

# Transformadas de Fourier-Mukai para fibraciones genéricamente K3 o elípticas

Darío Sánchez Gómez

Tesis Doctoral dirigida por

Daniel Hernández Ruipérez

Ana Cristina López Martín



**VNiVERSiDAD  
D SALAMANCA**

Departamento de Matemáticas



# Transformadas de Fourier-Mukai para fibraciones genéricamente K3 o elípticas

Tesis presentada por

**Darío Sánchez Gómez**

para optar al título de

Doctor por la Universidad de Salamanca

---

Darío Sánchez Gómez, Doctorando

---

Daniel Hernández Ruipérez, Director

---

Ana Cristina López Martín, Codirector



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>9</b>
0.1. Motivación . . . . .	9
0.2. Estructura y Resultados . . . . .	12
<b>I Fourier-Mukai y espacios de moduli</b>	<b>25</b>
<b>1. Transformadas de Fourier-Mukai</b>	<b>27</b>
1.1. Funtores integrales . . . . .	27
1.2. Transformadas de Fourier-Mukai relativas . . . . .	32
1.3. Compatibilidad con cambio de base . . . . .	34
1.4. El ideal de la diagonal. . . . .	37
<b>2. Espacios de Moduli</b>	<b>41</b>
2.1. Haces estables y semiestables . . . . .	41
2.1.1. Haces estables y semiestables en un esquema proyectivo . . . . .	41
2.1.2. Móduli de haces semiestables . . . . .	46
2.2. Transformadas de Fourier-Mukai entre espacios de móduli . . . . .	49

<b>II</b>	<b>Aplicaciones a fibraciones Elípticas y en <math>K3</math></b>	<b>53</b>
<b>3.</b>	<b>Moduli en curvas singulares de género uno</b>	<b>55</b>
3.1.	Haces coherentes en curvas reducibles . . . . .	55
3.2.	Transformadas de Fourier-Mukai preservando la estabilidad . . . . .	61
3.2.1.	Una transformada de Fourier-Mukai no trivial en curvas de género uno . . . . .	63
3.2.2.	Preservación de la estabilidad . . . . .	66
3.2.3.	Espacios de móduli relativos . . . . .	74
3.3.	Espacios de móduli de haces de grado cero en $I_N$ . . . . .	75
3.3.1.	Haces libres de torsión e indescomponibles en $I_N$ . . . . .	76
3.3.2.	Haces estables de grado cero en $I_N$ . . . . .	79
3.3.3.	La componente más grande del espacio de móduli . . . . .	84
<b>4.</b>	<b>Haces estables en fibraciones <math>K3</math></b>	<b>91</b>
4.1.	Variedades tridimensionales fibradas en $K3$ . . . . .	91
4.1.1.	Componentes finas del espacio de móduli relativo . . . . .	92
4.1.2.	Estabilidad y estabilidad en fibra . . . . .	95
4.2.	La construcción espectral . . . . .	96
4.2.1.	Estabilidad de los haces espectrales . . . . .	98
4.2.2.	Fibrados vectoriales . . . . .	102
4.2.3.	Espacios de Moduli . . . . .	104
4.2.4.	Invariantes Topológicos . . . . .	106
4.3.	El caso de rango $r = 1$ . . . . .	109
4.4.	Fibraciones Triviales . . . . .	112

<b>III</b>	<b>Apéndice</b>	<b>117</b>
<b>A.</b>	<b>Quick overview of the work</b>	<b>119</b>
A.0.1.	Motivation . . . . .	119
A.0.2.	Outline, results and conclusions . . . . .	122
A.1.	Fourier-Mukai transforms . . . . .	131
A.1.1.	Relative Fourier-Mukai transforms . . . . .	134
A.1.2.	Base change compatibility . . . . .	135
A.1.3.	The ideal sheaf of the diagonal . . . . .	137
A.2.	Moduli spaces . . . . .	139
A.2.1.	Stable and semistable sheaves on a projective scheme . . . . .	139
A.2.2.	Moduli space of semistable sheaves . . . . .	142
A.2.3.	Fourier-Mukai transform between moduli spaces . . . . .	144
A.3.	Moduli spaces of semistable sheaves on genus one singular curves . . . . .	145
A.3.1.	Coherent sheaves on reducible curves . . . . .	146
A.3.2.	Fourier-Mukai transforms preserving stability . . . . .	150
A.3.3.	Moduli spaces of degree zero sheaves for $I_N$ . . . . .	158
A.4.	Stable sheaves on K3 fibered threefolds . . . . .	165
A.4.1.	K3 fibered threefold . . . . .	165
A.4.2.	The spectral construction . . . . .	168
A.4.3.	The Case $r = 1$ . . . . .	175
A.4.4.	Trivial fibrations . . . . .	176
	<b>Bibliografía</b>	<b>181</b>
	<b>Índice alfabético</b>	<b>189</b>





# Índice de figuras

1.	Fibracion de género uno . . . . .	16
2.	Fibras de Kodaira . . . . .	17
3.1.	La curva $I_2$ . . . . .	62
3.2.	El ciclo $E_6$ . . . . .	76
3.3.	La curva $A_4$ . . . . .	78
3.4.	La curva racional con un nodo $I_1$ . . . . .	84



# Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud, desde la admiración y la amistad, a mis directores Daniel Hernández Ruipérez y Ana Cristina López Martín por la confianza depositada en mí para realizar esta tesis doctoral. Así mismo agradecerles su dedicación, la formación que he recibido de ellos y su inagotable paciencia a lo hora de responder a todas mis preguntas. Las luces de este trabajo son mérito suyo, las sombras las aporto yo.

Agradecer también a aquellos que de alguna manera han contribuido en la realización de este trabajo, con sus comentarios y aclaraciones. En particular a Tom Bridgeland, Ugo Bruzzo, Igor Burban, Daniel Huybrechts, Emanuele Macrì, David Ploog, Fernando Sancho de Salas, Paolo Stellari y Richard Thomas. Y, en especial, a Björn Andreas y Carlos Tejero Prieto ya que sus ideas forman parte de esta tesis.

Un recuerdo muy especial para mis compañeros de carrera, y sin embargo amigos, César, Cristian, Curtis, Galante, Marta y Óscar que siempre han mostrado interés por el desarrollo de mi trabajo.

Un lugar muy especial en todo esto ocupa mi querido Dani, compañero de fatigas y alegrías y gran amigo desde hace ya bastantes años. Gracias por toda tu preocupación y tus ánimos en los momentos difíciles, que también los hubo y no sólo por culpa de la Fourier-Mukai.

Cómo olvidar a la familia. A todos gracias por vuestro apoyo incondicional y preocupación aunque todo esto os suene algo raro. En especial a mi padre, a quien cada día echo de menos.

Agradecer también a los dos centros donde he estado durante la realización de

esta tesis. Por un lado el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Salamanca, ha quien debo mi formación en matemáticas. Gracias a Manolo por toda su gestión durante estos años y sus, siempre interesantes, conversaciones. Por otro lado el Mathematical Institute de la Universidad de Oxford, donde pasé una breve estancia en una excelente atmósfera, profesional. De este último, destacar a Lionel Mason por toda la atención que me prestó.

La realización de esta tesis ha sido financiada por el Ministerio de Educación y Ciencia, el INEM, y el FP6 Marie Curie RTN ENIGMA.

Para finalizar, además de agradecer quiero dedicar este trabajo a Marga, el amor de mi vida. Gracias por estar siempre a mi lado durante todos estos años y, sobre todo, por aguantarme... y lo que te rondaré morena!

Salamanca, a 15 de abril de 2009.

# Introducción

## 0.1. Motivación

El objetivo de esta tesis es estudiar haces estables y sus espacios de móduli, usando la teoría de las transformadas de Fourier-Mukai, en esquemas fibrados genéricamente en curvas elípticas o en superficies K3.

El interés por estudiar los espacios de móduli está en que éstos contienen mucha información geométrica y nos permiten definir nuevos invariantes de la variedad. Desde un punto de vista físico algunos de estos espacios han sido interpretados como espacios de soluciones para ecuaciones diferenciales de interés en la Física. Interés especial tienen los espacios de móduli de haces estables en una variedad. Una de las aplicaciones más importantes de las transformadas de Fourier-Mukai es su uso en el estudio de estos espacios de móduli. El buen comportamiento de las transformadas de Fourier-Mukai por cambio de base permite, bajo ciertas condiciones, definir isomorfismos entre tales espacios de móduli. La idea que subyace en la teoría de las transformadas de Fourier-Mukai es reemplazar el estudio de un problema de móduli por otro problema de móduli más sencillo.

Las transformadas de Fourier-Mukai aparecen por primera vez en los 80 donde Mukai [52], motivado por problemas geométricos, construyó equivalencias entre las categorías derivadas de variedades no isomorfas. Una de las primeras razones que ponen de manifiesto la importancia de estos funtores se debe a un resultado de Orlov [61], que establece que cualquier equivalencia entre las categorías derivadas de haces coherentes de dos variedades proyectivas lisas es una transformada de Fourier-

Mukai.

Aunque las categorías derivadas fueron definidas varios años antes por Verdier [74], como herramienta técnica necesaria para generalizar la dualidad de Poincaré y Serre al caso relativo y, a pesar de que su introducción sirvió para simplificar muchos resultados y demostraciones donde intervenía el álgebra homológica, no se consideró que su estructura interna fuera interesante. Así, por ejemplo, a diferencia de la cohomología o el anillo de Chow de una variedad proyectiva, la categoría derivada de haces coherentes no había sido investigada a fondo como invariante de la variedad. Esto cambió totalmente con la aparición de las transformadas de Fourier-Mukai. En el caso liso, la existencia de una equivalencia entre las categorías derivadas de dos variedades determina fuertemente su geometría. En este sentido gracias a Bondal y Orlov [9] sabemos que si dos variedades proyectivas lisas tienen categorías derivadas equivalentes y una de ellas tiene fibrado canónico amplio o antiamplo, entonces las variedades son isomorfas. Sin embargo en [52] y [61] pueden encontrarse los primeros ejemplos de que esto no es cierto cuando no se hace ninguna suposición sobre la positividad del fibrado canónico, esto es, cuando los fibrados canónicos, o sus duales, no son amplios existen variedades proyectivas no isomorfas con categorías derivadas equivalentes.

Es especialmente interesante el caso de variedades Calabi-Yau, esto es, con fibrado canónico trivial. Bridgeland [12] demostró que dos variedades Calabi-Yau de dimensión tres birracionalmente tienen categorías derivadas equivalentes, y se conjetura que si dos variedades de este tipo tienen categorías derivadas equivalentes, entonces una debe ser retracto de deformación de una variedad birracionalmente a la otra. Esta conjetura tiene un gran interés en Física, ya que si se interpretan las D-branas como objetos de la categoría derivada, variedades con la misma categoría derivada tienen las mismas  $D$ -branas y, en cierto sentido, se puede considerar que dan lugar a la misma Física. Ya que la equivalencia birracionalmente entre dos variedades Calabi-Yau se produce a través de una variedad singular, lo que en términos de D-branas se interpreta como una transición topológica de tipo conifold, parece natural extender el estudio de las transformadas de Fourier-Mukai a variedades singulares. En el caso de variedades Calabi-Yau es difícil proporcionar ejemplos concretos de variedades no

isomorfas con la misma categoría derivada, algunos de estos están en [17]. A la hora de buscar ejemplos (o contraejemplos) de la conjetura anterior la idea es encontrarlos como Jacobianas de Simpson relativas compactificadas de haces puros de rango uno en una Calabi-Yau elíptica. Esto conduce al problema de estudiar la categoría derivada y los espacios de móduli de haces (semi)estables en curvas de género aritmético uno. En el caso de que estas curvas sean irreducibles hay algunos resultados sobre esto en [14] y [15]. Para curvas reducibles, de tipo Kodaira, Căldăraru [16] y López Martín [45, 46] describen los espacios de móduli de haces libres de torsión, semiestables de rango 1 y grado 0.

Por otro lado, la teoría de cuerdas ha proporcionado conjeturas que han contribuido a desarrollar aplicaciones de las transformadas de Fourier-Mukai y ha devuelto el interés hacia problemas de carácter abstracto, como la caracterización de variedades algebraicas. El ejemplo más destacado fue dado por Kontsevich [43] quien propuso, esencialmente, ver la simetría mirror como una equivalencia entre la categoría derivada de haces coherentes de cierta variedad proyectiva con la categoría de Fukaya asociada a la geometría simpléctica de la variedad mirror. De este modo, el estudio de las autoequivalencias de la categoría derivada adquiere relevancia en Física y en geometría simpléctica, pues según la conjetura de Kontsevich deben corresponder a automorfismos simplécticos de la variedad mirror.

Aparte de su importancia por aspectos geométricos de la simetría mirror, las transformadas de Fourier-Mukai también son importantes para las compactificaciones de la cuerda heterótica en fibraciones elípticas. Esto viene motivado por la dualidad (conjetural) entre la teoría F y la cuerda heterótica, y aparece (en el lado heterótico) en el caso de variedades Calabi-Yau fibradas elípticamente sobre una superficie de Hirtzebruch. En la parte heterótica se ha estudiado la preservación de la estabilidad absoluta por transformadas de Fourier-Mukai relativas sobre variedades Calabi-Yau elípticas [1]. En el lado de la teoría F, la demostración de la conjetura requeriría calcular espacios de móduli de haces estables sobre variedades Calabi-Yau fibradas en superficies K3 sobre una curva. La base para hacerlo es la transformada de Fourier-Mukai para superficies K3 desarrollada con anterioridad por Bartocci, Bruzzo y Hernández Ruipérez [6], Mukai [54] y Yoshioka [75] y los resultados pa-

ra fibraciones K3 de Bridgeland y Maciocia [13]. Buscando dar evidencias de esta correspondencia Friedman, Morgan y Witten introdujeron una técnica para construir fibrados estables en una fibración elíptica, la llamada construcción del revestimiento espectral [26], a partir de una hipersuperficie de la variedad y un haz de línea en ella. Desde un punto de vista físico la manera de entender la construcción espectral es interpretar los fibrados vectoriales, o más en general los objetos de la categoría derivada de una variedad Calabi-Yau, como D-branas y usar el hecho de que las D-branas se transforman via la T-dualidad en nuevas D-branas. Esto puede ser descrito matemáticamente en términos de una transformada de Fourier-Mukai relativa [35, 1]. Así las autoequivalencias de la categoría derivada pueden entenderse como simetrías en la teoría de cuerdas [3].

## 0.2. Estructura y Resultados

La tesis está dividida en dos partes. La primera parte (formada por los Capítulos 1 y 2) recoge algunos resultados conocidos, sobre las transformadas de Fourier-Mukai y de los espacios de móduli, que usaremos en la segunda parte.

El Capítulo 1 está dedicado a la teoría general de las transformadas de Fourier-Mukai que aplicaremos en el resto de capítulos. En particular nos centraremos en la versión relativa de dichas transformaciones.

Este tipo de funtor aparece por primera vez en un trabajo, ya considerado clásico, de Mukai [52] como una herramienta para estudiar propiedades de los haces de Picard en variedades abelianas. Mukai probó que el funtor integral, definido por el fibrado de Poincaré, entre la categoría derivada de una variedad abeliana y la categoría derivada de su variedad abeliana dual es una equivalencia de categorías. Este tipo de equivalencias, que él llamó funtores de Fourier, es lo que hoy en día conocemos como transformadas de Fourier-Mukai.

Una de sus características más útiles es su buen comportamiento por cambio de base. Esto las convierte en una herramienta muy potente a la hora de definir isomorfismos entre ciertos espacios de móduli. Además, esta propiedad permite estudiar



haces estables en esquemas fibrados a partir de lo que se sabe de éstos en las fibras.

