ni para qué, sino que tenga paciencia. Contra esta mecanización del hombre, viéndola venir, se revolvía Goethe (1749-1832): «el desarrollo maquinista me atormenta. Avanza como un temporal. Llegará, y nos anegará».

Aun admitiendo que fuera lícito llamar matemático al contable que manipula los signos, el inventor de tales manipulaciones estaría más cerca del inventor de la máquina de cálculo, que de ésta y de quien la maneja. Si es cierto —como alega no recuerdo quién— que la máquina no tiene evidencias, el inventor de ella sí que las tiene: sobre lo que se propone construir; sobre la adecuación de las piezas y materiales a esa finalidad. Y es esa evidencia la que le muestra la conveniencia de disponerlas en tal o cual forma.

13. La disciplina matemática en la formación de la inteligencia.

Desde siempre se han utilizado las Matemáticas como disciplina muy adecuada para la formación de la inteligencia, por el ejercicio metódico del pensamiento que ellas provocan. Por eso escribió Brunschvicg[54] que «Euclides, para las numerosas generaciones que se nutrieron de su substancia, quizá fue menos profesor de Geometría, que profesor de Lógica.»

Fijándonos ahora en el ciclo medio, por su acusadídimo carácter formativo, y por nuestra experiencia docente en él, vamos a indicar algunas cosas entre las que puede hacer un profesor de Matemáticas entusiasta, con el fin de mostrar a los chicos el vuelo de la inteligencia.

[54] *Les étapes de la philosophie mathématique*, chap. VI § 49.

Advirtamos primero que la labor cultural profunda, cuyo intento es que los chicos adquieran la conciencia de sus facultades, exige continuidad. A ser posible, el mismo profesor debiera de trabajar con los mismos alumnos durante los siete cursos. Los chicos, al principio ásperos, se van suavizando, nos cogen afecto —un afecto que perdura con la edad y con los años— aprecian el interés que uno pone en «hacerlos personas», y uno puede sentir el placer incomparable de la creación docente.

Si la lección ha de ser este toque hondo, que despierte la conciencia mental del alumno, no puede ser un discurso dogmático, sino un ejercicio que estimule el pensamiento. Hay que hacerlo razonar, discutir, dudar, indagar, hacerle patentes sus dificultades y estimularlo a que las proponga. Con el ejemplo del propio pensamiento, hay que enseñarlo a realizar esas importantes funciones que son, definir, clasificar, criticar, razonar y enunciar. Y hay que estimularlo a la expresión verbal y escrita de su pensamiento.

En los chicos pequeños, la atención dura intervalos muy cortos. Si es incapaz de prestarla, hay que exhibirle este defecto, única manera de corregirlo, para que no adquiera el mal hábito de atender a medias. Es frecuente, aun entre los muchachos universitarios, enterarse fuera del aula qué era lo que se les pedía en un problema. Lo más eficaz, para obligarle a atender, es hacerle que repita las pocas frases de una definición, las del enunciado de un problema, de un teorema o de una regla operativa, exigiéndole el sentido para que se acostumbre a la memoria intelectual, no a la mecánica memoria de palabras. El muchacho que se encuentra en defecto, acaba poniendo más cuidado, cuando se leen esas pequeñas frases.

Es claro que los niños, cuando empiezan el bachillerato, sólo son capaces de una lectura mecánica. Y menos que nada toleran una lectura descuidada los textos matemáticos. Para entenderlos, hay que leer despacio, con sentido, interrupiendo la lectura con preguntas, con reflexiones y aun completándola con explicaciones por escrito. Una definición como la de límite, de la que depende la inteligencia del Cálculo infinitesimal, no se puede despachar en unos minutos: sólo con muchos ejemplos, positivos y negativos, acaba uno asimilándosela. Sin entenderla, es inútil querer pasar adelante; y, entendida, se sabe potencialmente todo el Cálculo.

Los importantes ejercicios de lecturas comentadas del libro de texto, deben de hacerse durante todos los cursos del bachillerato.

A veces nos quejamos, los profesores universitarios, de que los muchachos ignoran esto y lo otro. Harto sabrían, para emprender los estudios universitarios, si supieran estudiar. De si saben estudiar, no se los examinó jamás, y quizá, lo que es peor, no se les enseñó nunca cómo hacerlo. «Faltos de formación en estas disciplinas fundamentales —leer, escribir, hablar y razonar— escribe Gusdorf, profesor de la Universidad de Estrasburgo—, los estudiantes abordan la enseñanza superior en las condiciones más desfavorables»[55].

