

SEBESTYÉN Géza - MÉSZÁROS Gergely

A MARKOWITZ-MODELL PARAMÉTEREINEK STEIN-FÉLE BECSLÉSE

A Markowitz által kidolgozott portfólió-optimalizálási modell a befektető döntését egy kvadratikus programozási problémának veszi. Arra keresi választ, hogy hogyan lehetne egy várható hozamkockázat szempontból optimális befektetési portfóliót kialakítani. A modell gyakorlati alkalmazásának legnagyobb problémája a modell inputjaként szükséges hozamvektor, illetve variancia-kovariancia-mátrix meghatározása. Múltbeli értékek alkalmazása ugyanis becslési hibákat is visz a modellbe. Stein e probléma orvoslására az átlagértékek simítását javasolta. Jelen dolgozatban a szerzők arra keresik a választ, hogy vajon a Markowitz-modell Stein-féle becsléssel kiegészített változata jobb portfóliót eredményez-e a hazai gyakorlatban, illetve milyen paraméterek mellett kapjuk a legjobb eredményeket.

A Markowitz-modell a modern pénzügyek egyik alapköve¹. A modell célja egy a befektető kockázatkerülése szempontjából optimális hozamkockázat karakterisztikával bíró portfólió összeállítása. Ennek meghatározásához a modell bemenő változóként kezeli az egyes eszközök eloszlási paramétereit.

A Markowitz-modell input adatainak becslésekor a gyakorlatban az adott eszközök múltbeli átlagos hozamait, varianciáit, illetve kovarianciáit szokás alkalmazni. Ezek az értékek azonban meglehetősen zajosak, azaz jelentős becslési hibát tartalmaznak². A becslési hibák azonban komoly hatással vannak az optimális portfóliónak mind az összetételére, mind pedig a teljesítményére³. Mindez azonban erősen megkérdőjelezi a modell gyakorlati alkalmazhatóságát⁴.

A modell gyakorlati alkalmazhatóságának a kérdése tehát szorosan összefügg az input paraméterek becslési pontosságának a problémájával. A becslések pontosságának növelése terén jelentett komoly előrelépést Stein (1955), valamint James és Stein (1961) cikke, akik megmutatták, hogy többdimenziós normális eloszlások esetén a számtani átlagnál pontosabb becslés kapható a becslések simításával. Ezt az eredményt a portfólióelmélet keretében először Jorion (1985, 1986) alkalmazta, hasonló következtetést levonva. Az ő eredményét erősítheti meg Kempf, Kreuzberg és Memmel (2001) munkája is.

Jelen cikk célja megvizsgálni, hogyan hat az input paraméterek simítása a portfólió jövőbeli teljesítményére, valamint meghatározni az optimális simítási együtthatókat.

Adatok

Munkánkban 1996. 01. 04. és 2004. 12. 31. közötti napi árfolyamokat használtunk. A vizsgálati körbe minden olyan – összesen 24 darab – részvényt bevontunk, mely papírral ezen időszakban a BÉT-en kereskedtek. A vizsgált részvények köre:

- Borsodchem
- Brau Union
- Csopak
- Danubius
- Egis
- Fotex
- Globus
- Graboplast
- IEB
- MATÁV
- Mezőgép
- MOL
- NABI
- OTP

- Pannonflax
- Pannonplast
- Pick
- Prímagáz
- Rába
- Richter
- Skála
- TVK
- Zalakerámia
- Zwack

Az elemzéshez az árfolyam-adatokat a www.portfolio.hu honlapról töltöttük le.

Kutatásunkban egy fiktív befektető optimális döntését kerestük 2000., 2001. és 2002. december 31-ére. Befektetőnk minden időpontban a Markowitz-modell felhasználásával alakította ki a számára optimális portfóliót. A modell input paramétereit az elmúlt öt év árfolyam-adatai alapján határoztuk meg. A modell kockázatkerülési együtthatójának 4-et választottunk⁵. Egy részvény tőzsdéről történt kivonása esetén a befektető portfólióját úgy alakítottuk át, hogy a többi papír egymáshoz viszonyított aránya változatlan maradjon.