De entre los últimos resultados en la teoría de las transformadas de Fourier-Mukai cabe destacar los obtenidos por Hernández Ruipérez, López Martín y Sancho de Salas [33, 34], donde prueban que un functor integral relativo es una equivalencia si y sólo si lo es fibra a fibra. El interés de este resultado está en que permite construir equivalencias, de tipo Fourier-Mukai, entre las categorías derivadas de esquemas fibrados sin imponer apenas condiciones ni en el esquema ambiente ni en la base de la fibración. Un ejemplo de esto lo encontramos con el functor integral relativo definido por el haz de ideales de la diagonal relativa de un morfismo Gorenstein. La interpretación de los funtores twist, asociados a objetos esféricos de la categoría derivada, como transformadas de Fourier-Mukai, permite demostrar fácilmente que el functor integral definido por el ideal de la diagonal de un esquema Gorenstein es una equivalencia. Por tanto, el definido por la diagonal relativa también lo es.

El Capítulo 2 gira entorno al concepto de haz (semi)estable en un esquema proyectivo y a la existencia de los espacios de móduli de haces (semi)estables. A inicios de los 60, Mumford [55] introdujo el concepto de haz (semi)estable para fibrados vectoriales en una curva lisa. Usando la teoría de invariantes geométricos Mumford prueba [56] que la clase de fibrados semiestables de rango  $r$  y grado  $d$  en una curva lisa  $X$  tiene un espacio de móduli grosero  $\mathcal{M}_X(r, d)$ . De la construcción de Mumford se sigue que dicho espacio de móduli es un esquema proyectivo, siendo un espacio de móduli fino siempre que  $r$  y  $d$  sean coprimos.

Posteriormente Gieseker [29], Maruyama [47, 48] y Takemoto [70] buscaron generalizar la construcción de Mumford en variedades de dimensión superior, especialmente en superficies. Para ello necesitaron dos ingredientes nuevos. Primero, para obtener un espacio de móduli compacto uno necesita considerar haces libres de torsión que no sean localmente libres. Segundo, la definición de estabilidad en variedades de dimensión superior requiere primero elegir una polarización, esto es, un haz de línea amplio. El estudio de los espacios de móduli de haces estables en superficies lisas tomó mayor relevancia en los 80, a raíz de un trabajo de Donaldson y Kronheimer para variedades reales de dimensión cuatro [23], donde prueban que un fibrado vectorial en una superficie algebraica compleja es estable (en el sen-

tido de Mumford-Takemoto) si y sólo si su correspondiente fibrado en la variedad de dimensión 4 subyacente admite una conexión de Hermitian-Einstein irreducible [21]. Esto permite interpretar ciertos espacios de móduli de haces estables como espacios de soluciones (los llamados espacios de instantones) de las ecuaciones de Yang-Mills anti-duales. Donaldson también definió nuevos invariantes para estas variedades [22], los cuales en el caso de superficies algebraicas complejas eran más fáciles de computar estudiando los correspondientes espacios de móduli de haces estables [60, 44].

En este capítulo veremos la noción de Simpson de haz estable así como el teorema de existencia de los espacios de móduli de haces semiestables. La construcción de Simpson [68], además de abarcar los resultados anteriores como casos particulares, proporciona un espacio de móduli de clases de equivalencia de haces semiestables sobre esquemas proyectivos arbitrarios.

También describiremos la aplicación de las transformadas de Fourier-Mukai al cómputo de estos espacios de móduli. La idea de esto es que, siempre que las transformadas de Fourier-Mukai transformen haces en haces, salvo traslación, y preserven la estabilidad, su compatibilidad con el cambio de base garantiza que transforman familias de haces estables en familias de haces estables, lo que induce isomorfismos entre espacios de móduli.

La segunda parte (Capítulos 3 y 4) recoge los resultados originales de la tesis. Usando las transformadas de Fourier-Mukai hacemos un estudio de haces estables y sus espacios de móduli en variedades fibradas genéricamente en curvas elípticas o superficies  $K3$ .

En el Capítulo 3 es estudiamos los espacios de móduli de haces semiestables en las curvas singulares que aparecen como degeneraciones de curvas elípticas lisas. Dicho estudio y, más en general, el de las categorías derivadas para curvas proyectivas singulares de género aritmético uno, tiene originariamente su motivación, por una parte, en la correspondencia de McKay para singularidades de tipo elíptico minimal [40], y por otra, en los métodos e ideas provenientes de la simetría espejo de tipo homológico [26, 43].

La cuestión fundamental es entender, cuando se tiene una familia plana de curvas proyectivas de género aritmético uno cuya fibra genérica es lisa, qué le sucede a la estructura de la categoría derivada de las fibras si se pasa de una fibra genérica a la fibra especial.

En el caso liso, tal estructura se obtiene básicamente de la descripción de Atiyah de los fibrados vectoriales indescomponibles sobre curvas elípticas. En este sentido Atiyah ([4]) prueba que todo fibrado vectorial indescomponible en una curva elíptica lisa está unívocamente determinado por su rango, su grado y su determinante. Este resultado permite dar una descripción geométrica de los espacios de móduli de fibrados vectoriales semiestables. En [73], Tu demuestra que el espacio de móduli  $\mathcal{M}_E(r, d)$  de haces semiestables de rango  $r$  y grado  $d$  en una curva elíptica lisa  $E$  es isomorfo al producto simétrico de la curva  $Sym^m E$ , siendo  $m = m.c.d(r, d)$ . El uso de la transformada de Fourier-Mukai permitió posteriormente dar una demostración sencilla de esta caracterización (Bridgeland [10], Polishchuk [63]). La idea es considerar la transformada de Fourier-Mukai definida por el ideal de la diagonal  $\mathcal{I}_{\Delta_E}$  de la inmersión de la diagonal  $\delta: E \hookrightarrow E \times E$ , y la definida por  $\delta_* \mathcal{O}_E(x_0)$ , esto es tensorializar por  $\mathcal{O}_E(x_0)$ , con  $x_0 \in E$ . El uso combinado de estas transformadas, junto con el algoritmo de Euclides, permite definir un isomorfismo  $\mathcal{M}_E(r, d) \simeq \mathcal{M}_E(0, m)$  siendo este último espacio isomorfo a  $Sym^m E$ . La clave para poder definir este isomorfismo es que ambas transformadas aplican haces en haces (salvo traslación) y preservan la semiestabilidad de los mismos. Esta clasificación de los espacios de móduli sigue siendo cierta (Bartocci, Bruzzo y Hernández Ruipérez [5]) en el caso de degeneraciones íntegras, esto es, para curvas racionales con un nodo o una cúspide.

Como la curva racional nodal y la cuspidal son las únicas fibras singulares que pueden aparecer en una *fibración elíptica*, si queremos estudiar las degeneraciones no irreducibles de curvas elípticas lisas debemos considerar una versión más general de este tipo de fibraciones. Así, llamaremos *fibración de género uno* a todo morfismo  $p: X \rightarrow B$  proyectivo y plano entre esquemas cuyas fibras son curvas Gorenstein de género aritmético uno y dualizante trivial. Observar que la fibra genérica de  $p$  es una curva elíptica lisa pero pueden existir fibras singulares con varias componentes. La estructura de estas posibles fibras singulares es conocida tan sólo en algunos casos.

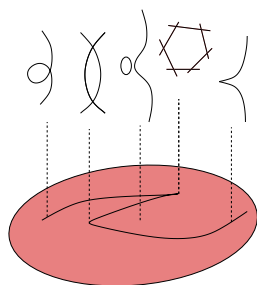


Figura 1: Fibracion de género uno

Cuando  $X$  es una superficie lisa y  $B$  es una curva lisa la clasificación fue dada por Kodaira [42], y cuando  $X$  es una variedad tridimensional lisa y  $B$  una superficie lisa dicha clasificación fue hecha por Miranda [49]. En ambos casos las posibles fibras singulares son curvas planas del mismo tipo, conocidas como *fibras de Kodaira* (ver Figura 2, página 17). Todas ellas son, salvo el nodo y la cúspide, curvas no íntegras. Observar que en las fibras irreducibles el hecho de tener género aritmético uno y haz dualizante trivial es equivalente pero, en general, entre las fibras degeneradas puede ocurrir que su haz dualizante no sea trivial. Es por esto que tenemos que suponer ambas condiciones en la definición anterior.

Para este tipo de curvas singulares los espacios de móduli de haces puros semiestables son construidos por primera vez por Seshadri [66], siendo un caso particular de la construcción dada posteriormente por Simpson [68]. Su construcción requiere fijar una polarización en la curva. Las propiedades de estos espacios de móduli han sido estudiadas por varios autores (cf. [57, 58, 67]). A diferencia de lo que ocurre en el caso íntegro, los espacios de móduli de haces semiestables en curvas con varias componentes irreducibles son espacios no-normales y su estructura depende fuertemente de la configuración de la curva.

Nuestro propósito es hacer un estudio similar de estos espacios de móduli para curvas Gorenstein, con haz dualizante trivial y género aritmético uno. Como veremos, uno de los problemas que nos encontramos cuando la curva no es íntegra es que existen transformadas que no preservan la semiestabilidad y no se dispone de un criterio que caracterize aquellas que sí lo hacen. Además la semiestabilidad depende

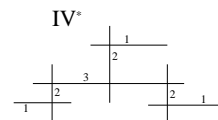
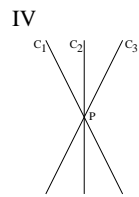
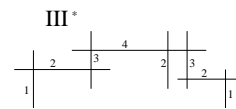
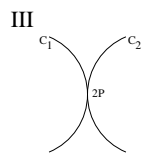
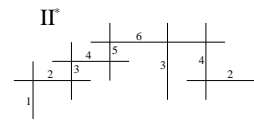
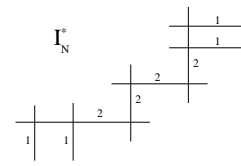
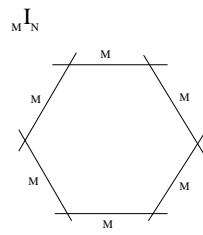
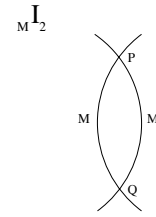
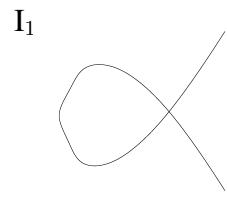


Figura 2: Fibras de Kodaira

fuertemente de la polarización eligida y, ya que ésta tiene grado mayor que uno, no es posible utilizar el algoritmo de Euclides a la hora de identificar ciertos espacios de móduli.

Nuestro primer resultado es el siguiente.

**Teorema. 3.24** *Sea  $C$  una curva proyectiva Gorenstein de género aritmético 1 y dualizante trivial y fijemos una polarización  $H$  en  $C$ . Entonces*

1. *El functor integral  $\Phi: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(X)$ , definido por el ideal de la inmersión diagonal  $\mathcal{I}_\Delta$  de  $C$ , es una transformada de Fourier-Mukai.*
2. *Si  $\mathcal{E}$  es semiestable respecto de  $H$ , entonces los transformados por  $\Phi$  y su inversa también son haces (salvo traslación) semiestables respecto de la misma polarización  $H$ .*

El cálculo del polinomio de Hilbert del transformado de  $\mathcal{E}$  en función del de  $\mathcal{E}$  nos permite dar la siguiente clasificación de los espacios de móduli de haces semiestables en este tipo de curvas.

**Corolario. 3.29** *Sea  $(r, d)$  una pareja de números enteros con  $r \geq 0$ . El espacio de móduli  $\mathcal{M}_C(r, d)$  es isomorfo a uno de los siguientes tres espacios de móduli no isomorfos*

- $\mathcal{M}_C(0, d_0) \simeq \text{Sym}^{d_0}(C)$  para cierto  $d_0 > 0$
- $\mathcal{M}_C(r_0, 0)$  para cierto  $r_0 > 0$
- $\mathcal{M}_C(r_0, d_0)$  con  $2r_0/h \leq d_0 < r_0$ .

Cuando  $C$  es una curva reducida, proyectiva y polarizada con  $N$  componentes irreducibles y  $\mathcal{E}$  es un haz en  $C$ , además de los invariantes dados por el polinomio de Hilbert se dispone de otros invariantes importantes, el multirango  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (r_1, \dots, r_N)$  y el multigrado  $\underline{d}(\mathcal{E}) = (d_1, \dots, d_N)$ , definidos como las  $N$ -uplas formadas por los rangos y grados de las restricciones de  $\mathcal{E}$  a las  $N$  componentes irreducibles de la curva. Se tiene entonces la descomposición

$$\mathcal{M}_C(r, d) = \coprod_{(r_1, \dots, r_N) \in \mathbb{Z}^N} \mathcal{M}_C((r_1, \dots, r_N), d)$$

siendo  $\mathcal{M}_C((r_1, \dots, r_N), d)$  el espacio de móduli de haces semiestables en  $C$  con polinomio de Hilbert  $rm + d$  y multirango  $\underline{r} = (r_1, \dots, r_N)$ . Los primeros resultados en el estudio de estos espacios se deben a Căldăraru [16] y López Martín [45, 46], cuando  $C$  es una fibra de Kodaira reducida, esto es, una fibra de tipo  $III$ ,  $IV$  o  $I_N$  con  $N \geq 2$  (ver Figura 0.2) y  $\underline{r} = (1, \dots, 1)$ .

En este capítulo reinterpretaremos dichos resultados en términos de la transformada de Fourier-Mukai. Esto nos dará la idea de como obtener el resultado análogo para rango superior en el caso de curvas de tipo  $I_N$ , esto es, un ciclo de  $N$  rectas proyectivas. El hecho de limitarnos al caso de curvas de tipo  $I_N$  se debe a que para otro tipo de curvas se conoce poco sobre los haces en rango superior. Para el caso de las curvas de tipo  $I_N$  cabe destacar los resultados de Drozd y Greuel[24] y Bodnarchuk et al. [7] donde se da una descripción geométrica de los haces indescomponibles. Se sabe entonces que todo haz indescomponible y libre de torsión es esencialmente la imagen directa de un fibrado vectorial por un revestimiento étale de  $I_N$ . Esta descripción sigue la dada por Oda [59] en los 70 por revestimientos cíclicos de una curva lisa elíptica. Dicha descripción junto con un estudio del comportamiento de la estabilidad por revestimientos étale de Galois, que lleva a generalizar resultados de Takemoto [70], nos permite demostrar que no hay haces estables de grado cero y rango superior en las curvas de tipo  $I_N$ .

**Teorema. 3.40** *Sea  $I_N$ , con  $N \geq 2$ , un ciclo de  $N$  rectas proyectivas que se cortan transversalmente y  $\mathcal{E}$  un haz de dimensión pura uno con polinomio de Hilbert  $P_{\mathcal{E}}(m) = rm$  y multirango  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (r_1, \dots, r_N)$ . Si  $\mathcal{E}$  es  $\mu_S$ -estable, entonces o es isomorfo a  $\mathcal{O}_{C_i}(-1)$  para algún  $i \in \{1, \dots, N\}$  o es localmente libre con multirango  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (1, \dots, 1)$  y multigrado  $\underline{d}(\mathcal{E}) = (0, \dots, 0)$ .*

Como consecuencia podemos dar una descripción de los factores de Jordan-Hölder de los haces semiestables en  $I_N$ . Esta descripción junto con la aplicación de la transformada de Fourier-Mukai a los espacios de móduli son la clave para obtener el siguiente resultado.

**Teorema. 3.50** *Sea  $\mathcal{M}_{I_N}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), 0)$  el espacio de móduli de haces de dimensión pura uno, semiestables, de multirango  $(\bar{r}, \dots, \bar{r})$  y grado 0 en  $I_N$ . Existe un isomor-*

*fismo de esquemas*

$$\mathcal{M}_{I_N}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), 0) \simeq \text{Sym}^{\bar{r}} I_1$$

siendo  $I_1$  la curva racional con un nodo.