Al resolver un problema, al demostrar un teorema, al clasificar ordenadamente los casos, a que, los datos de aquél, y las hipótesis de éste, dan lugar, se ofrece la ocasión de un ejercicio sobre la manera de usar el libro: obligando a los chicos a buscar en él, las reglas y propiedades que se necesitan.

Los exámenes escritos[56], que se han impuesto, por la desproporción tan enorme entre los números de alumnos y de profesores[57], podrían haber tenido una beneficiosa consecuencia: que todos los

[55] «L'école ou l'on s'ennuie» (*Les Nouv. Litt.* 23. Sept. 1965).

[56] No los llamados «tests», mas cuando se emplean alegremente por quienes desconocen radicalmente las técnicas de exploración psicológica. Su empleo sistemático para calificar la labor escolar del curso, me temo deteriore, aún más, el estudio de nuestros alumnos, acostumbrándolos a hablar y estudiar monosílabos.

[57] Una Universidad con 10.000 alumnos, en clases de 25, tendría 400 clases. Si cada una recibiera 4 lecciones diarias, entre prácticas y teóricas, el número de lecciones diarias sería 1.600. Dando cada profesor 2, serían precisos 800 profesores. A 200.000 pesetas en promedio anual, la nómina importaría 160.000.000 de pesetas.

En *Le Monde* 7-sep-1965 se daban estos números globales para todas las enseñanzas francesas. Población escolar: 9.260.000. Personal docente: 585.000, a los que hay que agregar 55.000 en la enseñanza privada pagados por el Estado. Total: 640.000 profesores. Si cada uno da tres lecciones diarias, serían 1.920.000 lecciones diarias. Si cada alumno recibe 4 lecciones diarias, tenemos 1.920.000: 4 = 480.000 clases. Número de alumnos por clase = 9.260.000 : 480.000 = 926: 48 = 19.

Aceptar las clases universitarias de 200, 600 y aun mil, es admitir una enseñanza aparente. En la Enseñanza Media, yo he tenido clases de 170. Vino la limitación a 50, y no se hundieron las esferas.

El aumento de los puestos docentes en la Universidad, al dar posibilidades a la juventud universitaria, tendría unos efectos muy beneficiosos sobre la investigación universitaria si no emigran, patrioticamente, a los EE. UU. para colaborar en la guerra científica del Vietnam, isomorfa a la de Cuba y Filipinas.

profesores medios enseñáramos a los chicos a explicarse por escrito, con orden y claridad. Pero que no lo hacemos, lo revelan los desastrosos exámenes del pre-universitario, y los de los alumnos universitarios de los dos primeros cursos, según mi experiencia[58]. Son rarísimos los que aciertan a redactar, con claridad y orden, un tema líbremente elegido por ellos, con el que intento sondear la calidad de su estudio. No faltan ejercicios que, por no decir, no dicen ni disparates: tan vacíos de sentido están. Son los ejercicios de esos alumnos que son verdaderas «máquinas de estudiar»: todo se lo engullen, parejo, por igual, sin preferencia ni gusto particular ninguno; que no tienen conciencia de no entender, porque jamás probaron el sabor inconfundible del entender las cosas perfectamente[59].

He aquí mis impresiones del examen de pre-universitario, realizado el 15 y 16 de febrero último. Los ejercicios leídos fueron 352. Puntué de 0 a 10, e independientemente, el tema y el problema, y califiqué con la media de ambas. Los ejercicios con nota de 4 y superior, fueron 24. Entre los dos problemas cuya dificultad era bastante diferente, la mayor parte fueron incapaces de olfatear el más sencillo. Y es el olfato mental el sentido más necesario al universitario y, sobre todo, al investigador.

En el ejercicio teórico, la mayoría se contentan con soltar recetas mecánicas. No se les ocurre definir los conceptos. Si lo hacen, faltan condiciones esenciales. Muy pocos enuncian, clara y distintamente los teoremas. De la demostración no hay rastro ninguno, cosa grave después de 7 cursos de Matemáticas en el bachillerato, donde casi no se hace otra cosa que demostrar teoremas. Las figuras son de lo más tosco; hechas a pulso y emborronadas, seguramente por imitación de profesores negligentes[60]. A ninguno

[58] Convendría que, por el Ministerio, se nombrara una comisión que estudiara seriamente, y con el sosiego debido, una extensa muestra de estos exámenes, para informar sobre la calidad —en mi opinión bajísima— de la enseñanza que hoy reciben los alumnos españoles del grado medio.