A modell input paramétereit öt különböző módon is kiszámítottuk:

1. Az elmúlt öt év alapján számolt tényleges hozamok, varianciák és kovarianciák.
2. Az elmúlt öt év alapján számolt tényleges varianciák és kovarianciák. Az egyes részvények várható hozamait azonban – a Stein-féle módszer egy extrém változataként – azonosnak vettük. A hozambecslés így a mintában szereplő 24 részvény elmúlt öt évre számított átlagos hozama volt.
3. Az elmúlt öt év alapján számolt tényleges varianciák és kovarianciák. Az egyes részvények várható hozamait azonban – a Stein-féle módszer egy változataként – most csak 50%-ban közelítettük a globális átlaghoz. Ennek a módnak a paramétereit tehát az első két mód paramétereinek az átlagai voltak.
4. Az elmúlt öt év alapján számolt tényleges hozamok és kovarianciák. Az egyes részvények varianciáit azonban – a Stein-féle módszer egy extrém változataként – azonosnak vettük. A varianciák becslése így a mintában szereplő 24 részvény elmúlt 5 évre számított átlagos varianciája volt.
5. Az elmúlt öt év alapján számolt tényleges hozamok és varianciák. Az egyes részvények kovarianciáit azonban – a Stein-féle módszer egy extrém változataként – azonosnak vettük. A kovarianciák becslése így a mintában szereplő 24 részvény elmúlt 5 évre számított átlagos kovarianciája volt.

Így összesen 3 időpontra 5-5 különböző „optimális” portfóliót kaptunk. Vizsgálatunk tárgya az volt, hogy az öt módszer közül vajon eredményez-e valamilyik optimálisabb portfóliót. Ennek eldöntésére megvizsgáltuk mind a 15 portfólió teljesítményét egészen a 2003-as év végéig, majd ezen eredményeket egymással, illetve a BUX által reprezentált piaci portfólió teljesítményével is összevetettük.

A kutatás eredményei

Az 1996–2000 közötti időszak alapján összeállított öt portfólió, valamint a BUX index éves hozamait mutatja az 1. táblázat.

1. táblázat

Az első döntési időpont
portfólióinak hozamai (%)

Év	1. módszer	2. módszer	3. módszer	4. módszer	5. módszer	BUX
2001	6,0	-0,7	2,7	0,3	-8,5	-9,2
2002	23,1	17,5	20,3	15,0	15,6	9,4
2003	20,6	20,0	19,2	18,3	26,1	20,3
2004	47,7	9,1	28,3	32,4	50,9	57,2
Átlag	24,4	11,5	17,6	16,5	21,0	19,4
Szórás	17,3	9,4	10,7	13,2	24,6	28,0

Jól látható, hogy az első két évben lényegében mind az öt modellportfólió lényegesen jobban teljesített, mint a BUX. A piaci portfólió mindössze 2003-ban tudott felzárkózni az optimalizált portfóliókhoz. Bár 2004-ben a BUX mind az öt modellportfóliónál jobban teljesített, hangsúlyozni kell, hogy a modellportfóliók összetételét a 2001–2004 közötti négy évben nem módosítottuk. Azaz a 2000. év végén összeállított portfóliók két éven keresztül dominálták a BUX-ot. Az átlagos hozamok és a hozamok szórásai szintén meggyőzőek. Mind az öt modellportfólió – többségük lényegesen – alacsonyabb szórást produkált a BUX-nál, miközben két portfólió is magasabb átlaghozamot tudott felmutatni. Külön kiemelnénk, hogy az első három évben minden modellportfólió magasabb átlaghozamot produkált a BUX-nál.