En el Capítulo 4 trataremos la cuestión de cómo construir haces estables en variedades de dimensión tres fibradas genéricamente en superficies de tipo K3.

A parte del interés matemático, el estudio de haces estables y sus espacios de móduli en variedades tridimensionales viene motivado por problemas procedentes de la Física, como la compactificación de la cuerda heterótica o la descripción de las D-branas en variedades de Calabi-Yau tridimensionales, lo cual ocurre en el programa de la simetría mirror.

Si la variedad admite una estructura fibrada, un procedimiento natural es describir los espacios de móduli de las fibras y posteriormente encontrar una adecuada descripción global. Este método fue empleado por Friedman, Morgan y Witten ([25, 26]) para obtener fibrados vectoriales en una fibración elíptica en términos de una hipersuperficie de la fibración y de un haz de línea en ella. Esta pareja de datos se llama el dato espectral del fibrado y dicha construcción, conocida como la *construcción del revestimiento espectral*, se puede describir de la siguiente manera. Consideremos  $p: X \rightarrow B$  una *fibración elíptica*, esto es una fibración de género uno cuyas fibras son geoméricamente íntegras, y supongamos que tiene una sección que no pasa por los puntos singulares de las fibras. Es decir,  $X$  es isomorfa a su modelo de Weierstrass (cf. [49, 50]). Tomemos  $V$  un fibrado vectorial en  $X$  de rango  $n$  cuya restricción a cada fibra de  $p$  es regular, semiestable y con determinante trivial. Entonces, este fibrado determina un subesquema  $C \hookrightarrow X$  que es un revestimiento de grado  $n$  y plano de  $B$ . Dicho revestimiento se llama *revestimiento espectral*. Además, existe un único haz de línea  $\mathcal{L}$  en  $C$  tal que

$$V = p_{X*}(p_C^* \mathcal{L} \otimes \bar{\mathcal{P}}),$$

siendo  $p_C$  y  $p_X$  las proyecciones naturales de  $C \times_B X$  en sus factores y  $\bar{\mathcal{P}}$  un fibrado en  $C \times_B X$  parametrizando los factores de Jordan-Hölder de la restricción de  $V$  en la correspondiente fibra, es decir,  $\bar{\mathcal{P}}$  es un haz de Poincaré en  $X \times_B X$  restringido



a  $C \times_B X$ . Estos fibrados, conocidos como *fibrados espectrales*, están por lo tanto determinados por sus *datos espectrales*  $(C, \mathcal{L})$  en  $X$ , [26, Proposición 5.7].

Friedman, Morgan y Witten también dan condiciones suficientes para que los fibrados espectrales sean estables, respecto de  $H_0 + Mp^*H_B$ , siendo  $H_0$  y  $H_B$  polarizaciones fijadas en  $X$  y  $B$  respectivamente y  $M \gg 0$ . Resulta entonces que si el revestimiento espectral  $C$  es reducido e irreducible existe un número entero  $M_0$  dependiendo de  $V$  de manera que  $V$  es estable respecto de  $H_0 + Mp^*H_B$  para todo  $M \geq M_0$ . Además para superficies elípticas existe una cota efectiva para el valor de  $M_0$  dependiendo sólo de los invariantes topológicos de  $V$  ([26, Teoremas 7.1 y 7.4]). Para dimensión mayor, esto es, cuando  $\dim B > 1$ , encontrar una estimación efectiva de  $M_0$  que dependa sólo de invariantes topológicos es aún un problema abierto. En cualquier caso ya que en general es bastante difícil producir ejemplos de fibrados vectoriales, la construcción espectral es una herramienta importante a la hora de probar que ciertos espacios de móduli de haces estables son no vacíos.

Posteriormente se ha mostrado que la construcción espectral se entiende mejor en términos de la transformada de Fourier-Mukai. Esta nueva interpretación permite además obtener una clase mayor de haces espectrales estables que la construcción original, ya que uno no necesita considerar que los revestimientos espectrales son irreducibles ni que la restricción del haz a la fibra general sea regular con determinante trivial (ver [35] para superficies elípticas y [1] para variedades tridimensionales Calabi-Yau elípticas). La reinterpretación se hace de la siguiente manera. Consideremos  $q: \widehat{X} \rightarrow B$  la compactificación de Altman-Kleiman de la Jacobiana de  $p$ . Esto es un espacio de móduli fino parametrizando haces libres de torsión de rango 1 y grado 0 en las fibras de  $p: X \rightarrow B$ . Denotemos por  $\mathcal{P}$  al haz de Poincaré relativo, es decir al haz universal del espacio de móduli. El hecho de que  $p$  tenga una sección  $\sigma$  permite dar un isomorfismo  $\varpi: X \xrightarrow{\sim} \widehat{X}$  de fibraciones elípticas definido por  $\varpi(x) = \mathfrak{m}_x \otimes \mathcal{O}_{X_t}(\sigma(t))$ , siendo  $t = p(x)$  y  $\mathfrak{m}_x$  es el haz de ideales de  $x$  en su fibra  $X_t$ . Identificando via este isomorfismo  $X$  y  $\widehat{X}$  el haz de Poincaré relativo puede considerarse como un haz en  $X \times_B X$  y normalizarse de modo que

$$\mathcal{P} = \mathcal{I}_\Delta \otimes \pi_1^* \mathcal{O}_X(\Theta) \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_X(\Theta) \otimes \rho^* \omega^{-1}, \quad (1)$$

siendo  $\Theta = \sigma(B)$  y  $\omega = p_*(\omega_{X/B})^*$ . Consideremos el functor integral definido por

$\mathcal{P}$ . En virtud del Teorema 1.18 y la Proposición 1.25, dicho functor es una autoequivalencia de  $D_c^b(X)$ , es decir, es una transformada de Fourier-Mukai. Teniendo en cuenta la estructura dada por Atiyah [4] y Tu [73], de los haces semiestables en una curva elíptica lisa, y la dada por Friedman, Morgan y Witten para el caso de curvas de Weierstrass y fibrados vectoriales, se obtiene que un haz  $\mathcal{E}$  en  $X$ , plano sobre  $B$ , de rango  $n \geq 1$  y de grado cero en fibra es libre de torsión y semiestable en cada fibra si y sólo si es  $\text{WIT}_1$  (esto es, su transformado es un complejo concentrado en grado -1) y su transformado  $\widehat{\mathcal{E}}$  por  $\Phi$  es plano sobre  $B$ . Además para cada  $t \in B$  el haz restringido a la fibra  $\widehat{\mathcal{E}}_t$  está soportado en un número finito de puntos. Se define entonces el revestimiento espectral  $C(\mathcal{E})$  de  $\mathcal{E}$  como el soporte modificado de  $\widehat{\mathcal{E}}$ , esto es, como el subesquema cerrado de  $X$  definido por el ideal 0-Fitting de  $\widehat{\mathcal{E}}$ . La razón para tomar el soporte modificado en lugar del soporte ordinario es que el primero es compatible con cambio de base mientras que el segundo no lo es. Así  $C(\mathcal{E}) \rightarrow B$  es un revestimiento plano de grado  $n$ , y la restricción de  $\widehat{\mathcal{E}}$  a  $C(\mathcal{E})$  es un haz  $\mathcal{L}$  puro de dimensión igual a la de  $B$  y rango polarizado 1. La construcción inversa no es más que tomar el transformado por la transformada inversa  $\widehat{\Phi}$  de un haz  $\mathcal{L}$  puro de dimensión igual a la de  $B$  y rango polarizado uno, soportado en un revestimiento  $C \subset X$  plano de  $B$  de grado  $n$ . Se sabe además que fijadas polarizaciones  $H_0$  y  $H_B$  en  $X$  y  $B$  respectivamente, entonces para  $M \gg 0$  el haz espectral  $\mathcal{E}$  es  $\mu$ -estable respecto de  $H_M = H_0 + Mp^*H_B$  si y sólo si  $\mathcal{L}$  es  $\mu$ -estable en el revestimiento espectral  $C(\mathcal{E})$ , respecto de  $H_M \cap C(\mathcal{E})$ . En particular si el revestimiento espectral  $C$  es íntegro todo haz de línea es  $\mu$ -estable, luego el haz espectral  $\mathcal{E}$  construido a partir del dato espectral  $(C, \mathcal{L})$  es un fibrado vectorial  $\mu$ -estable respecto de  $H_M$ , para  $M \geq M_0$ . Como en la construcción original, sólo se sabe dar una cota efectiva para  $M_0$  en el caso de las superficies elípticas. Se recuperan de este modo la construcción original de Friedman-Morgan y Witten.

Ya que algunas fibraciones elípticas admiten también una fibración en superficies K3 es natural preguntarse si se pueden construir haces estables en variedades tridimensionales fibradas en K3 usando un método similar. En este caso, cuando  $X$  es una variedad fibrada en superficies K3 sobre una curva  $B$ , el papel de la Jacobiana relativa lo juega cierto espacio de móduli relativo  $Y \rightarrow B$  de haces estables. Bridge-

land y Maciocia demostraron [13] que si dicho espacio de módulos es fino el haz universal relativo  $\mathcal{P}$  define una transformada de Fourier-Mukai  $\mathcal{S}: D_c^b(Y) \simeq D_c^b(X)$ . Partiendo de este resultado obtenemos un método, análogo a la construcción del revestimiento espectral, para construir haces estables en una variedad tridimensional fibrada genéricamente en superficies K3.

**Teorema. 4.16** *Sea  $C \subset Y$  un revestimiento de  $B$  reducido e irreducible. Si  $\mathcal{L}$  es un haz de línea en  $C$  y  $\mathcal{E} = i_*\mathcal{L}$  entonces, el transformado de  $\mathcal{E}$  por  $\mathcal{S}$  es un haz  $\widehat{\mathcal{E}}$  en  $X$  y existe un entero no negativo  $M_0$ , que depende de  $\widehat{\mathcal{E}}$ , tal que  $\widehat{\mathcal{E}}$  es  $\mu$ -estable respecto de la polarización  $H + M\mathfrak{f}$  para todo  $M \geq M_0 \geq 0$ .*

A diferencia de lo que ocurre en el caso elíptico, uno no puede esperar que los haces espectrales así obtenidos sean fibrados vectoriales. Esto se debe a que en general no sabemos si el haz universal relativo  $\mathcal{P}$  parametriza, al menos genéricamente, fibrados vectoriales en las fibras, mientras que en el caso elíptico sí.

La siguiente pregunta que sugiere el paralelismo de esta construcción con la construcción del revestimiento espectral es si existe una cota efectiva para el valor del entero  $M_0$ . La respuesta es afirmativa y dicha cota depende esencialmente del discriminante  $B(\widehat{\mathcal{E}})$  de  $\widehat{\mathcal{E}}$ , es decir, de la clase característica

$$B(\widehat{\mathcal{E}}) = 2 \operatorname{rk}(\widehat{\mathcal{E}})c_2(\widehat{\mathcal{E}}) - (\operatorname{rk}(\widehat{\mathcal{E}}) - 1)c_1(\widehat{\mathcal{E}})^2.$$

**Teorema. 4.25** *Sea  $H_0$  un divisor amplio y liso en  $X$ . Entonces  $\widehat{\mathcal{E}}$  es  $\mu$ -estable, respecto de la polarización  $H_M = H_0 + M\mathfrak{f}$  para todo  $M \geq M_0 = \frac{r^2 n^2}{8} B(\widehat{\mathcal{E}})H_0(H_0^2\mathfrak{f})$ .*

Si suponemos, además, que  $X$  es Calabi-Yau podemos calcular las clases de Chern de  $\widehat{\mathcal{E}}$  en términos de las de los datos espectrales  $(C, \mathcal{L})$ . Veremos que en tal caso  $B(\widehat{\mathcal{E}})$  depende esencialmente de la clase de cohomología del revestimiento espectral lo que nos permite pensar el espacio de módulos de haces espectrales como una variedad fibrada genéricamente en variedades abelianas.

**Teorema. 4.28** *Sea  $\mathcal{M}([C])$  el espacio de módulos de curvas en  $Y$  con clase de cohomología  $[C]$ , que son revestimientos íntegros de  $B$ . Sea  $\mathcal{S}(X; H_{M_0})$  el espacio de módulos de haces espectrales  $\mu$ -estables respecto de  $H_{M_0}$ . La transformada de Fourier-*

*Mukai  $\mathcal{S}$  induce un morfismo algebraico  $\mathcal{S}(X; H_{M_0}) \rightarrow \mathcal{M}([C])$  cuya fibra sobre  $C' \in \mathcal{M}([C])$  es la Jacobiana  $\text{Pic}(C')$ .*

## Notación

Por un esquema  $X$  entendemos un esquema separado de tipo finito sobre un cuerpo  $\mathbb{k}$  algebraicamente cerrado. Los morfismos de esquemas son  $\mathbb{k}$ -morfismos. Un punto  $x \in X$  significa un punto cerrado.  $D(X)$  denota la categoría derivada de complejos de  $\mathcal{O}_X$ -módulos cuyos haces de cohomología son quasi-coherentes. Los superíndices  $-$ ,  $+$ ,  $b$  denotan, respectivamente, que los complejos están superiormente, inferiormente o superior e inferiormente acotados. El subíndice  $c$  indica que los haces de cohomología son coherentes. Por un haz  $\mathcal{E}$  en  $X$  entendemos un  $\mathcal{O}_X$ -módulo coherente.

Para un punto  $x \in X$ , su haz estructural como subesquema cerrado de  $X$  lo denotamos  $\mathcal{O}_x$ , mientras que  $\mathcal{O}_{X,x}$  denota la fibra (stalk) de  $\mathcal{O}_X$  en  $x$  como haz.

Un esquema  $X$  de dimensión  $n$  es Cohen-Macaulay si su complejo dualizante tiene un único haz de cohomología  $\omega_X$  en grado  $-n$ . Diremos que  $X$  es Gorenstein si es Cohen-Macaulay y  $\omega_X$  es un haz de línea. Al haz  $\omega_X$  lo llamamos haz dualizante de  $X$ .

Por un morfismo Gorenstein entendemos un morfismo plano de esquemas cuyas fibras son Gorenstein.

Por una variedad Calabi-Yau entendemos una variedad lisa cuyo fibrado canónico es trivial.

$A^i(X)$  denota la componente en grado  $i$  del anillo de Chow  $A(X)$  de  $X$ .

# **Parte I**

## **Transformadas de Fourier-Mukai y Espacios de Móduli**



# Capítulo 1

## Transformadas de Fourier-Mukai

En este capítulo recordaremos la noción de transformada de Fourier-Mukai y algunas de sus propiedades. Una teoría detallada de este tipo de funtores puede encontrarse, por ejemplo, en [63, 37, 5]. Ya que queremos usar las transformadas de Fourier-Mukai para estudiar espacios de móduli relativos y haces estables en variedades fibradas, veremos también la versión relativa de dicha transformada y la conexión que existe entre ambas.

En la última parte del capítulo revisaremos la noción de objeto esférico en la categoría derivada de una variedad así como la de su functor twist asociado. Este functor puede, además, describirse en términos de una transformada de Fourier-Mukai.

Como caso particular, y ya que lo necesitaremos en los capítulos siguientes, estudiamos con más detalle el functor integral cuyo núcleo está dado por el ideal de la inmersión de la diagonal de una variedad de tipo Gorenstein.

### 1.1. Funtores integrales

Sean  $X$  e  $Y$  esquemas propios sobre un cuerpo  $\mathbb{k}$  y denotemos  $\pi_X$  y  $\pi_Y$  a las proyecciones naturales de  $X \times Y$  en  $X$  e  $Y$  respectivamente.

**Definición 1.1.** Sea  $\mathcal{K}^\bullet$  un objeto de  $D^-X \times Y$ , se llama *functor integral* definido

por  $\mathcal{K}^\bullet$  al functor

$$\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}: D^-(X) \rightarrow D^-(Y)$$

definido como:

$$\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{E}^\bullet) = \mathbf{R}\pi_{Y*}(\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{K}^\bullet).$$

Al objeto  $\mathcal{K}^\bullet$  se le llama *núcleo* del functor integral.

