



UNIVERSIDADE DA CORUÑA
Escuela Politécnica Superior

Apuntes de 730211205-Mecánica Fundamental I

curso 2010/2011

Alberto Ramil Rego

Escuela Politécnica Superior

Escuela Politécnica Superior

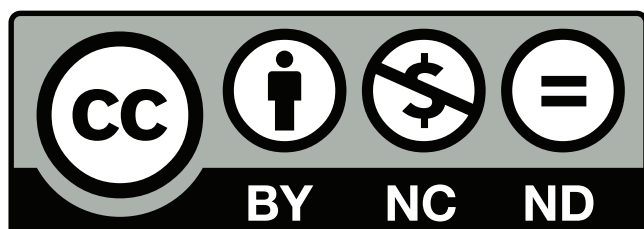
Título: Apuntes de 730211205-Mecánica Fundamental I

Autora: Ramil Rego, Alberto

Año: 2011

Centro: Escola Politécnica Superior, Universidade da Coruña (SPAIN)

Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 España.





Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Funciones vectoriales de una variable escalar: Curvas | 1 |
| 1.1. Función vectorial de una variable escalar. | 1 |
| 1.2. Derivación de funciones vectoriales. | 2 |
| 1.3. Componentes de la derivada de una función vectorial en una base ortonormal dependiente del escalar (casos cartesiano, cilíndrico y esférico) | 3 |
| 1.4. Ecuaciones vectoriales de los elementos del triedro intrínseco. | 9 |
| 1.5. Derivada de los vectores del triedro intrínseco. Fórmulas de Frenet. | 11 |
| 2. Funciones vectoriales de dos variables escalares: Superficies | 13 |
| 2.1. Función vectorial de dos variables escalares. Superficie indicatriz. | 13 |
| 2.2. Ecuaciones paramétricas de una superficie. Coordenadas de Gauss. | 13 |
| 2.3. Tangentes a las líneas coordenadas. Plano tangente. Normal a la superficie. | 13 |
| 2.4. Curvatura normal y curvatura geodésica. | 14 |
| 3. Álgebra Tensorial | 19 |
| 3.1. Cambio de referencia ortonormal. Transformación de las componentes de un vector. | 19 |
| 3.2. Forma matricial de una rotación. | 20 |
| 3.3. Definición analítica de tensores y pseudotensores cartesianos de orden n . Propiedades. | 21 |
| 4. Geometría de masas | 23 |
| 4.1. Determinación del centro de masas. | 23 |
| 4.2. Determinación de momentos y productos de inercia. | 24 |
| 4.3. Tensor de inercia. Propiedades. Expresión matricial de las fórmulas de Steiner. | 25 |
| 4.4. Ejes principales de inercia. Diagonalización del tensor de inercia. | 26 |
| 4.5. Elipsoide de inercia. | 27 |
| 5. Movimiento general del sólido rígido | 45 |
| 5.1. Coordenadas de posición y grados de libertad de un sólido rígido. | 45 |
| 5.2. Expresión vectorial de movimientos de rotación y traslación. | 46 |
| 5.3. Teorema de las velocidades proyectadas. | 47 |
| 5.4. Distribución de velocidades. Grupo cinemático. Invariantes. | 47 |
| 5.5. Grupo cinemático. Invariantes | 48 |
| 5.6. Eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo como eje central del sistema de velocidades del sólido. | 48 |
| 5.7. Sucesión del eje instantáneo de rotación. Axoides. | 49 |
| 5.8. Distribución de aceleraciones. | 50 |
| 6. Composición de movimientos | 51 |
| 6.1. El problema de la composición de movimientos. Generalidades. | 51 |
| 6.2. Composición de velocidades, rotaciones y aceleraciones. | 51 |
| 6.3. Movimientos inversos | 53 |
| 6.4. Movimientos relativos de sólidos en contacto. | 54 |
| 7. Movimiento plano | 55 |
| 7.1. Características del movimiento plano. | 55 |
| 7.2. Centro instantáneo de rotación. Base y ruleta. | 56 |
| 7.3. Distribución de velocidades en el movimiento plano. | 56 |
| 7.4. Velocidad de sucesión del centro instantáneo de rotación. Determinación gráfica. | 57 |
| 7.5. Distribución de aceleraciones en el movimiento plano. | 57 |
| 7.6. Circunferencia de las inflexiones y de las inversiones. Polo de aceleraciones. | 58 |
| 7.7. Movimientos planos relativos. Teorema de los tres centros. | 59 |
| 7.8. Perfiles conjugados. Propiedades. | 60 |

| | |
|---|-----------|
| 8. Movimiento esférico | 61 |
| 8.1. Movimiento esférico. Conos de Poinot. | 61 |
| 8.2. Distribución de velocidades en el movimiento esférico. | 61 |
| 8.3. Distribución de aceleraciones en el movimiento esférico. | 61 |
| 8.4. Ángulos de Euler. | 62 |
| 8.5. Rotaciones de Euler. | 63 |
| 9. Equilibrio del sólido rígido | 65 |
| 9.1. Principio del trabajo virtual. Aplicación a la estática. | 65 |
| 9.2. Energía potencial debida a un trabajo virtual. | 65 |
| 9.3. Energía potencial y condiciones de equilibrio. Aplicación a casos representativos. | 66 |
| 9.4. Criterios de estabilidad del equilibrio. | 67 |
| 10. Equilibrio de hilos | 69 |
| 10.1. Fuerzas distribuidas sobre hilos ideales. | 69 |
| 10.2. Equilibrio de hilos de peso despreciable con cargas repartidas. Ecuación diferencial de equilibrio de un hilo. | 69 |
| 10.3. Ecuaciones intrínsecas del equilibrio de un hilo. | 70 |
| 10.4. Integrales primeras de las ecuaciones de equilibrio de un hilo. | 71 |
| 10.5. Equilibrio de un hilo bajo un sistema de fuerzas paralelas. | 71 |
| 10.6. Equilibrio de hilos de peso despreciable con cargas concentradas. | 72 |
| 11. Equilibrio de hilos bajo la acción de su propio peso: catenaria | 73 |
| 11.1. Cable bajo la acción de su propio peso. Catenaria. | 73 |
| 11.2. Elementos de la catenaria: Tensiones en los extremos y longitud total. Propiedades y métodos de obtención bajo condiciones dadas. | 73 |
| 12. Otras configuraciones de hilos reales | 77 |
| 12.1. Equilibrio de hilos con carga repartida según la abscisa. Cable parabólico. | 77 |
| 12.2. Hilo de igual resistencia. Figura de equilibrio y vano máximo. | 78 |
| 12.3. Equilibrio de un hilo sobre una superficie sin rozamiento. | 79 |
| 12.4. Equilibrio de un hilo sobre una superficie con rozamiento. Aplicación al caso de poleas y correas de transmisión. | 81 |



1. Funciones vectoriales de una variable escalar: Curvas

- 1.1 Función vectorial de una variable escalar.
- 1.2 Derivación de funciones vectoriales.
- 1.3 Componentes de la derivada de una función vectorial en una base ortonormal dependiente del escalar (casos cartesiano, cilíndrico y esférico).
- 1.4 Ecuaciones vectoriales de los elementos del triedro intrínseco.
- 1.5 Derivada de los vectores del triedro intrínseco. Fórmulas de Frenet.

1.1. Función vectorial de una variable escalar.

Definición $\vec{r}(t)$ es una función vectorial de un parámetro t en un intervalo $[t_1, t_2]$, si a cada valor de t en este intervalo le corresponde un valor del vector \vec{r} .

Matemáticamente diríamos que se trata de una aplicación $\Gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

La existencia de $\vec{r}(t)$ obliga a que cada componente sea una función escalar de la misma variable en el mismo intervalo.

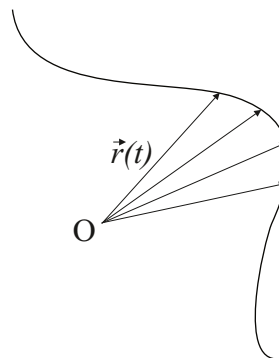
Si tenemos una base de vectores $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^3 r_i(t) \vec{e}_i$$

dónde $\vec{r}(t)$ con $i = 1, 2, 3$ son las componentes en esa base.

La base de vectores suele elegirse ortonormal y orientada a derechas y se emplean mayoritariamente las asociadas con las coordenadas cartesianas $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, cilíndricas $\{\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{z}\}$ y esféricas $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$.

Indicatriz de la función vectorial $\vec{r}(t)$ es el lugar geométrico engendrado por los extremos del vector \vec{r} cuando se llevan a un origen común y se le asignan al parámetro todos los valores posibles.



Ejemplos:

- si $\vec{r}(t)$ es el vector posición de un punto como función del tiempo, la indicatriz es la trayectoria.
- si $\vec{v}(t)$ es la velocidad como función del tiempo, la indicatriz es una curva llamada hodógrafa.

Continuidad. $\vec{r}(t)$ es continua para el valor t_0 del parámetro, si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$|\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)| < \varepsilon$$

$$\forall |\Delta t| \leq \delta$$

1.2. Derivación de funciones vectoriales.

Derivada. Si $\vec{r}(t)$ es continua en un cierto intervalo de t puede definirse la derivada como:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

donde empleamos la notación $\dot{A} = \frac{dA}{dt}$, $\ddot{A} = \frac{d^2A}{dt^2}$, ...

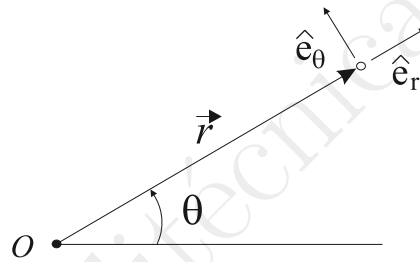
Si la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ no depende del parámetro t ,

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i r_i \vec{e}_i \right) = \sum_i \dot{r}_i \vec{e}_i$$

Cuando la base si dependa del parámetro tendremos:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \sum_i \dot{r}_i(t) \vec{e}_i(t) + \sum_i r_i(t) \dot{\vec{e}}_i(t)$$

Ejemplo: Vector posición en coordenadas polares planas



$$\vec{r} = r(t) \hat{e}_r$$

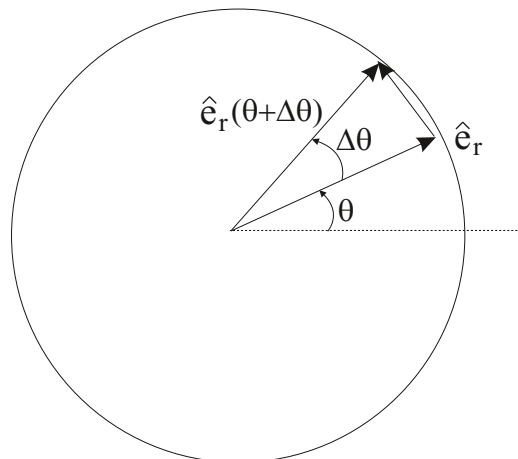
e_r es el vector unitario en la dirección que crece la coordenada r (radial)

e_θ es el vector unitario en la dirección que crece el ángulo θ (tangencial)

Como $\hat{e}_r = \hat{e}_r(r, \theta)$ y $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$ tenemos que $\dot{\hat{e}}_r \neq 0$

En concreto $\hat{e}_r = \hat{e}_r(\theta)$ y $\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d\hat{e}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$

Como \hat{e}_r es unitario su único cambio se debe al cambio de orientación en el límite $\Delta\theta \rightarrow 0$



$$|\hat{e}_r(\theta + \Delta\theta) - \hat{e}_r(\theta)| \rightarrow 1 \cdot \Delta\theta$$

y $\left| \frac{d\hat{e}_r}{d\theta} \right| = 1$

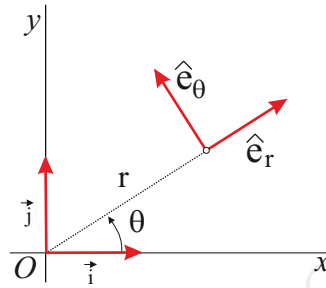


La dirección de $\frac{d\hat{e}_r}{d\theta}$ coincide con la de \hat{e}_θ y por tanto

$$\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} = \hat{e}_\theta$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

A este mismo resultado se llega fácilmente proyectando \hat{e}_r y \hat{e}_θ sobre los vectores cartesianos:



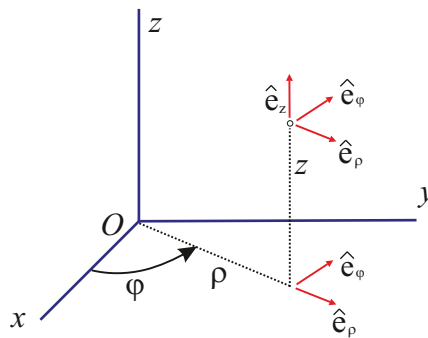
$$\hat{e}_r = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

dónde \hat{i}, \hat{j} no varían con las coordenadas.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{e}_r}{d\theta} &= -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{e}_\theta \\ \frac{d\hat{e}_\theta}{d\theta} &= -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{e}_r \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{d\hat{e}_r}{dt} &= \dot{\theta}\hat{e}_\theta \\ \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} &= -\dot{\theta}\hat{e}_r \end{aligned}$$

En el caso de coordenadas cilíndricas



$$\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$$

$$\frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\hat{e}_\rho$$

$$\frac{d\hat{e}_z}{dt} = 0$$

1.3. Componentes de la derivada de una función vectorial en una base ortonormal dependiente del escalar (casos cartesiano, cilíndrico y esférico)

Derivación en una base ortonormal dependiente del tiempo

Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base ortonormal orientada a derechas



Sea \vec{A} un vector cualquiera,

$$\vec{A} = A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i$$

con $A_i = \vec{A} \cdot \hat{e}_i$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \sum_i \frac{dA_i}{dt} \hat{e}_i + \sum_i A_i \frac{d\hat{e}_i}{dt}$$

puedo expresar los vectores $\frac{d\hat{e}_i}{dt}$ en la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, así:

$$\frac{d\hat{e}_1}{dt} = \underbrace{\left(\frac{d\hat{e}_1}{dt} \hat{e}_1\right)}_{b_{11}} \hat{e}_1 + \underbrace{\left(\frac{d\hat{e}_1}{dt} \hat{e}_2\right)}_{b_{12}} \hat{e}_2 + \underbrace{\left(\frac{d\hat{e}_1}{dt} \hat{e}_3\right)}_{b_{13}} \hat{e}_3 = \sum_j b_{1j} \hat{e}_j$$

en general:

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \sum_j b_{ij} \hat{e}_j$$

con $i = 1, 2, 3$

como:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i = 1 \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i) = 2\hat{e}_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} = 2b_{ij} \Rightarrow b_{ij} = 0$$

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0 \Rightarrow 0 = \frac{d\hat{e}_i}{dt} \hat{e}_j + \frac{d\hat{e}_j}{dt} \hat{e}_i = b_{ij} + b_{ji} \Rightarrow b_{ji} = -b_{ij}$$

Osea, $b_{ji} = -b_{ij} \forall i, j \rightarrow$ matriz Antisimétrica, tiene $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ elementos diferenciales:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{e}_1}{dt} &= \Omega_3 \hat{e}_2 - \Omega_2 \hat{e}_3 \\ \frac{d\hat{e}_2}{dt} &= -\Omega_3 \hat{e}_1 - \Omega_1 \hat{e}_3 \\ \frac{d\hat{e}_3}{dt} &= \Omega_2 \hat{e}_1 - \Omega_1 \hat{e}_2 \end{aligned} \right\} \frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{e}_i$$

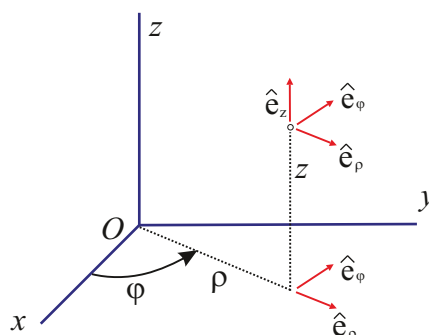
con $i = 1, 2, 3$ y $\vec{\Omega} (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$

Entonces,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \sum_i \frac{dA_i}{dt} \hat{e}_i + \vec{\Omega} \times \vec{A}$$

que se conoce por Fórmula de Boure.

Coordenadas cilíndricas.





$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z \end{aligned} \right| \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

$\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z\}$ son una base ortonormal orientada a derechas.

$$\left. \begin{aligned} \hat{e}_\rho &= \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{e}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \\ \hat{e}_z &= \hat{k} \end{aligned} \right\} \hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \hat{k} = \hat{e}_z$$

Los dos primeros dependen de la coordenada φ , el tercero es constante, $\hat{e}_\rho = \hat{e}_\rho(\varphi)$ y $\hat{e}_\varphi = \hat{e}_\varphi(\varphi)$
Además,

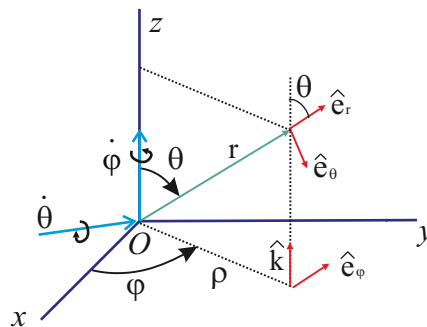
$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_\rho}{d\varphi} &= \hat{e}_\varphi \\ \frac{d\hat{e}_\varphi}{d\varphi} &= -\hat{e}_\rho \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} &= \frac{d\hat{e}_\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi \\ \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} &= -\dot{\varphi} \hat{e}_\rho \\ \frac{d\hat{e}_z}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} \\ \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} \\ \frac{d\hat{e}_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} & 0 \\ -\dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_z \end{pmatrix}$$

Entonces, $\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \hat{k}$ es el vector que nos da el cambio de orientación de la base con el tiempo.

Coordenadas esféricas.



$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{aligned} \right| \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

$\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi\}$ son una base ortonormal orientada a derechas.



$$\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} = \hat{e}_r(\theta, \varphi)$$

$$\hat{e}_\theta(\theta, \varphi) = \hat{e}_r\left(\theta + \frac{\pi}{2}, \varphi\right) = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$$

$$\hat{e}_\varphi = -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} = \hat{e}_\varphi(\varphi)$$

Derivando los vectores de la base respecto del tiempo,

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\theta} \underbrace{\left(\cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \right)}_{\hat{e}_\theta} + \dot{\varphi} \sin \theta \underbrace{\left(-\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \right)}_{\hat{e}_\varphi}$$

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi$$

Procediendo de forma análoga para los otros vectores de la base se obtiene

$$\begin{pmatrix} \frac{d\hat{e}_r}{dt} \\ \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \\ \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\theta} & \dot{\varphi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} & 0 & \dot{\varphi} \cos \theta \\ -\dot{\varphi} \sin \theta & -\dot{\varphi} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{pmatrix}$$

y la rotación (cambio de orientación de la base)

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \cos \theta \hat{e}_r - \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\theta + \dot{\theta} \hat{e}_\varphi$$

Como la rotación $\dot{\varphi}$ se realiza en el plano xy y la rotación $\dot{\theta}$ en el plano definido por Oz y \vec{r} , utilizando los vectores normales a esos planos se obtiene una expresión más compacta

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{e}_\varphi$$

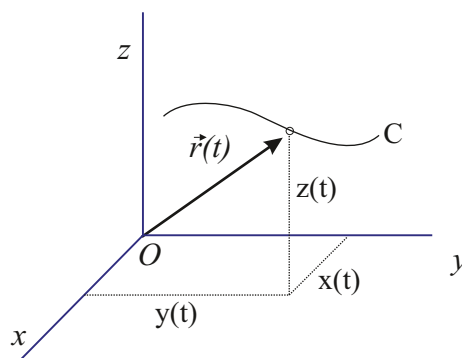
Geometría diferencial. Curvas.

Separamos la parte puramente geométrica de lo que sería la cinemática. Además, esta parte será útil en dinámica y en estática.

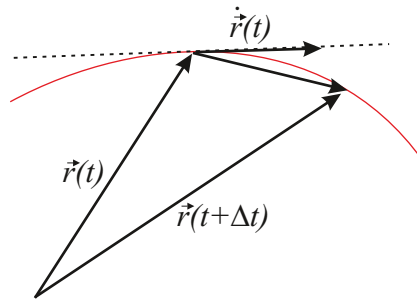
Sea la *curva parametrizada* C dada por

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

o bien $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$



La derivada $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ es un vector tangente a la curva, basta recordar que $\dot{\vec{r}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$



La *recta tangente* a C en el punto $\vec{r}(t_0)$, son los puntos \vec{P} verificando

$$\vec{P} = \vec{r}(t_0) + \lambda \cdot \dot{\vec{r}}(t_0), \forall \lambda$$

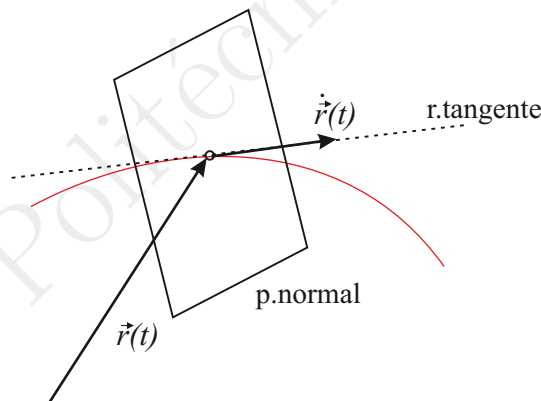
Si $\vec{P} = (x, y, z)$, $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ y $\dot{\vec{r}}(t_0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ la ecuación anterior se escribe como:

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0}$$

El *plano normal* a C en el punto $\vec{r}(t_0)$, son los puntos \vec{P} verificando

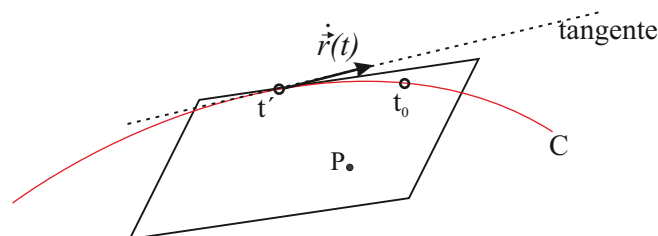
$$(\vec{P} - \vec{r}(t_0)) \cdot \dot{\vec{r}}(t_0) = 0$$

Osea, $(x - x_0)\dot{x}_0 = (y - y_0)\dot{y}_0 = (z - z_0)\dot{z}_0$



El *plano osculador* de C en $\vec{r}(t_0)$ es el límite de los planos que contienen la tangente en $\vec{r}(t_0)$ y a otro punto de la curva $\vec{r}(t_1)$, a medida que t_1 tiende a t_0 .

\vec{P} está en el plano osculador si $\vec{P} - \vec{r}_0$, $\dot{\vec{r}}_0$ y $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ son coplanarios cuando $t_1 \rightarrow t_0$



Si tres vectores son coplanarios su producto mixto es nulo: $(\vec{P} - \vec{r}_0) \cdot [\dot{\vec{r}} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)] = 0$ cuando $t_1 \rightarrow t_0$

Desarrollando en serie de potencias al rededor de t_0

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_0) + \dot{\vec{r}}_0 (t_1 - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_0 (t_1 - t_0)^2 + \dots$$

$$\dot{\vec{r}}_0 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_0 \times \ddot{\vec{r}}_0 (t_1 - t_0)^2 + \dots$$

y por tanto,

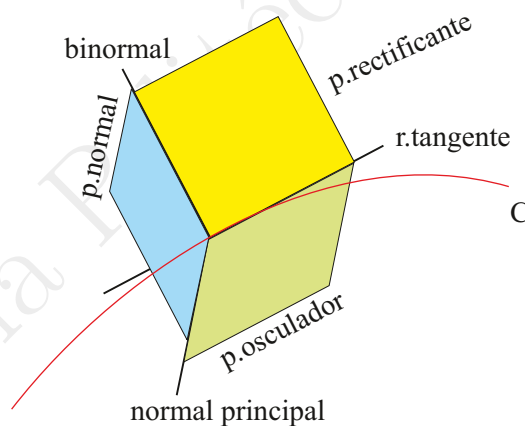
$$(\vec{P} - \vec{r}_0) \cdot (\dot{\vec{r}}_0 \times \ddot{\vec{r}}_0) = 0$$

o bien,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot{x}_0 & \dot{y}_0 & \dot{z}_0 \\ \ddot{x}_0 & \ddot{y}_0 & \ddot{z}_0 \end{vmatrix} = 0$$

Comentarios:

- 1) El plano osculador contiene a $\dot{\vec{r}}_0$ y $\ddot{\vec{r}}_0$
- 2) Solo puede definirse en *puntos regulares* ($\dot{\vec{r}}_0 \neq 0, \ddot{\vec{r}}_0 \neq 0$)
- 3) El plano osculador y el normal son perpendiculares
- 4) Si la curva es plana, el plano que la contiene es su plano osculador
 - La *recta* intersección del plano normal y osculador se llama *normal principal*
 - La *recta* perpendicular a la tangente y a la normal principal se llama *binormal*
 - El *plano* que contiene a la tangente y a la binormal se llama *rectificante*



En cada punto de cada curva continua y con $\dot{\vec{r}}_0 \neq 0, \ddot{\vec{r}}_0 \neq 0$ pueden definirse los tres planos y las tres rectas.

Longitud de arco.

Recordando la definición de derivada $\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ en dicho límite al arco y la cuerda se confunden $|\Delta \vec{r}| \rightarrow \Delta S$ y entonces $|\frac{d\vec{r}}{dt}| = \frac{dS}{dt}$

La longitud de arco medida desde $\vec{r}(t_0)$ y en el sentido creciente de t será:

$$S(t) = \int_{t_0}^t \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

con, $|\frac{d\vec{r}}{dt}| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$

Si $\dot{\vec{r}}_0 \neq 0$ se puede asignar a cada t un valor de S y escribir $\vec{r} = \vec{r}(t(s)) = \vec{r}(s)$ función vectorial parametrizada por la longitud de arco.



1.4. Ecuaciones vectoriales de los elementos del triedro intrínseco.

Triedro intrínseco.