[59] He aquí lo que escribía uno, barajando palabras: «Máximos y mínimos son unos valores, que toma la función en su derivada primera, en los cuales la función alcanza el valor máximo o mínimo, es decir corresponden a unos entornos, dentro de los cuales se hallan comprendidos esos valores».

[60] El encargo de dibujar buenas figuras, para que el pensamiento venga inducido por la sensación, es la Regla 15 de DESCARTES (1596-1650), *Règles pour la direction de l'esprit* (En *Oeuvres et Lettres*, 1953, Bibliothéque de la Pléiade). Es un verdadero deleite, por sus bellas figuras, el libro de COXETER, *Introduction to Geometry* (1961). Bellas figuras sobre curvas soluciones de ecuaciones diferenciales, en LE LIONNAIS.

le han enseñado a poner un índice de asuntos, y a capitular, según él, su ejercicio teórico, para darle una estructura lógica. Los hay faltos de la percepción racional más obvia. Alegan que la función proposicional «$14n^3 + 9n^2 + n = 6$» sólo da proposiciones verdaderas, para los valores naturales de n, tras la comprobación de dos, a lo sumo tres casos, como si eso bastara para afirmarlo en los infinitos posibles.

Yo no puedo pensar que los chicos anden tan faltos de seso como revelan sus exámenes. Lo que pienso es que tenemos una pésima enseñanza media. Que hay muchos centros que estiman falto de sentido eso de hacer cabezas claras que sepan pensar, y que gocen con el pensamiento perfecto. Que hay muchos centros cuya mira está puesta únicamente en que los chicos superen las pruebas, porque de ellas depende el éxito propio. Y como se desconfía de que esa sea la añadidura que recibirán de aquella labor cultural profunda, se limitan a preparar triquiñuelas sin conexión, que es lo único que pueden hacer esos absurdos centros especializados en preparar pruebas, que recogen alumnos de todas las procedencias: atiborrarlos con recetas inconexas, con palabras sin sentido, quizá complementadas con la enseñanza inmoral de trampas para copiar, inservibles además, porque los chicos, faltos de criterio para juzgar lo que leen en el papel que reciben, precisamente por utilizarlos, incurren en los más pintorescos desatinos. Con tal enseñanza, el fruto es aborrecer para siempre el estudio[61].

Y da verdadera grima que, para remediar estos males, radicados en los centros, se organicen más exámenes aún contra los chicos. O se institucionalicen otros, para aumentar la irresponsabilidad con que se presentan a las pruebas.

Para remover la inteligencia dormida de los niños, yo dudo haya medio más eficaz que ponerlos a escribir. Hasta para escribir errores, tienen que pensar. Pero, ojo: que escriban, no que copien. Yo jamás dejo a los chicos copiar lo que se escribe en la pizarra.

Esas pequeñas investigaciones que son los problemas de Matemáticas, ofrecen asuntos para unos ejercicios de redacción muy

[61] «Ningún percance peor para el hombre que tomar odio a los razonamientos», escribe Platón en el *Fedón*.

ejemplares. Yo los hago en la pizarra. Confío en que, viendo surgir la explicación escrita, aprendan los chicos a explicarse por imitación. La manera de hacer estas redacciones, quedó explicada en la nota 53. Y, puesto que los chicos suelen hacer pizarras muy desagradables a la vista, muchas veces las escribo yo, esmerándome en que las letras queden bien formadas, que los renglones, bien horizontales, guarden la misma distancia, trazando las figuras perfectamente con la cuerda, empleada como compás y como regla. Hay que buscar, obstinadamente, el rigor y no dar malos ejemplos a los chicos. Cuanto más, que hay cierta correlación estadística, entre la claridad mental y la formal. Como ya he dicho, una vez redactada la explicación, hago borrar la pizarra, obligando a reproducir en sus cuadernos lo que vieron ejecutar. Tengo una gran confianza en que, viendo cómo se redacta, aprendan a hacerlo por imitación. Al final, dedico unos minutos a lecturas, calificando por ellas a los muchachos. Con los más pequeños, que se resisten a escribir —señal de que notan el esfuerzo interior, que es precisamente el que yo intento hagan— soy muy generoso en la calificación. Para estimularlos pongo la nota por la cantidad escrita, sin extemporáneas exigencias de calidad. Lo primero es que piensen; luego vendrá que piensen bien.