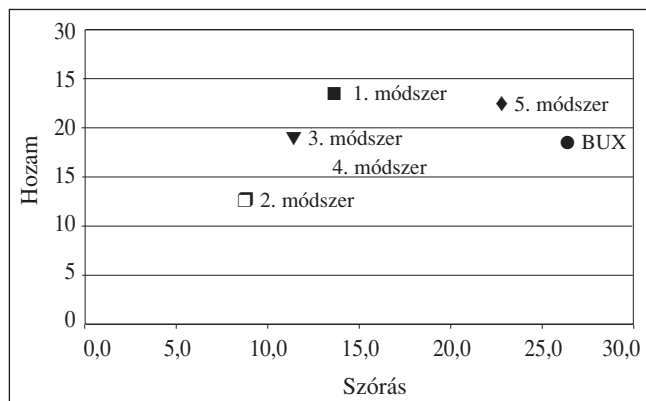
Az 1996–2000 közötti időszak alapján összeállított öt portfólió, valamint a BUX index átlagos éves hozamait, illetve az éves hozamszórását mutatja az 1. ábra.

Az első ábrán az is látható, hogy a hat portfólió közül csupán három, az 1., a 2. és a 3. módszerrel alkotott tekinthető hatékonyak.

Az 1997–2001 közötti időszak alapján összeállított öt portfólió, valamint a BUX index éves hozamait mutatja a 2. táblázat.

1. ábra

Az első döntési időpont portfólióinak hozamai és szórásai (%)



2. táblázat

A második döntési időpont portfólióinak hozamai (%)

Év	1. módszer	2. módszer	3. módszer	4. módszer	5. módszer	BUX
2002	15,4	13,1	16,2	13,0	13,8	9,4
2003	27,6	20,5	24,6	19,1	26,1	20,3
2004	43,1	9,4	29,1	30,4	53,8	57,2
Átlag	28,7	14,3	23,3	20,8	31,2	29,0
Szórás	13,9	5,7	6,5	8,8	20,5	25,1

A második táblázat is hasonló képet mutat. Az első évben minden portfólió jobb eredményt nyújtott, mint a BUX, a második évben pedig mindössze a 4. módszerrel összeállított portfólió maradt el a piaci portfóliótól. 2004-ben azonban megint a BUX produkálta a legjobb eredményt. Ez esetben is az összes portfólió – általában lényegesen – alacsonyabb szórást mutatott, mint a BUX, átlagos éves hozam szintjén azonban csupán az 5. módszer bizonyult jobbnak nála, és közel hasonló hozamot is csak az 1. módszer tudott produkálni.

Az 1997–2001 közötti időszak alapján összeállított öt portfólió, valamint a BUX index átlagos éves hozamait, illetve az éves hozam szórását mutatja a 2. ábra.

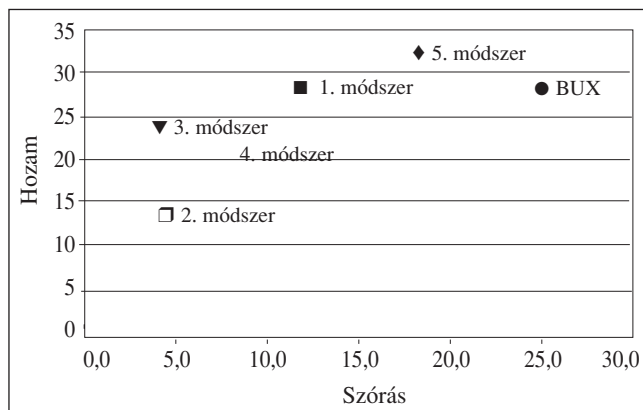
A második ábrán az is látható, hogy a hat portfólió közül csupán négy, az 1., a 2., a 3. és az 5. módszerrel alkotott tekinthető hatékonyak.

Az 1998-2002 közötti időszak alapján összeállított öt portfólió, valamint a BUX index éves hozamait mutatja a 3. táblázat.