Vimos que $\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{dt}$ es tangente a la curva. Si se deriva respecto al arco también se obtiene un vector tangente a la curva $\frac{d\vec{r}}{dS}$ que además es unitario porque $\|d\vec{r}\| = dS$. Es el *vector unitario tangente* $\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{r}'$, utilizando la notación $A' = \frac{dA}{dS}$.

El *vector unitario normal* $\hat{N} = \frac{\hat{T}'}{\|\hat{T}'\|}$ es unitario por construcción y veremos que es perpendicular al anterior. Derivando $\hat{T} \cdot \hat{T} = 1 \Rightarrow 0 = 2\hat{T} \cdot \hat{T}' \Rightarrow \hat{T}' \perp \hat{T} \Rightarrow \hat{N} \perp \hat{T}$

El *vector unitario binormal* $\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$ es unitario y perpendicular a \hat{T} y a \hat{N}

Por tanto, en cada punto de una curva ($\vec{r}' \neq 0, \vec{r}'' \neq 0$) puede definirse un triedro $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ ortonormal y orientado a derechas que se llama *triedro intrínseco o de Frenet*.

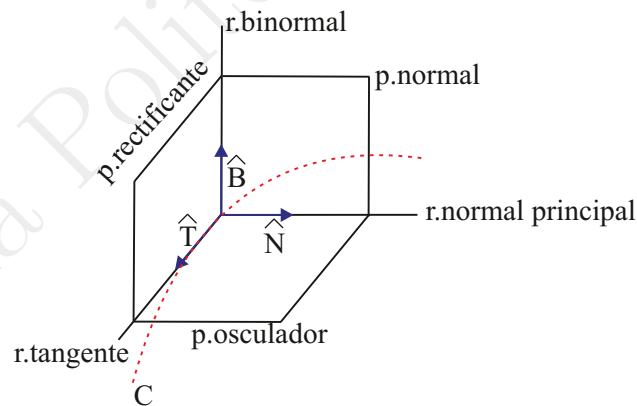
Además, la dirección de \hat{N} coincide con la recta normal principal y la de \hat{B} con la recta binormal. Veamoslo.

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \frac{dS}{dt} = \dot{S} \hat{T}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \ddot{S} \hat{T} + \dot{S} \frac{d\hat{T}}{dS} \frac{dS}{dt} = \ddot{S} \hat{T} + \dot{S}^2 \left\| \frac{d\hat{T}}{dS} \right\| \hat{N}$$

El plano osculador contiene a $\dot{\vec{r}}$ y $\ddot{\vec{r}}$, contendrá también a \hat{T} y a \hat{N} por lo que \hat{N} coincide con la normal principal.

\hat{B} es perpendicular a \hat{T} y a \hat{N} y coincidirá con la recta binormal.



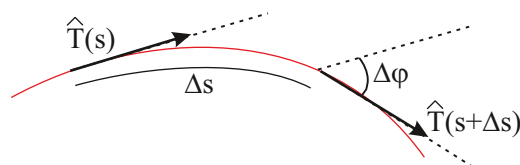
\hat{T}, \hat{N} definen el plano osculador

\hat{N}, \hat{B} definen el plano normal

\hat{B}, \hat{T} definen el plano rectificante

Curvatura de flexión o curvatura.

La curvatura $\kappa = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$ con $\Delta\varphi$ ángulo formado por la tangente en dos puntos separados ΔS



Como \hat{T} es unitario

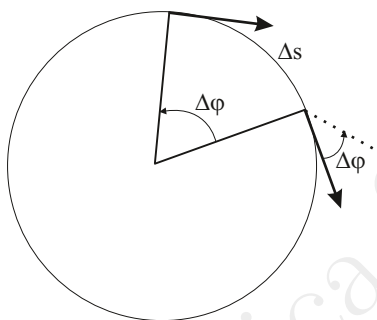
$$\left\| \hat{T}(S + \Delta S) - \hat{T}(S) \right\| \rightarrow \Delta\varphi$$

y entonces

$$\kappa = \left\| \frac{d\hat{T}}{dS} \right\|$$

La curvatura es una medida de lo que la curva se desvía de su tangente. Así, por ejemplo,

- Para una recta \hat{T} es constante y $\kappa = 0$
- Para una circunferencia de radio R :



$$\Delta S = R \cdot \Delta\varphi \Rightarrow \kappa = \frac{1}{R}$$

Por ello a la inversa de la curvatura se le llama *radio de curvatura* (de flexión) $\rho_f = \frac{1}{\kappa}$.
 El *centro de curvatura* es el punto situado a una distancia $\rho_f = \frac{1}{\kappa}$ y en la dirección de \hat{N} .

Evoluta: es el lugar geométrico de las distintas posiciones del centro de curvatura.

$$\vec{\beta}(t) = \vec{r}(t) + \frac{1}{\kappa} \hat{N}(t)$$

Curvatura de torsión o torsión.

$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\Psi}{\Delta S}$, con $\Delta\Psi$ ángulo formado por los planos osculadores den dos puntos de la curva separados ΔS

$\Delta\Psi$ será el ángulo formado por $\hat{B}(s)$ y $\hat{B}(s + \Delta S)$, entonces,

$$\tau = \left\| \frac{d\hat{B}}{dS} \right\|$$

mide la desviación de la curva respecto de una curva plana. El radio de la curvatura de torsión es $\rho_t = \frac{1}{\tau}$

A la hora determinar las derivadas de los vectores del triedo veremos que es conveniente sustituir esta definición de torsión por otra con signo.

Comentarios:

- 1) Si la curva es plana $\tau = 0$, $\rho_t = \infty$
- 2) La definición de τ necesita que $\kappa \neq 0$, no puede haber torsión sin curvatura
- 3) Teorema Fundamental de la teoría local de Curvas: dos curvas $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ que tengan en cada punto la misma curvatura y la misma torsión, difieren en un movimiento rígido (traslación + rotación).



1.5. Derivada de los vectores del triedro intrínseco. Fórmulas de Frenet.

Fórmulas de Frenet.

Obtendremos las derivadas respecto del arco de los vectores del triedro intrínseco $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$

Como $\hat{N} = \frac{d\hat{T}/dS}{\left\|d\hat{T}/dS\right\|}$ y $\left\|d\hat{T}/dS\right\| = \kappa$, entonces, $\frac{d\hat{T}}{dS} = \kappa \cdot \hat{N}$

Calculamos ahora $\frac{d\hat{B}}{dS}$. Sabemos que $\left\|\frac{d\hat{B}}{dS}\right\| = \tau \geq 0$

Derivando

$$\left. \begin{aligned} \hat{B} \cdot \hat{B} = 1 &\Rightarrow 0 = 2\hat{B} \cdot \frac{d\hat{B}}{dS} \Rightarrow \frac{d\hat{B}}{dS} \perp \hat{B} \\ \hat{B} \cdot \hat{T} = 0 &\Rightarrow 0 = \frac{d\hat{B}}{dS} \cdot \hat{T} + \hat{B} \cdot \underbrace{\frac{d\hat{T}}{dS}}_{\kappa \hat{N}} \Rightarrow \frac{d\hat{B}}{dS} \perp \hat{T} \end{aligned} \right\} \frac{d\hat{B}}{dS} \parallel \hat{N}$$

y escribiríamos $\frac{d\hat{B}}{dS} = \pm \tau \cdot \hat{N}$. Para fijar el signo de forma general necesitamos modificar la definición de torsión.

Elegimos $\frac{d\hat{B}}{dS} = -\tau \hat{N}$ de manera que $\tau \equiv -\hat{N} \cdot \frac{d\hat{B}}{dS} = \pm \left\|\frac{d\hat{B}}{dS}\right\|$ es la nueva definición de **torsión** (ahora $\tau \geq 0$ ó $\tau \leq 0$ dependiendo del sentido del cambio del vector binormal respecto de la normal principal).

Finalmente, repitiendo el proceso obtenemos $\frac{d\hat{N}}{dS}$:

$$\left. \begin{aligned} \hat{N} \cdot \hat{N} = 1 &\Rightarrow 0 = 2\hat{N} \cdot \frac{d\hat{N}}{dS} \\ \hat{N} \cdot \hat{T} = 0 &\Rightarrow 0 = \frac{d\hat{N}}{dS} \cdot \hat{T} + \hat{N} \cdot \kappa \hat{N} \Rightarrow \frac{d\hat{N}}{dS} \cdot \hat{T} = -\kappa \\ \hat{N} \cdot \hat{B} = 0 &\Rightarrow 0 = \hat{N}' \cdot \hat{B} + \hat{N} \cdot (-\tau \hat{N}) \Rightarrow \hat{N}' \cdot \hat{B} = \tau \end{aligned} \right\} \frac{d\hat{N}}{dS} = -\kappa \hat{T} + \tau \hat{B}$$

Osea,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{T}}{dS} &= \kappa \hat{N} \\ \frac{d\hat{N}}{dS} &= -\kappa \hat{T} + \tau \hat{B} \\ \frac{d\hat{B}}{dS} &= -\tau \hat{N} \end{aligned}$$

son las *Fórmulas de Frenet*.

Podemos escribir las derivadas de la forma $\frac{d\hat{T}}{dS} = \vec{D} \times \hat{T}$, $\frac{d\hat{N}}{dS} = \vec{D} \times \hat{N}$, $\frac{d\hat{B}}{dS} = \vec{D} \times \hat{B}$ y el vector de Darboux \vec{D} que nos da el cambio de orientación del triedro intrínseco por unidad de arco resulta ser

$$\vec{D} = \tau \hat{T} + \kappa \hat{B}$$

Fórmulas de Frenet (de otra forma)

Por $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ es una base ortonormal orientada a derechas sus derivadas se escriben como

$$\begin{pmatrix} \frac{d\hat{T}}{dS} \\ \frac{d\hat{N}}{dS} \\ \frac{d\hat{B}}{dS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$$

Además sabemos que $\kappa = \left\|\frac{d\hat{T}}{dS}\right\|$, $\tau = \left\|\frac{d\hat{B}}{dS}\right\|$ y que $\hat{N} = \frac{d\hat{T}/dS}{\left\|d\hat{T}/dS\right\|}$, entonces $\frac{d\hat{T}}{dS} = \kappa \hat{N}$ de donde $\begin{cases} \Omega_3 = \kappa \\ \Omega_2 = 0 \end{cases}$.

De la definición de torsión sabemos que $-\Omega_1 = \frac{d\hat{B}}{dS} \cdot \hat{N} = -\tau$ con lo que $\Omega_1 = \tau$. Entonces,

$$\begin{pmatrix} \hat{T}' \\ \hat{N}' \\ \hat{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$$

y el vector dual

$$\vec{\Omega} = \tau \hat{T} + 0 \hat{N} + \kappa \hat{B}$$

que en este caso recibe el nombre de vector de Darboux $\vec{D} = \vec{\Omega} = \tau \hat{T} + \kappa \hat{B}$.



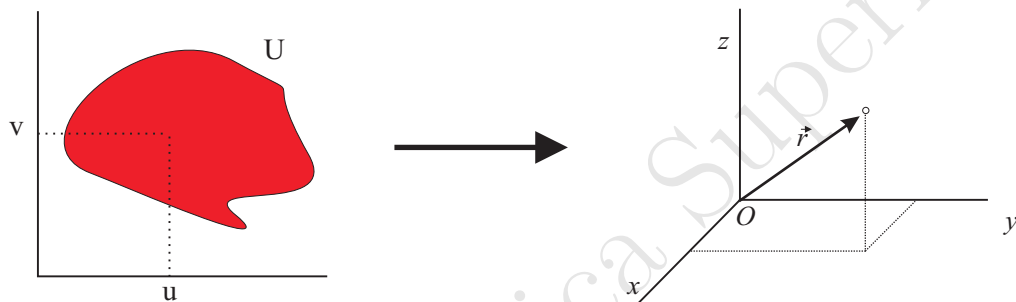
2. Funciones vectoriales de dos variables escalares: Superficies

- 2.1 Función vectorial de dos variables escalares. Superficie indicatriz.
- 2.2 Ecuaciones paramétricas de una superficie. Coordenadas de Gauss.
- 2.3 Tangentes a las líneas coordenadas. Plano tangente. Normal a la superficie.
- 2.4 Curvatura normal y curvatura geodésica.

2.1. Función vectorial de dos variables escalares. Superficie indicatriz.

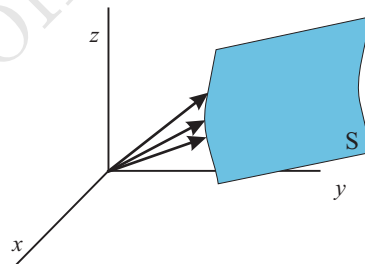
Función vectorial de dos variables escalares:

$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ asocia un vector $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ a cada valor de los parámetros (u, v) contenidos en el dominio $U \subset \mathbb{R}^2$



Superficie Indicatriz:

Lugar geométrico engendrado por los vectores \vec{r} para todos los valores de $(u, v) \in U$ y trasladados a un origen común.



2.2. Ecuaciones paramétricas de una superficie. Coordenadas de Gauss.

Coordenadas de Gauss.

Si la aplicación \vec{r} tiene inversa, a cada punto de la superficie le corresponde un único valor de la pareja (u, v) . Los valores (u, v) determinan de forma unívoca los puntos de la superficie y pueden tomarse como coordenadas, son las *coordenadas de Gauss*.

2.3. Tangentes a las líneas coordenadas. Plano tangente. Normal a la superficie.

Lineas coordenadas.

Son las curvas sobre la superficie en las que una de las coordenadas permanece constante.

Los vectores tangentes a las líneas coordenadas son:

$$v = v_0, \quad \frac{d\vec{r}(u, v_0)}{du} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \equiv \vec{r}_u(u, v)$$

$$u = u_0, \quad \frac{d\vec{r}(u_0, v)}{dv} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \equiv \vec{r}_v(u, v)$$

2.4. Curvatura normal y curvatura geodésica.

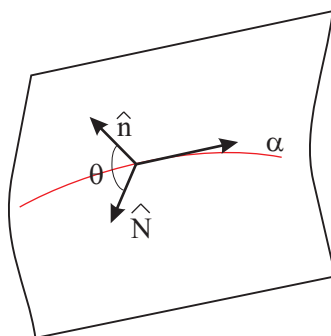
Obtenemos las características geométricas de una superficie (curvaturas) derivando el vector unitario normal $\vec{n} = \vec{n}(u, v)$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \text{ es perpendicular al plano tangente}$$

Como \vec{n} es unitario $d\vec{n} \perp \vec{n} \Rightarrow d\vec{n}$ pertenece al plano tangente.

Sea α una curva contenida en la superficie

$$\vec{\alpha} = \vec{r}[\vec{\beta}(t)] = \vec{\alpha}(t)$$



Supongamos que $\vec{\alpha}$ esta parametrizada por la longitud de arco: $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ Derivando,

$$\vec{\alpha}' = \frac{d\vec{\alpha}}{ds} = \hat{T}$$

$$\vec{\alpha}'' = \frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa \hat{N}$$

Curvatura normal de la curva α em el punto P :

$$\kappa_n = \vec{\alpha}'' \cdot \vec{n} = \kappa \underbrace{\hat{N} \cdot \vec{n}}_{\cos \theta} = \kappa \cdot \cos \theta$$

Siendo θ el ángulo formado por \hat{N} y \vec{n}

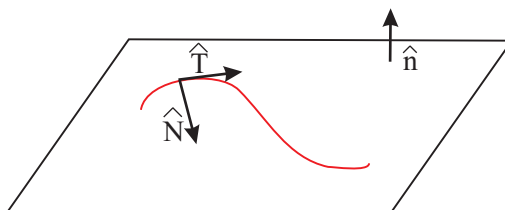
Curvatura geodésica

$$\kappa_g = |\vec{\alpha}'' \cdot \vec{n}| = \kappa \cdot \sin \theta$$

Ejemplos.

Si la superficie es un *plano*

$$\hat{n} \perp \hat{N}, \hat{T} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_n = 0 \\ \kappa_g = \kappa \end{cases}$$



Los círculos máximos sobre una *esfera*

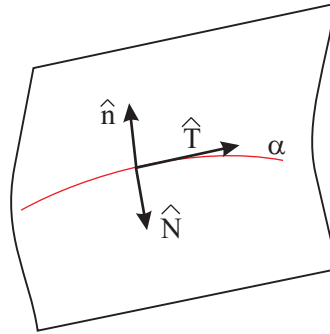
$$\hat{n} \parallel \hat{N} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_n = \frac{1}{R} \\ \kappa_g = 0 \end{cases}$$

La curvatura normal es una característica de la superficie. Para que quede más claro demostraremos el siguiente teorema:



Proposición: Todas las curvas contenidas en una superficie y que tienen en un punto P la *misma tangente*, tienen en ese punto la *misma curvatura normal*.

Dem. Sea α una curva cualquiera



$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s) = \vec{r}(u(s), v(s))$$

$$\vec{\alpha}' = \hat{T} \perp \hat{n}$$

$$\vec{\alpha}' \cdot \vec{n} = 0$$

Derivando,

$$\vec{\alpha}'' \cdot \vec{n} + \vec{\alpha}' \cdot \vec{n}' = 0 \Rightarrow \kappa_n = \vec{\alpha}'' \cdot \vec{n} = -\vec{\alpha}' \cdot \vec{n}'$$

$$\vec{\alpha}' = \frac{d\vec{\alpha}}{dS} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{du}{dS} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \frac{dv}{dS} = \vec{r}_u \frac{du}{dS} + \vec{r}_v \frac{dv}{dS}$$

$$\vec{n}' = \frac{d\vec{n}}{dS} = \frac{d\vec{n}(u,v)}{dS} = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u} \frac{du}{dS} + \frac{\partial \vec{n}}{\partial v} \frac{dv}{dS} = \vec{n}_u \frac{du}{dS} + \vec{n}_v \frac{dv}{dS}$$

$$\kappa_n = -\vec{\alpha}' \cdot \vec{n}' = -\vec{n}_u \vec{r}_u \left(\frac{du}{dS} \right)^2 - (\vec{n}_u \vec{r}_v + \vec{n}_v \vec{r}_u) \left(\frac{du}{dS} \right) \left(\frac{dv}{dS} \right) - \vec{n}_v \vec{r}_v \left(\frac{dv}{dS} \right)^2$$

Igual que antes:

$$\vec{r}_u \cdot \vec{n} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} u \Rightarrow \vec{r}_{uu} \vec{n} + \vec{r}_u \vec{n}_u = 0 \\ v \Rightarrow \vec{r}_{uv} \vec{n} + \vec{r}_u \vec{n}_v = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{r}_v \cdot \vec{n} = 0 \quad \left| \begin{array}{l} u \Rightarrow \vec{r}_{vu} \vec{n} + \vec{r}_v \vec{n}_u = 0 \\ v \Rightarrow \vec{r}_{vv} \vec{n} + \vec{r}_v \vec{n}_v = 0 \end{array} \right.$$

Entonces, definimos:

$$\begin{aligned} e &= -\vec{n}_u \cdot \vec{r}_u = \vec{n} \cdot \vec{r}_{uu} = e(u, v) \\ f &= -\vec{n}_u \cdot \vec{r}_v = \vec{r}_v \cdot \vec{n} = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = -\vec{n}_v \cdot \vec{r}_u = f(u, v) \\ g &= -\vec{n}_v \cdot \vec{r}_v = \vec{n} \cdot \vec{r}_{vv} = g(u, v) \end{aligned}$$

$$\kappa_n = e \left(\frac{du}{dS} \right)^2 + 2f \left(\frac{du}{dS} \right) \left(\frac{dv}{dS} \right) + g \left(\frac{dv}{dS} \right)^2$$

sólo depende de la tangente

$$\hat{T} = \frac{du}{dS} \vec{r}_u + \frac{dv}{dS} \vec{r}_v$$

$$\kappa_n = \frac{e(du)^2 + 2f(du)(dv) + g(dv)^2}{(dS)^2} = \frac{\theta(du)^2 + 2F(du)(dv) + G(dv)^2}{E(du)^2 + 2F(du)(dv) + G(dv)^2}$$

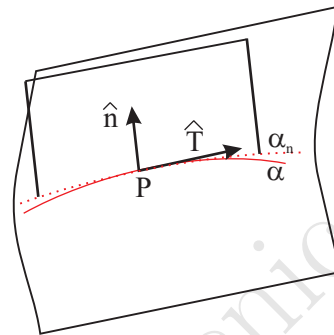
κ_n es el cociente de 2 formas cuadráticas

Segunda forma cuadrática fundamental: asocia a una dirección en el plano tangente $d\vec{\alpha} = (du, dv)$ el escalar:

$$II(d\vec{\alpha}) = -d\vec{n} \cdot d\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

$$\kappa_n(d\vec{\alpha}) = \frac{II(d\vec{\alpha})}{I(d\vec{\alpha})} = \frac{\begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}}$$

Sección Normal a la curva α en el punto P , es la intersección de la superficie con el plano definido por la tangente a α en P y la normal a la superficie en P



$\vec{\alpha}'_n = \hat{T} = \vec{\alpha}'$ tiene la misma tangente.

La sección normal es una curva plana \Rightarrow

$$\vec{\alpha}''_n \parallel \vec{n} \Rightarrow \kappa_n(\hat{T}) = \kappa_n(\vec{\alpha}_n) = \kappa(\vec{\alpha}_n)$$

La *curvatura normal en la dirección \hat{T}* coincide con la *curvatura de la sección normal*.

Teorema de Meusnier. El centro de curvatura de $\vec{\alpha}$ se obtiene proyectando sobre \hat{N} el centro de curvatura de la sección normal.

$$\kappa_n(\vec{\alpha}) = \kappa(\vec{\alpha}) \cdot \cos \theta = \kappa(\vec{\alpha}_n)$$

$$\frac{1}{\kappa(\vec{\alpha})} = \frac{1}{\kappa(\vec{\alpha}_n)} \cdot \cos \theta$$

Direcciones principales.

Puede demostrarse que en cada punto de una superficie existe una base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ del plano tangente tal que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{n}}{dS}(\vec{e}_1) &= -\kappa_1 \vec{e}_1 \\ \frac{d\vec{n}}{dS}(\vec{e}_2) &= -\kappa_2 \vec{e}_2 \end{aligned}$$

con $\kappa_1 \geq \kappa_2$

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ se llaman direcciones principales y κ_1, κ_2 curvaturas principales. Además, se verifica que $\kappa_1 = \max(\kappa_n)$ y $\kappa_2 = \min(\kappa_n)$

Curvatura Gaussiana.

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$$



Curvatura Media.

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

Coincide con el valor promedio de κ_n

Conocidas H y K ,

$$\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

Puede demostrarse que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)}$$

Línea de curvatura: Curva de la superficie que es siempre paralela a una dirección principal.

$\vec{\alpha}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ línea de curvatura \Leftrightarrow

$$\frac{d\vec{n}}{dt} \parallel \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (dv)^2 & -dudv & (du)^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

Línea asintótica: Curva de la superficie con $\kappa_n = 0$

línea asintótica $\Leftrightarrow e + 2f \left(\frac{dv}{du}\right) + g \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$ (sólo existen en puntos hiperbólicos \rightarrow asíntotas de las hipérbolas)

Línea geodésica: Curva de la superficie en la que $\kappa_g = 0$

$$\kappa_g = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{N}$$

Puede demostrarse que las geodésicas minimizan el arco sobre la superficie (hilo tenso apoyado sobre la superficie).

Ejemplos:

1) Plano

$$\hat{n} \perp \hat{N} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_n = 0 \\ \kappa_g = \kappa \end{cases} \Rightarrow \text{superficies incurvatura}$$

$\kappa_1 = \kappa_2 = 0 = H = K$ sin curvatura

Todas las direcciones son principales \Rightarrow todas las curvas son líneas de curvatura y todas son líneas asintóticas.

Las geodésicas tienen que tener $\kappa = 0 \Rightarrow$ Rectas

2) Esfera

$$\vec{n} \parallel \vec{r} \Rightarrow \frac{d\vec{n}}{dS} \parallel \frac{d\vec{r}}{dS} \Rightarrow \text{todas las direcciones son principales} \Rightarrow \kappa_1 = \kappa_2$$

Además

$$\kappa_n = -\frac{d\vec{n}}{dS} \cdot \frac{d\vec{r}}{dS} = \left| \frac{d\vec{n}}{dS} \right|$$

$$\left. \begin{array}{l} |d\vec{n}| = 1 \cdot d\varphi \\ dS = R \cdot d\varphi \end{array} \right\} \kappa_n = \frac{1}{R} = \kappa_1 = \kappa_2$$

La curvatura es siempre la misma $\kappa = \frac{1}{R}$

Todas las curvas son líneas de curvatura.

Las geodésicas son los círculos máximos $\hat{N} \parallel \vec{r} \parallel \hat{n}$

No existen líneas asintóticas.



3) Punto de silla

$$\kappa_1 \cdot \kappa_2 \leq 0 \Leftrightarrow eg - f^2 \leq 0$$

Escuela Politécnica Superior



3. Álgebra Tensorial

- 3.1 Cambio de referencia ortonormal. Transformación de las componentes de un vector.
- 3.2 Forma matricial de una rotación.
- 3.3 Definición analítica de tensores y seudotensores cartesianos de orden n . Propiedades.
- 3.4 Invariantes tensoriales.

3.1. Cambio de referencia ortonormal. Transformación de las componentes de un vector.

Cambio de referencia ortonormal.

Consideraremos un sistema de referencia $Ox_1x_2x_3$ con una base ortonormal orientada a derechas $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Si mediante una rotación cambiamos la orientación de los ejes y llamamos $Ox'_1x'_2x'_3$ y $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ al nuevo sistema y a la nueva base.

Nos interesa la relación entre las componentes de un vector cualquiera \vec{v} en los dos sistemas:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{e}_i = \sum_i v'_i \hat{e}'_i$$

Para ello proyectaremos los vectores \hat{e}'_i en la base \hat{e}_i :

$$\hat{e}'_i = \underbrace{(\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_1)}_{a_{i1}} \hat{e}_1 + \underbrace{(\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_2)}_{a_{i2}} \hat{e}_2 + \underbrace{(\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_3)}_{a_{i3}} \hat{e}_3 = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \hat{e}_j$$

O bien, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \hat{e}'_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix}$$

A es la *matriz de transformación*.