Todo functor integral es un functor exacto, como functor entre categorías derivadas, ya que es composición de tres funtores exactos. En particular toda sucesión exacta de haces en  $X$

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

tiene asociada una sucesión exacta larga obtenida al aplicar el functor integral

$$\dots \rightarrow \Phi^{i-1}(\mathcal{G}) \rightarrow \Phi^i(\mathcal{E}) \rightarrow \Phi^i(\mathcal{F}) \rightarrow \Phi^i(\mathcal{G}) \rightarrow \dots$$

donde  $\Phi^i(\mathcal{F})$  denota el  $i$ -ésimo haz de cohomología, esto es  $\mathcal{H}^i(\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{F}))$ .

La primera pregunta que sugiere esta definición es cuándo este functor aplica la categoría  $D_c^b(X)$  en  $D_c^b(Y)$ . Para ello consideramos la siguiente definición introducida en [33].

**Definición 1.2.** Sea  $f: Z \rightarrow T$  un morfismo de esquemas. Un objeto  $\mathcal{E}^\bullet$  en  $D_c^b(Z)$  se dice que es de *dimensión homológica finita sobre  $T$*  si  $\mathcal{E}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{L}f^* \mathcal{G}^\bullet$  es un complejo acotado para todo  $\mathcal{G}^\bullet$  en  $D_c^b(T)$ .

*Observación 1.3.* La noción absoluta de dimension homológica finita, esto es que sea localmente isomorfo a un complejo acotado de haces localmente libres de rango finito, coincide con la de dimensión homológica finita sobre  $Z$  respecto de la identidad [33, Lemma 1.2].

**Proposición 1.4.** Supongamos que  $X$  es proyectivo y  $\mathcal{K}^\bullet$  un objeto en  $D_c^b(X \times Y)$ . El functor  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$  aplica  $D_c^b(X)$  en  $D_c^b(Y)$  si y sólo si  $\mathcal{K}^\bullet$  es de *dimensión homológica finita sobre  $X$* .

*Demostración.* Ver [34, Proposition 2.7]. □



*Observación 1.5.* La condición de que  $\mathcal{K}^\bullet$  sea de dimensión homológica finita sobre  $X$  se satisface automáticamente si  $X$  e  $Y$  son variedades proyectivas lisas.  $\triangle$

*Ejemplo 1.6.* 1. La identidad  $Id : D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(X)$  es isomorfa de manera natural al functor integral  $\Phi^{\mathcal{O}_\Delta}$ , cuyo núcleo  $\mathcal{O}_\Delta$  es el haz estructural de la diagonal  $\Delta \subset X \times X$ .

En efecto, consideremos la inmersión de la diagonal  $\delta: X \xrightarrow{\sim} \Delta \subset X \times X$  con  $\mathcal{O}_\Delta \simeq \delta_*\mathcal{O}_X$ . Usando la fórmula de proyección para  $\delta$  se ve que para todo objeto  $\mathcal{F}^\bullet$  de  $D_c^b(X)$  el complejo  $\delta_*\mathcal{O}_X \otimes \pi_1^*\mathcal{F}^\bullet$  también es acotado. Observemos que no es necesario derivar la proyección  $\pi_1: X \times X \rightarrow X$  ya que es un morfismo plano. Además,  $\mathcal{O}_\Delta$  es plano sobre el primer factor luego tampoco hace falta derivar el producto tensorial. Por tanto el functor  $\Phi^{\mathcal{O}_\Delta}$  aplica  $D_c^b(X)$  en  $D_c^b(X)$ .

Por otro lado

$$\begin{aligned} \Phi^{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{E}^\bullet) &= \mathbf{R}\pi_{2*}(\pi_1^*\mathcal{E}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{O}_\Delta) = \mathbf{R}\pi_{2*}(\pi_1^*\mathcal{E}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \delta_*\mathcal{O}_X) \\ &\simeq \mathbf{R}\pi_{2*}(\delta_*(\mathbf{L}\delta^*\pi_1^*\mathcal{E}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{O}_X)) \quad (\text{fórmula de proyección}) \\ &\simeq \mathbf{R}(\pi_2 \circ \delta)_*\mathbf{L}(\pi_1 \circ \delta)^*\mathcal{E}^\bullet \simeq \mathcal{E}^\bullet \quad (\text{ya que } \pi_1 \circ \delta = Id = \pi_2 \circ \delta) \end{aligned}$$

De manera análoga se prueban los dos ejemplos siguientes.

2. El functor de traslación  $T = [1]: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(X)$  es el functor integral de núcleo  $\mathcal{O}_\Delta[1]$ .
3. Sea  $\mathcal{L}$  un fibrado de línea sobre  $X$ . Entonces  $\mathcal{E}^\bullet \mapsto \mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{L}$  define una auto equivalencia en  $D_c^b(X)$  la cual es isomorfa al functor integral de núcleo  $\delta_*\mathcal{L}$ , donde  $\delta: X \simeq \Delta \subset X \times X$  es la inmersión de la diagonal de  $X$ .

En particular, si  $X$  es lisa de dimensión  $n$  y  $S_X$  es el functor de Serre, es decir  $S_X(\mathcal{E}^\bullet) = \mathcal{E}^\bullet \otimes \omega_X[n]$ , se verifica que  $\Phi_{X \rightarrow X}^{\delta_*\omega_X^k} \simeq S_X^k[-nk]$ .

4. Sea  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo y  $\Gamma_f \subseteq X \times Y$  la gráfica de  $f$ , entonces:

$$\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{O}_{\Gamma_f}} \simeq \mathbf{R}f_* \quad \text{y} \quad \Phi_{Y \rightarrow X}^{\mathcal{O}_{\Gamma_f}} \simeq \mathbf{L}f^* .$$

Se demuestra igual que el ejemplo 1, teniendo en cuenta que  $\mathcal{O}_{\Gamma_f} = \gamma_{f*} \mathcal{O}_X$  donde  $\gamma_f: X \xrightarrow{\sim} \Gamma_f \subseteq X \times Y$  es la inmersión de la gráfica del morfismo  $f$ ,  $\pi_X \circ \gamma_f = Id$ ,  $\pi_Y \circ \gamma_f = f$  y que en la fórmula de proyección hay que considerar imágenes inversas derivadas ya que  $f$  puede no ser plano.

Como caso particular  $H^*(X, \quad)$  puede pensarse como el functor integral

$$\Phi^{\mathcal{O}_X}: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(\mathbf{Vec}_f(\mathbb{k}))$$

de núcleo  $\mathcal{O}_X \in D_c^b(X) \simeq D_c^b(X \times \text{Spec } \mathbb{k})$ , siendo  $\mathbf{Vec}_f(\mathbb{k})$  la subcategoría plena de  $\mathbb{k}$ -espacios vectoriales de dimensión finita.

**Lema 1.7.** *Sea  $x \in X$  y  $\mathcal{O}_x$  su haz estructural, entonces  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{O}_x) = \mathbf{L}j^* \mathcal{K}^\bullet$ .*

*Demostración.* Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \{x\} \times Y & \xrightarrow{j_x} & X \times Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \\ \pi_x \downarrow & & \downarrow \pi_X & & \\ \{x\} & \xrightarrow{j} & X & & \end{array}$$

Por cambio de base y usando la fórmula de proyección para  $j_x$  se concluye.  $\square$

**Definición 1.8.** Un functor integral  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(Y)$  se dice que es un *functor de Fourier-Mukai* si es una equivalencia de categorías. Si además el núcleo  $\mathcal{K}^\bullet$  es un complejo concentrado en grado cero, es decir un haz, el functor se llama *transformada de Fourier-Mukai*.

El interés por el estudio de los funtores de Fourier-Mukai radica en que toda equivalencia, entre las categorías derivadas acotadas de dos variedades lisas, es de este tipo. Esto es un caso particular del siguiente resultado de representabilidad de Orlov [62, Theorem 2.2].

**Teorema 1.9.** *Sea  $F: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(Y)$  un functor exacto y plenamente fiel, con  $X$  e  $Y$  variedades proyectivas lisas. Existe un único objeto  $\mathcal{K}^\bullet$  en  $D_c^b(X \times Y)$  tal que  $F$  es isomorfo al functor integral  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$ .*

Por supuesto no todo functor integral es un functor plenamente fiel. Basta considerar, por ejemplo, el functor integral  $\mathbb{R}f_*$  siendo  $f: X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas. Además, cuando las variedades no son lisas no se conoce una caracterización similar, excepto en el contexto de las categorías  $dg$  donde Töen [72, Theorems 8.9, 8.15] prueba que todos los funtores, en un ambiente  $dg$ , son integrales. En cualquier caso, ya que toda equivalencia es un functor exacto y plenamente fiel y éstos, al menos cuando las variedades son lisas, sí están determinados por el resultado de Orlov, parece natural buscar una caracterización en términos de su núcleo. Dicha caracterización fue originalmente dada por Bondal y Orlov [8] (ver también Bridgeland [11]) para el caso liso.

**Teorema 1.10.** *Sean  $X$  e  $Y$  variedades proyectivas lisas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y  $\mathcal{K}^\bullet$  un objeto de  $D_c^b(X \times Y)$ . El functor integral  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$  es plenamente fiel si y sólo si  $\mathcal{K}^\bullet$  es fuertemente simple sobre  $X$ , es decir, satisface las siguientes condiciones:*

1.  $Hom^i(\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{O}_{x_1}), \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{O}_{x_2})) = 0$ , a menos que  $x_1 = x_2$  y  $0 \leq i \leq \dim X$ .
2.  $Hom(\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{O}_x), \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{O}_x)) = \mathbb{k}$ , para todo punto cerrado  $x \in X$ .

Con las hipótesis del teorema anterior, Bridgeland [11] caracteriza los funtores de Fourier-Mukai.

**Teorema 1.11.** *El functor integral  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$  es un functor de Fourier-Mukai, esto es una equivalencia, si y sólo si es plenamente fiel y para todo punto cerrado  $x \in X$  se verifica  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{O}_x) \simeq \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{O}_x) \otimes \omega_Y$ .*

El problema de generalizar estos resultados a esquemas que no son lisos no es una cuestión sencilla ya que, por ejemplo, si  $x \in X$  es un punto singular su haz estructural  $\mathcal{O}_x$  no es de dimensión homológica finita, y por lo tanto puede existir un número infinito de  $Ext^i(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x)$  no nulos. Recientemente Hernández Ruipérez, López Martín y Sancho de Salas generalizan los dos resultados anterior al caso en que  $X$  e  $Y$  son esquemas Gorenstein [33] o Cohen-Macaulay [34]. La clave para caracterizar los funtores integrales y las equivalencia en este tipo de esquemas es, en

lugar de considerar los haces estructurales  $\mathcal{O}_x$ , considerar los haces estructurales de los cero ciclos  $Z_x$  soportados en  $x$  y que localmente estén definidos por una sucesión regular. Cuando  $X$  es Cohen-Macaulay, para todo  $x \in X$  existe un cero ciclo  $Z_x$  de este tipo (cf. [33, Lemma 1.9]). Además por la teoría del complejo de Koszul, los anillos  $\mathcal{O}_{Z_x}$  de estos ciclos son de dimensión homológica finita como  $\mathcal{O}_X$ -módulos.

Con la idea de si  $X$  es Cohen-Macaulay,  $\mathcal{O}_{Z_x}$  es el complejo de Koszul de un sistema de parámetros  $(f_1, \dots, f_n)$  en un punto  $x \in X$ , Sancho de Salas [64] da un criterio que caracteriza los funtores integrales plenamente fieles, para cualesquiera esquemas propios en característica arbitraria.

La existencia de funtores de Fourier-Mukai entre las categorías derivadas de dos esquemas tiene las siguientes consecuencias geométricas.

**Teorema 1.12.** *Sean  $X$  e  $Y$  dos esquemas proyectivos y  $\mathcal{K}^\bullet$  un objeto de  $D_c^b(X \times Y)$  tal que el functor integral  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(Y)$  es un functor de Fourier-Mukai, esto es, una equivalencia de categorías. Entonces:*

1.  $\mathcal{K}^\bullet$  es de dimensión homológica finita sobre  $X$  e  $Y$ .
2. El adjunto por la derecha a  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$  es un functor integral quasi-inverso de  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$  y su núcleo es  $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X \times Y}}^\bullet(\mathcal{K}^\bullet, \pi_Y^! \mathcal{O}_Y)$ .
3. Si  $X$  es equidimensional y Cohen-Macaulay e  $Y$  es reducido, entonces  $Y$  también es equidimensional y  $\dim Y = \dim X$ .
4. Si  $X$  es Cohen-Macaulay y equidimensional e  $Y$  es equidimensional con  $\dim Y = \dim X$ , entonces  $Y$  es Cohen-Macaulay. Además si  $X$  es Gorenstein entonces  $Y$  también lo es y, en este caso,  $\omega_X$  es trivial si y sólo si  $\omega_Y$  lo es.
5. Si  $X$  es liso e  $Y$  es Cohen-Macaulay, entonces  $Y$  también es liso.

## 1.2. Transformadas de Fourier-Mukai relativas

Sean  $p: X \rightarrow B$  y  $q: Y \rightarrow B$  morfismos propios de esquemas. Denotemos por  $\pi_X, \pi_Y$  las proyecciones del producto fibrado  $X \times_B Y$  en sus factores y por

$\rho = p \circ \pi_X = q \circ \pi_Y$  la proyección de  $X \times_B Y$  en el esquema base  $B$ . Tenemos el siguiente diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccc}
 & X \times_B Y & \\
 \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\
 X & & Y \\
 p \searrow & & \swarrow q \\
 & B & 
 \end{array}$$

**Definición 1.13.** Sea  $\mathcal{K}^\bullet$  un objeto en  $D^-(X \times_B Y)$ . Llamaremos *functor integral relativo* definido por  $\mathcal{K}^\bullet$  al functor  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}: D^-(X) \rightarrow D^-(Y)$  dado por

$$\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{E}^\bullet) = \mathbf{R}\pi_{Y*}(\mathbf{L}\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{K}^\bullet).$$

El functor  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$  puede pensarse como un functor integral cuyo núcleo es el objeto  $j_* \mathcal{K}^\bullet$  de  $D^-(X \times Y)$ , donde  $j: X \times_B Y \hookrightarrow X \times Y$  es la inmersión cerrada del producto fibrado (esta inmersión es un morfismo afín luego no hace falta derivar  $j_*$ ).

Al igual que ocurre en el caso absoluto si  $\mathcal{K}^\bullet$  es un objeto de  $D_c^b(X \times_B Y)$  de dimensión homológica finita sobre  $X$  entonces, el functor  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$  aplica  $D_c^b(X)$  en  $D_c^b(Y)$ . Para el recíproco hay que suponer además que  $X \rightarrow B$  es localmente proyectivo.

Como veremos más adelante las transformadas de Fourier-Mukai inducen, bajo ciertas condiciones, isomorfismos entre espacios de módulos. En este sentido estamos interesados en estudiar que tipo de haces se transforman en haces (salvo translaciones), esto es, que tipo de haces se transforman en complejos concentrados.

**Definición 1.14.** Dado un functor integral  $\Phi := \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$ , un complejo  $\mathcal{E}^\bullet$  en  $D^-(X)$  se dice que es  $\text{WIT}_i$  respecto de  $\Phi$ , y escribiremos  $\text{WIT}_i\text{-}\Phi$ , si los haces de cohomología  $\Phi^j(\mathcal{E}^\bullet)$  son todos nulos salvo para  $j = i$ . Equivalentemente  $\mathcal{E}^\bullet$  es  $\text{WIT}_i\text{-}\Phi$  si existe un haz coherente  $\mathcal{G}$  en  $Y$  tal que  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{E}^\bullet) \simeq \mathcal{G}[-i]$ . En este caso diremos que  $\mathcal{G}$  es el transformado de  $\mathcal{E}^\bullet$  y escribiremos  $\widehat{\mathcal{E}}^\bullet = \mathcal{G}$ .