A harmadik táblázat kissé eltérő képet mutat. Már az első két évben is mindössze két portfólió tudott a BUX-nál – kevéssel – jobb hozamot elérni, a második évben pedig mind – kettő kivételével lényegesen – alacsonyabbat produkált. Bár a szórások egy módszer kivételével most is lényegesen alacsonyabbak, az átlagos hozamok is mind az öt portfólió esetében – kettő

2. ábra

A második döntési időpont portfólióinak hozamai és szórásai (%)



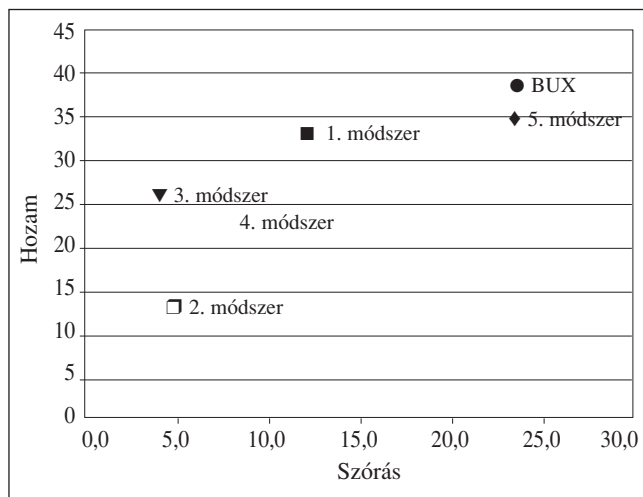
3. táblázat

A harmadik döntési időpont portfólióinak hozamai (%)

Év	1. módszer	2. módszer	3. módszer	4. módszer	5. módszer	BUX
2003	22,5	18,5	20,4	16,1	16,8	20,3
2004	43,1	9,4	29,1	30,4	53,8	57,2
Átlag	32,8	14,0	24,8	23,3	35,3	38,8
Szórás	14,6	6,4	6,2	10,1	26,2	26,1

3. ábra

A harmadik döntési időpont portfólióinak hozamai és szórásai (%)



kivételével lényegesen – alacsonyabbak, mint a BUX által elért.

Az 1998–2002 közötti időszak alapján összeállított öt portfólió, valamint a BUX index átlagos éves hozamait, illetve az éves hozam szórását mutatja a 3. ábra.

A harmadik ábrán az is látható, hogy a hat portfólió közül csupán három, az 1. és a 3. módszerrel alkotott, valamint a BUX tekinthető hatékonyak.

Természetesen az nem igazán tekinthető gyakorlatközelinek, hogy egy befektető a portfólió-optimalizálási döntést csak egyetlen időpontban hozza meg, majd az így kapott portfóliót soha nem változtatja meg. Sokkal valószínűbb, hogy az átstrukturálásokat rendszeres időközönként megismétli. A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy milyen eredményt ért volna el egy olyan befektető, aki minden év végén átrendezte volna a portfólióját egy, az elmúlt öt év adatai alapján optimalizált portfólióra.

Egy ilyen befektető öt modellportfóliójának, valamint a piaci portfóliónak az éves hozamait mutatja a 4. táblázat.

4. táblázat

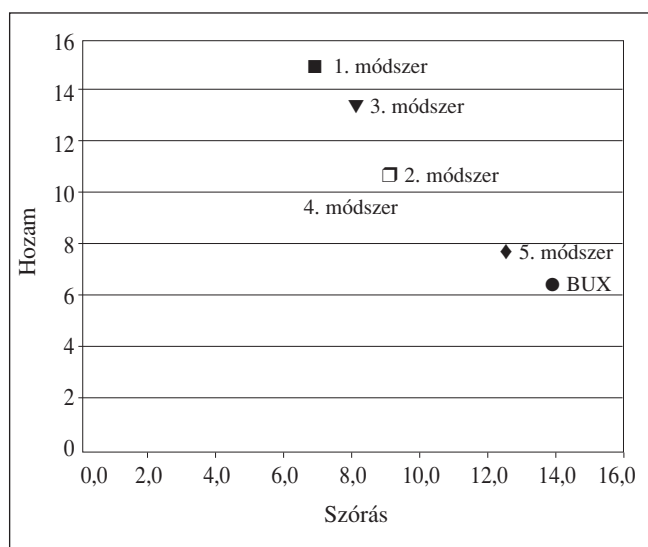
Az évente átstrukturált portfóliók hozamai (%)