Para un vector \vec{v} cualquiera, $v'_i = \vec{v} \cdot \hat{e}'_i = v_1 \cdot a_{i1} + v_2 \cdot a_{i2} + v_3 \cdot a_{i3}$

$$v'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} v_j$$

O bien,

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

La matriz de rotación tiene una propiedad muy importante: $A^{-1} = A^t$. Veámoslo. Para obtener la matriz de la transformación inversa A^{-1} proyectamos \hat{e}_i en la base $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$

$$\hat{e}_i = \underbrace{(\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_1)}_{a_{i1}} \hat{e}'_1 + \underbrace{(\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_2)}_{a_{i2}} \hat{e}'_2 + \underbrace{(\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_3)}_{a_{i3}} \hat{e}'_3 = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \hat{e}'_j$$

O sea,

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \hat{e}'_3 \end{pmatrix}$$

y vemos que $A^{-1} = A^t$ la inversa es la traspuesta. Esta propiedad suele escribirse de otra forma sin más que multiplicar por A a derecha y a izquierda:

$$AA^t = A^tA = 1$$

La matriz de transformación es *ORTOGONAL*.

Puede expresarse con las componentes, $\sum_k a_{ik}a_{jk} = \sum_k a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}$

Vemos que Rotación $\Rightarrow A$ ortogonal, nos preguntamos si el recíproco es también cierto.

Primero veremos que $\det(A) = \pm 1$

No hay más que tomar determinantes en $A \cdot A^t = 1$

$$\det(A \cdot A^t) = \det(A) \cdot \det(A^t) = [\det(A)]^2 = \det(1) = 1$$

- Las matrices ortogonales con $\det(A) = +1$ corresponden a una *Rotación*.
- Si $\det(A) = -1$ corresponden a una *Rotación + Inversión de ejes*.

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{e}'_1 = \hat{e}_1 \\ \hat{e}'_2 = \hat{e}_2 \\ \hat{e}'_3 = \hat{e}_3 \end{array} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = -1$ no es una *Rotación*.

3.2. Forma matricial de una rotación.

Obtendremos la forma matricial de una rotación de ángulo Φ alrededor de un eje que pasa por el origen y es paralelo al vector unitario \hat{n} ,

La matriz la obtendremos aplicando la rotación en sentido opuesto a un vector genérico \vec{r} de coordenadas (x, y, z) . Así si la rotación de los ejes es en sentido antihorario aplicamos la misma rotación al vector \vec{r} pero en sentido horario para pasar del vector $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ al vector $\vec{r}' = \overrightarrow{OQ}$

Podemos descomponer el vector \overrightarrow{OQ} en la siguiente manera:

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ}$$

Dónde:

\overrightarrow{ON} es la proyección de \overrightarrow{OP} sobre la normal, $\overrightarrow{ON} = \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r})$

\overrightarrow{NV} es paralelo a $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}$ y su módulo es $|\overrightarrow{NV}| = R \cos \Phi$, donde $R = |\overrightarrow{NP}| = |\hat{n} \times \vec{r}|$ es el radio de la circunferencia.

$\overrightarrow{NV} = (\vec{r} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r})) \cos \Phi$ y finalmente $\overrightarrow{VQ} \parallel \hat{n} \times \vec{r}$ con módulo $|\overrightarrow{VQ}| = R \sin \Phi$ por lo que $\overrightarrow{VQ} = (\hat{n} \times \vec{r}) \sin \Phi$

Uniando todos los términos:

$$\vec{r}' = \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r}) + [\vec{r} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r})] \cos \Phi + (\hat{n} \times \vec{r}) \sin \Phi$$

Y reagrupando:

$$\vec{r}' = \vec{r} \cos \Phi + \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r})(1 - \cos \Phi) + (\vec{r} \times \hat{n}) \sin \Phi$$

Que se conoce por *fórmula de rotación*.

La relación entre las componentes de \vec{r}' y \vec{r} es la matriz de rotación buscada,

$$R(\Phi, \hat{n}) = \cos \Phi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \Phi) \begin{pmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{pmatrix} + \sin \Phi \begin{pmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{pmatrix}$$



3.3. Definición analítica de tensores y pseudotensores cartesianos de orden n . Propiedades.

Definición analítica de tensor de orden n .

3^n cantidades de $T_{i_1 \dots i_n}$ son las componentes de un tensor de orden n . Si en un cambio *ortogonal* de coordenadas se transforman como:

$$T'_{i_1 \dots i_n} = \sum_{j_1=1}^3 a_{i_1 j_1} \dots \sum_{j_n=1}^3 a_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}$$

Si $n = 0$, tenemos 1 cantidad que no cambia \Rightarrow escalar, invariante

Si $n = 1$, tenemos 3 cantidades v_i , $i = 1, 2, 3$ que cambian como $v'_i = \sum_j a_{ij} v_j \Rightarrow$ vector

Si $n = 2$, tenemos 9 cantidades T_{ij} con $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3$

$$T'_{ij} = \sum_k a_{ik} \sum_l a_{jl} T_{kl} = \sum_k \sum_l a_{ik} T_{kl} a_{lj}$$

Osea,

$$\begin{pmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

No todas las magnitudes mecánicas cumplen la definición de tensor dada arriba.

Pseudotensores de orden n .

$$T'_{i_1 \dots i_n} = \det(A) \cdot \sum_{j_1} \dots \sum_{j_n} a_{j_1 i_1} \dots a_{j_n i_n} T_{j_1 \dots j_n}$$

Si la transformación es una *rotación*, las dos definiciones coinciden.

Si la transformación lleva una *inversión de ejes* $\det(A) = -1$ y aparece un signo menos.

Ejemplo: Si \vec{A} y \vec{B} son vectores, $\vec{A} \times \vec{B}$ es pseudovector. La velocidad de rotación es un pseudovector.

Propiedades.

- 1) Si T y S son dos tensores de orden n , la *suma* de sus componentes es un nuevo tensor de orden n .
- 2) Si T es un tensor de orden n u λ un escalar, el *producto* de cada componente por el escalar da lugar a otro tensor de orden n .

- 3) Si $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ son vectores, entonces:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_j A_j B_j \text{ es un } \textit{escalar o invariante}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1 - A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1) \text{ es un } \textit{pseudovector}$$

$$\left(\vec{A}, \vec{B} \right)_{ij} = A_i \cdot B_j \text{ es un } \textit{tensor de orden 2}$$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{C} \text{ es un } \textit{pseudoescalar}$$

- 4) Si T_{ij} es un tensor de orden 2 y A_i un vector, entonces $\sum_j T_{ij} A_j$ es un vector.

- 5) Si T_{ij} es un tensor de orden 2, tanto el determinante $|T_{ij}|$, como la traza $\sum_j T_{ij}$ son *invariantes*

Ejemplo: $\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{dS}$ y $\vec{N} = \frac{d\vec{T}/dS}{|d\vec{T}/dS|}$ son vectores, $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ es pseudovector, $\kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{dS} \right|$ es escalar, $\tau = -\vec{N} \cdot \frac{d\vec{B}}{dS}$ es pseudoescalar, $\vec{D} = \kappa \cdot \vec{B} + \tau \cdot \vec{T}$ es pseudovector, $\frac{d\vec{T}}{dS} = \vec{D} \times \vec{T}$ es vector.

Nota: Para no tener problemas con los pseudotensores es conveniente utilizar siempre sistemas de referencia de la misma orientación (a derechas) de manera que la matriz de transformación tenga siempre determinante = ± 1 .

Escuela Politécnica Superior



4. Geometría de masas

- 4.1 Determinación del centro de masas.
- 4.2 Determinación de momentos y productos de inercia.
- 4.3 Tensor de inercia. Propiedades. Expresión matricial de las fórmulas de Steiner.
- 4.4 Ejes principales de inercia. Diagonalización del tensor de inercia.
- 4.5 Elipsoide de inercia.

En este tema determinaremos las magnitudes que caracterizan la dinámica de un sistema de masa distribuida: la posición del centro de masas y su tensor de inercia.

Consideraremos dos tipos de sistemas:

Sistema discreto: formado por una colección de masas puntuales. Viene especificado por las masas y sus posiciones $\{(m_\alpha, \vec{r}_\alpha); \alpha = 1, 2, \dots\}$.

Sistema continuo: viene especificado por una función escalar llamada *densidad* que es cociente entre la masa y el elemento de volumen/área/longitud. Así tenemos:

| Cuerpo | Elemento de masa | densidad | dimensiones |
|-------------|-------------------|--|------------------------------|
| Volumen: | $dm = \rho dV$ | $\rho = \rho(\vec{r}) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ | $[\rho] = \text{ML}^{-3}$ |
| Superficie: | $dm = \sigma dA$ | $\sigma = \sigma(\vec{r}) = \lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta A}$ | $[\sigma] = \text{ML}^{-2}$ |
| Curva: | $dm = \lambda dS$ | $\lambda = \lambda(\vec{r}) = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S}$ | $[\lambda] = \text{ML}^{-1}$ |

Por comodidad escribiremos todas las expresiones para un sistema discreto. Esas expresiones son aplicables a un sistema continuo sin más que sustituir las masas puntuales por el elemento de masa y las sumas por integrales:

$$\begin{aligned} \vec{r}_\alpha &\Rightarrow \vec{r} \\ m_\alpha &\Rightarrow dm = \rho(\vec{r}) dV = \sigma(\vec{r}) dA = \lambda(\vec{r}) dS \\ \sum_\alpha &\Rightarrow \iiint_V \rho dV = \iint_S \sigma dA = \int_C \lambda dS \end{aligned}$$

4.1. Determinación del centro de masas.

El centro de masas G es el punto del espacio cuyo vector de posición es:

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\sum_\alpha m_\alpha} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{\mu}$$

de acuerdo con esta definición, sería el promedio de los vectores de posición de las partículas pesadas con sus masas.

Propiedades

1) Para un sistema continuo tendríamos:

$$\vec{r}_G = \frac{\int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV}{\int_V \rho(\vec{r}) dV} \quad ; \quad \vec{r}_G = \frac{\int_A \vec{r} \sigma(\vec{r}) dA}{\int_V \sigma(\vec{r}) dA} \quad ; \quad \vec{r}_G = \frac{\int_C \vec{r} \gamma(\vec{r}) dS}{\int_V \gamma(\vec{r}) dS}$$

2) Para un sistema homogéneo el centro de masas coincide con el centro geométrico

3) Para un sistema compuesto por $k = 1, \dots, N$ subsistemas:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{\mu} \sum_k \mu_k \vec{r}_G(k)$$

donde $\mu = \sum_{k=1}^N \mu_k$ y $\vec{r}_G(k) = \frac{1}{\mu_k} \sum_{\alpha_k} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$.

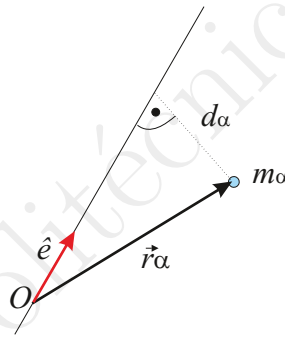
Estas expresiones sirven también para huecos sin más que hacer las masas correspondientes negativas.

4) La distribución de momentos generado por la fuerza gravitatoria distribuida sobre los elementos de masa de un sistema es equivalente a su resultante, el peso, colocada en el centro de masas.

4.2. Determinación de momentos y productos de inercia.

Se define el **momento de inercia respecto de un eje e** como la suma del producto de las masas por su distancia al eje al cuadrado, $I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$. Sus dimensiones son ML^2 . A partir del momento de inercia

puede definirse también el radio de giro para el eje e como $R_e = \sqrt{\frac{I_e}{\mu}}$ con dimensiones de longitud.



Si se toma el origen O en algún punto del eje e , la distancia de cada partícula al eje sería $d_{\alpha} = |\vec{r}_{\alpha} \times \hat{e}|$ y podría escribirse

$$I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \hat{e})^2 = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha}^2 \hat{e}^2 - (\vec{r}_{\alpha} \cdot \hat{e})^2] \quad (4.1)$$

En una base cartesiana, $\hat{e}(e_x, e_y, e_z)$ y $\vec{r}_{\alpha}(x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha})$ el momento de inercia queda

$$I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [e_x^2 (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) + e_y^2 (x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) + e_z^2 (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2)] - \sum_{\alpha} m_{\alpha} [2e_x e_y x_{\alpha} y_{\alpha} + 2e_x e_z x_{\alpha} z_{\alpha} + 2e_y e_z y_{\alpha} z_{\alpha}]$$

y escrito en forma matricial :

$$I_e = (e_x \quad e_y \quad e_z) \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal de la matriz son los *momentos de inercia* para los ejes cartesianos:

$$I_x = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2)$$

$$I_y = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (z_{\alpha}^2 + x_{\alpha}^2)$$

$$I_z = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2)$$

Los elementos de fuera de la diagonal cambiados de signo se conocen como *productos de inercia* y son el producto de la masa por la distancia a dos de los planos cartesianos:

$$\begin{aligned} P_{xy} = P_{yx} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha} y_{\alpha}) \\ P_{xz} = P_{zx} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha} z_{\alpha}) \\ P_{yz} = P_{zy} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (y_{\alpha} z_{\alpha}) \end{aligned}$$

4.3. Tensor de inercia. Propiedades. Expresión matricial de las fórmulas de Steiner.

La ecuación 4.1 puede desarrollarse en la forma siguiente,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\alpha} \cdot \hat{e} &= \sum_i r_{\alpha i} e_i \\ (\vec{r}_{\alpha} \cdot \hat{e})^2 &= \left(\sum_i r_{\alpha i} e_i \right) \left(\sum_j r_{\alpha j} e_j \right) = \sum_i \sum_j r_{\alpha i} r_{\alpha j} e_i e_j \\ \hat{e}^2 &= \sum_i e_i e_j = \sum_i \sum_j \delta_{ij} e_i e_j \end{aligned}$$

donde δ_{ij} es 1 si $i = j$ y 0 en otro caso. Separando todo aquello que depende del eje e , tenemos:

$$I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left\{ \vec{r}_{\alpha}^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{ij} e_i e_j \right) - \left(\sum_i \sum_j r_{\alpha i} r_{\alpha j} \right) e_i e_j \right\}$$

que escrito en forma más compacta queda:

$$I_e = \sum_i \sum_j I_{ij} e_i e_j$$

donde las I_{ij} son las 9 componentes cartesianas de un tensor de 2º orden, denominado **tensor de inercia**:

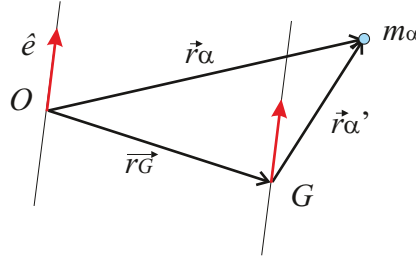
$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^2 \delta_{ij} - r_{\alpha i} r_{\alpha j})$$

Propiedades

- 1) Los valores de las componentes del tensor de inercia dependen de la posición del origen de coordenadas o y de la orientación de los ejes.
- 2) El tensor de inercia es un tensor simétrico: Se cumple que $I_{ij} = I_{ji}$.
- 3) Las componentes de la diagonal son los momentos de inercia: $I_{xx} = I_x$, $I_{yy} = I_y$, $I_{zz} = I_z$ y son siempre positivas.
- 4) Las de fuera de la diagonal los productos de inercia cambiados de signo: $I_{xy} = I_{yx} = -P_{xy}$, $I_{xz} = I_{zx} = -P_{xz}$, $I_{yz} = I_{zy} = -P_{yz}$. Pueden ser positivas o negativas.
- 5) Todas tienen las dimensiones ML^2 .

Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

Las componentes del tensor de inercia dependen del punto O elegido como origen. El teorema de Steiner nos da la relación entre estas componentes respecto de dos ejes paralelos, uno que pasa por el punto O y otro que pasa por el centro de masas G .



En un sistema de partículas, $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_G + \vec{r}'_\alpha$ y el tensor de inercia en O puede escribirse:

$$\begin{aligned} I_{ij}^O &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^2 \delta_{ij} - r_{\alpha i} r_{\alpha j}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\vec{r}_G + \vec{r}'_{\alpha})^2 \delta_{ij} - (r_{Gi} + r'_{\alpha i})(r_{Gj} + r'_{\alpha j}) \right] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\vec{r}_G^2 + \vec{r}'_{\alpha}{}^2 + 2\vec{r}_G \vec{r}'_{\alpha}) \delta_{ij} - (r_{Gi} r_{Gj} + r'_{\alpha i} r'_{\alpha j} + r_{Gi} r'_{\alpha j} + r_{Gj} r'_{\alpha i}) \right] \\ &= \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) (\vec{r}_G^2 \delta_{ij} - r_{Gi} r_{Gj}) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\vec{r}'_{\alpha}{}^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j} \right] + 2\vec{r}_G \delta_{ij} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} - r_{Gi} \sum_{\alpha} m_{\alpha} r'_{\alpha j} - r_{Gj} \sum_{\alpha} m_{\alpha} r'_{\alpha i} \end{aligned}$$

Dado que $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} - \mu \vec{r}_G = 0$, por definición de G , las componentes del tensor de inercia cambian según:

$$I_{ij}^O = I_{ij}^G + \mu (\vec{r}_G^2 \delta_{ij} - r_{Gi} r_{Gj})$$

es decir, tensor de inercia en O es el tensor de inercia en G más el tensor de inercia que tendría en O la masa total del sistema situada en G .

- Para los momentos de inercia se tiene:

$$I_x^O = I_{xx}^O = I_{xx}^G + \mu (y_G^2 + z_G^2) = I_x^G + \mu \cdot d^2$$

siendo d la distancia entre los ejes. Nótese que d en general no coincide con la distancia entre los puntos O y G . Además, como $d^2 > 0$, salvo que los ejes coincidan, $I_O > I_G$ y como consecuencia, para una dirección fija \hat{u} , el valor mínimo del momento de inercia se obtiene cuando el eje pasa por el centro de masas.

- Análogamente para los productos de inercia:

$$P_{xy}^O = -I_{xy}^O = -[I_{xy}^G + \mu (-x_G \cdot y_G)] = P_{xy}^G + \mu x_G \cdot y_G$$

4.4. Ejes principales de inercia. Diagonalización del tensor de inercia.

Para un origen O dado, las componentes del tensor de inercia dependen de la orientación del sistema de referencia. Puede demostrarse que mediante una rotación siempre es posible encontrar una orientación de la base en la que el tensor sea diagonal. El cambio en las componentes del tensor de inercia vendrá dado por la matriz de la transformación A , de la forma $I' = A I A^t$, o bien $I'_{ij} = \sum_k \sum_l a_{ik} a_{jl} I_{kl}$. De manera que si A es la matriz de rotación que diagonaliza al tensor

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

tenemos:

$$I' = AIA^t = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Los tres vectores $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ definen 3 direcciones ortogonales que se llaman **direcciones principales** de inercia. Los momentos de inercia según esas direcciones, (I_1, I_2, I_3) , se llaman **momentos principales** de inercia. Puede demostrarse que por ser el tensor de inercia simétrico, los tres momentos principales son reales.

Invariantes del tensor de inercia Todo tensor de 2º orden tiene dos invariantes (no dependen de la orientación del sistema de referencia):

- Determinante: $|I_{ij}| = I_1 \cdot I_2 \cdot I_3$

- Traza: $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = I_1 + I_2 + I_3$

Nótese que $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) + (x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) + (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2)] = 2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 = 2I_O$, es decir:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 2I_O$$

siendo I_O el momento de inercia respecto del punto O.

4.5. Elipsoide de inercia.

Se define como el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ cuya distancia al origen O es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del momento de inercia para la dirección \overrightarrow{OP} , es decir,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{cte}{\sqrt{I_e}} \cdot \hat{e}$$

Haciendo $(\overrightarrow{OP})^2 \cdot I_e = cte$ vemos que estos puntos están sobre una superficie cuádrica dada por la ecuación:

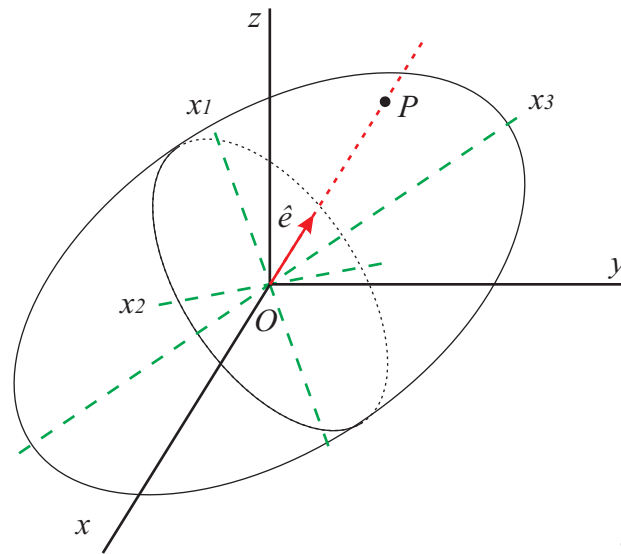
$$I_{xx} \cdot x^2 + I_{yy} \cdot y^2 + I_{zz} \cdot z^2 + 2[I_{xy} \cdot xy + I_{xz} \cdot xz + I_{yz} \cdot yz] = cte^2$$

Como I_e está acotado, $|\overrightarrow{OP}|$ también lo estará y por lo tanto la superficie corresponderá a un elipsoide, denominado **elipsoide de inercia**. Los ejes de este elipsoide serán las direcciones principales de inercia y por tanto los semiejes del elipsoide serán inversamente proporcionales a las raíces de los momentos principales de inercia. La ecuación del elipsoide referido a los ejes principales queda

$$I_1 \cdot x_1^2 + I_2 \cdot x_2^2 + I_3 \cdot x_3^2 = cte^2$$

o bien

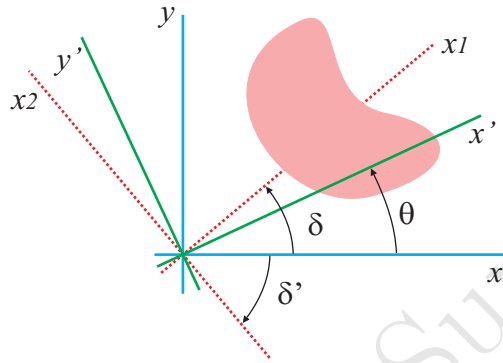
$$\left(\frac{x_1}{cte/\sqrt{I_1}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{cte/\sqrt{I_2}}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{cte/\sqrt{I_3}}\right)^2 = 1$$



Escuela Politécnica Superior

Círculo de Mohr

El círculo de Mohr es una construcción gráfica que representa el cambio de las componentes cartesianas de un tensor simétrico de segundo orden en dos dimensiones. Este tensor se puede reducir a un tensor diagonal invariante y a un tensor simétrico de traza nula cuyas componentes varían de forma similar a la de un vector y es esa transformación la que se representa en el Círculo de Mohr.



Cambio de las componentes en una rotación

En dos dimensiones, para una rotación de ángulo θ , la matriz de transformación es

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Esta matriz de transformación permite relacionar las componentes del tensor de inercia antes y después de la rotación mediante $\mathbf{I}' = \mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{A}^t$, es decir,

$$\begin{pmatrix} I_{x'} & -P_{x'y'} \\ -P_{x'y'} & I_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

de donde se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2P_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ I_{y'} &= I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2P_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ P_{x'y'} &= (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + P_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Invariantes

Con las componentes del tensor de inercia se pueden formar los siguientes invariantes:

- La traza del tensor de inercia es un invariante y coincide con el momento de inercia respecto del origen (momento polar):

$$\text{traza} = I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'} = \int (x^2 + y^2) dm = I_O$$

- El determinante es un invariante:

$$\det = I_x I_y - P_{xy}^2 = I_{x'} I_{y'} - P_{x'y'}^2$$

- Con los dos invariantes anteriores se puede formar el siguiente invariante:

$$\text{traza}^2 - 4 \det = (I_x - I_y)^2 + 4P_{xy}^2$$

Tensor de traza nula

Dado que la traza no se transforma con el tensor se puede separar la parte invariante del tensor de inercia restando la traza en la diagonal:

$$\begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} = \frac{I_x + I_y}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{I_x - I_y}{2} & -P_{xy} \\ -P_{xy} & -\frac{I_x - I_y}{2} \end{pmatrix}$$

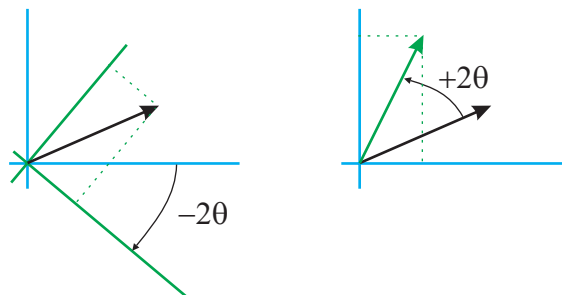
El segundo tensor es un tensor simétrico de traza nula. Las 2 componentes de este tensor transforman según la ley:

$$\begin{cases} \frac{I_{x'} - I_{y'}}{2} = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) \cos 2\theta - P_{xy} \sin 2\theta \\ P_{x'y'} = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) \sin 2\theta + P_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

que escritas en forma matricial toman la forma

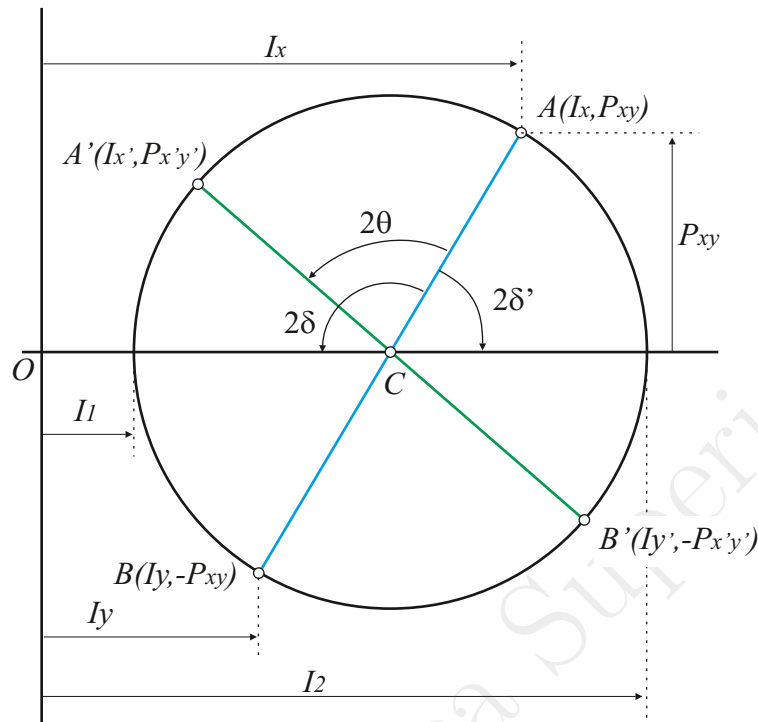
$$\begin{pmatrix} \frac{I_{x'} - I_{y'}}{2} \\ P_{x'y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{I_x - I_y}{2} \\ P_{xy} \end{pmatrix}$$

que coincide con la transformación de las componentes de un vector en una rotación de ángulo -2θ . Nótese que un giro de ángulo -2θ de los ejes coordenados es equivalente a un giro en sentido opuesto $+2\theta$ del vector.