Si  $\widehat{\Phi}: D_c^b(Y) \rightarrow D_c^b(X)$  es el quasi-inverso de un functor de Fourier-Mukai  $\Phi$  tenemos el isomorfismo, en categoría derivada,  $\widehat{\Phi}(\Phi(\mathcal{E}^\bullet)) \simeq \mathcal{E}^\bullet$ . Este isomorfismo

junto con la sucesión espectral de Grothendieck garantizan que, cuando  $\mathcal{E}^\bullet$  es complejo concentrado en grado cero, es decir un haz  $\mathcal{E}$ , existe una sucesión espectral convergente, conocida como la *sucesión espectral de Mukai*

$$E_2^{p,q} = \widehat{\Phi}^p(\Phi^q(\mathcal{E})) \implies \begin{cases} \mathcal{E} & \text{si } p + q = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.1)$$

Una consecuencia inmediata de esta sucesión espectral es lo siguiente.

**Proposición 1.15.** *Si  $\mathcal{E}$  es un haz  $WIT_i$ - $\Phi$ , entonces  $\widehat{\mathcal{E}}$  es  $WIT_{-i}$ - $\widehat{\Phi}$ . Además  $\widehat{\widehat{\mathcal{E}}} \simeq \mathcal{E}$ .*

### 1.3. Compatibilidad con cambio de base

A fin de poder aplicar la fórmula de cambio de base, en categoría derivada, supondremos que  $p: X \rightarrow B$  y  $q: Y \rightarrow B$  son *morfismos planos*. Esto no supone ninguna restricción en nuestros objetivos ya que queremos aplicar estos resultados al caso de fibraciones  $X \rightarrow B$  y sus duales  $q: Y \rightarrow B$ , que siempre supondremos planas.

Una de las propiedades más interesantes de los funtores integrales es su compatibilidad con el cambio de base, la cual también será necesaria a la hora de inducir morfismos entre espacios de móduli. Fijemos la notación que usaremos en adelante. Si  $f: T \rightarrow B$  es un morfismo, para todo morfismo  $g: Z \rightarrow B$ , denotamos por  $g_T: Z \times_B T \rightarrow T$  y por  $f_Z: Z \times_B T \rightarrow Z$  a los morfismos inducidos. Además denotaremos  $Z_T = Z \times_B T$  a la fibra de  $Z \rightarrow B$  sobre el punto  $T$ . Si  $\Phi := \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$  es un functor integral relativo, entonces  $\Phi_T$  denota el functor integral relativo, definido por  $\mathcal{K}_T^\bullet := \mathbf{L}f_{X \times_B Y}^* \mathcal{K}^\bullet$ ,

$$\Phi_T(\mathcal{E}^\bullet) = \mathbf{R}\pi_{Y_T*}(\mathbf{L}\pi_{X_T}^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{K}_T^\bullet)$$

que aplica  $D^-(X_T)$  en  $D^-(Y_T)$ . En particular, si  $T = \{t\}$  es un punto cerrado de  $B$  denotaremos por  $X_t = p^{-1}(t)$  e  $Y_t = q^{-1}(t)$  a la fibra de  $p$  y  $q$ , respectivamente, en dicho punto y  $\Phi_t: D^-(X_t) \rightarrow D^-(Y_t)$  será el functor integral definido por  $\mathcal{K}_t^\bullet =$

$\mathbf{L}j_t^* \mathcal{K}^\bullet$ , siendo  $j_t: X_t \times Y_t \hookrightarrow X \times_B Y$  la inmersión obvia. Si  $\mathcal{E}$  es un haz en  $X$ , denotaremos por  $\mathcal{E}_t$  la restricción de  $\mathcal{E}$  a la fibra  $X_t$ .

Sea  $\Phi := \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(Y)$  un funtor integral relativo y  $T \rightarrow B$  un morfismo. Bajo la condición de plitud de  $p$  y  $q$  el siguiente resultado es un cálculo directo de cambio de base.

**Proposición 1.16.** *Para todo objeto  $\mathcal{E}^\bullet \in D^-(X)$  existe un isomorfismo functorial*

$$\mathbf{L}f_Y^* \Phi(\mathcal{E}^\bullet) \simeq \Phi_S(\mathbf{L}f_X^* \mathcal{E}^\bullet)$$

en la categoría derivada  $D^-(Y_T)$ .

Como el núcleo original  $\mathcal{K}^\bullet$  es de dimensión homológica finita sobre  $X$ , entonces  $\mathcal{K}_T^\bullet$  es de dimensión homológica finita sobre  $X_T$ , luego  $\Phi_T$  aplica  $D_c^b(X_T)$  en  $D_c^b(Y_T)$ .

La *compatibilidad por cambio de base* significa que si pensamos un objeto  $\mathcal{E}^\bullet$  de  $D_c^b(X_T)$  como una familia de objetos  $\mathbf{L}j_t^* \mathcal{E}^\bullet$  de  $D_c^b(X_t)$ , donde  $j_t$  es la inmersión de la fibra  $X_t = p_T^{-1}(t)$  de un punto cerrado  $t \in T$ , entonces el transformado  $\Phi_T(\mathcal{E}^\bullet)$  es la familia de objetos  $\Phi_t(\mathbf{L}j_t^* \mathcal{E}^\bullet)$ , esto es,

$$\mathbf{L}j_t^* \Phi_T(\mathcal{E}^\bullet) \simeq \Phi_t(\mathbf{L}j_t^* \mathcal{E}^\bullet). \quad (1.2)$$

Nos interesa, en particular, transformar complejos que se reducen a un único haz  $\mathcal{E}$  en  $X$ , el cual suponemos plano sobre  $B$ . Del cambio de base podemos deducir la relación entre la fibra  $\Phi^i(\mathcal{E})_t = j_t^* \Phi^i(\mathcal{E})$  de la familia de los haces integrales y los haces integrales  $\Phi^i(\mathcal{E}_t)$  de las fibras. Observemos que  $\Phi^i(\mathcal{E}) = 0$  para todo haz  $\mathcal{E}$  cuando  $i > \dim X_t$ .

**Corolario 1.17.** *Sea  $\mathcal{E}$  un haz en  $X$  plano sobre  $B$  y sea  $n$  la dimensión de las fibras  $X_t$  de  $p: X \rightarrow B$ . Entonces*

1. *El funtor  $\Phi^n$  es compatible con el cambio de base para haces, esto es, para cada haz  $\mathcal{E}$  y cada punto cerrado  $t \in B$  tenemos*

$$\Phi^n(\mathcal{E})_t \simeq \Phi_t^n(\mathcal{E}_t).$$

2. Para todo punto cerrado  $t \in B$  existe la sucesión espectral siguiente

$$E_2^{-p,q}(t) = \mathcal{T}or_p^{\mathcal{O}_B}(\Phi^q(\mathcal{E}), \mathcal{O}_t) \implies E_\infty^{q-p}(t) = \Phi_t^{q-p}(\mathcal{E}_t).$$

3. Suponiendo que  $\mathcal{E}$  es  $WIT_i$ - $\Phi$ , entonces para cada  $t \in B$  hay isomorfismos de haces en  $X_t$

$$\mathcal{T}or_j^{\mathcal{O}_B}(\widehat{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_t) \simeq \Phi_t^{i-j}(\mathcal{E}_t) \quad j \leq i.$$

4. El haz  $\mathcal{E}_t$  en  $X_t$  es  $WIT_i$ - $\Phi_t$  para todo  $t \in B$  si y sólo si  $\mathcal{E}$  es  $WIT_i$ - $\Phi$  y  $\widehat{\mathcal{E}}$  es plano sobre  $B$ . En tal caso  $(\widehat{\mathcal{E}})_t \simeq \widehat{\mathcal{E}}_t$ .

*Demostración.* Ver [5, Corollary 6.3]. □

La relación entre las transformadas de Fourier-Mukai relativas y las transformadas de Fourier-Mukai en fibra ha sido estudiada recientemente por Hernández Ruipérez, López Martín y Sancho de Salas en [34].

**Teorema 1.18.** Sea  $X \rightarrow B$  localmente proyectivo y  $\mathcal{K}^\bullet$  un objeto de  $D_c^b(X \times_B Y)$  de dimensión homológica finita sobre  $X$  e  $Y$ . El functor integral relativo  $\Phi = \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(Y)$  es una equivalencia si y sólo si  $\Phi_t: D_c^b(X_t) \rightarrow D_c^b(Y_t)$  es una equivalencia, para todo punto cerrado  $t \in B$ .

*Demostración.* Ver [34, Proposition 2.15]. □

De aquí se sigue directamente el siguiente resultado que usaremos a la hora de mostrar como la transformada de Fourier-Mukai induce de modo natural morfismos entre espacios de móduli.

**Corolario 1.19.** Sea  $X \rightarrow B$  localmente proyectivo y  $\mathcal{K}^\bullet$  un objeto de  $D_c^b(X \times_B Y)$  de dimensión homológica finita sobre  $X$  e  $Y$ . El functor integral  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(Y)$  es una equivalencia si y sólo si para todo morfismo  $T \rightarrow B$  el functor integral relativo  $\Phi_{X_T \rightarrow Y_T}^{\mathcal{K}^\bullet}: D_c^b(X_T) \rightarrow D_c^b(Y_T)$  es una equivalencia.



## 1.4. El ideal de la diagonal.

Para terminar este capítulo analizaremos con un poco más de detalle el caso particular del functor integral cuyo núcleo es el ideal de la diagonal  $\mathcal{I}_\Delta$ , ya que dicha transformada será esencial en los resultados obtenidos en los capítulos siguientes.

### Objetos esféricos y funtores twist

Recordemos la noción de objeto esférico, dada por Seidel y Thomas en [65], que ha estado motivada por consideraciones en el contexto de la simetría mirror. La importancia de este tipo de objetos está en que inducen de manera natural autoequivalencias en la categoría derivada.

**Definición 1.20.** Un objeto  $\mathcal{E}^\bullet \in D_c^b(X)$  es *n-esférico* para algún  $n > 0$  si verifica las siguientes condiciones:

1.  $\text{Hom}^*(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)$  y  $\text{Hom}^*(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet)$  son de dimensión finita para todo  $\mathcal{F}^\bullet \in D_c^b(X)$ .
2.  $\text{Hom}^i(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet) = \begin{cases} \mathbb{k} & \text{si } i = 0, n \\ 0 & \text{si } i \neq 0, n \end{cases}$
3. Existe un isomorfismo  $\text{Hom}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \simeq \text{Hom}^n(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet)^\vee$  para todo objeto  $\mathcal{F}^\bullet$  de  $D_c^b(X)$ .

Si  $n = \dim X$ , un objeto *n-esférico* se llama *esférico*.

*Ejemplo 1.21.* 1. Si  $X$  es una variedad proyectiva lisa sobre un cuerpo  $\mathbb{k}$ , un objeto  $\mathcal{E}^\bullet$  de  $D_c^b(X)$  es esférico si y sólo si satisface

- $\text{Hom}^i(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet) = \begin{cases} \mathbb{k} & \text{si } i = 0, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
- $\mathcal{E}^\bullet \otimes \omega_X \simeq \mathcal{E}^\bullet$ .

2. Sea  $X$  una curva proyectiva lisa y  $x \in X$  un punto cerrado. El haz  $\mathcal{O}_x$  es un objeto esférico.

3. Sea  $X$  una superficie proyectiva lisa y  $C \subset X$  una curva lisa irreducible y racional. Si  $C^2 = -2$  (cosa que pasa por ejemplo si  $X$  es una superficie K3), para todo  $k \in \mathbb{Z}$  el haz  $\mathcal{O}_C(k)$  es un objeto esférico de  $D_c^b(X)$ .
4. Sea  $X$  una variedad tal que  $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$  y  $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$  para  $0 < i < n$ , es decir,  $X$  es una variedad de Calabi-Yau en sentido estricto. Entonces todo haz de línea en  $X$  es un objeto esférico. De hecho  $X$  es Calabi-Yau, en sentido estricto, si y sólo si todo haz de línea en  $X$  es un objeto esférico.

Sea  $\mathcal{E}^\bullet$  un objeto de  $D_c^b(X)$  tal que  $\text{Hom}^*(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)$  y  $\text{Hom}^*(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet)$  son finitodimensionales sobre  $\mathbb{k}$  para todo  $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(X)$ .

**Definición 1.22.** Se define el *functor twist*  $T_{\mathcal{E}^\bullet}: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(X)$  asociado a  $\mathcal{E}^\bullet$  como

$$T_{\mathcal{E}^\bullet}(\mathcal{F}^\bullet) := \text{Cono}(\text{Hom}^\bullet(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \otimes \mathcal{E}^\bullet \xrightarrow{ev} \mathcal{F}^\bullet)$$

siendo  $ev$  el morfismo obvio de evaluación.

Nuestro interés por los objetos esféricos está justificado por el siguiente resultado de Seidel y Thomas ([65, Proposition 2.10]).

**Teorema 1.23.** *Si  $\mathcal{E}^\bullet$  es un objeto esférico, entonces el functor twist  $T_{\mathcal{E}^\bullet}$  es una equivalencia.*

Veamos ahora cómo los funtores twist pueden expresarse como funtores integrales. Para ello consideremos  $\delta: X \hookrightarrow X \times X$  la inmersión de la diagonal y  $\mathcal{O}_\Delta$  el haz estructural de la diagonal  $X \simeq \Delta \subset X \times X$ , esto es  $\mathcal{O}_\Delta = \delta_* \mathcal{O}_X$ . A cada objeto  $\mathcal{E}^\bullet$  de  $D_c^b(X)$  se le puede asociar el siguiente objeto  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}^\bullet}$  de la categoría derivada  $D^b(X \times X)$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{E}^\bullet} := \text{Cono}(\pi_1^* \mathcal{E}^{\bullet \vee} \otimes \pi_2^* \mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta). \quad (1.3)$$

El morfismo de (1.3) es la composición del morfismo de restricción

$$\pi_1^* \mathcal{E}^{\bullet \vee} \otimes \pi_2^* \mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \delta_* \mathbf{L}\delta^*(\pi_1^* \mathcal{E}^{\bullet \vee} \otimes \pi_2^* \mathcal{E}^\bullet) \simeq \delta_*(\mathcal{E}^{\bullet \vee} \otimes \mathcal{E}^\bullet)$$

y de la imagen directa por  $\delta$  de la composición de los morfismos

$$\mathcal{E}^{\bullet \vee} \otimes \mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet)$$

y de la aplicación traza

$$\mathrm{tr} : \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet) \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$

En otras palabras  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}^\bullet}$  es el objeto que completa el morfismo  $\pi_1^* \mathcal{E}^{\bullet \vee} \otimes \pi_2^* \mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta$  en un triángulo distinguido

$$\mathcal{I}_{\mathcal{E}^\bullet}[-1] \longrightarrow \pi_1^* \mathcal{E}^{\bullet \vee} \otimes \pi_2^* \mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta, . \quad (1.4)$$

Para todo objeto  $\mathcal{F}^\bullet$  de  $D_c^b(X)$  tenemos entonces el triángulo exacto

$$\Phi^{\mathcal{I}_{\mathcal{E}^\bullet}}(\mathcal{F}^\bullet)[-1] \longrightarrow \mathbf{R}\pi_{2*}(\pi_1^* \mathcal{E}^{\bullet \vee} \otimes \pi_2^* \mathcal{E}^\bullet \otimes \pi_1^* \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet, .$$