Év	1. módszer	2. módszer	3. módszer	4. módszer	5. módszer	BUX
2001	6,0	-0,7	2,7	0,3	-8,5	-9,2
2002	15,4	13,1	16,2	13,0	13,8	9,4
2003	22,5	18,5	20,4	16,1	16,8	20,3
Átlag	14,6	10,3	13,1	9,8	7,4	6,8
Szórás	8,3	9,9	9,2	8,4	13,8	14,9

A negyedik táblázat azt mutatja, hogy egy ilyen befektető bármely módszer alkalmazása esetén domináns portfóliót kapott volna a BUX-hoz képest, hiszen mind az öt portfólió magasabb átlaghozamot, és alacsonyabb szórást mutatott a vizsgált három év alatt. A három évet külön vizsgálva azt láthatjuk, hogy 2001-ben és 2002-ben minden módszer jobb hozamot produkált a BUX-nál, és 2003-ban is csak három portfólió teljesített rosszabbul.

4. ábra

Az évente átstrukturált portfóliók hozamai és szórásai (%)



A befektető által összeállított öt portfólió, valamint a BUX index átlagos éves hozamait, illetve az éves hozam szórását mutatja a 4. ábra.

A negyedik ábrán az is látható, hogy a másik öt portfóliót egyértelműen dominálta az 1. módszer alapján összeállított, hiszen ez a modellportfólió adta a legmagasabb átlaghozamot – többet, mint a BUX átlaghozamának duplája –, miközben a legalacsonyabb szórással egyben a legstabilabb eredményt is ez a portfólió produkálta.

Bár a táblázat és a grafikon alapján egyes esetekben egyértelműnek tűnik bizonyos módszerek kedvezőbb teljesítménye, megvizsgáltuk azt is, hogy mely esetekben igazolható statisztikailag is a dominancia. Ehhez az SPSS szoftvert használtuk, mely segítségével párosított mintás t-teszteket végeztünk el a hozamokon. Ennek kiemelt eredményeit mutatja az 5. táblázat.

Mint az 5. táblázatból leolvasható, a vizsgált időszak rövidege következtében a hozamok közötti eltérés statisztikailag általában nem elég erős. 5%-os szignifikancia szinten csupán azt a két hipotézist lehet elfogadni, hogy a 3. módszer magasabb hozamot produkál, mint a 2., illetve a 4. módszer. E hipotézisek mellett 10%-os szignifikancia szinten is csupán két másik hipotézis fogadható el, mégpedig az, hogy az 1. módszer magasabb hozamot produkál, mint a 2., illetve a 4. módszer. Meg kell jegyeznünk azonban, hogy a módszerek közötti dominanciát ez a statisztikai vizsgálat nem tudja teljes körűen elemezni, hiszen nem vizsgálja a kockázatkerülő befektető másik igen fontos szempontját, a szórást.

Az eddigi eredményeket összefoglalva elmondhatjuk, hogy bár a vizsgált években mind az öt kereskedési stratégia dominálta a BUX-ot kockázat és hozam tekintetében, az öt vizsgált stratégia közül kettő tekinthető minden szempontból jól teljesítőnek, az 1. és a 3. módszer. Csak ez a két módszer adott az első három ábra mindegyike alapján hatékony portfóliót, és bár évenkénti átstrukturálás esetén az 1. módszer dominálta a 3-at, a hozameltérések statisztikai vizsgálatokor a 3. bizonyult meggyőzőbbnek. Mivel a két módszer között az egyetlen eltérés az, hogy míg az 1. az optimalizálási döntés inputjaként a papírok saját átlagos múltbeli hozamaival számol, addig a 3. 3,50%-os súllyal figyelembe veszi az összes papír átlagos múltbeli hozamát is az input meghatározásakor, természetesen merül fel a kérdés, hogy vajon kaphatnánk-e még jobb eredményeket akkor, ha az összes papír átlagos múltbeli hozamát nem 50%-os, hanem ettől eltérő súllyal vennénk figyelembe. Kutatásunk végső lépéseként ezt a kérdést vizsgáltuk meg.