Construcción del Círculo de Mohr

Sobre un plano coordenado se sitúan los puntos $A(I_x, P_{xy})$ y $B(I_y, -P_{xy})$ y su punto medio $C\left(\frac{1}{2}(I_x + I_y), 0\right)$. Con centro en C se traza la circunferencia que pasa por A y B .



Propiedades:

- La posición del centro de la circunferencia es un invariante y no depende de la orientación de los ejes:

$$\overline{OC} = \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{\text{traza}}{2}$$

- El radio de la circunferencia es un invariante:

$$R = \overline{CA} = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + P_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\text{traza}}{2}\right)^2 - \det}$$

- El vector \overrightarrow{CA} tiene las componentes del tensor de traza nula y por tanto en una rotación de ejes de ángulo θ las nuevas componentes del tensor de inercia corresponden a los puntos A' y B' del círculo que se obtiene girando el diámetro AB el ángulo 2θ .
- Los momento de inercia principales se obtiene cuando el diámetro coincide con el eje de abscisas, así,

$$I_{1,2} = \overline{OC} \pm R = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + P_{xy}^2} = \left(\frac{\text{traza}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\text{traza}}{2}\right)^2 - \det}$$

- Los ángulos δ y δ' que definen las direcciones principales se obtienen también de la figura puesto que son la mitad de los ángulos que forma el diámetro AB con el eje de abscisas. Estos dos ángulos cumplen,

$$\tan 2\delta = \tan 2\delta' = \frac{-2P_{xy}}{I_x - I_y}$$

y por tanto $2\delta = 2\delta' \pm \pi$.

Determinación de centros de masa y tensores de inercia

Para cuerpos homogéneos el centro de masas coincide con el centro geométrico. Si además los cuerpos presentan alguna simetría es posible reducir el cálculo de las propiedades de inercia teniendo en cuenta esas propiedades.

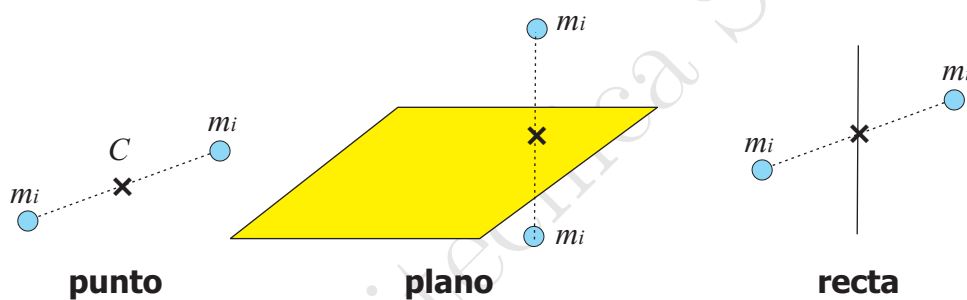
Aplicación de las Simetrías a la determinación del centro de masas. Teoremas de Pappus-Guldin.

Las simetrías simplifican enormemente la determinación del centro de masas de una distribución.

Simetría respecto de un punto C , G coincide con C .

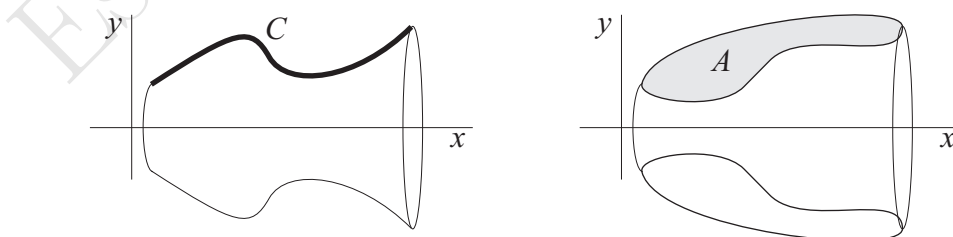
Simetría respecto de un plano, G se encuentra en el plano y coincide con el de la distribución proyectada.

Simetría respecto de una recta, G se encuentra en la recta y coincide con el de la distribución proyectada.



Teoremas de Pappus-Guldin: sirven para determinar la posición del centro de una curva/superficie cuando se conoce el área/volumen engendrado al realizar una revolución completa alrededor de un eje

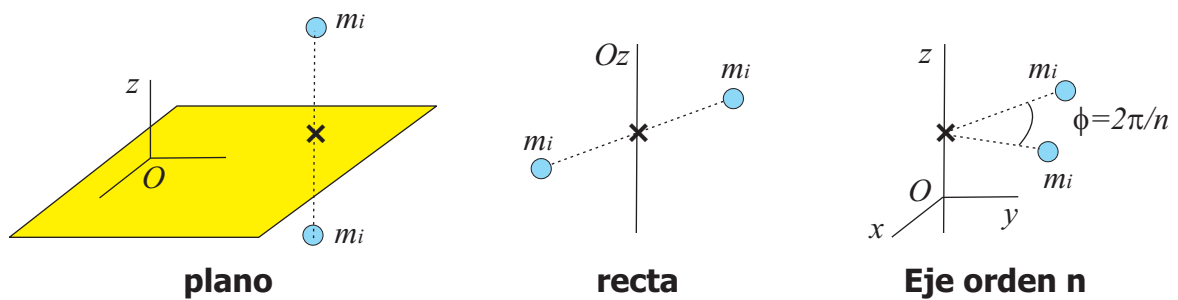
- Para una curva $y_G = \frac{A}{2\pi L}$, siendo L la longitud de la curva y A la superficie generada en una revolución alrededor del eje x .
- Para una superficie $y_G = \frac{Vol}{2\pi A}$ siendo A el área de la superficie y Vol el volumen engendrado en la revolución alrededor del eje x .



Aplicación de las Simetrías a la determinación del tensor de inercia

Simetría respecto de un plano, tomando un origen O en el plano y el eje z según la normal, son cero los productos de inercia en los que interviene la coordenada z , $P_{xz} = P_{yz} = 0$, por lo que Oz es principal. Los otros ejes principales se encuentran en el plano Oxy girado un ángulo δ tal que $\tan 2\delta = -2P_{xy}/(I_x - I_y)$.

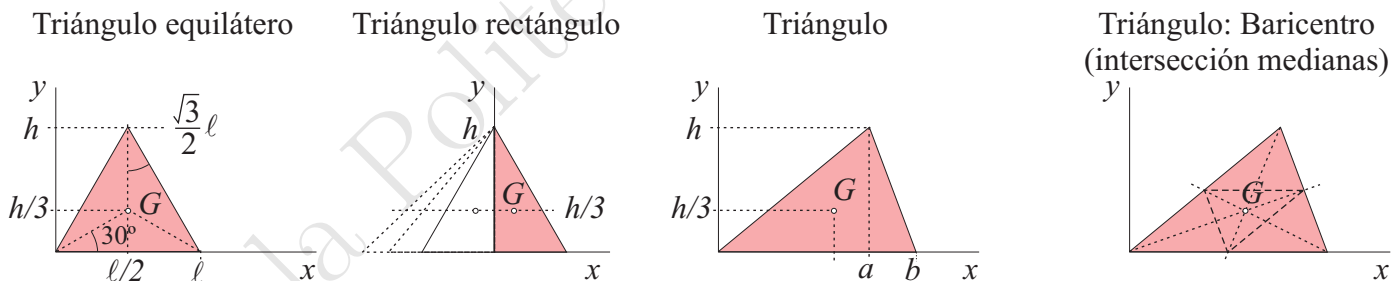
Simetría respecto de una recta, la recta Oz es dirección principal. Si el orden de simetría n (la distribución se repite girando un ángulo $2\pi/n$ con $n = 2, 3, \dots$) es mayor o igual que 3, $n \geq 3$, todos los ejes normales a la recta son principales y además $I_x = I_y$.



Aplicación al centro de masas

Rectángulo: el centro geométrico se encuentra en la intersección de los dos ejes de simetría. Eso sigue siendo válido para el romboide.

Triángulo: el centro geométrico de un triángulo equilátero se encuentra a un tercio de la altura, $h/3$. El triángulo equilátero se divide en dos triángulos rectángulos iguales por lo que su centro de masa sigue estando a $h/3$. Este triángulo se puede escalar a lo largo del eje x in que esto afecte a la altura de G . Un triángulo cualquiera se puede dividir en dos triángulos rectángulos por lo que su centro de masas sigue estando a $h/3$. Se puede seguir un razonamiento similar para demostrar que G coincide con el *baricentro*, el punto de intersección de las líneas que unen cada vértice con el centro del lado opuesto.



Otra forma de determinar la altura del centro de masas de un triángulo rectángulo es con el Teorema de Pappus-Guldin, el volumen generado es un cono de radio igual a la altura del triángulo $R = h$, y altura igual a la base $H = a$, entonces,

$$y_G = \frac{Vol}{2\pi A} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{2\pi \frac{1}{2}ah} = \frac{h}{3}$$

Cuadrante de circunferencia: el centro geométrico se determina con el Teorema de Pappus-Guldin, la superficie generada es la de una semiesfera,

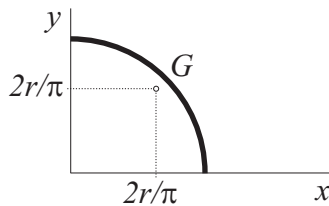
$$y_G = \frac{A}{2\pi L} = \frac{\frac{1}{2}4\pi r^2}{2\pi \frac{1}{4}2\pi r} = \frac{2r}{\pi}$$

Cuadrante de círculo: el centro geométrico se determina con el Teorema de Pappus-Guldin, el volumen generado es una semiesfera,

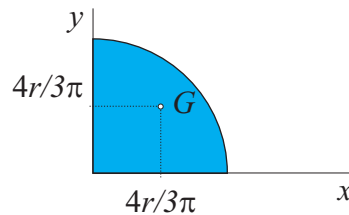
$$y_G = \frac{Vol}{2\pi A} = \frac{\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi \frac{1}{4}\pi r^2} = \frac{4r}{3\pi}$$

El resultado del círculo se extiende a una elipse aplicando el factor de escala adecuado a cada eje, así, la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ se convierte en el círculo de radio 1, $X^2 + Y^2 = 1$.

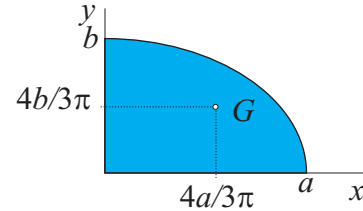
Cuadrante de circunferencia



Cuadrante de círculo



Cuadrante de Elipse



Superficie con simetría de revolución: si la curva generatriz es $\rho = \rho(z)$ la coordenada z del centro geométrico se determina por integración pero proyectando la masa sobre el eje z ,

$$z_G = \frac{\int z dA}{\int dA} = \frac{\int_{z_1}^{z_2} z \rho \sqrt{1 + (\rho')^2} dz}{\int_{z_1}^{z_2} \rho \sqrt{1 + (\rho')^2} dz}$$

Ejemplo. Superficie cónica de radio r y altura h con el vértice en el origen. La curva generatriz es $\rho = (r/h)z$ y por tanto,

$$z_G = \frac{\int_0^h z \frac{rz}{h} \sqrt{1 + (r/h)^2} dz}{\int_0^h \frac{rz}{h} \sqrt{1 + (r/h)^2} dz} = \frac{\frac{r}{h} \sqrt{1 + (r/h)^2} \frac{h^3}{3}}{\frac{r}{h} \sqrt{1 + (r/h)^2} \frac{h^2}{2}} = \frac{2h}{3}$$

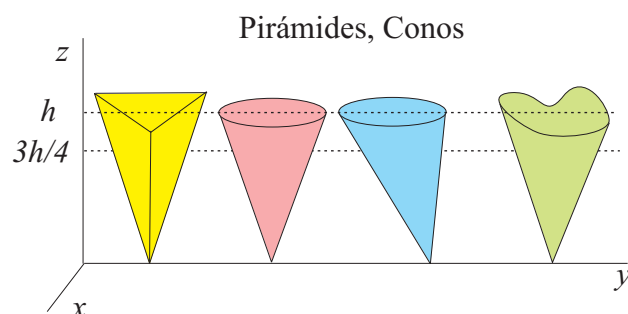
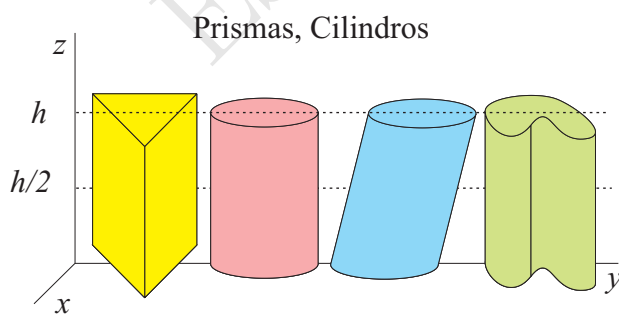
Cuerpo de simetría de revolución: si la curva generatriz es $\rho = \rho(z)$ la coordenada z del centro geométrico se determina por integración pero proyectando la masa sobre el eje z ,

$$z_G = \frac{\int z dV}{\int dV} = \frac{\int_{z_1}^{z_2} z \rho^2 dz}{\int_{z_1}^{z_2} \rho^2 dz}$$

Ejemplo. Volumen cónico de radio r y altura h con el vértice en el origen. La curva generatriz es $\rho = (r/h)z$ y por tanto,

$$z_G = \frac{\int_0^h z \left(\frac{rz}{h}\right)^2 dz}{\int_0^h \left(\frac{rz}{h}\right)^2 dz} = \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3h}{4}$$

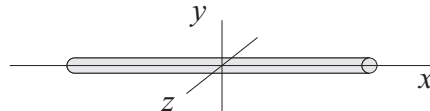
Este resultado es generalizable a todos los tipos de conos y de pirámides cuyas secciones varían cuadráticamente con la altura, $A(z) = A_0 \left(\frac{z}{h}\right)^2$ que conduce a $z_G = 3h/4$.



Aplicación al tensor de inercia

Barra de longitud ℓ : el centro geométrico se encuentra en el punto medio. Tomando el origen en ese punto y el eje Ox en la dirección de la barra (simetría de revolución) tenemos que $I_x = 0$ y en las direcciones perpendiculares,

$$I_y = I_z = \int x^2 dm = \frac{m}{\ell} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} x^2 dx = \frac{1}{12} m \ell^2$$



Trasladando el origen al extremo de la barra se obtiene el valor $\frac{1}{3} m \ell^2$.

Cuadrante de circunferencia de radio r : tomando el origen en el centro de la circunferencia los momentos de inercia para los ejes coinciden $I_x = I_y$ y se obtiene del momento polar,

$$J = \int r^2 dm = m r^2 = I_x + I_y \Rightarrow I_x^O = I_y^O = \frac{1}{2} m r^2$$

El producto de inercia debe calcularse por integración que se realiza fácilmente en coordenadas polares,

$$P_{xy}^O = \int xy dm = \frac{m}{L} \int xy dl = \frac{m}{L} \int_0^{\pi/2} r \cos \theta r \sin \theta r d\theta = \frac{1}{\pi} m r^2$$

Arco de circunferencia de radio r y ángulo 2α : tomando el origen en el centro de la circunferencia y el eje x según la bisectriz del arco, se tiene que $y_G = 0$ mientras que la coordenada x se obtiene por integración en coordenadas polares,

$$x_G = \frac{1}{m} \int x dm = \frac{1}{L} \int_{-\alpha}^{+\alpha} r \cos \theta r d\theta = \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} r$$

Los momentos de inercia se obtienen de forma similar

$$I_x^O = \frac{2\alpha - \text{sen } 2\alpha}{4\alpha} m r^2$$

$$I_y^O = \frac{2\alpha + \text{sen } 2\alpha}{4\alpha} m r^2$$

y como el eje Ox es ejes de simetría el producto de inercia es cero, $P_{xy}^O = 0$.

Sector circular de radio r y ángulo 2α : se procede de forma similar al caso anterior pero realizando la integral doble,

$$x_G = \frac{1}{m} \int x dm = \frac{1}{A} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_0^r \rho \cos \theta \rho d\rho d\theta = \frac{2 \text{sen } \alpha}{3\alpha} r$$

Las componentes del tensor de inercia resultan

$$I_x^O = \frac{2\alpha - \text{sen } 2\alpha}{8\alpha} m r^2$$

$$I_y^O = \frac{2\alpha + \text{sen } 2\alpha}{8\alpha} m r^2$$

$$P_{xy}^O = 0$$

Círculo de radio r : los momentos de inercia se obtienen del caso anterior para $\alpha = \pi$,

$$I_x^O = I_y^O = \frac{1}{2} m r^2$$

Cuadrante de círculo de radio r : Los momentos del cuadrante de círculo respecto de los ejes que lo delimitan tienen la misma expresión que los de la círculo completo ya que podemos considerar al círculo formado por 4 cuadrantes con los mismos momentos de inercia y entonces

$$I_x^{\text{cuadrante}} = \frac{1}{4} I_x^{\text{círculo}} = \frac{1}{4} \frac{1}{2} m_{\text{círculo}} r^2 = \frac{1}{8} 4m_{\text{cuadrante}} r^2 \Rightarrow I_x^O = I_y^O = \frac{1}{2} m r^2$$

El producto de inercia se puede obtener a partir de los resultados del sector circular con $\alpha = \pi/4$ que nos proporciona los momentos principales,

$$I_1 = \frac{\pi - 2}{4\pi} m r^2$$

$$I_2 = \frac{\pi + 2}{4\pi} m r^2$$

y utilizando el Círculo de Mohr, el producto de inercia para los ejes Oxy que tienen momentos de inercia iguales se obtiene de la mitad de la diferencia de los momentos principales

$$P_{xy}^O = \frac{I_2 - I_1}{2} = \frac{1}{2} \frac{(\pi + 2) - (\pi - 2)}{4\pi} m r^2 = \frac{1}{2\pi} m r^2$$

Cuadrante elíptico de semiejes a y b : los resultados se obtienen del caso circular aplicando un factor de escala diferente a cada eje,

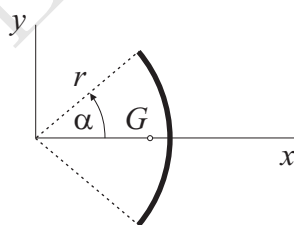
$$\int y^2 dm = b^2 \int \left(\frac{y}{b}\right)^2 dm = b^2 \frac{1}{4} m 1^2 \Rightarrow I_x^O = \frac{1}{4} m b^2$$

$$\int x^2 dm = a^2 \int \left(\frac{x}{a}\right)^2 dm = a^2 \frac{1}{4} m 1^2 \Rightarrow I_y^O = \frac{1}{4} m a^2$$

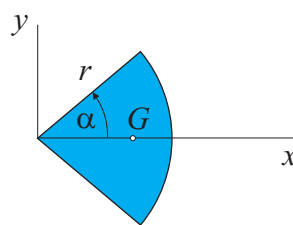
y el producto de inercia,

$$P_{xy}^O = \frac{1}{4} m \frac{a^2 + b^2}{\pi}$$

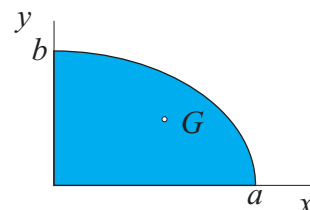
Arco de circunferencia



Sector circular



Cuadrante de Elipse



Rectángulo de lados a y b : Los momentos de inercia se obtienen de los de la barra ya que la proyección del rectángulo a lo largo de cada eje da lugar a una distribución lineal,

$$I_x = \frac{1}{12} m b^2 \quad I_y = \frac{1}{12} m a^2$$

al tratarse de una placa plana el momento de inercia para el eje normal es la suma del de los ejes del plano,

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

Triángulo rectángulo de base a y altura b : Los momentos de inercia se obtienen de los del rectángulo utilizando el teorema de Steiner,

$$I_x^G + m \left(\frac{b}{3}\right)^2 + I_x^G + m \left(\frac{2b}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} 2mb^2 \Rightarrow I_x^G = \frac{1}{18} mb^2$$

La expresión para el eje Gy tiene la misma forma pero en ese caso la altura sería a

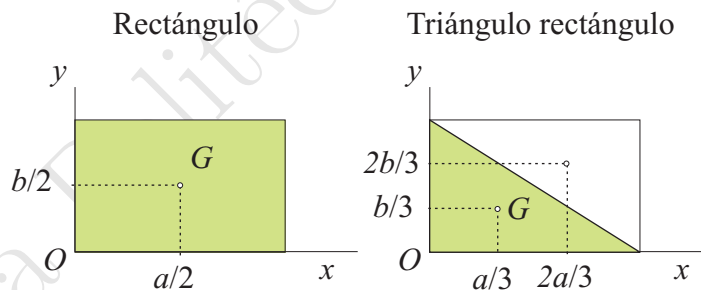
$$I_y^G = \frac{1}{18} ma^2$$

El producto de inercia se obtiene nuevamente con el teorema de Steiner,

$$P_{xy}^G + m \frac{b}{3} \frac{a}{3} + P_{xy}^G + m \frac{2b}{3} \frac{2a}{3} = 2m \frac{b}{2} \frac{a}{2} \Rightarrow P_{xy}^G = -\frac{1}{36} mab$$

El tensor de inercia en O se obtiene aplicando el teorema de Steiner,

$$\mathbf{I}^O = \mathbf{I}^G + m \begin{pmatrix} b^2/4 & -ab/4 \\ -ab/4 & a^2/4 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} b^2/6 & -ab/12 \\ -ab/12 & a^2/6 \end{pmatrix}$$



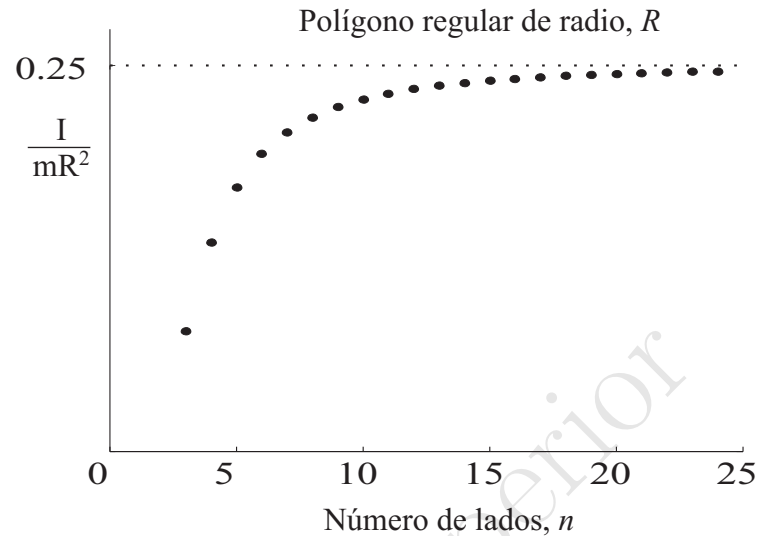
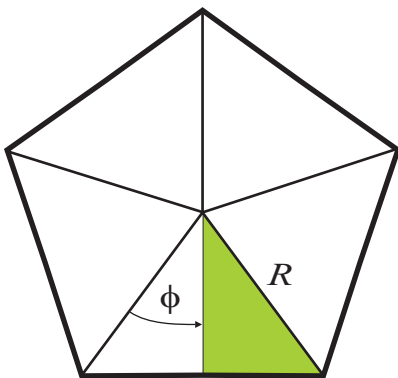
Polígono regular de n lados y radio r : Eligiendo el origen O en el centro del polígono, y teniendo en cuenta la simetría de orden n , todas los ejes del plano que pasan por O son principales y por ello $I_x^O = I_y^O = \frac{1}{2} I_z^O$. Para determinar I_z^O descomponemos el polígono en $2n$ triángulos rectángulos de lados $a = r \sin \phi$ y $b = r \cos \phi$ donde $\phi = \pi/n$. Todos estos triángulos tienen el mismo valor I_z^O y esa expresión valdrá también al polígono sustituyendo la masa del primero por la del segundo. Entonces, utilizando los resultados del caso anterior y el teorema de Steiner, se tiene,

$$I_z^O = I_x^O + I_y^O = \frac{1}{18} mb^2 + m \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} m \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} mb^2 + \frac{1}{24} ma^2 = \frac{mr^2}{24} \left[1 + 11 \cos^2 \left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

y finalmente, para el polígono,

$$I_x^O = I_y^O = \frac{mr^2}{48} \left[1 + 11 \cos^2 \left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

Nótese que cuando el número de lados n tiende a infinito se obtiene el resultado del círculo $I_x^O = I_y^O = \frac{1}{4} mr^2$.