Usando la fórmula de proyección para  $\pi_2$  y cambio de base para el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\pi_2} & X \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{p} & \mathrm{Spec} \mathbb{k} \end{array}$$

donde  $X \xrightarrow{p} \mathrm{Spec} \mathbb{k}$  es el morfismo estructural, uno obtiene

$$\mathbf{R}\pi_{2*}(\pi_1^* \mathcal{E}^{\bullet \vee} \otimes \pi_2^* \mathcal{E}^\bullet \otimes \pi_1^* \mathcal{F}^\bullet) \simeq \mathbf{R}\Gamma(\mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{F}^\bullet) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{E}^\bullet$$

En consecuencia se tiene

$$\Phi^{\mathcal{I}_{\mathcal{E}^\bullet}}(\mathcal{F}^\bullet) \simeq \mathrm{Cono}(\mathbf{R}\Gamma(\mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{F}^\bullet) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet).$$

**Proposición 1.24.** *Existe un morfismo de funtores  $\Phi^{\mathcal{I}_{\mathcal{E}^\bullet}} \longrightarrow T_{\mathcal{E}^\bullet}$  que es un isomorfismo si  $\mathcal{E}^\bullet$  es de dimensión homológica finita, es decir si  $\mathcal{E}^\bullet$  es localmente isomorfo a un complejo acotado de haces localmente libres de rango finito.*

*Demostración.* El morfismo  $\mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{O}) \otimes \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)$  induce un morfismo entre los conos

$$\mathrm{Cono}(\mathbf{R}\Gamma(\mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{F}^\bullet) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet)$$

y

$$\mathrm{Cono}(\mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \otimes \mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet)$$

functorial, esto es tenemos un morfismo de funtores  $\Phi^{\mathcal{I}_{\mathcal{E}^\bullet}} \longrightarrow T_{\mathcal{E}^\bullet}$ . Cuando  $\mathcal{E}^\bullet$  es de dimensión homológica finita el morfismo  $\mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{O}) \otimes \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)$  es un isomorfismo de donde se concluye.  $\square$

## Transformada de Fourier-Mukai definida por el ideal de la diagonal en variedades Gorenstein.

Sea  $X$  un esquema proyectivo y  $\delta: X \hookrightarrow X \times X$  la inmersión de la diagonal. La sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_\Delta \rightarrow \mathcal{O}_{X \times X} \rightarrow \delta_* \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_\Delta \rightarrow 0$$

induce un triángulo exacto en categoría derivada

$$\Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{I}_\Delta}(\mathcal{E}^\bullet) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(X, \mathcal{E}^\bullet) \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E}^\bullet.$$

Por el Ejemplo 1.6, el haz  $\mathcal{O}_\Delta$  es de dimensión homológica finita sobre el primer factor, luego por simetría también lo es sobre el segundo. Entonces, teniendo en cuenta la sucesión exacta que define al ideal  $\mathcal{I}_\Delta$ , éste también es de dimensión homológica finita sobre ambos factores de  $X \times X$ . Así, de acuerdo con la Proposición 1.4,  $\Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{I}_\Delta}$  aplica  $D_c^b(X)$  en  $D_c^b(X)$ .

**Proposición 1.25.** *Sea  $X$  un esquema de dimensión  $n$ , proyectivo, conexo, Gorenstein, con haz dualizante trivial y tal que  $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ , para todo  $i \neq 0, n$ . El functor integral  $\Phi$ , cuyo núcleo es el haz de ideales  $\mathcal{I}_\Delta$  de la inmersión diagonal  $\delta: X \hookrightarrow X \times X$ , es una transformada de Fourier-Mukai, esto es, una autoequivalencia de  $D_c^b(X)$ .*

*Demostración.* De las hipótesis sobre  $X$  se sigue que  $\mathcal{O}_X$  es un objeto esférico de  $D_c^b(X)$  luego, por el Teorema 1.23 el functor twist asociado  $T_{\mathcal{O}_X}$  es una equivalencia de categorías. Por otro lado, de la definición de  $\mathcal{I}_\Delta$  y  $\mathcal{I}_{\mathcal{O}_X}$  (1.3) se tiene que  $\Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{I}_\Delta} \simeq \Phi^{\mathcal{I}_{\mathcal{O}_X}}[-1]$ . Como  $\mathcal{O}_X$  es de dimensión homológica finita, la Proposición 1.24 garantiza que  $\Phi \simeq T_{\mathcal{O}_X}[-1]$  con lo que se concluye.  $\square$

# Capítulo 2

## Espacios de Moduli

Una de las aplicaciones más importantes de las transformadas de Fourier-Mukai es al estudio de haces semiestables, y sus espacios de móduli, en variedades proyectivas. Este capítulo recoge brevemente las nociones básicas sobre los haces semiestables y algunas de sus propiedades. Veremos como se definen los espacios de móduli de haces semiestables, así como el teorema de existencia de dichos espacios dado por Simpson [68].

Además veremos, usando la compatibilidad de las transformadas de Fourier-Mukai con el cambio de base, como podemos producir de manera natural isomorfismos entre ciertos espacios de móduli. Para ello bastará que dichas transformadas sean compatibles con las condiciones que definen a tales espacios, es decir que transformen haces en haces (salvo traslación) y preserven la estabilidad.

### 2.1. Haces estables y semiestables

#### 2.1.1. Haces estables y semiestables en un esquema proyectivo

Sea  $X$  un esquema proyectivo de dimensión  $n$  sobre un cuerpo  $\mathbb{k}$  algebraicamente cerrado y fijemos una polarización  $H$ . Si  $\mathcal{E}$  es un haz en  $X$  y  $m$  un número entero denotaremos  $\mathcal{E}(m) = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(mH)$ .

**Definición 2.1.** El *polinomio de Hilbert* de  $\mathcal{E}$  es el único polinomio con coeficientes racionales  $P_{\mathcal{E}}(m) \in \mathbb{Q}[m]$  tal que

$$P_{\mathcal{E}}(m) = \chi(X, \mathcal{E}(m)) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{E}(m)), \quad (2.1)$$

para todo entero positivo  $m$  suficientemente grande.

El polinomio de Hilbert puede escribirse de forma única como

$$P_{\mathcal{E}}(m) = \frac{r}{s!} m^s + \frac{d}{(s-1)!} m^{s-1} + \text{términos de orden inferior},$$

donde  $r = r(\mathcal{E})$  y  $d = d(\mathcal{E})$  son números enteros, denominados respectivamente *multiplicidad* y *grado* de  $\mathcal{E}$  y, el grado del polinomio  $s = s(\mathcal{E}) \leq n$  es la dimensión del soporte de  $\mathcal{E}$ . Notar que si  $\mathcal{E} \neq 0$  la multiplicidad  $r(\mathcal{E})$  siempre es un número entero positivo. Llamaremos *dimensión* de  $\mathcal{E}$  a la dimensión del soporte de  $\mathcal{E}$ .

**Definición 2.2.** Se llama *polinomio de Hilbert reducido* de  $\mathcal{E}$  a

$$p_{\mathcal{E}}(m) = \frac{1}{r(\mathcal{E})} P_{\mathcal{E}}(m), \quad (2.2)$$

y se define la *pendiente de Simpson* de  $\mathcal{E}$  como el cociente

$$\mu_S(\mathcal{E}) = \frac{d(\mathcal{E})}{r(\mathcal{E})}. \quad (2.3)$$

Si  $\mathcal{E}$  es de dimensión homológica finita sus clases de Chern están definidas y, usando el Teorema de Riemann-Roch para variedades singulares [28, Corollary 18.3.1] se tiene que

$$P_{\mathcal{E}}(m) = \int_X \text{ch}(\mathcal{E}) \cdot \text{ch}(\mathcal{O}_X(mH)) \cdot \text{Td}(X), \quad (2.4)$$

siendo  $\text{Td}(X)$  la clase de Todd de  $X$ . En particular,

$$\begin{aligned} r(\mathcal{E}) &= \text{ch}_{n-s}(\mathcal{E}) \cdot H^s \\ d(\mathcal{E}) &= (\text{ch}_{n-s+1}(\mathcal{E}) + \text{ch}_{n-s}(\mathcal{E}) \cdot \text{td}_1(X)) \cdot H^{s-1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si  $X$  es íntegro y  $\mathcal{E}$  es libre de torsión, la multiplicidad y el grado están muy relacionados con el rango y grado usual, respecto de  $H$ , ya que de acuerdo con la Ecuación (2.5) es

$$\begin{aligned} r(\mathcal{E}) &= \text{rk}(\mathcal{E}) \cdot \text{deg}(X) \\ d(\mathcal{E}) &= \text{deg}(\mathcal{E}) + \text{rk}(\mathcal{E})\chi(\mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

siendo  $\text{deg}(X)$  el grado de  $X$  sumergido en el espacio proyectivo mediante  $H$ . En estas condiciones la *pendiente* se define usualmente como

$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{\text{deg}(\mathcal{E})}{\text{rk}(\mathcal{E})}. \quad (2.6)$$

Por lo tanto, para un haz libre de torsión en una variedad proyectiva la pendiente de Simpson coincide con la noción usual de pendiente, salvo constantes que no dependen del haz.

*Observación 2.3.* Cuando queramos destacar que la pendiente se está calculando respecto de la polarización  $H$  escribiremos  $\mu_{S,H}(\mathcal{E})$  (resp.  $\mu_H(\mathcal{E})$ ) en lugar de  $\mu_S(\mathcal{E})$  (resp.  $\mu(\mathcal{E})$ ).  $\triangle$

*Ejemplo 2.4.* 1. Sea  $X$  es una curva elíptica, luego  $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$  y  $h^0(X, \mathcal{O}_X) = h^1(X, \mathcal{O}_X) = 1$ . Entonces

$$0 = \chi(X, \mathcal{O}_X) = \int_X \text{td } X = \text{td}_1 X$$

y

$$P_{\mathcal{E}}(m) = \text{rk}(\mathcal{E})Hm + \text{gr}(\mathcal{E}).$$

2. Sea  $X$  es una superficie  $K3$ , luego  $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$  y  $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ . Entonces

$$2 = \chi(X, \mathcal{O}_X) = \int_X \text{td } X = \text{td}_2 X$$

y

$$P_{\mathcal{E}}(m) = \frac{\text{rk}(\mathcal{E})H^2}{2}m^2 + c_1(\mathcal{E})Hm + \chi(\mathcal{E}),$$

siendo  $\chi(\mathcal{E}) = 2 \text{rk}(\mathcal{E}) + \text{ch}_2(\mathcal{E})$ .

3. Sea  $X$  una superficie abeliana, luego  $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ ,  $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 2$ . Entonces

$$0 = \chi(X, \mathcal{O}_X) = \int_X \text{td } X = \text{td}_2 X$$

y

$$P_{\mathcal{E}}(m) = \frac{\text{rk}(\mathcal{E})H^2}{2}m^2 + c_1(\mathcal{E})Hm + \chi(\mathcal{E}),$$

donde  $\chi(\mathcal{E}) = \text{ch}_2(\mathcal{E})$ .

**Definición 2.5.** Un haz  $\mathcal{E}$  es de *dimensión pura*  $s$  si todo subhaz no nulo  $0 \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$  es de dimensión  $s$ .

Cuando  $X$  es íntegro de dimensión  $n$ , los haces de dimensión pura  $n$  son precisamente los haces libres de torsión. En este sentido podemos considerar la siguiente definición.

**Definición 2.6.** Un haz  $\mathcal{E}$  en  $X$  es *libre de torsión* si es de dimensión pura  $n = \dim X$ , y es un haz *de torsión* si la dimensión de su soporte es menor que  $n$ .

**Definición 2.7.** Si  $P$  y  $Q$  son polinomios con coeficientes reales, diremos que  $P \leq Q$  si  $P(m) \leq Q(m)$  para todo  $m$  positivo suficientemente grande.

De este modo los polinomios se ordenan lexicográficamente empezando por sus coeficientes de mayor grado.

**Definición 2.8.** Un haz  $\mathcal{E}$  en  $X$  es *semiestable*, respecto de  $H$ , si es de dimensión pura y para todo subhaz no nulo  $0 \neq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$  se verifica

$$p_{\mathcal{F}} \leq p_{\mathcal{E}}.$$

Un haz  $\mathcal{E}$  es *estable*, si se verifica la condición anterior exigiendo la desigualdad estricta para todo subhaz no nulo de multiplicidad  $r(\mathcal{F}) < r(\mathcal{E})$ .

**Definición 2.9.** Un haz  $\mathcal{E}$  en  $X$  es  $\mu_S$ -*semiestable*, respecto de  $H$ , si es de dimensión pura y para todo subhaz no nulo  $0 \neq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$  se verifica

$$\mu_S(\mathcal{F}) \leq \mu_S(\mathcal{E}).$$

Un haz  $\mathcal{E}$  es  $\mu_S$ -*estable*, si se verifica la condición anterior exigiendo la desigualdad estricta para todo subhaz no nulo de multiplicidad  $r(\mathcal{F}) < r(\mathcal{E})$ .



*Observación 2.10.* 1. Por convenio supondremos que todo haz de torsión en  $X$  cuyo soporte tenga dimensión 0 tiene pendiente (de Simpson) infinita, así dicho haz es  $\mu_S$ -semiestable y, es  $\mu_S$ -estable si y sólo si no tiene subhaces propios, esto es, si es isomorfo al haz estructural  $\mathcal{O}_x$  de un punto  $x \in X$ .

2. Si  $X$  es íntegro y  $\mathcal{E}$  es libre de torsión la noción de  $\mu$ -(semi)estabilidad puede darse en términos de los cocientes de  $\mathcal{E}$  (cf. [41]). Así se tiene que

- $\mathcal{E}$  es  $\mu$ -semiestable si y sólo si  $\mu(\mathcal{E}) \leq \mu(\mathcal{G})$ , para todo cociente libre de torsión  $\mathcal{G}$ .
- $\mathcal{E}$  es  $\mu$ -estable si y sólo si  $\mu(\mathcal{E}) < \mu(\mathcal{G})$ , para todo cociente libre de torsión  $\mathcal{G}$  con  $\text{rk}(\mathcal{G}) < \text{rk}(\mathcal{E})$ .

△

Un cálculo directo con el polinomio de Hilbert prueba que la  $\mu_S$ -estabilidad implica la estabilidad y que la semi-estabilidad implica la  $\mu_S$ -semi-estabilidad, de modo que se tienen las siguientes implicaciones

$$\mu_S\text{-estable} \implies \text{estable} \implies \text{semiestable} \implies \mu_S\text{-semiestable}$$

Si  $\mathcal{E}$  es un haz puro de dimensión  $s$ , existe una única filtración

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_k = \mathcal{E}$$

tal que los cocientes  $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$  son semiestables de dimensión  $s$  y de modo que la sucesión de polinomios reducidos  $p_{\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}}(m)$  es estrictamente decreciente. Esta filtración se conoce como *filtración de Harder-Narasimhan* de  $\mathcal{E}$ . Existe una filtración similar para la  $\mu_S$ -semi-estabilidad, que puede no coincidir con la anterior.

Si  $\mathcal{E}$  es semiestable de dimensión  $s$ , existe una filtración, que denominaremos *filtración de Jordan-Hölder*,

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_k = \mathcal{E},$$

de forma que los cociente sucesivos  $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$  son *estables* de dimensión  $s$  y

$$p_{\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}}(m) = p_{\mathcal{E}}(m)$$

para todo  $i$ . Notar que los haces  $\mathcal{E}_i$ , para  $i > 0$ , también son semiestables con  $p_{\mathcal{E}_i} = p_{\mathcal{E}}$ . Esta filtración no es única, pero sí lo es su graduado  $G(\mathcal{E}) = \bigoplus_i \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ . Esta propiedad sugiere la siguiente definición, cuya importancia se pondrá de manifiesto en el estudio de los espacios de móduli.