A kérdés megválaszolásához 11 különböző Markowitz-modellt megoldva alakítottunk ki optimális portfóliókat a 2000., a 2001. és a 2002. év végén, továbbra is

5. táblázat

Az egyes módszerek hozam-eltéréseinek statisztikai elemzése

Pár	Eltérés	Szórás	95%-os konfidencia intervallum		t-statisztika	Szignifikancia
			Felső	Felső		
M1-M2	4,3333	2,21886	-1,1786	9,8453	3,383	0,077
M1-M3	1,5333	2,10792	-3,7030	6,7697	1,260	0,335
M1-M4	4,8333	2,13620	-0,4733	10,1399	3,919	0,059
M1-M5	7,2667	6,59116	-9,1067	23,6400	1,910	0,196
M1-BUX	7,8000	6,68431	-8,8047	24,4047	2,021	0,181
M2-M3	-2,8000	0,79373	-4,7717	-0,8283	-6,110	0,026
M2-M4	0,5000	1,73494	-3,8098	4,8098	0,499	0,667
M2-M5	2,9333	4,38216	-7,9526	13,8192	1,159	0,366
M2-BUX	3,4667	5,15396	-9,3365	16,2698	1,165	0,364
M3-M4	3,3000	0,95394	0,9303	5,6697	5,992	0,027
M3-M5	5,7333	4,77214	-6,1213	17,5880	2,081	0,173
M3-BUX	6,2667	5,91805	-8,4346	20,9679	1,834	0,208
M4-M5	2,4333	5,51392	-11,2640	16,1307	0,764	0,525
M4-BUX	2,9667	6,87192	-14,1041	20,0375	0,748	0,533
M5-BUX	0,5333	3,95264	-9,2856	10,3522	0,234	0,837

egyed papírok saját múltbeli hozamait nagyobb súllyal vettük figyelembe, mint az összes papír átlagos hozamát. Ez az összefüggés 2001-ben és 2003-ban lényegében minden modell viszonylatában igaz volt. 2002 ebből a szempontból kissé eltérő képet mutat, hiszen ebben az évben a legjobb hozamot az 50-50%-kal súlyozott esetben kaptuk, ettől az aránytól eltérve a modellek adott évi hozamai mindkét irányban romlanak. Érdemes azonban észrevenni, hogy a saját hozam súlyát növelve a hozamok sokkal kevésbé csökkennek, mint a saját hozamok súlyának növelésekor.

Külön kiemelnénk, hogy míg a legjobb modell átlagos hozama 4,3%-kal magasabb, szórása pedig 1,7%-kal alacsonyabb a legrosszabb modellénél, addig a BUX indexnél még a legrosszabb portfólió is 3,5%-kal magasabb hozamot és 5%-kal alacsonyabb szórást tudott felmutatni. A legjobb, az egyes papírok saját múltbeli hozamaival dolgozó modell így összesen 7,8%-kal magasabb átlagos hozamot ért el a piaci portfóliónál, azaz a három év átlagában több mint kétszer akkora hozama volt, mint a BUX-nak, miközben sokkal stabilabb is

6. táblázat

A 11 módszer hozamai (%)

Év	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	BUX
2001	6,0	5,4	4,8	4,3	3,7	2,7	1,5	0,4	-0,8	-0,8	-0,7	-9,2
2002	15,4	15,5	15,7	15,8	16,0	16,2	15,9	14,6	13,4	13,2	13,1	9,4
2003	22,4	22,2	21,9	21,6	20,9	20,4	19,9	19,3	18,6	18,5	18,5	20,3
Átlag	14,6	14,4	14,1	13,9	13,5	13,1	12,4	11,4	10,4	10,3	10,3	6,8
Szórás	8,2	8,5	8,7	8,8	8,9	9,2	9,7	9,8	10,0	10,0	9,9	14,9