Paralelepípedo de lados a , b y c : Eligiendo un sistema $Gxyz$ con origen el en centro del cuerpo y ejes perpendiculares a las caras, los tres planos cartesianos son de simetría y sus normales direcciones principales, por tanto,

$$P_{xy}^G = P_{xz}^G = P_{yz}^G = 0$$

Los momentos de inercia se calculan proyectando la distribución de masas en cada uno de las planos obteniéndose rectángulos y entonces,

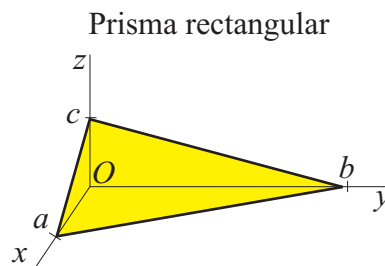
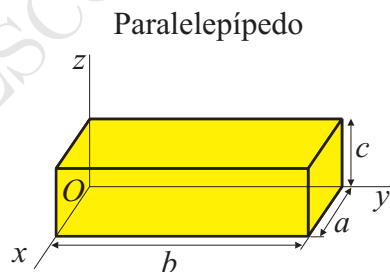
$$I_x^G = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$$

$$I_y^G = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)$$

$$I_z^G = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

Tomando el origen O en un vértice del cuerpo (véase figura) se tiene,

$$\mathbf{I}^O = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} 4(b^2 + c^2) & -3ab & -3ac \\ -3ab & 4(a^2 + c^2) & -3bc \\ -3ac & -3bc & 4(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$



Pirámide rectangular de catetos a , b y c : La integral de volumen resulta,

$$V = \int dV = \int_0^a dx \int_0^{b(1-x/a)} dy \int_0^{c(1-x/a-y/b)} dz = \frac{1}{6} abc$$

El centro de masas se encuentra en $(a/4, b/4, c/4)$ y los elementos del tensor de inercia en el vértice O de los tres lados perpendiculares,

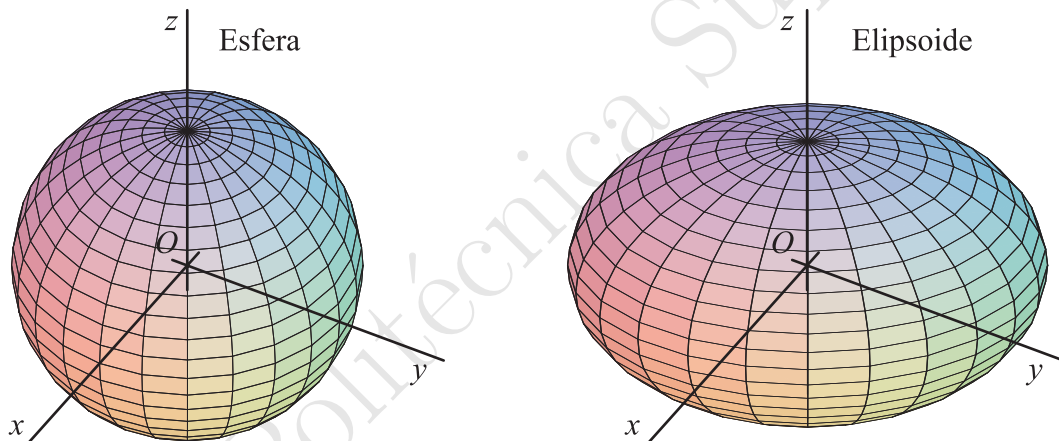
$$\mathbf{I}^O = \frac{m}{20} \begin{pmatrix} 2(b^2 + c^2) & -ab & -ac \\ -ab & 2(a^2 + c^2) & -bc \\ -ac & -bc & 2(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

y en el centro de masas

$$\mathbf{I}^G = \frac{m}{80} \begin{pmatrix} 3(b^2 + c^2) & -ab & -ac \\ -ab & 3(a^2 + c^2) & -bc \\ -ac & -bc & 3(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

Esfera de radio R : Eligiendo el origen en el centro de la esfera, todas las direcciones son principales y por tanto los momentos de inercia son todos iguales y su valor se puede calcular a partir del momento polar,

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} \int r^2 dm = \frac{2m}{3V} \int_0^R r^2 4\pi r^2 dr = \frac{2}{3} \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi \frac{R^5}{5} = \frac{2}{5} mR^2$$



Elipsoide de semiejes a , b y c : Se obtiene a partir de la esfera reescalando los ejes,

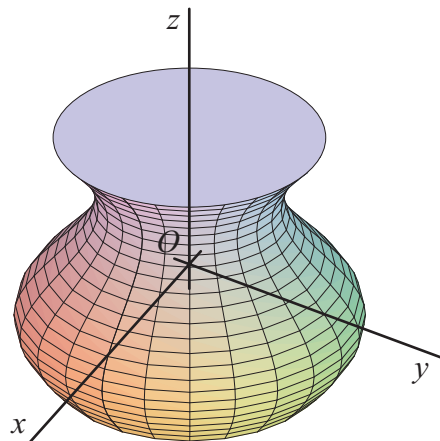
$$\begin{aligned} I_x^G &= \frac{1}{5} m (b^2 + c^2) \\ I_y^G &= \frac{1}{5} m (a^2 + c^2) \\ I_z^G &= \frac{1}{5} m (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Cuerpo de simetría de revolución: si la curva generatriz es $\rho = \rho(z)$ eligiendo un sistema con origen O en el eje de simetría solo se necesitan dos integrales:

$$\int z^2 dm = \frac{m}{V} \int z^2 dV = \frac{m}{V} \int_{z_1}^{z_2} z^2 \pi \rho^2 dz$$

y

$$\int x^2 dm = \int y^2 dm = \frac{1}{2} \int \rho^2 dm = \frac{1}{2} \int dI_z = \frac{m}{2V} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2} \pi \rho^4 dz$$



Cilindro de radio R y altura H : Eligiendo un sistema $Gxyz$ con origen en el centro y con z según el eje del cilindro. La primera integral se puede hacer proyectando la masa sobre el eje z obteniéndose una distribución lineal uniforme, entonces,

$$\int z^2 dm = \frac{1}{12} m H^2$$

En la segunda proyectando sobre el plano Oxy se obtiene un círculo uniforme y entonces

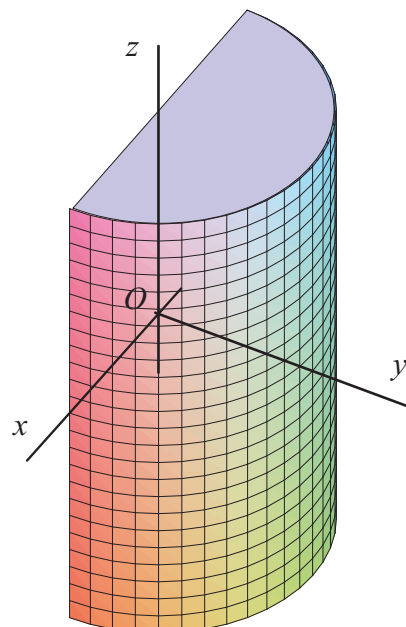
$$\int \rho^2 dm = \frac{1}{2} m R^2$$

Entonces,

$$I_x^G = I_y^G = \frac{1}{2} \int \rho^2 dm + \int z^2 = \frac{1}{12} m (H^2 + 3R^2)$$

$$I_z^G = \int \rho^2 dm = \frac{1}{2} m R^2$$

Semicilindro de radio R y altura H : Elegimos un sistema $Oxyz$ con origen en el centro de la cara rectangular, con z según el eje del cilindro y estando situado el semicilindro en la región $y \geq 0$.





El centro de masas se encuentra sobre Oy a una distancia del origen que coincide con el centro de un semicírculo (proyección sobre el plano Oxy),

$$y_G = \frac{4r}{3\pi}$$

Como el cuerpo tiene dos planos de simetría Oxy y Oyz los tres ejes coordenados son principales en O . Además, si consideramos el cilindro completo formado por dos cuerpos: (1) con $y \geq 0$ y (2) con $y \leq 0$ y (2) se tiene,

$$I_z^{(1+2)} = \frac{1}{2}m_{(1+2)}R^2 = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = 2I_z^{(1)} \Rightarrow I_z^{(1)} = \frac{1}{2}m_{(1)}R^2$$

y de forma similar

$$\int^{(1+2)} z^2 dm = \frac{1}{12}m_{(1+2)}H^2 = 2 \int^{(1)} z^2 dm \Rightarrow \int^{(1)} z^2 dm = \frac{1}{12}m_{(1)}H^2$$

y entonces

$$\mathbf{I}^O = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} 3R^2 + H^2 & 0 & 0 \\ -0 & 3R^2 + H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{pmatrix}$$

y en el centro de masas

$$\mathbf{I}^G = \frac{m}{36\pi^2} \begin{pmatrix} (9\pi^2 - 64)R^2 + 3\pi^2 H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3\pi^2(3R^2 + H^2) & 0 \\ 0 & 0 & (18\pi^2 - 64)R^2 \end{pmatrix}$$

Cono de radio R y altura H : Eligiendo el origen en el vértice del cono, la curva generatriz es $\rho = Rz/H$ y por tanto,

$$\int z^2 dm = \frac{1}{12}mH^2 = \frac{m}{V} \int_0^H z^2 \pi \left(\frac{Rz}{H}\right)^2 dz = \frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \frac{H^5}{5} = \frac{3}{5}mH^2$$

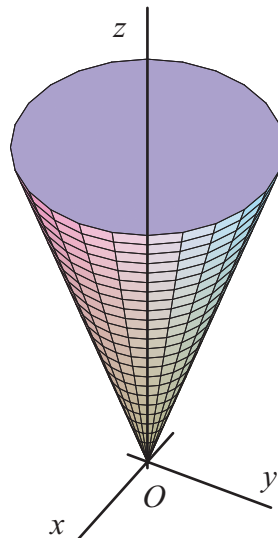
por otro lado,

$$\int \rho^2 dm = \frac{m}{V} \int_0^H \frac{1}{2}\pi \left(\frac{Rz}{H}\right)^4 dz = \frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} \frac{1}{2}\pi \left(\frac{R}{H}\right)^4 \frac{H^5}{5} = \frac{3}{10}mR^2$$

Entonces,

$$I_x^O = I_y^O = \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mH^2$$

$$I_z^O = \int \rho^2 dm = \frac{3}{10}mR^2$$



El centro de masas se encuentra en $z_G = 3H/4$ y entonces $I_x^G = I_y^G = \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{80}mH^2$.

Para un diámetro de la base se utiliza de nuevo el teorema de Steiner y resulta $I^{\text{diam}} = \frac{3}{20}mR^2 + \frac{1}{10}mH^2$.

Paraboloide de revolución de radio R y altura H : tiene por ecuación $(x^2 + y^2)/R^2 = z/H$ por lo que la curva generatriz es $\rho = R\sqrt{(z/H)}$. Procediendo de la misma manera que para el cono se tiene:

$$\int z^2 dm = \frac{1}{12}mH^2 = \frac{m}{V} \int_0^H z^2 \pi \left(\frac{Rz}{H}\right)^2 dz = \frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \frac{H^5}{5} = \frac{3}{5}mH^2$$

por otro lado,

$$\int \rho^2 dm = \frac{m}{V} \int_0^H \frac{1}{2}\pi \left(\frac{Rz}{H}\right)^4 dz = \frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} \frac{1}{2}\pi \left(\frac{R}{H}\right)^4 \frac{H^5}{5} = \frac{3}{10}mR^2$$

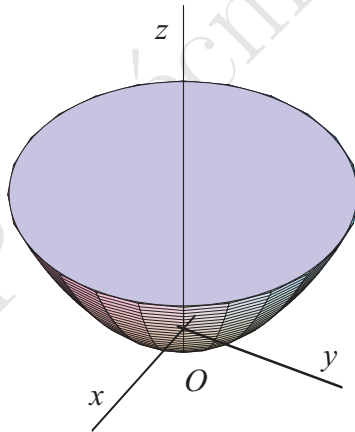
Entonces,

$$z_G = \frac{2}{3}h$$

$$I_x^O = I_y^O = \frac{1}{6}mR^2 + \frac{1}{2}mH^2$$

$$I_z^O = \frac{1}{3}mR^2$$

mientras que en el centro de masas $I_x^G = I_y^G = \frac{1}{6}mR^2 + \frac{1}{18}mH^2$.



Paraboloide elíptico de semiejes a y b y altura H : $(x/a)^2 + (y/b)^2 = z/H$ aplicando un factor de escala a cada eje la elipse se convierte en círculo,

$$z_G = \frac{2}{3}h$$

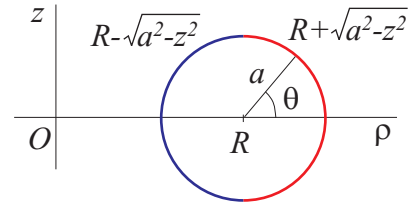
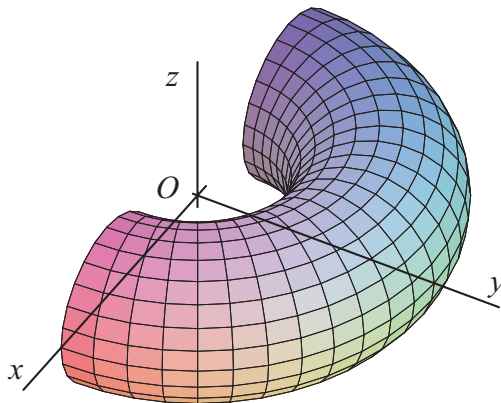
$$I_x^O = \frac{1}{6}mb^2 + \frac{1}{2}mH^2$$

$$I_y^O = \frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{2}mH^2$$

$$I_z^O = \frac{1}{6}m(a^2 + b^2)$$

Semitoro de radios R y a : tiene por ecuación $(x^2 + y^2) - R^2 + z^2 = a^2$ con $y \geq 0$. Es la mitad de un cuerpo de revolución por lo que los momentos de inercia se pueden obtener a partir de los de la figura completa. Para tratarlo de esta forma la curva generatriz sería la circunferencia de radio a que habría que hacer en dos partes,

$$\int dV = \int_{-a}^{+a} \pi \left(R + \sqrt{a^2 - z^2}\right)^2 dz - \int_{-a}^{+a} \pi \left(R - \sqrt{a^2 - z^2}\right)^2 dz$$



También es posible hacer las integrales en coordenadas cilíndricas o utilizando la coordenada cilíndrica φ y una coordenada polares desde el centro del círculo (véase figura), en ese caso, $\rho = R + r \cos \theta$ y $z = r \sin \theta$, siendo la integral de volumen

$$\int_0^a dr \int_0^{2\pi} r d\theta \int_0^\pi \rho d\varphi = \pi^2 R a^2$$

El resultado final es,

$$y_G = \frac{a^2 + 4R^2}{2\pi R}$$

$$I_x^O = I_y^O = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{5}{8}ma^2$$

$$I_z^O = mR^2 + \frac{3}{4}ma^2$$

$$P_{xy}^O = P_{xz}^O = P_{yz}^O = 0$$



5. Movimiento general del sólido rígido

- 5.1 Coordenadas de posición y grados de libertad de un sólido rígido.
- 5.2 Expresión vectorial de movimientos de rotación y traslación.
- 5.3 Teorema de las velocidades proyectadas.
- 5.4 Distribución de velocidades. Grupo cinemático. Invariantes.
- 5.5 Eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo como eje central del sistema de velocidades del sólido.
- 5.6 Sucesión del eje instantáneo de rotación. Axoides.
- 5.7 Distribución de aceleraciones.

Introducción

En este capítulo consideraremos las relaciones cinemáticas que describen el movimiento de los cuerpos rígidos y que asimismo son la base para el estudio de todas las máquinas y mecanismos.

Cuando existen ligaduras entre los puntos del sistema, estas limitan los movimientos que puede realizar y por lo tanto reducen el número de grados de libertad. Para un sistema con N partículas y ℓ ecuaciones de ligadura, el número de grados de libertad, s , será $s = 3N - \ell$.

5.1. Coordenadas de posición y grados de libertad de un sólido rígido.

Se define sólido rígido a un sistema de partículas cuyas interdistancias permanecen constantes,

$$|\overrightarrow{AB}| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = cte_{AB}, \forall A, B$$

esta ecuación se denomina condición de rigidez del sólido.

Grados de libertad : Denominamos grados de libertad de un sistema al número de movimientos independientes que puede realizar, que coincide con el número de coordenadas independientes que es preciso conocer para determinar su posición. Por ejemplo para determinar la posición de un punto material necesitamos 3 coordenadas (x, y, z) , decimos por tanto que tiene 3 grados de libertad.

En el caso del sólido rígido, si consideramos tres puntos A , B y C no alineados, de acuerdo con la condición de rigidez:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{AB}^2 &= |\vec{r}_A - \vec{r}_B|^2 = cte \\ \vec{r}_{AC}^2 &= |\vec{r}_A - \vec{r}_C|^2 = cte \\ \vec{r}_{BC}^2 &= |\vec{r}_B - \vec{r}_C|^2 = cte \end{aligned}$$

Para dar la posición de cada punto se necesitarían 3 coordenadas (x_A, y_A, z_A) , (x_B, y_B, z_B) , (x_C, y_C, z_C) , lo que hace un total de nueve, pero como existen 3 ecuaciones de rigidez sólo hay seis coordenadas independientes. Si quisiéramos determinar la posición de un cuarto punto D , tendríamos 3 nuevas incógnitas (x_D, y_D, z_D) pero también 3 nuevas condiciones de rigidez $r_{AD}^2 = cte$, $r_{BD}^2 = cte$ y $r_{CD}^2 = cte$ con lo que el número total de coordenadas independientes sigue siendo 6.

Así, conocida la posición de 3 puntos no alineados de un sólido rígido, se conoce la posición de los restantes puntos del sólido. Decimos por tanto que *el sólido rígido tiene 6 grados de libertad* o bien que el número de coordenadas independientes necesarias para definir la posición de un sólido en el espacio es de 6. Para asignar estas coordenada ha de notarse que la posición de un sólido está completamente especificada situando un sistema de referencia S fijo al cuerpo respecto de otro sistema de coordenadas S_1 fijo en el espacio, 3 coordenadas se utilizan para situar el origen de coordenadas de S y as otras 3 han de definir la orientación de S respecto de S_1 . Más adelante volveremos sobre esto.

5.2. Expresión vectorial de movimientos de rotación y traslación.

Movimiento de traslación: Un sólido rígido tiene un movimiento de traslación respecto de un sistema de referencia S si en cada instante todas sus puntos tienen igual velocidad no nula respecto de S . Se denomina velocidad de traslación a la velocidad común de todos los puntos. Además, en el movimiento de traslación todos los puntos del sólido tienen la misma aceleración instantánea respecto del mismo sistema de referencia S . Sean A y B dos puntos cualesquiera

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A \quad \forall A, B$$

y por tanto:

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{AB}) = 0 \quad \forall A, B$$

La posición relativa de dos partículas cualesquiera del sólido permanece invariable en el transcurso del movimiento; por tanto todas las trayectorias son paralelas (sin embargo la traslación no tiene porque corresponder necesariamente a un movimiento rectilíneo).

Movimiento de Rotación: Un sólido rígido realiza un movimiento de rotación si en cada instante existe una recta de puntos con velocidad nula, esta recta es el eje de rotación.

Como las distancias entre los puntos del sólido permanecen constantes; tomando como origen del sistema de referencia un punto O sobre el eje, tendríamos que para cualquier punto P , $|\overrightarrow{OP}| = cte$. El vector \overrightarrow{OP} no cambia de módulo pero sí de orientación, por tanto, su velocidad será

$$\vec{v}_P = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OP}$$

siendo $\vec{\Omega}$ el vector asociado al cambio de orientación de un sistema de referencia que se mueve con el sólido. Por otra parte P describe una trayectoria circular con centro en el eje de rotación y contenida en un plano perpendicular al eje, de manera que su velocidad también viene dada por $v_P = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega$ con $R = |\overrightarrow{OP}| \cdot \text{sen } \theta$, de manera que la velocidad de P también es:

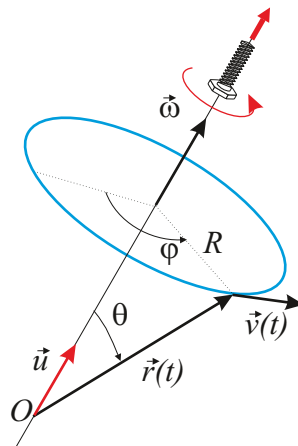
$$v_P = \omega \cdot |\overrightarrow{OP}| \cdot \text{sen } \theta$$

Definimos entonces el vector *velocidad de rotación* o *rotación* $\vec{\omega}$ con las siguientes características:

- Módulo: La velocidad angular $\frac{d\varphi}{dt}$
- Dirección: La del eje de rotación
- Sentido: Según la ley del tornillo

y así podemos escribir la velocidad del punto P del sólido en el movimiento de rotación como:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$$



5.3. Teorema de las velocidades proyectadas.

Derivando respecto del tiempo la condición de rigidez:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_{AB})^2 = 0 = 2 \vec{r}_{AB} \cdot \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = 2 \vec{r}_{AB} (\vec{v}_A - \vec{v}_B)$$

y dividiendo por el módulo de \vec{r}_{AB} queda:

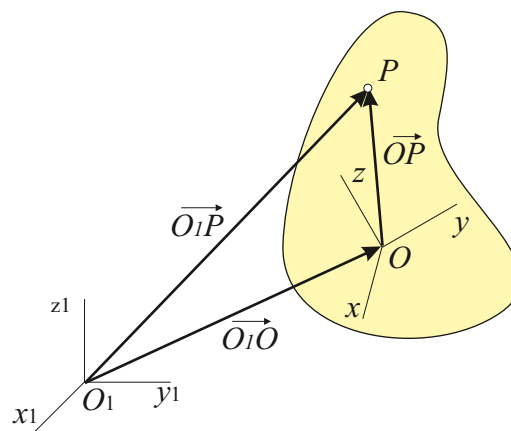
$$\vec{v}_A \cdot \hat{r}_{AB} = \vec{v}_B \cdot \hat{r}_{AB}$$

En cada instante, las velocidades de dos puntos cualesquiera del sólido tienen proyecciones iguales sobre la recta que los une. Esta es la llamada condición cinemática de rigidez o teorema de las velocidades proyectadas. Una consecuencia de este teorema es que la velocidad de cualquier punto del sólido está determinada si se conocen las velocidades de 3 puntos no alineados (basta tener en cuenta que un vector está determinado si se conocen sus proyecciones sobre 3 rectas no paralelas).

5.4. Distribución de velocidades. Grupo cinemático. Invariantes.

Consideremos un sistema de referencia S ligado al sólido y otro sistema de referencia en el espacio S_1 . Sea P un punto del sólido, su posición en el espacio S_1 vendrá dada por:

$$\vec{O_1P} = \vec{O_1O} + \vec{OP}$$



Derivando respecto del tiempo y teniendo en cuenta el cambio de orientación de S respecto de S_1 (Fórmula de Boure) tendremos:

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{O_1P}}{dt} = \frac{d\vec{O_1O}}{dt} + \frac{d\vec{OP}}{dt} = \frac{d\vec{O_1O}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{OP}$$

de donde se obtiene la ley de distribución de velocidades en el sólido rígido:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}$$

Propiedades:

- Se trata de una distribución helicoidal. Tiene la misma forma que la ley de distribución de momentos en un sistema de vectores deslizantes y por tanto todas las propiedades de la distribución de momentos son aplicables a las velocidades en un sólido rígido sin más que cambiar el vector momento \vec{M} por el vector velocidad \vec{v} y la resultante \vec{R} por la velocidad de rotación $\vec{\omega}$
- La velocidad no cambia en puntos situados sobre rectas paralelas a $\vec{\omega}$.
- *Movimiento general del sólido. Teorema de Chasles:* El movimiento general del sólido es una traslación (\vec{v}_O) más una rotación alrededor de O , ($\vec{\omega} \times \vec{OP}$).

5.5. Grupo cinemático. Invariantes

Las variables que caracterizan el movimiento general del sólido son $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$, a este par se le denomina grupo cinemático en O . El grupo cinemático no es invariante dado que depende del punto considerado. Se buscan magnitudes que caractericen el movimiento con independencia del punto de referencia elegido, es decir, magnitudes invariantes a cualquier grupo cinemático. Estas son:

a) Primer invariante o invariante vectorial: Es el vector $\vec{\omega}$, común a todos los grupos cinemáticos.

Sean $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$ y $(\vec{v}_{O'}, \vec{\omega}')$ los grupos cinemáticos en O y O' respectivamente. Para cualquier punto P , $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}$ y también $\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}' \times \vec{O'P}$. Dado que $\vec{v}_{O'} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OO'}$, se tiene que

$$\vec{\omega} \times \vec{OP} = \vec{\omega}' \times \vec{O'P} \quad \forall O, P$$

Por tanto la velocidad de rotación es la misma para todos los puntos del sólido; puede hablarse entonces de la velocidad de rotación del sólido

b) Segundo invariante o invariante escalar: la proyección de la velocidad de un punto P cualquiera del sólido, \vec{v}_P sobre $\vec{\omega}$:

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} + (\vec{\omega} \times \vec{OP}) \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \quad \forall O, P$$

En un instante dado, la proyección de la velocidad de cualquier punto sobre la recta soporte de $\vec{\omega}$ es la misma para todos los puntos del sólido. Es el segundo invariante.

5.6. Eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo como eje central del sistema de velocidades del sólido.

De la ley de distribución de velocidades concluimos que se puede descomponer la velocidad de cualquier punto en una componente paralela y otra perpendicular a $\vec{\omega}$: $\vec{v}_P = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, $\forall P$, donde la componente \vec{v}_{\parallel} no cambia pero sí lo hace \vec{v}_{\perp} . Además, si existe un punto con $\vec{v}_{\perp} = 0$, todos los que se encuentran en una recta paralela a $\vec{\omega}$ pasando por ese punto tendrán $\vec{v}_{\perp} = 0$, es decir, tendrán una velocidad paralela a $\vec{\omega}$.

Llamamos *eje instantáneo de rotación, EIR*, al lugar geométrico de los puntos del sólido con velocidad paralela a $\vec{\omega}$. Sea $P(x, y, z)$ un punto del EIR, su velocidad será $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP} \parallel \vec{\omega}$, con $\vec{v}_O(v_x, v_y, v_z)$ y $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. La ecuación del eje instantáneo de rotación queda:

$$\frac{v_x + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{v_y + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{v_z + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}$$

Propiedades

- El eje instantáneo de rotación es equivalente al eje central de un sistema de vectores deslizantes.
- Se define la velocidad de deslizamiento mínimo v_d como la proyección de la velocidad de cualquier punto en la dirección del eje instantáneo de rotación:

$$v_d = \frac{\vec{v}_O \cdot \vec{\omega}}{\omega}$$

- La velocidad de los puntos del EIR es la velocidad de deslizamiento mínimo v_d
- La velocidad de deslizamiento mínimo corresponde al valor mínimo de la velocidad de los puntos de un sólido rígido:

$$v_P = |\vec{v}_P| = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2} = \sqrt{v_d^2 + v_{\perp}^2} \geq v_d$$

- Si existe algún punto del sólido con velocidad nula, este punto pertenece al eje instantáneo de rotación.