**Definición 2.11.** Dos haces semiestables  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}'$  en  $X$  son *S-equivalentes* si los graduados de sus filtraciones de Jordan-Hölder son isomorfos,

$$G(\mathcal{E}) \simeq G(\mathcal{E}').$$

En particular, dos haces estables son S-equivalentes si y sólo si son isomorfos.

**Proposición 2.12.** *Los haces estables son simples, es decir,  $\text{End}(\mathcal{E}) = \mathbb{k}$ .*

### 2.1.2. Móduli de haces semiestables

Para poder hablar de un espacio de móduli (grosero) para los haces semiestables de polinomio de Hilbert  $P(m)$ , el primer paso es considerar haces semiestables relativos.

Sea  $X \rightarrow B$  un morfismo proyectivo y fijemos una polarización relativa  $\mathcal{H}$ . Esto es, para cada  $t \in B$  la fibra  $X_t$  es un esquema proyectivo sobre  $\mathbb{k}$  siendo la restricción de  $\mathcal{H}$  a  $X_t$  una polarización en la fibra.

**Definición 2.13.** Sea  $\mathcal{E}$  un haz en  $X$ . Diremos que  $\mathcal{E}$  es un haz *estable* en  $X/B$ , con polinomio de Hilbert  $P(m)$ , si es plano sobre  $B$  y para cada punto cerrado  $t \in B$  el haz  $\mathcal{E}_t$  es estable en  $X_t$  con polinomio de Hilbert  $P(m)$ , respecto de  $H_t$ . Análogamente se define la semiestabilidad en  $X/B$ .

Si  $f: T \rightarrow B$  es un morfismo y si  $f_X: X_T \rightarrow X$  es el morfismo inducido, para todo haz semiestable  $\mathcal{E}$  en  $X/B$  con polinomio de Hilbert  $P(m)$ , la imagen inversa  $f_X^* \mathcal{E}$  es un haz semiestable en  $X_T/T$  con polinomio de Hilbert  $P(m)$ . De este modo, podemos considerar el *functor de móduli de haces semiestables en  $X/B$*  como el

functor sobre la categoría de esquemas sobre  $B$  definido por

$$\mathbf{M}(X/B, P(m))(T/B) = \left[ \begin{array}{c} \text{Clases de equivalencia} \\ \text{de haces semiestables en } X_T/T \\ \text{con polinomio de Hilbert } P(m) \end{array} \right]$$

donde dos haces  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{F}$  son equivalentes si existe un haz de línea  $\mathcal{L}$  en  $T$  tal que  $\mathcal{E} \simeq \mathcal{F} \otimes \pi_T^* \mathcal{L}$ . Como veremos en lo que sigue existe un *espacio de módulos grosero* para este functor de módulos. Por un espacio de módulos grosero entendemos un esquema que co-representa universalmente dicho functor, de acuerdo con la siguiente definición.

Para todo esquema sobre  $B$ ,  $X \rightarrow B$  denotemos por  $X^\bullet$  su functor de puntos:

$$X^\bullet(T/B) = \text{Hom}_B(T, X).$$

Todo morfismo de  $X \rightarrow Y$  de esquemas sobre  $B$  induce un morfismo de funtores  $X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$  de forma que  $\text{Hom}_B(X, Y) \simeq \text{Hom}(X^\bullet, Y^\bullet)$ .

**Definición 2.14.** Sea  $\mathbf{Y}$  un functor contravariante sobre la categoría de esquemas sobre  $B$ . Se dice que un  $B$ -esquema  $Y \rightarrow B$  *co-representa* el functor  $\mathbf{Y}$  si existe un morfismo de funtores

$$\phi: \mathbf{Y} \rightarrow Y^\bullet,$$

que satisface la siguiente propiedad universal: si  $Z \rightarrow B$  es otro  $B$ -esquema, para todo morfismo de funtores  $\psi: \mathbf{Y} \rightarrow Z^\bullet$  existe un único morfismo de  $B$ -esquemas  $f: Y \rightarrow Z$  que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y} & \xrightarrow{\phi} & Y^\bullet \\ & \searrow \psi & \downarrow f \\ & & Z^\bullet \end{array}$$

Se dice que un  $B$ -esquema  $Y/B$  *co-representa universalmente* el functor  $\mathbf{Y}$ , si para todo  $B$ -esquema  $T \rightarrow S$ , el producto fibrado  $Y_T$  co-representa el functor producto fibrado  $T^\bullet \times_{B^\bullet} \mathbf{Y}$ , es decir, si sigue co-representando después de cualquier cambio de base.

Diremos que  $Y \rightarrow B$  representa el functor  $\mathbf{Y}$  si el morfismo  $\phi: \mathbf{Y} \rightarrow Y^\bullet$  es un isomorfismo de funtores. En tal caso diremos que  $Y$  es un *espacio de móduli fino*. Esto equivale a decir que existe un *elemento universal*  $\zeta$  en  $\mathbf{Y}(Y)$  (el inducido por la identidad  $id \in Hom_B(Y, Y)$ ), en el sentido de que para todo  $B$ -esquema  $T \rightarrow B$  y todo  $\xi \in \mathbf{Y}(T)$  existe un único morfismo  $f: T \rightarrow Y$  tal que  $f^*\zeta$  y  $\xi$  son equivalentes.

De la definición se sigue fácilmente que si existe un  $B$ -esquema  $Y$  que co-representa al functor  $\mathbf{Y}$ , dicho esquema es único salvo isomorfismos en la categoría de  $B$ -esquemas.

Supongamos que para algún  $t \in B$  la clase de haces semiestables en  $X_t$ , con polinomio de Hilbert  $P(m)$  es no vacía. El siguiente resultado de Simpson ([68, Theorem 1.21]) garantiza la existencia del espacio de móduli.

**Teorema 2.15.** *1. Existe un esquema de móduli grosero  $\mathcal{M}(X/B, P(m)) \rightarrow B$  para el functor de móduli de haces semiestables en  $X/B$  con polinomio de Hilbert  $P(m)$ .*

- 2. El morfismo  $\mathcal{M}(X/B, P(m)) \rightarrow B$  es proyectivo.*
- 3. Los puntos cerrados de  $\mathcal{M}(X/B, P(m))$  representan clases de  $S$ -equivalencia de haces semiestables en las fibras de  $X \rightarrow B$  y con polinomio de Hilbert  $P(m)$ .*
- 4. Existe un subesquema abierto  $\mathcal{M}^s(X/B, P(m)) \subseteq \mathcal{M}(X/B, P(m))$  cuyos puntos representan las clases de isomorfismo de haces estables.*
- 5. Localmente para la topología étale en  $\mathcal{M}^s(X/B, P(m))$ , existe un haz universal  $\tilde{\mathcal{E}}$  en*

$$X \times_B \mathcal{M}^s(X/B, P(m)) \rightarrow \mathcal{M}^s(X/B, P(m)).$$

□

*Observación 2.16.* La existencia del haz universal  $\tilde{\mathcal{E}}$  en la topología étale significa que existe un revestimiento étale  $\eta: \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}^s(X/B, P(m))$  y un haz  $\tilde{\mathcal{E}}$  en  $X \times_B$

$\tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ , plano sobre  $\tilde{\mathcal{M}}$  y relativamente estable con polinomio de Hilbert reducido  $p(n)$  cumpliendo la siguiente propiedad universal: para todo  $B$ -esquema  $T \rightarrow B$  y toda clase de equivalencia  $[\mathcal{F}] \in \mathcal{M}^s(X/B, P(m))(T)$  existe un único morfismo  $\varphi: T \rightarrow \mathcal{M}^s(X/B, P(m))$  tal que

$$(id_X \times \eta_T)^* \mathcal{F} \simeq (id_X \times \tilde{\varphi})^* \tilde{\mathcal{E}} \otimes \pi_{\tilde{T}}^* \mathcal{L}$$

para algún haz de línea  $\mathcal{L}$ , siendo  $\tilde{T} = T \times_{\mathcal{M}} \tilde{\mathcal{M}}$ ,  $\tilde{\varphi}: \tilde{T} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$  y  $\eta_T: \tilde{T} \rightarrow T$ .  $\triangle$

Condiciones numéricas sobre el polinomio de Hilbert  $P(m)$  permiten cuándo no hay haces estrictamente semiestables y cuándo el espacio de móduli de haces estables es fino. De [54, Theorem A.6] se sigue el siguiente resultado.

**Teorema 2.17.** *Supongamos que el máximo común divisor de los números enteros  $P(m)$ , con  $m \in \mathbb{Z}$ , es 1. Entonces:*

1. *No hay haces estrictamente semiestables.*
2. *Existe un haz universal  $\mathcal{P}$  en  $X \times_B \mathcal{M}^s(X/B, P(m)) \rightarrow \mathcal{M}^s(X/B, P(m))$ .*
3. *Para cada  $t \in B$  la restricción  $\mathcal{P}_t$  de  $\mathcal{P}$  a la fibra  $X_t \times \mathcal{M}(X_t, P(m))$  es un haz universal.*

## 2.2. Transformadas de Fourier-Mukai entre espacios de móduli

Veamos ahora cómo los funtores integrales pueden usarse para definir de manera natural morfismos algebraicos entre espacios de móduli.

Sean  $X \rightarrow B$  e  $Y \rightarrow B$  morfismos proyectivos y planos de esquemas y consideremos  $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(Y)$  un functor integral relativo de núcleo  $\mathcal{K}^\bullet$ . Sea  $\mathbf{M}(X/B, P)$  el functor que asocia a cada  $B$  esquema  $T \rightarrow B$  el conjunto de clases de equivalencia de haces  $\mathcal{E}$  en  $X \times_B T$ , planos sobre  $T$  y cuyas restricciones  $\mathcal{E}_t$  a las fibras  $X_t$  de  $\pi_T: X \times_B T \rightarrow T$  tienen polinomio de Hilbert  $P$ . Consideremos además  $\mathbf{M}_W(X/B)$  un subfunctor de  $\mathbf{M}(X/B, P)$  que parametrice haces  $\text{WIT}_i\text{-}\Phi^{\mathcal{K}_i^\bullet}$ ,

para un cierto índice  $i$ . Si  $\mathcal{E}$  está en  $\mathbf{M}_W(X/B)(T)$ , del Corolario 1.17 se sigue que los haces  $\widehat{\mathcal{E}} = \Phi_T^i(\mathcal{E})$  son planos sobre  $T$ , luego las restricciones  $(\widehat{\mathcal{E}})_t \simeq \widehat{\mathcal{E}}_t$  tienen el mismo polinomio de Hilbert  $\widehat{P}$ . Esto significa que los transformados  $\widehat{\mathcal{E}}$  están en  $\mathbf{M}(Y/B, \widehat{P})(T)$ .

Ya que los funtores integrales son compatibles con el cambio de base (Proposición 1.16),  $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$  induce un morfismo de funtores:

$$\Phi_M: \mathbf{M}_W(X/B) \rightarrow \mathbf{M}(Y/B, \widehat{P}).$$

**Proposición 2.18.** *Supongamos que  $\mathbf{M}_W(X/B)$  tiene un esquema de móduli grosero  $\mathcal{M}_W(X/B)$ .*

1. *Si existe un subfunctor  $\mathbf{M}(Y/B) \subset \mathbf{M}(Y/B, \widehat{P})$  que contiene a la imagen de  $\Phi_M$  este también está representado groseramente por un esquema de móduli  $\mathcal{M}(Y/B)$ , entonces el functor integral  $\Phi$  da lugar a un morfismo algebraico de  $B$ -esquemas*

$$\Phi_M: \mathcal{M}_W(X/B) \rightarrow \mathcal{M}(Y/B).$$

2. *Si  $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$  es un functor de Fourier-Mukai, entonces existe un esquema de móduli  $\mathcal{M}_W(Y/B)$  que representa groseramente al functor imagen  $\mathbf{M}_W(Y/B) = \Phi(\mathbf{M}_W(X/B))$ , y  $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$  induce un isomorfismo de  $B$ -esquemas.*

$$\Phi_M: \mathcal{M}_W(X/B) \simeq \mathcal{M}_W(Y/B).$$

*Además  $\mathcal{M}_W(X/B)$  es un esquema de móduli fino, esto es representa el functor de móduli  $\mathbf{M}_W(X/B)$ , si y sólo si  $\mathcal{M}_W(Y/B)$  es un esquema de móduli fino.*

*Demostración.* Es inmediata a partir de la definición y unicidad de espacio de móduli grosero y el Corolario 1.19. □

Cuando  $\mathbf{M}_W(X/B)$  es el functor de móduli de los haces  $\mathcal{O}_x$ , el esquema  $X$  puede verse como un espacio de móduli fino para  $\mathbf{M}_W(X/B)$ . Supongamos que  $\mathcal{O}_x$  son haces  $\text{WIT}_i\text{-}\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$ , esto es equivalente a decir que el núcleo de  $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$  es un complejo concentrado en grado  $i$  y, salvo traslación, es un haz plano sobre  $X$ . Tenemos entonces:

**Corolario 2.19.** *Si  $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$  es un functor de Fourier-Mukai, entonces  $X$  es un espacio de móduli fino para el functor de móduli  $\mathbf{M}_W(Y/B)$  de los haces  $\Phi^i(\mathcal{O}_x)$  en  $Y$ .*

El caso que más nos interesa es el siguiente. Supongamos que en  $X \rightarrow B$  e  $Y \rightarrow B$  existen polarizaciones relativas y sean  $\mathbf{M}(X/B, P)$  y  $\mathbf{M}(Y/B, \widehat{P})$  los respectivos funtores de móduli de haces semiestables. Supongamos que todos los haces parametrizados por  $\mathbf{M}(X/B, P)$  son  $\text{WIT}_i$ - $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$  y que sus imágenes por  $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$  son de nuevo semiestables en  $Y/B$ . Tenemos entonces el siguiente resultado:

**Corolario 2.20.** 1.  $\Phi^i$  induce un morfismo de  $B$ -esquemas

$$\mathcal{M}(X/B, P) \rightarrow \mathcal{M}(Y/B, \widehat{P})$$

2. Si  $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$  es un functor de Fourier-Mukai, esto es una equivalencia de categorías, tal que  $\Phi^i(\mathbf{M}(X/B, P)) = \mathbf{M}(Y/B, \widehat{P})$ , entonces el morfismo inducido entre los esquemas de móduli es un isomorfismo de  $B$ -esquemas

$$\mathcal{M}(X/B, P) \simeq \mathcal{M}(Y/B, \widehat{P}).$$





## **Parte II**

# **Aplicaciones a fibraciones Elípticas y en $K3$**



## Capítulo 3

# Moduli de haces semiestables en curvas singulares de género uno.

El objetivo de este capítulo es estudiar los espacios de móduli de haces semiestables en las curvas singulares que aparecen como degeneraciones de curvas elípticas lisas. Encontramos algunas equivalencias de la categoría derivada de haces coherentes de este tipo de curvas que preservan la (semi)estabilidad. Esto nos permite establecer isomorfismos entre ciertos espacios de móduli de haces semiestables, tanto desde un punto de vista absoluto como relativo. Para el caso de los ciclos  $I_N$  de rectas proyectivas probaremos que la componente conexa del espacio de móduli de haces semiestables de grado cero que contiene fibrados vectoriales es isomorfa a un producto simétrico de la curva racional con un nodo.

### 3.1. Haces coherentes en curvas reducibles

Empezamos recordando algunos resultados sobre haces coherentes en curvas reducibles. Sea  $C$  una curva proyectiva, reducida y conexa sobre un cuerpo algebraicamente cerrado  $\mathbb{k}$ . Denotamos por  $C_1, \dots, C_N$  las componentes irreducibles de  $C$  y por  $x_1, \dots, x_k$  los puntos de intersección de  $C_1, \dots, C_N$ . Si  $\mathcal{E}$  es un haz en  $C$  denotamos por  $\mathcal{E}_{C_i}$  su restricción a  $C_i$  módulo su subhaz de torsión (el único subhaz

concentrado en un número finito de puntos tal que el cociente es de dimensión pura uno), es decir,  $\mathcal{E}_{C_i} = (\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{C_i})/\text{torsión}$ . Sean  $r_i = r_i(\mathcal{E})$  y  $d_i = d_i(\mathcal{E})$  el rango y el grado, en el sentido usual, de  $\mathcal{E}_{C_i}$ .