az elmúlt öt év hozamai alapján. Minden modell inputjaként az adott papírok tényleges múltbeli varianciáit és kovarianciáit használtuk, a modellek csak a hozam meghatározásában tértek el egymástól, egész pontosan abban, hogy mekkora súllyal vettük figyelembe a saját múltbeli hozam mellett az összes papír átlagos hozamát. Az 1. modellnél ez a súly 0% volt, azaz inputként minden papír esetében az elmúlt 5 év tényleges átlagos hozamát adtuk meg. A 2. modellnél ez a súly 10% volt, azaz inputként az adott papír múltbeli hozamának 0,9-szeresének és az összes papír múltbeli hozamának 0,1-szeresének összegét vettük. Általánosan az n. modell esetében a súly $(n-1)*10\%$ volt. Ezen 11 modell magában foglalt 3-at az eddig elemzett 5 modell közül is. Az új modellek közül az 1. azonos volt a régi modellek közül az 1.-vel, a 6. azonos volt a régi 3.-al, míg a 11. a régi 2. modellel.

A 11 új portfólió 2001-2003 közötti éves hozamait mutatja a 6. táblázat.

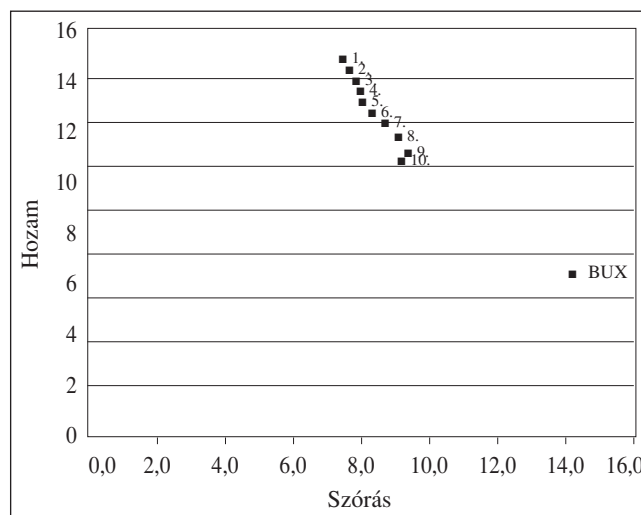
A 6. táblázat alapján látható, hogy mind átlagos hozam, mind pedig szórás tekintetében jobb portfóliókat eredményezett, ha a várható hozamok becslésekor az

volt, a szórása 6,7%-kal volt alacsonyabb a BUX ingadozásánál.

A 11 portfólió, valamint a BUX index átlagos éves hozamait, illetve az éves hozamszórását mutatja az 5. ábra.

5. ábra

A 11 módszer hozamai



Az 5. ábra szemléletesen mutatja az előzőkben leírtakat. Elmondható, hogy a hozamok előrejelzésénél a simítás, azaz a papírok saját múltbeli átlagos hozamának az összes papír átlagos hozama felé történő torzítása általában egyértelműen rosszabb portfóliót eredményez, de még a legrosszabb portfólió is egyértelműen dominálja a piaci portfóliót.

Összefoglalás

Jelen cikkben azt vizsgáltuk, hogyan hat az input paraméterek simítása a portfólió jövőbeli teljesítményére, illetve próbáltuk meghatározni az optimális simítási együtthatókat is. Ehhez 24 darab BÉT-en kereskedett papírból készítettünk a Markowitz-modell segítségével optimalizált portfóliókat három éven keresztül.

A portfóliók teljesítményének elemzése során arra a következtetésre jutottunk, hogy a Markowitz-modell segítségével összeállított összes portfólió jól teljesített a BUX-hoz viszonyítva, mégis, statisztikailag is igazolható kiemelkedő eredményt akkor lehetett elérni, ha a modell variancia és kovariancia input paramétereit nem simítottuk, hanem minden papír esetében az elmúlt öt év mért értékeit használtuk. A hozamoknál a múltbeli átlagos hozam, illetve ennek az összes papír átlagos hozamával 50%-os arányban simított értéke adta a két legjobb modellt. A hozamnál a simítási együttható mélyebb vizsgálata megmutatta, hogy a hozam előrejelzésekor a múltbeli átlagos hozam kizárólagos használata két vizsgált évben is a legjobb eredményt adta, az így kialakított portfólió hozama csak 2002-ben maradt el egy kissé az abban az évben legjobb eredményt adó 50%-os arányban simított értékkel dolgozó modell hozamától.