- Determinación de EIR a partir del grupo cinemático $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$:

Si $P(x, y, z)$ pertenece al EIR, entonces $\vec{v}_P \parallel \vec{\omega}$ con $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}$. De manera que:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_P = 0 = \vec{\omega} \times \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP}) = \vec{\omega} \times \vec{v}_O + \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{OP}) - \omega^2 \vec{OP}$$

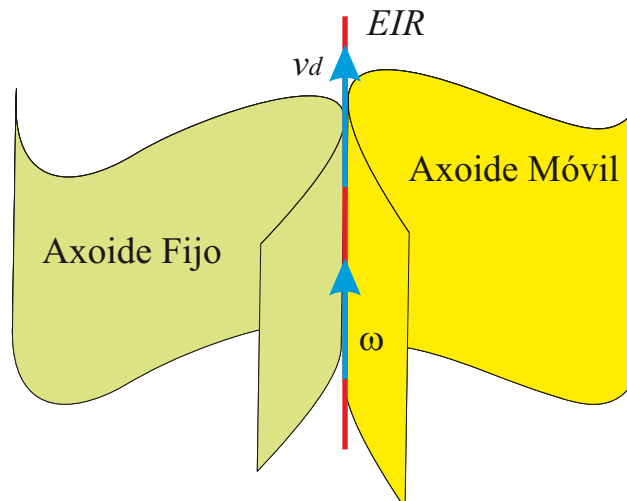
Por tanto:

$$P \in \text{EIR} \Leftrightarrow \vec{OP} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega}, \quad \forall \lambda$$

FIGURA CON LA DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES Y EL EIR

5.7. Sucesión del eje instantáneo de rotación. Axoides.

La expresión que hemos dado en el apartado anterior localiza al EIR en cada instante pues tanto \vec{v}_O como $\vec{\omega}$ pueden cambiar en el transcurso del tiempo. En consecuencia el eje instantáneo de rotación cambiará en general de posición a lo largo del tiempo debido al movimiento del sólido, engendrando una superficie reglada que denominamos *axoide*. Habrá infinitos axoides, tantos como sistemas de referencia, pero nos fijaremos únicamente en los obtenidos en el sistema de referencia fijo y en el sistema de referencia solidario con el cuerpo, que denominaremos *axoide fijo* y *axoide móvil*, respectivamente. Estas dos superficies son tangentes en cada instante, la línea de tangencia es el eje instantáneo de rotación.



Se puede describir el movimiento del sólido como la rodadura del axoide móvil sobre el axoide fijo. Si $v_d = 0$ la rodadura será sin deslizamiento, si $v_d \neq 0$ el axoide móvil además de rodar, deslizará sobre el EIR con velocidad v_d (esta representación del movimiento del sólido es debida a Poncelet).

5.8. Distribución de aceleraciones.

La aceleración de un punto P del sólido se obtiene derivando la expresión de la velocidad:

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt} \vec{v}_P = \frac{d}{dt} (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}) = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{OP}}{dt}$$

como

$$\frac{d\vec{OP}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{OP}$$

la distribución de aceleraciones en un sólido rígido queda:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})$$

El término $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP})$ es la aceleración centrípeta y está dirigida hacia el eje de rotación.

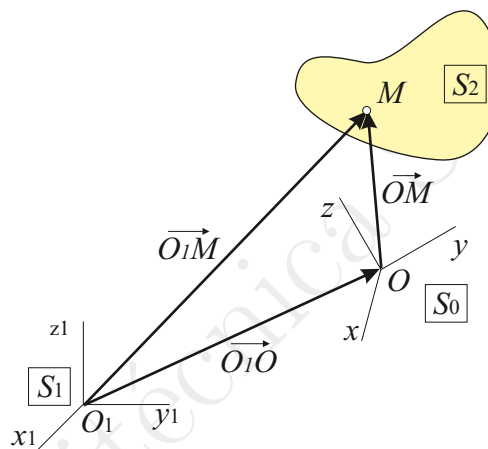
Escuela Politécnica Superior

6. Composición de movimientos

- 6.1 El problema de la composición de movimientos. Generalidades.
- 6.2 Composición de velocidades, rotaciones y aceleraciones.
- 6.3 Movimientos inversos.
- 6.4 Movimientos relativos de sólidos en contacto.

6.1. El problema de la composición de movimientos. Generalidades.

El objetivo de este tema es obtener el movimiento de un cuerpo S_2 respecto de un sistema de referencia $S_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ cuando se conoce el movimiento del cuerpo en otro sistema de referencia $S_0(O, x, y, z)$ y el movimiento de S_0 respecto de S_1 .



NOTACIÓN. En los términos de todas las ecuaciones indicaremos con un índice el sistema al que pertenece el punto y con otro el sistema respecto del cual se está considerando la magnitud (posición, velocidad, rotación, ...), así,

$$\vec{v}_{20}^M$$

será la velocidad del punto M del sistema 2 vista desde el sistema 0.

Conocida las leyes de composición del movimiento de dos sistemas, para un número mayor de sistemas no hay más que aplicar las mismas ecuaciones tantas veces como sean necesarias para pasar del sistema inicial al sistema final.

6.2. Composición de velocidades, rotaciones y aceleraciones.

Composición de velocidades

Para cualquier punto M de S_2 tenemos:

$$\vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{OM}$$

y la velocidad de M respecto de S_1 se obtendrá derivando las componentes de $\vec{O_1M}$ en este sistema de referencia:

$$\vec{v}_{21}^M = \left(\frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\vec{O_1O}}{dt} \right)_{S_1} + \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{S_1}$$

con

$$\left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{S_0} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{OM}$$

donde $\vec{\omega}_{01}$ es la rotación del sistema S_0 respecto de S_1 . De manera que:

$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{20}^M + \vec{v}_{01}^O + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM}$$

Se denomina *velocidad relativa* de la partícula M a $\vec{v}_{rel}^M = \vec{v}_{20}^M$ es decir, la velocidad que tiene el punto M respecto del sistema de referencia móvil S_0 .

La *velocidad de arrastre* es:

$$\vec{v}_{arr}^M = \vec{v}_{01}^O + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM} = \vec{v}_{01}^M$$

y sería la velocidad que tendría M si estuviese unida rígidamente al sistema móvil S_0 al ser arrastrado por este.

La ley de composición de velocidades puede escribirse:

$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{20}^M + \vec{v}_{01}^M$$

En el contexto que estamos estudiando se designa como movimiento absoluto el movimiento del cuerpo respecto del sistema de referencia que tomemos como fijo, S_1 y movimiento relativo el del sólido respecto del sistema móvil S_2 que no es solidario con el cuerpo. Así, la ecuación anterior se escribiría

$$\vec{v}_{abs}^M = \vec{v}_{rel}^M + \vec{v}_{arr}^M$$

Composición de rotaciones

Sea $\vec{\omega}_{20}$ la rotación del cuerpo S_2 respecto de S_0 y $\vec{\omega}_{01}$ la rotación de S_0 respecto de S_1 ; el objetivo es determinar $\vec{\omega}_{21}$ Sean M y N dos puntos del sólido S_2 ; sabemos que la velocidad absoluta es:

$$\vec{v}_{21}^N = \vec{v}_{21}^M + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{MN}$$

la velocidad relativa

$$\vec{v}_{20}^N = \vec{v}_{20}^M + \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{MN}$$

y la velocidad de arrastre:

$$\vec{v}_{01}^N = \vec{v}_{01}^M + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{MN}$$

Entonces, de la ley de composición de velocidades:

$$\vec{v}_{21}^N - \vec{v}_{21}^M = \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{MN} = \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{MN} + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{MN}, \quad \forall M, N \in S_2$$

y por tanto

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}$$

Composición de aceleraciones

Derivando respecto del tiempo la expresión:

$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{01}^O + \vec{v}_{20}^M + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM}$$

y teniendo en cuenta que tanto \vec{v}_{20}^M como \overrightarrow{OM} son vectores cuyas componentes están expresadas en un sistema de referencia móvil, tenemos:

$$\vec{a}_{21}^M = \vec{a}_{01}^O + \vec{a}_{20}^M + \vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{20}^M + \dot{\vec{\omega}}_{01} \times \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{01} \times [\vec{v}_{20}^M + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM}]$$

agrupando los términos y llamando

$$\vec{a}_{01}^M = \vec{a}_{01}^O + \dot{\vec{\omega}}_{01} \times \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{01} \times (\vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM})$$



a la aceleración de arrastre del punto M , que corresponde a la aceleración que tendría M si estuviese rígidamente unido a S_0 . Finalmente tenemos:

$$\vec{a}_{21}^M = \vec{a}_{20}^M + \vec{a}_{01}^M + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{20}^M$$

Donde \vec{a}_{21}^M será la aceleración absoluta de M ; \vec{a}_{20}^M es la aceleración relativa, es decir, la aceleración de M respecto del sistema de referencia móvil S_0 ; \vec{a}_{01}^M corresponde a la aceleración de arrastre cuya interpretación es similar a la de la velocidad de arrastre; y finalmente el término $2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{20}^M$ es la aceleración de Coriolis, debida al efecto combinado de la rotación del sistema móvil ($\vec{\omega}_{01}$) y la velocidad de M en ese sistema móvil S_0 , \vec{v}_{20}^M .

$$\vec{a}_{\text{abs}}^M = \vec{a}_{\text{rel}}^M + \vec{a}_{\text{arr}}^M + \vec{a}_{\text{Cor}}^M$$

Composición de aceleraciones angulares

Puede obtenerse la aceleración angular derivando la ley de composición de rotaciones:

$$\vec{\alpha}_{21} = \left(\frac{d\vec{\omega}_{21}}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt} \right)_{S_1} + \left(\frac{d\vec{\omega}_{01}}{dt} \right)_{S_1}$$

con

$$\left(\frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt} \right)_{S_1} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{\omega}_{20}$$

Entonces:

$$\vec{\alpha}_{21} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{\omega}_{20}$$

6.3. Movimientos inversos

Dados dos sólidos S_1 y S_0 y conocido el movimiento de S_0 respecto de S_1 se presenta a veces la necesidad de hallar el movimiento de S_1 respecto de S_0 que se denomina inverso del primero. Para ello observando que la composición de movimientos $S_1/S_0/S_1$ es el reposo (no movimiento) tenemos:

$$\vec{v}_{11}^M = \vec{v}_{10}^M + \vec{v}_{01}^M = 0$$

de donde

$$\vec{v}_{10}^M = -\vec{v}_{01}^M$$

Análogamente para las rotaciones tenemos

$$\vec{\omega}_{11} = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{01} = 0$$

y entonces

$$\vec{\omega}_{10} = -\vec{\omega}_{01}$$

Las aceleraciones en los movimientos inversos solamente son iguales y de signo contrario para los puntos situados en el eje instantáneo de rotación.

$$\vec{a}_{11}^M = \vec{a}_{10}^M + \vec{a}_{01}^M + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{10}^M = 0$$

de donde

$$\vec{a}_{10}^M = -\vec{a}_{01}^M - 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{10}^M$$

Para que se anule el último producto vectorial, el punto M ha de estar sobre el EIR.

En cuánto a las aceleraciones angulares también se verifica que son iguales y opuestas en los movimientos inversos:

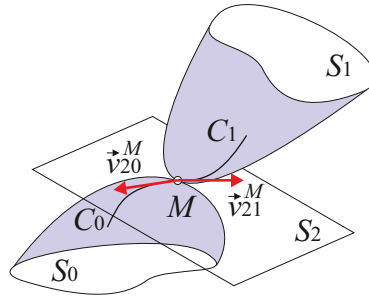
$$\vec{\alpha}_{11} = \vec{\alpha}_{10} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{\omega}_{10} = 0$$

y como $\vec{\omega}_{01} = -\vec{\omega}_{10}$, tenemos que:

$$\vec{\alpha}_{10} = -\vec{\alpha}_{01}$$

6.4. Movimientos relativos de sólidos en contacto.

Sean S_0 y S_1 dos sólidos que se mueven manteniendo un único punto de contacto M . Sea S_2 un sistema de referencia ligado al plano tangente común a los dos sólidos en M . Durante el movimiento de los dos sólidos M describe trayectorias C_0 y C_1 en S_0 y S_1 respectivamente, con velocidades \vec{v}_{20}^M y \vec{v}_{21}^M tangentes a C_0 y C_1 y por tanto contenidas en el plano tangente.



De la composición de movimientos tenemos

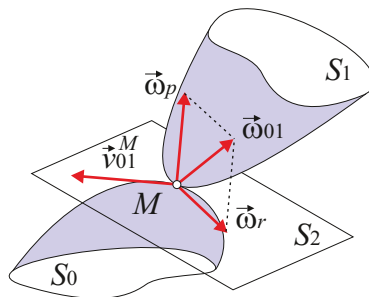
$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{20}^M + \vec{v}_{01}^M$$

lo que nos indica que \vec{v}_{01}^M , la velocidad relativa entre ambos sólidos en el punto de contacto M queda también contenida en el plano tangente común. A esta velocidad la denominamos velocidad de deslizamiento de S_0 sobre S_1 . Otra forma de expresar la condición anterior (condición de que los dos sólidos permanezcan en contacto en el punto M) es $\vec{v}_{01}^M \cdot \hat{n} = 0$ siendo \hat{n} el vector unitario normal al plano tangente común.

Si expresamos las velocidades de S_0 respecto de S_1 a través de la velocidad del punto de contacto y la velocidad de rotación $\vec{\omega}_{01}$, $((\vec{v}_{01}^M, \vec{\omega}_{01})$ grupo cinemático en M) se suele descomponer esta última en dos componentes ω_p y ω_r , una en la dirección normal y otra contenida en el plano tangente:

Rotación de pivotamiento: $\omega_p = |\vec{\omega} \cdot \hat{n}|$

Rotación de rodadura: $\omega_r = |\vec{\omega} \times \hat{n}|$



Si los sólidos **ruedan sin deslizar**, la velocidad del punto de contacto será la misma vista desde el sólido S_1 que vista desde S_0 , es decir $\vec{v}_{20}^M = \vec{v}_{21}^M$ y por lo tanto la velocidad de deslizamiento será nula, $\vec{v}_{01}^M = 0$.

7. Movimiento plano

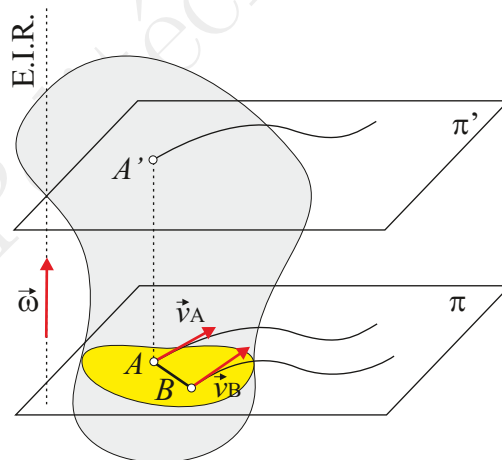
- 7.1 Características del movimiento plano.
- 7.2 Centro instantáneo de rotación. Base y ruleta.
- 7.3 Distribución de velocidades en el movimiento plano.
- 7.4 Velocidad de sucesión del centro instantáneo de rotación. Determinación gráfica.
- 7.5 Distribución de aceleraciones en el movimiento plano.
- 7.6 Circunferencia de las inflexiones y de las inversiones. Polo de aceleraciones.
- 7.7 Movimientos planos relativos. Teorema de los tres centros.
- 7.8 Perfiles conjugados. Propiedades.

Introducción

Estudiaremos aquí un caso particular de movimiento del sólido rígido de gran interés por su riqueza de aplicaciones, sobre todo en el diseño de máquinas y mecanismos.

7.1. Características del movimiento plano.

Un sólido rígido realiza un movimiento plano si todos sus puntos se mueven describiendo trayectorias contenidas en planos fijos paralelos entre si. Cualquiera de ellos recibe el nombre de plano del movimiento.



Propiedades:

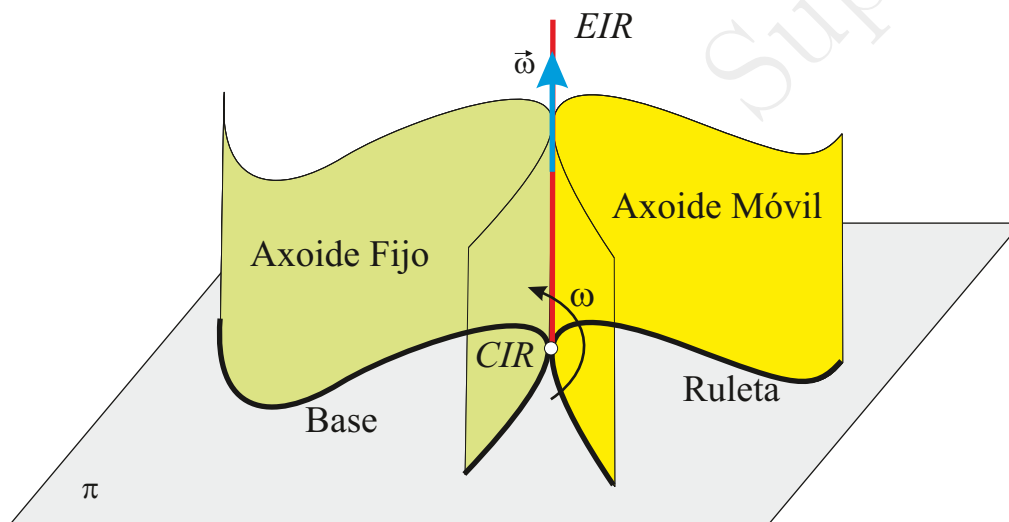
- Todos los puntos del sólido pertenecientes a un determinado plano π del movimiento tiene velocidades contenidas en dicho plano.
- $\vec{\omega}$ es siempre normal al plano del movimiento. Basta tomar dos puntos A y B del plano π , $\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$ y dado que \vec{v}_B y \vec{v}_A están contenidos en el plano, $\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$ también lo estará y por tanto $\vec{\omega}$ ha de ser normal al plano π . En el movimiento plano $\vec{\omega}$ y el EIR mantienen su dirección, la única variación de $\vec{\omega}$ se produce en su módulo; podemos tratarlo entonces como un escalar con signo.
- La velocidad de deslizamiento mínimo es nula, $v_d = 0$, dado que $\vec{v}_A \perp \vec{\omega}, \forall A$; por tanto, el movimiento plano es una rotación pura.
- Todos los planos del movimiento tienen la misma distribución de velocidades $\vec{v}_{A'} = \vec{v}_A$ porque $\overrightarrow{AA'} \parallel \vec{\omega}$. Es suficiente, por tanto, estudiar el movimiento en uno de los planos, por ejemplo el plano π , que denominaremos plano director.

7.2. Centro instantáneo de rotación. Base y ruleta.

En el movimiento plano los axoides son superficies engendradas por rectas normales al plano π . Además la velocidad de deslizamiento mínimo es nula, $v_d = 0$, por tanto el axoide móvil rueda sin deslizar sobre el axoide fijo. Definimos:

- **Base o polar fija.** Curva intersección del axoide fijo con el plano π .
- **Ruleta o polar móvil.** Curva intersección del axoide móvil con el plano π
- **Centro instantáneo de rotación (CIR).** Punto donde el EIR intersecta al plano π . Es el punto de contacto entre la base y la ruleta.

Dado que $v_d = 0$, el CIR es el único punto del plano con velocidad nula, puede describirse el movimiento plano como una rotación pura alrededor del CIR. Las distintas posiciones del CIR a lo largo del tiempo son, respecto del sistema fijo la base y respecto del móvil la ruleta. La ruleta rueda sin deslizar sobre la base.

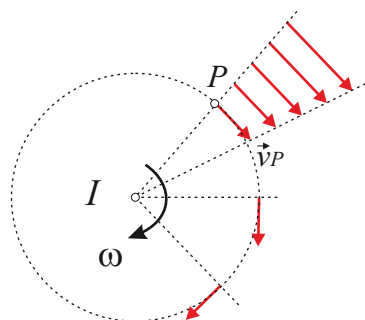


7.3. Distribución de velocidades en el movimiento plano.

Llamando I al centro instantáneo de rotación, $\vec{v}_I = 0$, y la distribución de velocidades desde el CIR queda:

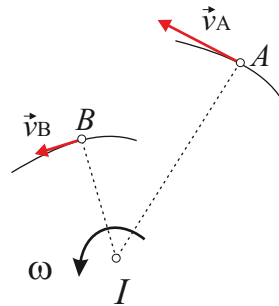
$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{IP}$$

- La dirección de \vec{v}_P es normal a \vec{IP}
- El módulo de \vec{v}_P es $v_P = \omega \cdot IP$, es decir, aumenta proporcionalmente con la distancia al CIR.
- Los puntos con la misma velocidad v_P están sobre circunferencias de radio $\frac{v_P}{\omega}$.



Consecuencias:

- El movimiento está determinado si se conoce la posición del CIR y el valor de ω
- Si en un instante dado se conocen las tangentes a las trayectorias de dos puntos, se conocerá la posición del CIR, basta trazar las perpendiculares a dichas tangentes; el punto de corte será el CIR.
- Si además se conoce la velocidad de uno de los puntos, A , el movimiento está totalmente determinado, $\omega = \frac{v_A}{IA}$



7.4. Velocidad de sucesión del centro instantáneo de rotación. Determinación gráfica.

Hemos visto que la velocidad del CIR es nula por definición, $\vec{v}_I = 0$; sin embargo durante el movimiento del sólido el CIR cambia de posición con el tiempo. Definimos entonces la **velocidad de sucesión del CIR** como la derivada respecto del tiempo de las sucesivas posiciones del CIR vistas desde el sistema fijo:

$$\vec{v}_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_I(t + \Delta t) - \vec{r}_I(t)}{\Delta t}$$

Téngase en cuenta que \vec{v}_I es la velocidad del punto del sólido que en un instante dado es el CIR, y es por tanto nula, mientras que \vec{v}_S no se corresponde con la velocidad de ningún punto del sólido, sino que es la velocidad con que se transmite "la propiedad de ser el centro instantáneo de rotación" de unos puntos a otros.

- Dirección de \vec{v}_S : La tangente común a base y ruleta.
- Sentido de \vec{v}_S : Viene determinado por el sentido de $\vec{\omega}$, es decir, por el sentido en que la ruleta rueda sobre la base.
- Módulo de \vec{v}_S : Está relacionado con ω y las posiciones de los centros de curvatura de base y ruleta, C_B y C_R , respectivamente¹:

$$\frac{v_s}{\omega} = \frac{\overline{IC_BIC_R}}{\overline{C_BC_R}}$$

FALTA FIGURA DETERMINACION GRAFICA VELOCIDAD DE SUCESION

7.5. Distribución de aceleraciones en el movimiento plano.

La aceleración de un punto P cualquiera del sólido es $\vec{a}_P = \vec{a}_O + \alpha \times \overrightarrow{OP} - \omega^2 \overrightarrow{OP}$. En el movimiento plano nos interesa obtener la distribución de velocidades desde el CIR, para ello es derivamos la expresión de la velocidad $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IP}$:

$$\vec{a}_P = \alpha \times \overrightarrow{IP} + \vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{IP}}{dt}$$

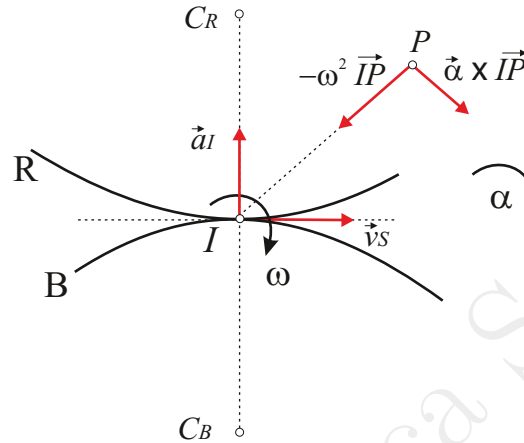
Siendo:

¹Fórmula de Euler-Savary

$$\frac{d\vec{IP}}{dt} = \frac{d\vec{OP}}{dt} - \frac{d\vec{OI}}{dt} = \vec{v}_P - \vec{v}_s$$

de manera que $\vec{a}_P = \alpha \times \vec{IP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{IP}) - \vec{\omega} \times \vec{v}_s$ y podemos escribir la distribución de aceleraciones desde el CIR como:

$$\vec{a}_P = \alpha \times \vec{IP} - \omega^2 \vec{IP} - \vec{\omega} \times \vec{v}_s \quad (7.2)$$



Analizando cada uno de los términos de la ecuación 7.2 tenemos:

- $\alpha \times \vec{IP}$ es normal a \vec{IP} y por tanto paralela a \vec{v}_P . Es la componente tangencial de la aceleración en el movimiento de P relativo al CIR. Su módulo es proporcional a la distancia del punto P al CIR.
- $-\omega^2 \vec{IP}$ es normal a la trayectoria de P y dirigida al CIR. Es la componente normal del movimiento de P respecto de I . Su módulo es proporcional a la distancia entre P y el CIR.
- $-\vec{\omega} \times \vec{v}_s$ es igual para todos los puntos del sólido. Es la aceleración del centro instantáneo de rotación, es decir, $\vec{a}_I = \frac{d\vec{v}_I}{dt} = -\vec{\omega} \times \vec{v}_s$. Este vector forma un ángulo de 90° con ω en el sentido contrario al de la rotación.