En los cursos de lección diaria, no debiera pasar una semana sin hacer alguna de estas redacciones públicas, bien sobre problemas, bien sobre algunos puntos que complementen el texto que se use.

Un chico, al que se obligue a escribir en el aula, lo que nos asegura no copia, con algo que él mismo escriba en casa, puede escribir, por curso y disciplina, un cuaderno de 100 hojas. A lo largo, del bachillerato podría llenar unos 40 cuadernos. Escritos, no copiados, esos cuadernos representan muchas horas de pensamiento propio, que es imposible no dejen una huella profunda.

He pensado que convendría organizar, en los centros, un archivo, sino de cuadernos, sí con los ejercicios mensuales. Encuadernados en un tomo los de cada chico, a lo largo del bachillerato, el archivo permitiría estudiar documentalmente la evolución mental, desde los 10 a los 17 años, que es quizá la mayor y más rápida en toda nuestra vida. Es una pena que se pierdan los testimonios objetivos del desarrollo mental, en el momento en que la evolución es más rápida.

14. El Algebra de la composición de las palabras.

Puesto que pensamos y reflexionamos con palabras, debemos exaltar todos los recursos del idioma: los deductivos, los racionales, los lógicos, los expresivos, los de la brillantez y la musicalidad. No se tiene, decir que debemos de acomodarnos al habla común, siguiendo esa ponderada sencillez, que no suele ser más que torpe irreflexión. No dicen lo mismo, aunque suenen casi igual, estas tres frases, que pueden salirnos al explicar la simetría: «Todos los puntos del eje son dobles»; «Todos los puntos dobles son del eje»; «Todos los puntos dobles son los del eje».

También se dan curiosos encuentros de palabras opuestas. Así, cuando digamos: «La verdadera mentira nos degrada».

Los nombres tienen la virtud de enseñar, leemos en el Cratilo. Y, para un matemático, la deducción del significado de las palabras compuestas, por la fusión de los que tienen los elementos componentes, es un Algebra maravillosa[62], que permite matizar muy finamente mediante las mismas palabras, circunstancias y relaciones entre los objetos. Veamos algunos ejemplos que son inevitables en la enseñanza Matemática.

La palabra «cincum-ferencia», dice precisamente lo que se realiza con la punta que sostiene el tiralíneas, llevándola al derredor de la punta fija del compás. En la misma familia encontramos circum-scrito», trazado al-derredor. Y puede explicarse al «circumspecto», mirando prudentemente alrededor. También al «circumstante» y el «circum-loquio». Hojeando —y ojeando— un diccionario latino, uno se lamente que, en la explosión del latín al castellano, se hayan salvado tan escasas muestras de la estupenda familia latina engendrada por ese operador «circum» de «en torno a».

La palabra «ex-in-scrito», que nos sale al estudiar los ángulos situados en el plano de una circunferecia, es un prodigio de composición. El término «scrito», que significa «trazado», está actuado por los dos operadores prefijos «ex» de exterioridad, e

[62] Es curioso que Unamuno (1864-1936), tan dado a la agudeza verbal, y a repensar las palabras, gustara más del Algebra que de la Aritmética, en su bachillerato (Emilio Salcedo, La Gaceta Regional, 31-XII-61).

«in» de interioridad. Para explicarla, dibujamos los ángulos así llamados, cuyos lados son, una tangente y una cuerda que sale del punto de tangencia de aquélla. Escribimos «ex» en la parte del ángulo comprendida entre el arco y la tangente, porque está «fuera» del círculo. Escribimos «in» entre el arco y la cuerda, porque está «dentro» del cirdulo. «Ex-in-scrito» nos dice, literalmente, que ese ángulo tiene una parte «fuera» y otra «dentro» del círculo. No se puede hacer una descripción, ni más aguda, ni más ceñida y precisa de lo que acontece en esa figura, que la que nos proporciona esa estupenda palabra «ex-in-scrito» = «trazado-fuera-y-dentro». Una cosa semejante ocurre con las cincunferencias «ex-in-scritas» a un triángulo. La región plana donde están trazadas, se forma por intersección de un ángulo interior y dos exteriores.