A kutatás eredményeinek továbbvitelére több lehetőség is adódik. Egyrészt érdemes lenne megvizsgálni, hogy gyakoribb – például havi – átrendezéssel jobb, statisztikailag meggyőzőbb eredményt kapnánk-e, mint az éves átstrukturálással. Másrészt a modellek input paramétereinek meghatározásakor használhatnánk az öt évtől eltérő időszakot is. Végül a variancia és a kovariancia becsléseknél is alkalmazhatóak lennének 0% és 100% közötti simítási faktorok.

Felhasznált irodalom

1. Best, M. J. – Grauer, R. R. (1991): On the Sensitivity of Mean-Variance Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results. *Review of Financial Studies*, 4, 315-342.
2. Chopra, V. K. – Ziemba, W. T. (1993): The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. *Journal of Portfolio Management* 19, 6–11.
3. Damodaran, A. (2002): *Investment Valuation – Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset*. John Wiley & Sons, Inc, New York
4. James, W. – Stein, C. (1961): Estimation with Quadratic Loss. *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1, 361- 379.
5. Jorion, P.(1985): International Portfolio Diversification with Estimation Risk. *Journal of Business*, 58, 259-278.
6. Jorion, P. (1986): Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21 (3), Columbia University, 279-292.
7. Kallberg, J. G. – Ziemba, W. T. (1984): Mis-Specifications in Portfolio Selection Problems. In: *Lecture Notes in Economics and Math. Systems*, Berlin/Heidelberg, 74-87.
8. Kempf, A. – Kreuzberg, K. – Memmel, C. (2001): How to Incorporate Estimation Risk into Markowitz Optimization. Workingpaper
9. Markowitz, H. M. (1952): Portfolio Selection. *The Journal of Finance* 7, 77–91.
10. Merton, R. C. (1980): On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation. *Journal of Financial Economics* 8, 323–361.
11. Michaud, R. O. (1998): *Efficient Asset Management*. Boston
12. Schäfer, K. – Zimmermann, P. (1998): Portfolio Selection und Schätzfehler bei den Erwarteten Renditen: Ergebnisse für den deutschen Aktienmarkt. *Finanzmarkt und Portfolio Management*, 12, 131-149.
13. Sebestyén, G. (2004): Kockázat-hozam modellek a nemzetközi gyakorlatban. In: Fazakas, G.: *Vállalati pénzügyi döntések*. Tanszék Kft., 147-175.
14. Stein, C. (1955): Inadmissibility of the Usual Estimator for the Mean of a Multivariate Normal Distribution. *Proceedings of the 3rd Berkely Symposium on Probability and Statistics* 1, Berkeley

Lábjegyzetek

- ¹ Munkájáért Markowitz 1990-ben közgazdasági Nobel-díjban részesült. A portfóliókezelők által használt, erre a modellre épített optimalizáló szoftverek száza pedig egyértelműen mutatják a téma gyakorlati elfogadottságát.
- ² Az átlagos hozamok csak meglehetősen nagy hibával becsülhetők – bővebben lásd: Merton (1980) és Sebestyén (2004), míg a varianciák és a kovarianciák meglehetősen stabilak időben – bővebben lásd: Kallberg és Ziemba (1984), valamint Schäfer és Zimmermann (1998).
- ³ Bővebben lásd: Best és Grauer (1991), valamint Chopra és Ziemba (1993).
- ⁴ A problémát Michaud (1998) találóan úgy jellemezte, hogy a Markowitz-modell lényegében a becslési hibát maximalizálja.
- ⁵ Ez a tipikus befektető kockázat-elutasításának felel meg.
- ⁶ Egészen pontosan ezekben az esetekben vehető el az a nullhipotézis, hogy a vizsgált hozamok átlaga egymással megegyezik. Az, hogy melyik módszer produkált magasabb hozamot, a különbség előjeléből látható.