7.6. Circunferencia de las inflexiones y de las inversiones. Polo de aceleraciones.

Si para el punto P de la figura anterior determinamos las componentes intrínsecas de la aceleración nos encontramos que

$$a_T = \alpha \vec{IP} - \omega v_s \cos \varphi$$

$$a_N = \omega^2 \vec{IP} - \omega v_s \sin \varphi$$

Siendo φ el ángulo formado entre (\vec{IP}, \vec{v}_s)

El lugar geométrico de los puntos P con **aceleración tangencial nula** es:

$$a_T = 0 \Rightarrow \vec{IP} = \frac{\omega \cdot v_s}{\alpha} \cos \varphi$$

\Rightarrow circunferencia que pasa por I tiene centro en la recta que contiene a \vec{v}_s ($\varphi = 0$) y diámetro $D_{inv} = \frac{\omega \cdot v_s}{\alpha}$

Se le llama circunferencia de las **INVERSIONES** o **ESTACIONARIA** porque $a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow$ se invierte la velocidad.

El lugar geométrico de los puntos con **aceleración normal nula** es:

$$a_N = 0 \Rightarrow \vec{IP} = \frac{v_s}{\omega} \sin \varphi$$

\Rightarrow circunferencia que pasa por I tiene centro en la normal a \vec{v}_s ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) y diámetro $D_{inf} = \frac{v_s}{\omega}$



Se le llama circunferencia de las **INFLEXIONES** ya que $a_N = \frac{v^2}{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = \infty$ punto de inflexión. Las dos circunferencias se cortan en un punto llamado **POLO DE ACELERACIONES**, que es el único punto con aceleración nula.

$$\left. \begin{aligned} a_T = 0 &\Rightarrow \alpha \overrightarrow{IP} = \omega \cdot v_S \cdot \cos \varphi \\ a_N = 0 &\Rightarrow \omega^2 \overrightarrow{IP} = \omega \cdot v_S \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} (\omega \cdot v_S)^2 &= (\alpha^2 + \omega^4) \overrightarrow{IP}^2 \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\omega^2}{\alpha} \end{aligned} \right.$$

Llamando Γ al polo de aceleraciones, sus coordenadas polares son:

$$\overline{I\Gamma} = \Gamma = \frac{\omega \cdot v_S}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega^2}{\alpha} \right)$$

COMENTARIOS:

- El **cir** también está en las dos circunferencias aunque $\vec{a}_I = -\vec{\omega} \times \vec{v}_S \neq 0$
 I está en las dos circunferencias sin tener aceleración nula porque el polo ($r = 0$) es un punto singular. Además como $\vec{v}_I = 0$ no existe tangente ni normal.
- Dependiendo del sentido de ω y α cambia la posición de las circunferencias.
Nota: El vector \vec{a}_I indica la dirección en la que se encuentra la Circunferencia de Inversiones.
- Si $\omega = cte$, $\alpha = 0 \Rightarrow$ la circunferencia de las inversiones ($a_T = 0$) se convierte en la recta normal a \vec{v}_S pasando por I .
El polo de aceleraciones se encuentra sobre esta recta a una distancia D_{inf} del **cir**.

7.7. Movimientos planos relativos. Teorema de los tres centros.

Consideremos tres sistemas: S_1, S_2 y S_3 que se mueven unos respecto de los otros con movimientos planos de velocidades de rotación ω_{21}, ω_{32} y ω_{31} y centros instantáneos I_{21}, I_{32} e I_{31} ; entonces se cumple:

- Los tres centros instantáneos están alineados.
-

$$\frac{\overline{I_{32}I_{31}}}{\omega_{21}} = \frac{\overline{I_{12}I_{13}}}{\omega_{23}} = \frac{\overline{I_{23}I_{21}}}{\omega_{31}}$$

Demostración: Tomamos un punto P cualquiera del plano

$$\vec{v}_{31}^P = \vec{v}_{32}^P + \vec{v}_{21}^P$$

$$\vec{\omega}_{31} \times \overrightarrow{I_{31}P} = \vec{\omega}_{32} \times \overrightarrow{I_{32}P} + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{I_{21}P}$$

Si se toma P en la recta que contiene a I_{32} y a $I_{21} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{I_{32}P} \parallel \overrightarrow{I_{21}P}$$

y como todas las $\vec{\omega}$ son paralelas \Rightarrow

$$\overrightarrow{I_{31}P} \parallel \overrightarrow{I_{32}P} \parallel \overrightarrow{I_{21}P} \Rightarrow$$

los tres centros están alineados.

Como las tres velocidades son paralelas

$$\vec{\omega}_{31} \cdot \overrightarrow{I_{31}P} = \vec{\omega}_{32} \cdot \overrightarrow{I_{32}P} + \vec{\omega}_{21} \cdot \overrightarrow{I_{21}P}$$

$$\text{Si } P \text{ coincide con } I_{31} \Rightarrow \omega_{32} \cdot \overline{I_{32}I_{31}} = \omega_{21} \cdot \overline{I_{21}I_{31}} = \omega_{21} \cdot \overline{I_{12}I_{13}}$$

$$\text{Si } P \text{ coincide con } I_{21} \Rightarrow \omega_{31} \cdot \overline{I_{31}I_{21}} = \omega_{32} \cdot \overline{I_{32}I_{21}} = \omega_{32} \cdot \overline{I_{23}I_{21}}$$

7.8. Perfiles conjugados. Propiedades.

Dos curvas, una del sistema fijo γ_f y otra del móvil γ_m , son **PERFILES CONJUGADOS** si en el movimiento del sólido se mantiene con un único punto de tangencia.

Propiedades:

- El perfil conjugado fijo de una curva del plano móvil será la envolvente de las sucesivas posiciones del perfil conjugado móvil.
- La velocidad del punto del sólido que coincide con el punto de contacto A , $\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{IA}$ y además es tangente a los dos perfiles (para que se mantengan tangentes).

Por tanto \vec{IA} es la normal común a los dos perfiles conjugados cuyo punto de contacto es A . Es decir:

$$\vec{v}_A \perp \vec{IA}$$

\vec{v}_A tangente común

Por tanto \vec{IA} normal común

- El perfil conjugado móvil rueda (ω) y desliza (v_A) sobre el fijo. La velocidad de deslizamiento solo es cero cuando A coincide con I .

8. Movimiento esférico

- 8.1 Movimiento esférico. Conos de Poincot.
- 8.2 Distribución de velocidades en el movimiento esférico.
- 8.3 Distribución de aceleraciones en el movimiento esférico.
- 8.4 Ángulos de Euler.
- 8.5 Rotaciones de Euler.

8.1. Movimiento esférico. Conos de Poincot.

Existe un punto del sólido que está permanentemente fijo, O .

Este punto tiene siempre velocidad nula, es decir:

No hay deslizamiento.

El \mathbf{eir} pasa siempre por este punto.

El resto de los puntos del sólido describirán trayectorias contenidas en la superficie de una **ESPERA** con centro en O .

Los axoides serán *conos* con vértice en el punto fijo. Reciben el nombre de **CONOS DE POINSCOT**.

La intersección entre la esfera correspondiente al movimiento de un punto P y los axoides fijo y móvil se llaman respectivamente **HERPOLOIDE** y **POLOIDE**. Estas curvas son tangentes a I , punto de intersección de la esfera con el \mathbf{eir} .

Analogamente al caso de movimiento plano:

- El poloide rueda sin deslizar sobre el herpoloide.
- Dos curvas de la esfera son perfiles conjugados...

8.2. Distribución de velocidades en el movimiento esférico.

$$\begin{aligned} \vec{v}_P &= \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} \\ v_P &= \omega \cdot \overrightarrow{OP} \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

La velocidad depende de la distancia al punto fijo y del ángulo formado por \overrightarrow{OP} y $\vec{\omega}$

8.3. Distribución de aceleraciones en el movimiento esférico.

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - \omega^2 \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

Siendo $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

Ahora $\dot{\vec{\omega}}$ y $\vec{\omega}$ no serán en general paralelas.

8.4. Ángulos de Euler.

Consideremos dos sistemas coordenados, uno fijo (x, y, z) y otro ligado al sólido en movimiento (x_1, x_2, x_3) . Los dos sistemas tienen origen común en el punto fijo O .

Podemos expresar la orientación del sistema móvil respecto del fijo mediante tres rotaciones sucesivas con los tres ángulos de Euler:

- 1º) rotación de ángulo ψ alrededor de Oz , **precesión**. $\psi \in [0, 2\pi]$
- 2ª) rotación de ángulo θ alrededor de la posición que ocupa Ox_1 en ese instante (línea nodal), **nutación**. $\theta \in [0, \pi]$
- 3ª) rotación de ángulo φ alrededor de Ox_3 , **rotación propia**. $\varphi \in [0, 2\pi]$

Las coordenadas de cualquier vector \mathbf{v} en el sistema girado se obtienen en función de las coordenadas en el sistema fijo por:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

siendo \mathbf{A} la matriz de rotación

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esta matriz \mathbf{A} es ortogonal $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}$ y su determinante es igual a $+1$. Su inversa será por tanto la traspuesta $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t$ donde $(\mathbf{A}^t)_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$. Por tanto

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \mathbf{A}^t \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Eje de rotación y ángulo girado Los tres giros de Euler equivalen a una única rotación de ángulo ϕ alrededor de un eje definido por el vector unitario \mathbf{u} , siendo

$$\cos \frac{\phi}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}$$

y

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \\ u_2 = \frac{\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \\ u_3 = \frac{\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \end{cases}$$



8.5. Rotaciones de Euler.

Utilizando los ángulos de Euler para definir la orientación del sólido, su velocidad angular puede descomponerse en tres rotaciones concurrentes que son las rotaciones de Euler

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{u}_z + \dot{\theta} \mathbf{u}_n + \dot{\varphi} \mathbf{u}_3$$

Así, las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ se pueden poner en el sistema fijo en función de las rotaciones de Euler como:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \psi & \sin \psi \sin \theta \\ 0 & \sin \psi & -\cos \psi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

o en el sistema móvil

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Invirtiendo las matrices se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \psi / \tan \theta & \cos \psi / \tan \theta & 1 \\ \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ \sin \psi / \sin \theta & -\cos \psi / \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi / \sin \theta & \cos \varphi / \sin \theta & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi / \tan \theta & -\cos \varphi / \tan \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

9. Equilibrio del sólido rígido

- 9.1 Principio del trabajo virtual. Aplicación a la estática.
9.2 Energía potencial debida a un trabajo virtual.
9.3 Energía potencial y condiciones de equilibrio. Aplicación a casos representativos.
9.4 Criterios de estabilidad del equilibrio.

Introducción

Hasta ahora hemos analizado el equilibrio de un sistema ligado aislándolo y escribiendo las ecuaciones vectoriales de equilibrio para cada componente como si fuera libre. Este método se suele utilizar cuando la posición de equilibrio es conocida y se quiere determinar el valor de alguna fuerza que se desconoce. Sin embargo, en muchas situaciones nos encontramos con sólidos ligados cuyas partes pueden moverse unas respecto de las otras de manera que son posibles varias configuraciones de equilibrio. En estos casos el método vectorial, aunque válido, no suele ser el más adecuado para resolver el problema. Un método alternativo basado una magnitud escalar, el trabajo, es más útil; proporciona una visión más profunda del comportamiento de los sistemas mecánicos y permite además analizar la estabilidad de los sistemas en equilibrio. Este método se denomina *principio del trabajo virtual*².

9.1. Principio del trabajo virtual. Aplicación a la estática.

Definimos en primer lugar algunos conceptos:

- Desplazamiento virtual $\delta \vec{r}_\alpha$: Es un desplazamiento infinitesimal de la partícula α compatible con las ligaduras. El término virtual se entiende como ficticio, ya que si el sistema está en equilibrio no está permitido ningún movimiento.
- Trabajo virtual δW : Es el trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento virtual, $\delta \vec{r}_\alpha$.

Principio del trabajo virtual: Un sistema está en equilibrio cuando, para cualquier desplazamiento virtual, el trabajo realizado por las fuerzas que actúan es nulo:

$$\text{EQUILIBRIO} \Leftrightarrow \delta W = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = 0 \quad \forall \delta \vec{r}_{\alpha}$$

9.2. Energía potencial debida a un trabajo virtual.

Decimos que un sistema de partículas es conservativo si la fuerza que actúa sobre cada una de las partículas es conservativa: $\forall \alpha, \vec{F}_{\alpha} = -\vec{\nabla}_{\alpha} V$, siendo V una función escalar que depende únicamente de las posiciones de las partículas, $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{\alpha}, \dots)$. Esta función se denomina *potencial* o *energía potencial* del sistema.

El trabajo virtual en un sistema conservativo es :

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^N -\vec{\nabla}_{\alpha} V \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = - \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_{\alpha}} \delta x_{\alpha} + \frac{\partial V}{\partial y_{\alpha}} \delta y_{\alpha} + \frac{\partial V}{\partial z_{\alpha}} \delta z_{\alpha} \right) = -\delta V$$

²Se puede tomar como un principio si se considera la estática de forma aislada si no, el equilibrio no es más que una solución particular de movimiento.

9.3. Energía potencial y condiciones de equilibrio. Aplicación a casos representativos.

Las posiciones de equilibrio corresponderán a los valores estacionarios de V . De manera que la condición necesaria y suficiente para que un sistema conservativo esté en equilibrio es:

$$EQUILIBRIO \Leftrightarrow \delta W = 0, \forall \delta \vec{r}_\alpha \Leftrightarrow Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \forall j$$

$\delta \vec{r}_\alpha$ es el desplazamiento virtual de la partícula α , es un desplazamiento infinitesimal y compatible con las ligaduras. Virtual se refiere a que es un desplazamiento ficticio ya que si el sistema está en equilibrio permanecería en reposo.

δW es el trabajo virtual.

Aplicación a casos representativos.

Partícula ligada a una curva C (sin rozamiento)

1 grado de libertad (s) \rightarrow 1 ec. de movimiento \rightarrow 1 ec. de equilibrio

i) Principio de liberación:

$$\vec{F} + \vec{R} = 0$$

\vec{R} impide el movimiento transversal a la curva.

En el triedro intrínseco de la curva C escribiríamos:

$$\vec{R} = R_N \cdot \vec{N} + R_B \cdot \vec{B}$$

No tiene componente tangencial.

Entonces,

$$\begin{cases} F_T = 0 & (1) \\ F_N + R_N = 0 & (2) \\ F_B + R_B = 0 & (2) \end{cases}$$

Dónde,

- (1) es la ecuación de equilibrio. Si $F_T = 0$ el sistema está en equilibrio cualquiera que sea F_N , F_B
- (2) y (3) determinan el valor de R

ii) Principio de Trabajo Virtual:

$$\delta W = 0$$

En cualquier desplazamiento compatible con la ligadura.

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

Y a lo largo de la curva:

$$\delta \vec{r} = \delta s \cdot \vec{T}$$

Entonces,

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{T} \delta s = F_T \cdot \delta s = 0, \forall \delta s \Rightarrow F_T = 0$$

Sólido Rígido (Libre)

Por definición $|\vec{AB}| = cte \implies 6$ grados de libertad.

Esta ligadura está asociada con unas fuerzas internas que reaccionan al intento de variar la distancia entre los puntos:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \parallel \vec{AB}$$

Veamos que esta característica conduce a que el trabajo virtual realizado por las fuerzas internas es nulo. Para ello tendremos en cuenta la ley de distribución de velocidades:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

Multiplicando por dt

$$d\vec{r}_B = d\vec{r}_A + \vec{\omega} dt \times \vec{AB} \Rightarrow \delta\vec{r}_A = \delta\vec{r}_B + \delta\vec{\Phi} \times \vec{AB}$$

$$\vec{F}_{AB} \cdot \delta\vec{r}_A + \vec{F}_{BA} \cdot \delta\vec{r}_B = \vec{F}_{AB} (\delta\vec{r}_A - \delta\vec{r}_B) = \vec{F}_{AB} \cdot (\delta\vec{\Phi} \times \vec{AB}) = 0$$

Y podemos escribir que en un sólido

$$\delta W = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \delta\vec{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} \cdot \delta\vec{r}_{\alpha}$$

Mas aún,

$$\delta\vec{r}_{\alpha} = \delta\vec{r}_O + \delta\vec{\Phi} \times \vec{O}\alpha$$

$$\delta W = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} (\delta\vec{r}_O + \delta\vec{\Phi} \times \vec{O}\alpha)$$

$$\delta W = \left(\sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} \right) \cdot \delta\vec{r}_O + \left(\sum_{\alpha} \vec{O}\alpha \times \vec{F}_{\alpha}^{ext} \right) \cdot \delta\vec{\Phi}$$

$$\text{Equilibrio} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta W = 0 \\ \forall \delta\vec{r}_O, \delta\vec{\Phi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{F}^{ext} = 0 \\ \vec{M}_O^{ext} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 6 \text{ ecuaciones de equilibrio}$$

9.4. Criterios de estabilidad del equilibrio.

Además, el potencial permite analizar la **estabilidad de las posiciones de equilibrio**. El concepto de estabilidad consiste en garantizar si ante pequeñas perturbaciones respecto de la posición de equilibrio se mantiene el movimiento próximo a dicha configuración o, si por el contrario, se aleja indefinidamente de la misma.

- Las posiciones de equilibrio correspondientes a un mínimo de V son posiciones de equilibrio estable.
- Las posiciones correspondientes a un máximo o punto estacionario de V son posiciones de equilibrio inestable.

10. Equilibrio de hilos

- 10.1 Fuerzas distribuidas sobre hilos ideales.
- 10.2 Equilibrio de hilos de peso despreciable con cargas repartidas. Ecuación diferencial de equilibrio de un hilo.
- 10.3 Ecuaciones intrínsecas del equilibrio de un hilo.
- 10.4 Integrales primeras de las ecuaciones de equilibrio de un hilo.
- 10.5 Equilibrio de un hilo bajo un sistema de fuerzas paralelas.
- 10.6 Equilibrio de hilos de peso despreciable con cargas concentradas.

Introducción

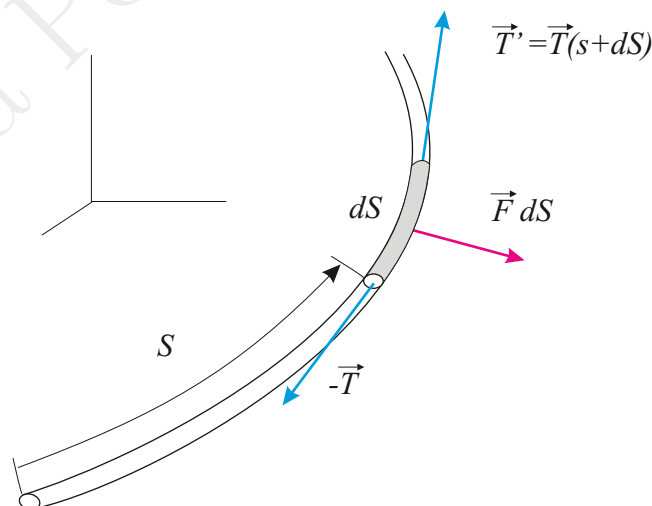
Los cables son sólidos deformables con una sección mucho menor que su longitud. Cuando sobre ellos actúa una fuerza, alcanzan el equilibrio produciendo una tensión muy grande y flexionándose.

Se llama hilo o cable ideal al que no ofrece resistencia a la flexión y no sufre alargamiento alguno (inextensible). La única fuerza interna es la tensión que es siempre normal a la sección y por tanto en la dirección tangente a la curva que adopta el hilo. Esta tensión varía en intensidad a lo largo del hilo y será necesario determinarla a la vez que se obtiene la ecuación de la curva que adopta el hilo.

10.1. Fuerzas distribuidas sobre hilos ideales.

Consideremos un elemento de longitud de arco dS y sea \vec{F} la fuerza externa por unidad de longitud que actúa sobre ese elemento. En el equilibrio la tensión en los extremos se equilibra con la fuerza exterior: $\vec{T}' + \vec{F} dS - \vec{T} = 0$ y como $\vec{T}' = \vec{T}(S + dS) = \vec{T}(S) + d\vec{T}$, la **ecuación de equilibrio** queda

$$d\vec{T} + \vec{F} dS = 0$$



10.2. Equilibrio de hilos de peso despreciable con cargas repartidas. Ecuación diferencial de equilibrio de un hilo.

La ecuación de equilibrio anterior se puede escribir en *CARTESIANAS* usando:

$$\vec{T} = T \cdot \hat{T}$$

$$\hat{T} = \frac{dx \cdot \hat{i} + dy \cdot \hat{j} + dz \cdot \hat{k}}{dS}$$

$$\left. \begin{aligned} d\left(T \frac{dx}{dS}\right) + F_x \cdot dS &= 0 \\ d\left(T \frac{dy}{dS}\right) + F_y \cdot dS &= 0 \\ d\left(T \frac{dz}{dS}\right) + F_z \cdot dS &= 0 \end{aligned} \right\}$$

⇒ 3 ecuaciones y 4 incógnitas ⇒

- $\vec{r}(S)$ curva hilo
- $T(S)$ tensión

Pero tenemos otra ecuación:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dS}\right)^2 = \hat{T}^2 = 1 = \left(\frac{dx}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dS}\right)^2$$

Como las ecuaciones son de 2º orden en las coordenadas tendrían seis constantes arbitrarias. Las formas más corrientes de dar las 6 condiciones de contorno son:

- 1) $x, y, z, \frac{dx}{dS}, \frac{dy}{dS}, \frac{dz}{dS}$ en un punto de la curva.
- 2) Las coordenadas en dos puntos y la longitud de la cuerda.
- 3) Un extremo sobre una superficie $f(x, y, z)$ y normal a ella $\vec{\nabla}f \parallel \frac{d\vec{r}}{dS}$
- 4) Un extremo sobre una curva $\begin{cases} f(x, y, z) \\ \varphi(x, y, z) \end{cases}$ y normal a ella $(\vec{\nabla}f \times \vec{\nabla}\varphi) \cdot \frac{d\vec{r}}{dS} = 0$

10.3. Ecuaciones intrínsecas del equilibrio de un hilo.

También pueden escribirse las ecuaciones de equilibrio como:

$$\frac{d\vec{T}}{dS} + \vec{F} = 0 \cdot \frac{d}{dS} (T \cdot \hat{T}) + \vec{F} = \frac{dT}{dS} \cdot \hat{T} + T \cdot \frac{d\hat{T}}{dS} + \vec{F}$$

Recordando las fórmulas de Frenet:

$$\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{dS}, \quad \frac{d\hat{T}}{dS} = \frac{\hat{N}}{\rho} \quad \text{y} \quad \hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} \quad \text{Con } \hat{T}, \hat{N} \text{ y } \hat{B} \text{ TRIEDRO INTRÍNSECO.}$$

$\hat{T}, \hat{\nu} \rightarrow$ plano OSCULADOR; $\hat{\nu}, \hat{\beta} \rightarrow$ NORMAL; $\hat{\beta}, \hat{\tau} \rightarrow$ RECTIFICANTE

Y descomponiendo

$$\vec{F} = F_T \cdot \hat{\tau} + F_N \cdot \hat{\nu} + F_B \cdot \hat{\beta}$$

Tenemos:

$$\frac{dT}{dS} + F_\tau = 0$$

$$\frac{T}{\rho} + F_\nu = 0$$

$$F_\beta = 0$$

Que son las **Ecuaciones Intrínsecas de Equilibrio**

$F_\beta = 0 \Rightarrow$ hilo está en el plano osculador.

Podemos calcular \vec{F} conocida T y la ecuación de la curva.

10.4. Integrales primeras de las ecuaciones de equilibrio de un hilo.

i) \vec{F} es siempre ortogonal a una dirección fija \hat{u}

$$\hat{u} \cdot d\vec{T} + \hat{u} \cdot \vec{F} dS = 0 = \hat{u} \cdot d\vec{T} = d(\hat{u} \cdot \vec{T}) = 0$$

La proyección de \vec{T} sobre \hat{u} permanece constante.

ii) \vec{F} paralela a una dirección fija \hat{u} :

$$0 = \hat{u} \times (d\vec{T} + \vec{F} \cdot dS) = \hat{u} \times d\vec{T} = d(\hat{u} \times \vec{T}) = 0$$

La tensión está contenida en un plano coplanario a \hat{u} .

iii) \vec{F} coplanaria a una recta de dirección \hat{u} : Tomando momentos desde un punto de la recta

$$\vec{r} \times (d\vec{T} + \vec{F} \cdot dS) = d(\vec{r} \times \vec{T}) + \vec{r} \times \vec{F} dS = 0$$

Y multiplicando por \hat{u}

$$d[(\vec{r} \times \vec{T}) \cdot \hat{u}] = 0$$

El momento de la tensión sobre la recta es constante.

iv) \vec{F} centra, sea O el centro del campo

$$\vec{r} \times (d\vec{T} + \vec{F} \cdot dS) = 0 = \vec{r} \times d\vec{T}$$

Y como $\vec{T} = T \cdot \hat{\tau}$ con $\hat{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dS}$

$$d(\vec{r} \times \vec{T}) = \vec{r} \times d\vec{T} + \underbrace{d\vec{r} \times \vec{T}}_0$$

Y entonces,

$$d(\vec{r} \times \vec{T}) = 0$$

El momento de la tensión desde el centro del campo es constante \Rightarrow curva plana.

v) $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ deriva de un potencial (por unidad de longitud)

$$\vec{F} \cdot dS = -\vec{\nabla}V \cdot dS$$

$$\hat{\tau} (d\vec{T} + \vec{F} dS) = \hat{\tau} \left[(dT) \hat{\tau} + \frac{T}{\rho} dS \vec{\nu} - \vec{\nabla}V \cdot dS \right] = dT - \frac{dV}{dS} \cdot dS = 0$$

$$T = V + cte$$

La tensión es igual al potencial, salvo una constante.

10.5. Equilibrio de un hilo bajo un sistema de fuerzas paralelas.

Si todas las fuerzas \vec{F} son paralelas a una dirección fija \hat{u} , $\vec{F} \times \hat{u} = 0$ y multiplicando vectorialmente la ecuación de equilibrio por el vector unitario se tiene,

$$0 = \hat{u} \times (d\vec{T} + \vec{F} dS) = \hat{u} \times d\vec{T} = d(\hat{u} \times \vec{T})$$

por lo que $\hat{u} \times \vec{T} = cte$ lo que indica que la tensión y el vector unitario \hat{u} son coplanarios y ese mismo plano contiene la curva que adopta el hilo.