La palabra próxima «in-scrito», abre la puerta al rico muestrario de palabras españolas iniciadas por «in», con su doble significación: la más vulgar de operador de negación, y la menos notada de operador de interioridad. Conviene explicarlas con el diccionario español delante. Sólo nos fijaremos en algunas, en que el operador de «interioridad» logra sus más bellos efectos. «Inflamar» mete la llama dentro. «In-ducir» es llevar a otro por dentro. Goya (1746-1828) haría un dibujo fantástico. El «in-ductor», echándole la cabezada en el entendimiento, y tirando luego del ronzal. La «in-sistencia», por que «sistencia» interior al ser, mucho más propia de Dios que la «ex-sistencia», ésta más propia de las criaturas. El hombre «in-signe» es el que está señalado interiormente quien «in-voca», llama desde dentro; por eso la «in-vocación» la hacemos a Dios. Quien «in-plora», llora dentro de sí mismo; por eso también ante Dios, único que puede presenciar ese llanto nuestro. «In-undar» es llenar de ondas. Al «in-formar», se introduce dentro la forma intelectual, por eso, contra lo que tanto nos repiten, yo estimo que es muchísimo más «in-formar» que «formar», y es «in-formar» lo que corresponde hacer al educador consciente, tal aquel maravilloso Sócrates inquietando a sus convecinos sobre sus saberes falsos. Y profundamente se dice que está «in-formado» el hombre graciano de «plausibles noticias». Y también decimos que está «enterado», porque, con ellas, se hace un hombre entero y per-fecto.

Corominas[63] deriva el «paralelepípedo» de «epipedon» = = plano. Yo pregunto, si no se habrá intentado decir «paralelopodo», o sea «pies-paralelos», que es pecisamente lo que acontece a esa figura, si se lo construye con alambre: de cualquier manera que se la coloque, tiene los pies paralelos.

El «co-eficiente», la «con-secuencia», las rectas «con-currentes», los ángulos «co-laterales», los segmentos «con-mensurables», son ocasionados para explicar la función operatoria de acompañamiento que produce el prefijo «con». Da palabras bellísimas, como «con-seguir», «con-petencia», «con-batir», «con-sistencia», «co-existencia», «con-sagrar», «con-vocar», «con-padecer», «con cordes», «con-vencer», «con-dición», «con-ducir», etc.

La «simetría» = «sin-metría», permite explicar la función del prefijo griego «sin», cuya función es análoga a la del «con». Da palabras como «sin-óptico», «sin-fonía», «sin-patía», «sin-odo», «sin-dico».

La simetría trae de la mano al «call-eido-scopio» = «miro imágenes-bellas», pues el caleidoscopio[64] produce sus bellas imágenes por un grupo finito de simetrías.

«Perpendicular» viene claramente de «per-pendo», que es pender perfectamente; esto es «sin inclinarse más de un lado que de otro», como deliciosamentente decían viejos libros para niños, aunque se irriten los geómetras pedantes. Este estupendo operador «per» produce la plenitud y perfección. Y así el «per-Don» es el don lleno, por eso tan propio de Dios. «Per-seguir» no es un seguir cualquiera, sino el seguir insistente y que no ceja. De esa familia son «per-sistir», «per-durar», «per-fumar», «per-suadir», «per-vertir», etc.

Como muestran los ejemplos citados, se le presentan al profesor de Matemáticas muchas ocasiones de enseñar a los chicos la atención a las palabras, y a que las miren por dentro. Ni importa quizá mucho patinar, como se dice, en asunto tas resbaladizo. Contando con un diccionario etimológico,un diccionario de helenismos, y un diccionario latino, se puede uno autocorregir.

---

[63] Joan Corominas, *Breve Diccionario etimológico de la lengua española* (1961).

[64] Lo del «calidoscopio» es un claro ejemplo del absurdo razonamiento que mencionamos al final de este apartado.

Y la autocrítica es una función mental tan importante, que es bueno equivocarse algunas veces, para corregirnos ante los chicos, cuando nos demos cuenta, razonando por qué decimos que aquello es un error. El verdadero creador jamás queda satisfecho de su obra. Y, en el oficio docente siempre hay nuevas cosas que aprender[65].