Sea Oxy el plano que contiene al hilo y Oy la dirección de la fuerza, $\vec{F} = F\hat{j}$, las componentes de la ecuación de equilibrio quedan:

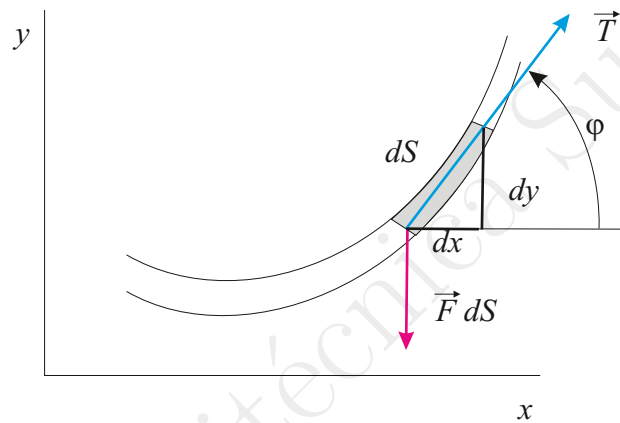
$$\begin{aligned}dT_x &= 0 \\dT_y + FdS &= 0\end{aligned}$$

De la primera se obtiene que la componente de la tensión en la dirección perpendicular a la fuerza no cambia, $T_x = cte = T_0$. Para la segunda ecuación utilizamos que la pendiente de la curva es la derivada, $y' = dy/dx = \tan \varphi$ y puesto que la tensión es tangente a la curva, $\tan \varphi = T_y/T_x$. Despejando T_y tenemos

$$T_y = T_x y' = T_0 y'$$

que conduce a

$$0 = \frac{d(T_0 y') + FdS}{dx} = T_0 y'' + F \frac{dS}{dx} = T_0 y'' + F \sqrt{1 + (y')^2}$$



10.6. Equilibrio de hilos de peso despreciable con cargas concentradas.

Así, para un hilo con **cargas concentradas** y de peso despreciable:

$$\vec{F} \cdot dS = -P \cdot \hat{j}$$

La ecuación de equilibrio es:

$$T_0 (tg\varphi_1 - tg\varphi_2) - P = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \overbrace{T_1 \cos \varphi_1 + T_2 \cos \varphi_2}^{T_0} &= 0 \\ T_1 \sin \varphi_1 + T_2 \sin \varphi_2 &= P \end{aligned} \right\} \Rightarrow tg\varphi_1 = tg\varphi_2 + \frac{P}{T_0}$$

Con

$$\begin{cases} T_{1x} = T_{2x} = T_0 \\ T_{1y} = T_{2y} + P \end{cases}$$



11. Equilibrio de hilos bajo la acción de su propio peso: catenaria

11.1 Cable bajo la acción de su propio peso. Catenaria.

11.2 Elementos de la catenaria: Tensiones en los extremos y longitud total. Propiedades y métodos de obtención bajo condiciones dadas.

11.1. Cable bajo la acción de su propio peso. Catenaria.

En este caso la fuerza es el peso del hilo $\vec{F}dS = -qdS\hat{j}$, donde q es el peso por unidad de longitud del hilo. La ecuación de equilibrio queda

$$T_0 \frac{dy'}{dx} - q\sqrt{1+(y')^2} = 0 \Rightarrow \int \frac{dy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \int \frac{q}{T_0} dx \Rightarrow \operatorname{arsenh}(y') = \frac{q}{T_0}x + C_1$$

integrando nuevamente se obtiene

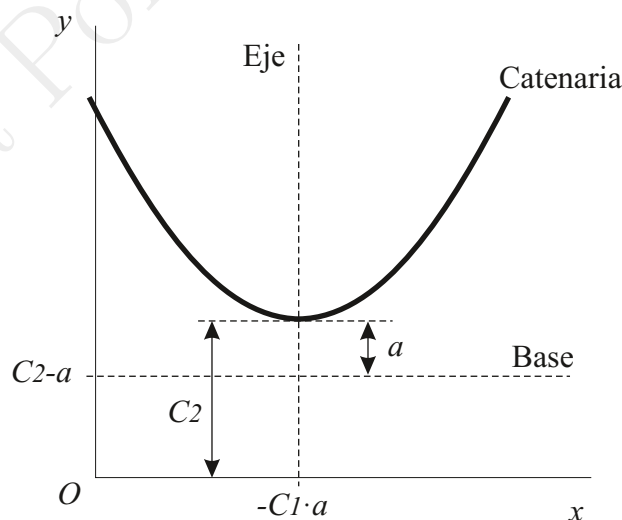
$$y = \frac{T_0}{q} \cosh\left(\frac{q}{T_0}x + C_1\right) + C_2$$

que es la ecuación de la catenaria.

Para simplificar la ecuación de la curva se suele cambiar el origen de las coordenadas de manera que el eje de ordenadas pase por el punto de pendiente nula y este se encuentre a una altura $a = T_0/q$ del eje de abscisas. Se dice que la catenaria está referida a su eje y a su base y la ecuación queda como

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

La constante $a = T_0/q$ que tiene dimensiones de longitud se conoce por parámetro de la catenaria.



11.2. Elementos de la catenaria: Tensiones en los extremos y longitud total. Propiedades y métodos de obtención bajo condiciones dadas.

La *tensión de la cuerda* se obtiene de la derivada de la curva:

$$T = \sqrt{1+(y')^2} \cdot T_0 = \sqrt{1 + \left[\sinh\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2} \cdot a \cdot q = a \cdot q \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = q \cdot y$$

$$T = q \cdot y$$



El valor mínimo se obtiene para $y = a$, por tanto: $T_{min} = q \cdot a = T_0$

Nótese que $\vec{F} = -q \cdot \hat{j} = -\vec{\nabla}V$ con $V = q \cdot y + cte \Rightarrow T = V + cte$

La longitud de una de las ramas de la catenaria (longitud de arco), se obtiene de forma similar:

$$S = \int_0^x \frac{dS}{dx} dx = \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^x \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx = a \cdot \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$S = a \cdot \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Que está relacionada con la tensión vertical:

$$T_y = \sqrt{T^2 - T_x^2} = \sqrt{T^2 - (q \cdot a)^2} = q \cdot a \cdot \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$T_y = q \cdot S$$

Sobre las condiciones de contorno

Consideraremos por ejemplo la catenaria:

$$Y(x) = \frac{T_0}{q} \cosh\left(\frac{q}{T_0}x + C_1\right) + C_2$$

$$Y'(x) = \sinh\left(\frac{q}{T_0}x + C_1\right)$$

$$T(x) = T_0 \sqrt{1 + (Y')^2} = T_0 \cosh\left(\frac{q}{T_0}x + C_1\right)$$

$$S(x_1, x_2) = \frac{T_0}{q} \left[\sinh\left(\frac{q}{T_0}x_2 + C_1\right) - \sinh\left(\frac{q}{T_0}x_1 + C_1\right) \right]$$

Todo depende de 4 constantes: q, T_0, C_1 y C_2

$$\begin{aligned} Y(x) &\rightarrow \frac{T_0}{q}, C_1, C_2 \\ Y'(x) &\rightarrow \frac{T_0}{q}, C_1, \\ T(x) &\rightarrow T_0, \frac{T_0}{q}, C_1 \\ S &\rightarrow \frac{T_0}{q}, C_1, \end{aligned}$$

1)

$$\left. \begin{aligned} Y(A), Y(B), S(A, B) \\ Y(A), Y(B), Y'(C) \end{aligned} \right\} \text{ curva}$$

(La tensión necesita q)

2)

$$Y(A), Y'(A), T(A)$$

- Curva
- Tensión



Propiedades de las funciones hiperbólicas

Definición:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{tanh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\operatorname{cosh}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Representación Gráfica:

Propiedades:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{senh}(ix) = i \operatorname{sen}(x) & \operatorname{cosh}(ix) = \cos(x) & \operatorname{tanh}(ix) = i \tan(x) \\ \operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x) & \operatorname{cosh}(-x) = \operatorname{cosh}(x) & \operatorname{tanh}(-x) = -\operatorname{tanh}(x) \\ \operatorname{senh}(0) = 0 & \operatorname{cosh}(0) = 1 & \operatorname{tanh}(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{senh}(x) = \pm\infty & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{cosh}(x) = \infty & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{tanh}(x) = \pm 1 \\ \frac{d}{dx} [\operatorname{senh}(x)] = \operatorname{cosh}(x) & \frac{d}{dx} [\operatorname{cosh}(x)] = \operatorname{senh}(x) & \frac{d}{dx} [\operatorname{tanh}(x)] = \frac{1}{\operatorname{cosh}^2(x)} \\ \operatorname{senh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots & \operatorname{cosh}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots & \operatorname{tanh}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} e^{\pm x} = \operatorname{cosh}(x) \pm \operatorname{senh}(x) & 1 = \operatorname{cosh}^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) \\ \operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh}(x) \operatorname{cosh}(y) \pm \operatorname{cosh}(x) \operatorname{senh}(y) & \operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh}(x) \operatorname{cosh}(x) \\ \operatorname{cosh}(x \pm y) = \operatorname{cosh}(x) \operatorname{cosh}(y) \pm \operatorname{senh}(x) \operatorname{senh}(y) & \operatorname{cosh}(2x) = \operatorname{cosh}^2(x) + \operatorname{senh}^2(x) \end{array}$$

Funciones inversas:

$$\operatorname{arcsenh}(x) = \ln \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right] \quad \operatorname{arccosh}(x) = \pm \ln \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right] \quad \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1+x}{1-x} \right]$$

Propiedades de las funciones inversas:

$$\begin{array}{lll} \frac{d}{dx} [\operatorname{arcsenh}(x)] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} & \frac{d}{dx} [\operatorname{arccosh}(x)] = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} & \frac{d}{dx} [\operatorname{arctanh}(x)] = \frac{d}{dx} [\operatorname{arcoth}(x)] = \frac{1}{1-x^2} \\ \operatorname{cosh} [\operatorname{arcsenh}(x)] = \sqrt{x^2 + 1} & \operatorname{senh} [\operatorname{arccosh}(x)] = \pm \sqrt{x^2 - 1} & \operatorname{tanh} [\operatorname{arcoth}(x)] = \operatorname{coth} [\operatorname{arctanh}(x)] = \frac{1}{x} \end{array}$$

**12. Otras configuraciones de hilos reales**

- 12.1 Equilibrio de hilos con carga repartida según la abscisa. Cable parabólico.
 12.2 Hilo de igual resistencia. Figura de equilibrio y vano máximo.
 12.3 Equilibrio de un hilo sobre una superficie sin rozamiento.
 12.4 Equilibrio de un hilo sobre una superficie con rozamiento. Aplicación al caso de poleas y correas de transmisión.

12.1. Equilibrio de hilos con carga repartida según la abscisa. Cable parabólico.

En este caso,

$$\vec{F} \cdot dS = -P \cdot dx \cdot \hat{j}$$

Con $P =$ fuerza / unidad de longitud en Ox . Y entonces,

$$T_0 \cdot dy' - p \cdot dx = 0 \Rightarrow y'' = P/T_0 = cte = \frac{1}{T_0}$$

Integrando dos veces:

$$y = \frac{P}{2T_0}x^2 + A \cdot x + B$$

Es una **Parábola**.

Eligiendo como origen el mínimo de la parábola,

$$y(x) = \frac{Px^2}{2T_0}$$

El cable parabólico es de gran importancia en construcción, por ejemplo los puentes colgantes o los arcos bajo carga uniforme:

El arco parabólico bajo carga uniforme está sometido a compresión.

Para un arco parabólico de luz L y flecha h :

$$h = \frac{P}{2T_0} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{P}{8T_0} \cdot L^2$$

O bien,

$$T_0 = \frac{P \cdot L^2}{8h}$$

La tensión en cualquier punto:

$$\left. \begin{aligned} T_x &= T_0 \\ T_y &= T_x \cdot \operatorname{tg} \varphi = T_x \cdot \frac{dy}{dx} = T_0 \cdot \frac{Px}{T_0} = Px \end{aligned} \right\} T(x) = \sqrt{T_0^2 + (Px)^2}$$

O bien,

$$T = P \sqrt{x^2 + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}$$

La longitud del cable:

$$S = 2 \int_0^{L/2} \sqrt{1 + y'^2} dx = 2 \int_0^{L/2} \sqrt{1 + \left(\frac{Px}{T_0}\right)^2} dx$$

Cuando $h \ll L$ puede aproximarse por:

$$S = L \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{L}\right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{h}{L}\right)^4 + \dots \right]$$

12.2. Hilo de igual resistencia. Figura de equilibrio y vano máximo.

Cuando un hilo está sometido a su propio peso la tensión varía de un punto a otro. El hilo de igual resistencia es aquel en que la tensión es proporcional a la sección de forma que el esfuerzo sea el mismo en todos sus puntos,

$$\sigma = \frac{T}{A} = cte \Rightarrow A = A(S) = \frac{1}{\sigma} T(S)$$

Si el hilo está sometido a su propio peso la fuerza que actúa sobre el elemento de longitud dS es

$$\vec{F} dS = -q ds \hat{j} = -g dm \hat{j} = -\rho g A(S) dS \hat{j} = -\frac{\rho g}{\sigma} T(S) dS \hat{j}$$

de manera que el peso por unidad de longitud es proporcional a la tensión

$$q(S) = \frac{T(S)}{c}$$

donde la constante $c = \sigma/\rho g$ tiene dimensiones de longitud.

Las ecuaciones de equilibrio quedan,

$$\begin{cases} d(T_x) = 0 & \Rightarrow T_x = T_0 = cte \\ d(T_y) - \frac{T}{c} dS = 0 & \Rightarrow d(T_y) = \sqrt{1 + (T_y/T_0)^2} \frac{T_0}{c} dS \end{cases}$$

La integración de la segunda conduce a

$$\int \frac{d(T_y/T_0)}{\sqrt{1 + (T_y/T_0)^2}} = \frac{1}{c} \int dS \Rightarrow \operatorname{arcsenh} \frac{T_y}{T_0} = \frac{S}{c} + cte$$

que tomando el origen de la longitud de arco en el punto de pendiente horizontal ($T_y = 0$),

$$T_y = T_0 \operatorname{senh} \left(\frac{S}{c} \right)$$

La tensión total resulta

$$T = T_0 \sqrt{1 + (T_y/T_0)^2} = T_0 \cosh \left(\frac{S}{c} \right)$$

y el área

$$A(s) = \frac{T_0}{\sigma} \cosh \left(\frac{s}{\sigma/\rho g} \right)$$

lo que indica que la sección debe crecer con la longitud de arco siguiendo un coseno hiperbólico.

Para obtener la forma del hilo en el equilibrio utilizamos la relación entre las componentes de la tensión y la pendiente, $y' = T_y/T_0$,

$$d(T_y) = \sqrt{1 + (T_y/T_0)^2} \frac{T_0}{c} ds \Rightarrow T_0 d(y') = \sqrt{1 + (y')^2} \frac{T_0}{c} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

que una se integra como

$$\int \frac{dy'}{1 + (y')^2} = \frac{1}{c} \int dx \Rightarrow \arctan y' = \frac{x}{c} + cte$$

Eligiendo de nuevo el origen de la longitud de arco en el punto de pendiente horizontal ($T_y = 0$),

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tan \left(\frac{x}{c} \right) \Rightarrow y(x) = c \ln \left[\frac{1}{\cos(x/c)} \right] + cte$$



La constante de integración puede eliminarse tomando el origen de coordenadas en el punto mínimo ($y(0) = 0$),

$$y(x) = c \ln \left[\frac{1}{\cos(x/c)} \right]$$

La forma que adopta el hilo en el equilibrio tiene dos asíntotas verticales que corresponden a los primeros ceros de la función coseno,

$$\frac{x}{c} = \pm \frac{\pi}{2}$$

de manera que la luz o vano máximo corresponde a

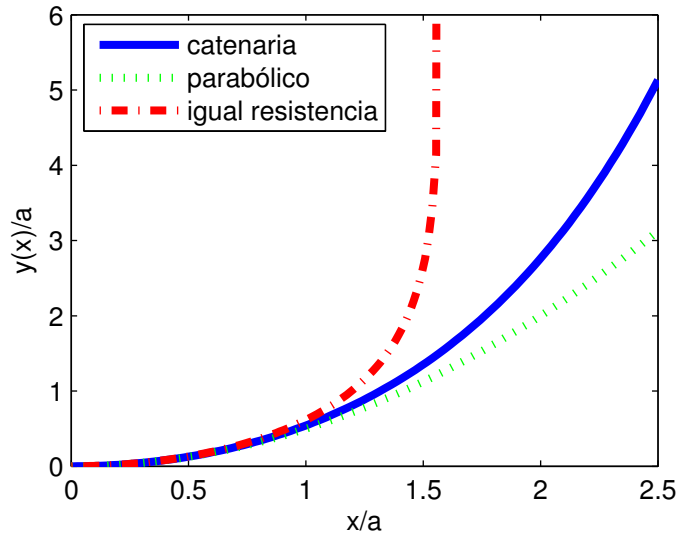
$$L_{\max} = \pi c = \frac{\pi \sigma}{\rho g}$$

y depende de las características del material. Así, por ejemplo para el acero, tomando el valor de la resistencia a la fluencia $\sigma = 250 \text{ MPa}$ y la densidad $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ se obtiene un valor $L_{\max} = 10,2 \text{ km}$.

Cuadro 1: Comparación de hilos bajo fuerzas verticales

| Catenaria | Parabólico | Igual resistencia |
|--|--|--|
| $y(x) = a [\cosh(x/a) - 1]$ $a = T_0/q$ | $y(x) = b \frac{1}{2} \left(\frac{x}{b}\right)^2$ $b = T_0/p$ | $y(x) = c \ln \left[\frac{1}{\cos(x/c)} \right]$ $c = T_0/q_0$ |
| $T_y = T_0 \sinh(x/a)$ $T = T_0 \cosh(x/a)$ | $T_y = T_0 x/b$ $T = T_0 \sqrt{1 + (x/b)^2}$ | $T_y = T_0 \tan(x/c)$ $T = T_0 / \cos(x/c)$ |
| $S = a \sinh(x/a)$ | $S = \frac{b}{2} \left[(x/b) \sqrt{1 + (x/b)^2} + \operatorname{arsenh}(x/b) \right]$ | $S = c \operatorname{arsenh}(\tan(x/c))$ |
| $L_{\max} = 1,3255 T_{\max}/q$ | $L < 2 T_{\max}/p$ | $L_{\max} = \pi T_{\max}/q_0$ |

Comparación de hilos bajo fuerzas verticales con a=b=c=1



12.3. Equilibrio de un hilo sobre una superficie sin rozamiento.

Sea $f(x, y, z) = 0$ la ecuación de la superficie cada elemento de hilo dS estará sometido a la fuerza externa \vec{F} y a una fuerza paralela a la normal a f .

En el equilibrio

$$d\vec{T} + (\vec{F} + \vec{R}_n) dS = 0$$

Dónde $\vec{R}_n = R \cdot \hat{n}$ y $\hat{n} \parallel \vec{\nabla} f \Rightarrow \vec{R} = \lambda \cdot \vec{\nabla} f$

O bien,

$$\begin{cases} d\left(T \frac{dx}{dS}\right) + \left(F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right) dS = 0 \\ d\left(T \frac{dy}{dS}\right) + \left(F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right) dS = 0 \\ d\left(T \frac{dz}{dS}\right) + \left(F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\right) dS = 0 \end{cases}$$

Con $\left(\frac{dx}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dS}\right)^2 = 1$ y cumpliendo $f(x, y, z) = 0$

Nos permite calcular la curva ($\vec{r}(s)$) en el equilibrio, la tensión ($T(s)$) y reacción ($\lambda(s)$) en cada punto.

Caso en que existe función potencial

Si $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$, la ecuación de equilibrio queda:

$$d\vec{T} - \vec{\nabla} V \cdot dS + R \cdot \hat{n} \cdot dS = 0$$

Dónde $d\vec{T} = d(T\hat{T}) = dT \cdot \hat{T} + T \cdot d\hat{T}$

Si multiplico la ecuación de equilibrio por \hat{T}

$$\hat{T} \cdot \left(dT \cdot \hat{T} + T \cdot \frac{\hat{N}}{\rho} - \vec{\nabla} V \cdot dS + R \cdot \hat{n} \cdot dS \right) = dT - dS + R \underbrace{\hat{T} \cdot \hat{n}}_0 dS$$

Y obtenemos de nuevo que:

$$T = V + cte$$

Además si el hilo tiene una parte apoyada y la otra libre, por *continuidad* en la tensión se deduce que *la constante ha de ser la misma*.

Así, en el *campo gravitatorio*, todos los puntos que estén a la *misma altura* tendrán la *misma tensión*. Por ello, si los dos extremos cuelgan libremente han de estar en el mismo plano horizontal.

Caso en que son despreciables las fuerzas aplicadas

Si \vec{F} es despreciable (frente a T y a R) el hilo se encuentra sometido únicamente a $\hat{n} = \lambda \vec{\nabla} f$.

Como $\vec{R} \perp \hat{T}$, $\vec{R} = 0 \cdot \hat{T} + R_N \cdot \hat{N} + R_B \cdot \hat{B}$ y las ecuaciones intrínsecas quedan:

$$\frac{dT}{dS} + 0 = 0 \Rightarrow T \text{ es constante a lo largo de la curva}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{T}{\rho} + R_N = 0 \\ 0 + R_B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = R_N = -\frac{T}{\rho} \Rightarrow |\lambda \vec{\nabla} f| = T/\rho \\ \vec{R} \parallel \hat{N} \Rightarrow \hat{n} \parallel \hat{N} \end{array} \right.$$

Esta propiedad es la que caracteriza a las **Geodésicas**.

$$\frac{d^2x/dS^2}{\partial f/\partial x} = \frac{d^2y/dS^2}{\partial f/\partial y} = \frac{d^2z/dS^2}{\partial f/\partial z}$$

Geodésica \rightarrow Curva más corta que uno dos puntos en una superficie.

Recuerda,

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \frac{d\vec{r}}{dS} = \frac{dx}{dS} \hat{i} + \frac{dy}{dS} \hat{j} + \frac{dz}{dS} \hat{k} \\ \frac{d\hat{t}}{dS} &= \frac{1}{\rho} \hat{n} = \frac{d^2x}{dS^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dS^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dS^2} \hat{k} \end{aligned}$$

**12.4. Equilibrio de un hilo sobre una superficie con rozamiento. Aplicación al caso de poleas y correas de transmisión.**

La reacción será

$$\vec{R} = \underbrace{R_n \cdot \hat{n}}_{normal} + \underbrace{\vec{F}_R}_{rozamiento}$$

$$|\vec{F}_R| \leq \mu \cdot |\vec{R}_n|$$

\vec{F}_R pertenece al plano tangente pero no tiene que ser paralela a \hat{T}

$$\vec{F}_R = R_T \cdot \hat{T} + R_u \cdot \hat{u}$$

Dónde $\hat{u} = \hat{T} \times \hat{n}$

Utilizando el triedro $\{\hat{T}, \hat{n}, \hat{u}\}$

$$\vec{R} = \underbrace{R_n \cdot \hat{n}}_{normal} + \underbrace{R_T \cdot \hat{T} + R_u \cdot \hat{u}}_{rozamiento}$$

$$d\vec{T} = dT \cdot \hat{T} + \frac{T}{\rho} \hat{N} \cdot dS = \hat{T} \cdot dT + \frac{T}{\rho} dS (\cos \chi \cdot \hat{n} + \sin \chi \cdot \hat{u})$$

$$\begin{cases} \frac{dT}{dS} + F_T + R_T = 0 \\ \frac{T}{\rho} \cos \chi + F_n + R_n = 0 \\ \frac{T}{\rho} \sin \chi + F_u + R_u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot \hat{T} &= R_T \\ \vec{R} \cdot \hat{N} &= R_n \cos \chi + R_u \sin \chi \\ \vec{R} \cdot \hat{B} &= R_n \cdot \hat{n} (\hat{T} \times \hat{N}) + R_u \cdot \hat{u} (\hat{T} \times \hat{N}) = R_n \cdot \hat{T} (\underbrace{\hat{N} \times \hat{n}}_{-\sin \chi}) + R_u \cdot \hat{N} (\underbrace{\hat{u} \times \hat{T}}_{\cos \chi}) \end{aligned}$$

Utilizando el triedro $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$

$$\begin{cases} \frac{dT}{dS} + F_T + F_R \cos \theta = 0 \\ \frac{T}{\rho} + F_n + R_n \cos \chi + F_R \sin \theta \sin \chi = 0 \\ 0 + F_B - R_n \sin \chi + F_R \sin \theta \cos \chi = 0 \end{cases}$$

Para una curva plana: $\hat{n} \parallel \hat{N}$

$$\begin{cases} \frac{dT}{dS} + F_T + F_R = 0 \\ \frac{T}{\rho} + F_N + R_N = 0 \end{cases}$$

F es despreciable.

$$\frac{dT}{dS} + F_R = 0$$

$$T \cdot \kappa + R = 0$$

$$|F_R| \leq \mu |R|$$

Correas y poleas

El rozamiento también tiene su efecto sobre correas, cuerdas y cables apoyados en poleas que se usan en una gran variedad de aplicaciones. Estudiaremos aquí el caso más sencillo de un cable apoyado sobre un cilindro de radio r sobre el que existe rozamiento. Supondremos que sobre los extremos del cable se aplican dos fuerzas diferentes T_1 y T_2 tales que el movimiento es inminente. Tomamos un elemento diferencial de longitud de la correa y le aplicamos la ecuación de equilibrio del hilo ideal,

$$d\vec{T} + \vec{F}dS = 0$$

y separando las componentes tangencial y normal tenemos

$$dT - F_R dS = 0$$

$$\frac{T}{r} dS - N dS = 0$$

que junto con la condición de movimiento inminente $F_R = \mu N$ lleva a

$$dT = \mu T d\theta$$

que se integra fácilmente

$$\int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^\beta d\theta$$

por lo que se obtiene

$$T_1 = T_2 e^{\mu\beta}$$

Como se obtiene una ley exponencial, puede obtenerse una gran diferencia de tensiones haciendo que argumento de la exponencial sea grande lo cual se puede conseguir haciendo que el cable de varias vueltas alrededor del cilindro. Si se enrolla una cuerda en un tambor dando n vueltas el valor del ángulo es $\beta = 2n\pi$ y puede utilizarse para frenar un cuerpo haciendo un esfuerzo pequeño.