Si enseñamos a hablar pensando, y pesando, atentamente las palabras, el idioma se afinará como instrumento del entendimiento. Dispondremos con ello, a la hora de explicarnos, no sólo de un instrumento más preciso, sino más ágil para seguir los finísimos entrelazamientos que nos presentan las cosas. Por otra parte, nuestro entendimiento se fortalece y nutre con el idioma, si el idioma está bien construido. Y es que las palabras, al pasar por las cabezas de los maestros más inteligentes, se cargaron de la electricidad mental. Cuando las usamos, pueden inducir en nosotros esa inteligencia de que están cargadas. Consideremos el lenguaje profundamente pensado de Quevedo (1580-1645), donde ninguna palabra está puesta por casualidad. Jamás escribió Quevedo al buen tuntún, con esa tan alabada sencillez, que, la mayor parte de la veces, no es más hábito mecánico sin pensamiento alguno. Uno se pregunta qué hubiera sido el español con tres o cuatro Quevedos cada siglo, inventando palabras y cargándolas con la electricidad de su inteligencia y atención. Pero se razona: como el lenguaje irá por donde vaya la mayoría, sigamos ya todos sin rechistar a la mayoría.

15. La perfección de la inteligencia

Las Matemáticas, cuando se las entiende bien, poseen no solamente verdad, sino belleza suprema[66]. La belleza es la primera prueba: no hay lugar para Matemáticas deformes[67]. El verdadero matemático es entusiasta per se: sin entusiasmo no hay Matemáticas[68]. Nada es nuevo, sino lo que está bien hecho. El profesor que goza conociendo, y ejecutando su acción cognoscitiva con

---

[65] Cuando estamos errados, es un beneficio para nosotros ser refutados, escribe Platón en el *Gorgias*.

[66] Le Lionnais, *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, pág. 464, lo atribuye al paradójico Bertrand Russell.

[67] Coxeter, *Introd. to Geometry*, pág. 61, lo atribuye a G. H. Hardy.

[68] Le Lionnais, pág. 464, lo atribuye al poeta Novalis.

toda perfección, se transfigura, porque lo ilumina por dentro el entusiasmo, lo anima el aliento celestial y divino. Y los alumnos se contagian de ese entusiasmo, que es endiosamiento. Experimentan que hay, en el conocimiento, un gozo incomparable. Que el entendimiento, cuanto más perfecto es, tanto es más deleitable para quien entiende[69]. Y esta es la mística de la creación docente: la comunicación del entusiasmo. Las cosas son como palabras del lenguaje de Dios. La existencia es toda ella un milagro. ¡Qué será la in-sistencia! Hay que integrar el conocimiento de lo exterior, con la conciencia que tiene de sí quien conoce.

Hay que educar la inteligencia principalmente. De la inteligencia depende todo. Dame inteligencia, y viviré. La inteligencia luminosa nos entifica, y siempre podemos decubrir más en nuestro propio ser. Tenemos que ganarnos el ser de cada día. En la in—formación, y en la conciencia del propio ser, podemos siempre hacer descubrimientos. La atención y el amor a los demás, ilumina el deber de cada instante. Siempre hay ocasión para el heroísmo que nos hace ser de verdad. No escuchemos las argucias sofísticas de la cobardía. Ojos de «flash» y oídos de «magnetófono», para no perderse nada en el maravilloso espectáculo del Mundo. Un gran apetito de lucidez y clari-videncia. Atención bien despierta, y la reflexión siempre en acto. Y discernir, con el agudo olfato moral graciano, entre lo que honra y lo que envilece. Ni el hambre ni la necesidad, que pueden sobrevenir, nos hagan poner a la cola del cazo.

Siempre humanos, el hombre lo primero en esta hora inhumana. No montemos la ciencia contra el hombre. Ese es el gran pecado actual: maquinar científicamente el exterminio del enemigo. Siempre en defensa del débil, sin envilecerse por el terror activo o pasivo. Siempre presentes los valientes testimonios de la verdad. En 1450[70], el Maestrescuela de esta Universidad, don Alonso de Madrigal (1400-1455), el Tostado contestó al Rey don Juan II que airadamente lo amenazó de muerte: «Harto interés sacaría yo de mis trabajos, si mereciera morir, por dar favor a la razón a la justicia». En esta aula, desde entonces alto lugar del

[69] Santo Tomás (1224-1274), *Suma contra los gentiles*, libro 1.º Cap. 72.
[70] Villar y Macías, Historia de Salamanca, II (1887), pág. 15.

espíritu, don Miguel de Unamuno, dictó su lección heroica a una España apasionada. Y en marzo y abril de 1939, en pro de la paz española y para salvar muchas vidas, reprodujo en Madrid el sacrificio por la patria de Sócrates, el catedrático de Lógica don Julián Besteiro (1870-1940). Y en nuestras aulas, como lección suprema, está colgada la cruz de Jesucristo. Fue cruci-fijado por dar testimonio de la Verdad.

BIBLIOGRAFIA

1. Abbagnano: *Diccionario de Filosofía* (ed. española 1963).
2. Agustín (San): *Los cuatro libros sobre la ciencia cristiana* (1947).
3. Arquímedes: *Les Oeuvres completes* (1960).
4. Blanc-Lapierre: *La Mathématique moderne* (1961).
5. Bourbaki: *La arquitectura de las Matemáticas* (en Le Lionnais).
6. Bourbaki: *Théorie des ensembles* (1954). Résultats (1958).
7. Brunschvicg: *Les étapes de la phiposophie mathématique.*
8. Cohen (Paul): *The independence of the continuum-hypothesis* (Proc. Nat. Acad.Sci. U.S.A. 50 (1963) pág. 1143-1148; 51 (1964) pág. 105-110).
9. Corominas: *Breve Diccionario etimológico de la lengua española* (1961).
10. Coxeter: *Introduction to Geometry* (1961).
11. Cuesta: *Modelos deductivos ordinales* (Rev. Mat. Hisp-Am. 13 (1953) pág. 211-223).
12. Cuesta: *Estructuras deductivas* (Id. 14 (1954) pág. 104-117).
13. Cuesta: *Ciencia deductiva con bases irreducibles separadas* (Coll. Math. 8 (1955) pág. 73-83).
14. Cuesta: *¿Postulado = axioma?* (Coll. Math. 14 (1962)pág. 81-94).
15. Denjoy: *L'énumération transfinie* (1954).
16. Descartes: *Règles pour la direction de l'esprit* (Oeuvres 1953).
17. Dingler: *Die Methode der Phisik* (1937).
18. Enstein: *Geometrie und Erfahrung.*
19. Fermat: *Les Oeuvres III* (1896).
20. Gödel: *Uber formal unentscheibare Stäze der Principia Mathamatica und verwandte Systeme* (Monat. Math-Phys. 38 (1931) pág. 173-198).
21. Gödel: *The consistency of the axiom of choice and generalized continuum-hypothesis* (1940).
22. Godement: *Cours d'Algèbre* (1963).
23. Halmos: *Mathematical Reviews* 16 (1954) pág. 454.
24. Hao Wang: *A survey of Mathematical Logic* (1963).
25. Hilbert: *Die Grundlagen der Mathematik* (Abh. Hamburg 6 (1928) pág. 65-85).
26. Hilbert: *Die Grundlagen der Geometrie* (1930).
27. Jonsson: *Mathematical Reviews* 20 (1959) 629.
28. Kleene: *Introduction to Metamathematics* (1952).
29. Lang: *Algebra* (1965).
30. Laplace: *Les Oeuvres VII* (1885).
31. Le Lionnais: *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* (1962).
32. Lentin, Rivaud: *Leçons d'Algèbre moderne* (1961).
33. Menéndez Pelayo: *La Ciencia española* (1933).
34. Ortega Gasset: *La idea de principio en Leibniz y la evolución de la teoria deductiva* (1958)
35. Peano: *Arithmetices principia nova metodo exposita* (1889).
36. Platón: *Diálogos.*
37. Rasiowa, Sikorski: *The Mathematics of Metamathematics* (1963)

38. Riesz: *Stetigkeit und abstrakte Mengenlehre* (Atti. Cong. Roma 2 (1908) pág. 18-24).
39. Russell: *The Principles of Mathematics* (1902).
40. Salcedo: *La Gaceta Regional* 31-12-1961.
41. Schütte: *Beweistheorie* (1960).
42. Tarski: *Sur les ensembles finis* (Fund. Math. 6 (1924) pág. 45-95).
43. Tarski: *Logic, Semantics, Metamathematics* (1956).
44. Tierno Galván: *La realidad como resultado* (1957).
45. Tomás (Santo): *Suma contra los gentiles*.
46. Van der Waerden: *Algebra* (1964).
47. Villar y Macías: *Historia de Salamanca* (1887).

INDICE