**Definición 3.1.** El *multirango* y *multigrado* de un haz  $\mathcal{E}$  en  $C$  son las  $N$ -uplas  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (r_1, \dots, r_N)$  y  $\underline{d}(\mathcal{E}) = (d_1, \dots, d_N)$  respectivamente.

**Lema 3.2.** Sea  $\mathcal{E}$  un haz de dimensión pura uno en  $C$ . La siguiente sucesión es exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{C_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_{C_N} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

donde  $\mathcal{T}$  es un haz de torsión cuyo soporte está contenido en el conjunto  $\{x_1, \dots, x_k\}$ .

*Demostración.* Consideremos  $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$  el morfismo de normalización de la curva. El morfismo  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{C_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_{C_N}$  está dado por la composición de los morfismos canónicos  $\mathcal{E} \rightarrow \pi_*(\pi^*\mathcal{E}) \rightarrow \pi_*(\pi^*\mathcal{E}/\text{torsión})$ . Fuera de los puntos  $x_1, \dots, x_k$  este morfismo es un isomorfismo, luego su núcleo está concentrado en un número finito de puntos. Ya que  $\mathcal{E}$  es de dimensión pura uno el morfismo es inyectivo y su conúcleo  $\mathcal{T}$  es un haz de torsión cuyo soporte está contenido en los puntos de intersección de las componentes irreducibles de  $C$ .  $\square$

En [66] Seshadri describe la localización de un haz de dimensión pura uno en  $C$  en aquellos puntos de intersección  $\{x_1, \dots, x_k\}$ , de las componentes irreducibles de  $C$ , que son puntos dobles ordinarios. En concreto se tiene que

**Proposición 3.3.** Sea  $\mathcal{E}$  un haz de dimensión pura uno en  $C$  y supongamos que  $x_i \in \{x_1, \dots, x_k\}$  es un punto doble ordinario situado en  $C_i \cap C_{i+1}$ , entonces

$$\mathcal{E}_{x_i} \simeq \mathcal{O}_{C, x_i}^{a_i} \oplus \mathcal{O}_{C_i, x_i}^{b_i} \oplus \mathcal{O}_{C_{i+1}, x_i}^{b_{i+1}}$$

siendo  $a_i, b_i$  y  $b_{i+1}$  números entros determinados por

$$a_i + b_i = \text{rk}(\mathcal{E}_{x_i} \oplus_{\mathcal{O}_{C, x_i}} \mathcal{O}_{C_i, x_i})$$

$$a_i + b_{i-1} = \text{rk}(\mathcal{E}_{x_i} \oplus_{\mathcal{O}_{C, x_i}} \mathcal{O}_{C_{i+1}, x_i})$$

$$a_i + b_i + b_{i+1} = \text{rk}(\mathcal{E}_{x_i} \otimes \mathbb{k}).$$

*Demostración.* Ver [66, Huitième Partie, Proposition 3]. □

Cuando todos los puntos de intersección  $\{x_1, \dots, x_k\}$  de las componentes irreducibles de  $C$  son puntos dobles ordinarios (como ocurre por ejemplo cuando  $C$  es de tipo  $I_N$ ), de la Proposición 3.3 se sigue que el soporte del conúcleo de la sucesión exacta (3.1) son los puntos  $x_i \in \{x_1, \dots, x_k\}$  donde el haz  $\mathcal{E}$  es localmente libre. Así,  $\mathcal{E}$  se obtiene pegando en aquellos puntos  $x_i$ , en los que es localmente libre, los haces  $\mathcal{E}_{C_i}$ .

**Proposición 3.4.** *Si  $\mathcal{E}$  es un haz localmente libre de rango  $r$  en  $C$ , se verifica que  $\chi(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^N d_i(\mathcal{E}) + r\chi(\mathcal{O}_C)$ .*

*Demostración.* Consideremos la sucesión exacta dada por (3.1),

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_{C_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{C_N} \rightarrow \mathcal{T}' \rightarrow 0.$$

Tensorializando por  $\mathcal{E}$  la sucesión exacta, y teniendo en cuenta la aditividad de la característica de Euler, se concluye. □

Veremos más adelante que el recíproco de este resultado, en general, no es cierto.

Fijemos un polinomio  $P(m) = rm + d \in \mathbb{Z}[m]$  y una polarización  $H$  en  $C$  de grado  $h$ , y denotemos por  $h_i$  al grado de la restricción de  $H$  a  $C_i$ .

Como caso particular de los resultados de Simpson sobre la existencia del móduli de haces semiestables (Teorema 2.15) tenemos que si la clase de haces  $\mu_S$ -semiestables en  $C$  con polinomio de Hilbert igual a  $P(m)$ , respecto de  $H$ , no es vacía, entonces existe un espacio de móduli (grosero), que denotaremos  $\mathcal{M}_C(r, d)$ , el cual es un esquema proyectivo sobre  $\mathbb{k}$ . Los puntos cerrados de  $\mathcal{M}_C(r, d)$  corresponden con clases de  $S$ -equivalencia de haces  $\mu_S$ -semiestables en  $C$  con polinomio de Hilbert  $P(m)$ . Cabe destacar que, a diferencia de lo que ocurre en una curva íntegra, la  $\mu_S$ -semiestabilidad de un haz en una curva que no sea íntegra depende de la polarización.

Como el polinomio de Hilbert es aditivo se tienen, de la sucesión exacta (3.1),

las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} r &= r_1 h_1 + \cdots + r_N h_N \\ d &= \sum_{i=1}^N (d_i + r_i \chi(\mathcal{O}_{C_i})) - \ell(\mathcal{T}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Teniendo en cuenta la relación anterior entre el número entero  $r$  y los rangos de las restricciones  $r_i$ , para  $i = 1, \dots, N$ , existe una descomposición natural

$$\mathcal{M}_C(r, d) = \coprod_{(r_1, \dots, r_N) \in \mathbb{Z}^N} \mathcal{M}_C((r_1, \dots, r_N), d) \quad (3.3)$$

donde  $\mathcal{M}_C((r_1, \dots, r_N), d)$  denota el espacio de módulos de haces  $\mu_S$ -semiestables en  $C$  con polinomio de Hilbert  $rm + d$  y multirango  $\underline{r} = (r_1, \dots, r_N)$ .

Esta descomposición es necesaria a la hora de analizar algunos espacios de módulos  $\mathcal{M}_C(r, d)$  ya que si  $\Gamma$  es una autoequivalencia de  $D_c^b(C)$  y  $\mathcal{E}$  es un haz WIT- $\Gamma$ , en general no es cierto que los coeficientes del polinomio de Hilbert de  $\Gamma(\mathcal{E})$  sean funciones lineales de los coeficientes del polinomio de Hilbert de  $\mathcal{E}$ . Esto significa que la imagen, por una autoequivalencia arbitraria de  $D_c^b(C)$ , de cada una de las componentes conexas del espacio de módulos  $\mathcal{M}_C(r, d)$  no está contenida en un mismo espacio de módulos  $\mathcal{M}_C(r', d')$ . Veamos un ejemplo de esto.

*Ejemplo 3.5.* Sea  $C$  una curva de tipo  $I_2$ , es decir, dos curvas racionales  $C_1$  y  $C_2$  que se cortan transversalmente en dos puntos (Figura 3.9). Tomemos una polarización  $H$  tal que  $h_1 = h_2 = 1$ . Sea  $\mathcal{L}$  un haz de línea en  $C$  con multigrado  $\underline{d}(\mathcal{L}) = (d_1, d_2)$  siendo  $d_1 \neq d_2$  y tomemos  $\Gamma = \Phi_{C \rightarrow C}^{\delta_* \mathcal{L}}$  la autoequivalencia que consiste en tensorializar por  $\mathcal{L}$ . Sea  $\mathcal{E}$  un haz coherente en  $C$  con polinomio de Hilbert  $P(m) = rm + d$  y multirango  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (r_1, r_2)$ . De la sucesión exacta (3.1) se sigue que el polinomio de Hilbert del transformado  $\Gamma(\mathcal{E})$  es  $rm + (d + r_1 d_1 + r_2 d_2)$ . En consecuencia la imagen por  $\Gamma$  de la componente conexa  $\mathcal{M}_C((r, 0), d) \subseteq \mathcal{M}_C(r, d)$  está contenida en el espacio de módulos  $\mathcal{M}_C(r, d + r d_1)$  mientras que la de la componente  $\mathcal{M}_C((0, r), d)$  está contenida en  $\mathcal{M}_C(r, d + r d_2)$ .

La siguiente proposición proporciona invariantes mejores. Sea  $K(D_c^b(C))$  el grupo de Grothendieck de la categoría triangulada  $D_c^b(C)$  (cf. [30]). Se tiene entonces que  $K(D_c^b(C)) \simeq K(\text{Coh}(C))$  y a este grupo se le suele denotar  $K_\bullet(C)$ .

**Proposición 3.6.** *Sea  $C$  una curva reducida, conexa y proyectiva. Si cada componente irreducible de  $C$  es isomorfa a la recta proyectiva  $\mathbb{P}^1$  entonces existe un isomorfismo  $K_\bullet(C) \simeq \mathbb{Z}^{N+1}$  siendo  $N$  el número de componetes irreducibles de  $C$ . Además dicho isomorfismo transforma la clase de cualquier haz coherente  $\mathcal{E}$  en  $C$  en la upla  $(\underline{r}(\mathcal{E}), \chi(\mathcal{E})) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ .*

*Demostración.* La idea de la demostración es la siguiente (ver [32, Proposition 2.3] para los detalles). Por un lado, usando [27, Theorem 18.3] existe un morfismo

$$\tau_C: K_\bullet(C) \rightarrow A_\bullet(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

con las siguientes propiedades:

1. Para toda subvariedad cerrada  $C' \subset C$  de dimensión  $k$  se tiene  $\tau_C([\mathcal{O}_{C'}]) = [C'] + \text{términos de dimensión } < k$ ,
2.  $(\tau_C)_{\mathbb{Q}}: K_\bullet(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} A_\bullet(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  es un isomorfismo.

Por otro lado, si  $\pi: \tilde{C} \rightarrow C$  es la normalización de  $C$ , entonces  $\tilde{C} = \tilde{C}_1 \amalg \cdots \amalg \tilde{C}_N$  con  $\tilde{C}_i \simeq \mathbb{P}^1$  y por tanto  $K_\bullet(\tilde{C}) = \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{Z}[\mathcal{O}_{\tilde{C}_i}] \oplus \mathbb{Z}[\mathcal{O}_{\tilde{x}_i}]$ , con  $\tilde{x}_i \in \tilde{C}_i$ . Como  $C$  es conexa y  $\pi_*: K_\bullet(\tilde{C}) \rightarrow K_\bullet(C)$  es epiyectivo ([27, Lemma 18.3]) se sigue que  $K_\bullet(C)$  está generado por  $[\mathcal{O}_{C_1}], \dots, [\mathcal{O}_{C_N}], [\mathcal{O}_x]$ , con  $x \in C$  un punto cualquiera ya que todos son racionalmente equivalentes.

Usando  $\tau_C$  se obtiene que  $[\mathcal{O}_{C_1}], \dots, [\mathcal{O}_{C_N}], [\mathcal{O}_x]$  es una base de  $K_\bullet(C)$ . Aplicando  $(\underline{r}(-), \chi(-))$  a esta base se tiene el resultado.  $\square$

Todas las funciones implicadas en el isomorfismo de la Proposición 3.6, es decir, los rangos  $r_i$  y la característica de Euler  $\chi$ , son aditivas en los triángulos de la categoría  $D_c^b(C)$ . Se sigue entonces que toda equivalencia  $\Gamma$  de  $D_c^b(C)$  induce un automorfismo  $\gamma$  del correspondiente grupo de Grothedieck  $K_\bullet(C)$ , de manera que el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} D_c^b(C) & \xrightarrow{\Gamma} & D_c^b(C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_\bullet(C) & \xrightarrow{\gamma} & K_\bullet(C) \end{array}$$

donde los morfismos verticales son los naturales.

Como ya hemos visto en la Proposición 3.4 si  $\mathcal{E}$  es un fibrado vectorial se verifica la igualdad  $d = \sum_{i=1}^N d_i + r\chi(\mathcal{O}_C)$ . Así, la categoría de fibrados vectoriales en  $C$  de rango  $r$  y característica  $d$ , esto es, aquellos cuyo polinomio de Hilbert es  $P(m) = rhm + d$ , descompone como

$$\mathrm{VB}_C(r, d) \simeq \coprod_{\underline{d} \in \mathbb{Z}^N} \mathrm{VB}_C(r, \underline{d}),$$

estando la unión indexada por  $\underline{d} = (d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{Z}^N$  con  $\sum_{i=1}^N d_i + r\chi(\mathcal{O}_C) = d$ . Sin embargo, para haces no localmente libres no es cierto en general que la igualdad de la Proposición 3.4 (como probaremos en la Proposición 3.36), no pudiendo dar una descomposición de los espacios de módulos  $\mathcal{M}_C(r, d)$  en términos del multigrado.

Terminamos esta subsección mostrando cómo se comporta la  $\mu_S$ -semi estabilidad por la imagen directa e inversa de revestimientos de Galois de curvas reducibles. Para el caso de variedades proyectivas, no singulares e íntegras Takemoto [70] obtuvo resultados similares.

**Lema 3.7.** *Sea  $C$  una curva proyectiva, reducida y conexa cuyas componentes irreducibles son lisas. Sea  $H$  una polarización en  $C$  y  $f: \tilde{C} \rightarrow C$  un revestimiento étale de Galois de grado  $n$ , con  $\tilde{C}$  también conexa.*

1. *Si  $\mathcal{E}$  es un haz libre de torsión en  $C$  tal que  $f^*\mathcal{E}$  es  $\mu_S$ -semi estable respecto de  $f^*H$ , entonces  $\mathcal{E}$  es  $\mu_S$ -semi estable respecto de  $H$ .*
2. *Un haz  $\mathcal{F}$  libre de torsión en  $\tilde{C}$  es  $\mu_S$ -semi estable respecto de  $f^*H$  si y sólo si  $f_*(\mathcal{F})$  es  $\mu_S$ -semi estable respecto de  $H$ .*

*Demostración.* (1) Consideremos la sucesión exacta (3.1)

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{C_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_{C_N} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0,$$

donde cada  $\mathcal{E}_{C_i}$  es un fibrado vectorial o es el haz nulo. Ya que cada  $C_i$  es una curva lisa y  $f$  es un revestimiento de grado  $n$  se sigue que  $P_{f^*\mathcal{E}_{C_i}}(m) = nP_{\mathcal{E}_{C_i}}(m)$ . Además, por ser  $f$  plano, se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow f^*\mathcal{E} \rightarrow f^*\mathcal{E}_{C_1} \oplus \cdots \oplus f^*\mathcal{E}_{C_r} \rightarrow f^*\mathcal{T} \rightarrow 0.$$



La aditividad del polinomio de Hilbert permite concluir que  $P_{f^*\mathcal{E}}(m) = nP_{\mathcal{E}}(m)$ , computando dichos polinomios respecto de la polarización  $f^*H$  y  $H$  respectivamente. Luego

$$\mu_S(f^*\mathcal{E}) = \mu_S(\mathcal{E}) \tag{3.4}$$

de donde se sigue el resultado.

(2) Supongamos que  $\mathcal{F}$  es un haz libre de torsión en  $\tilde{C}$  y  $\mu_S$ -semiestable respecto de  $f^*H$ . Teniendo en cuenta el apartado (1), para probar que  $f_*\mathcal{F}$  es  $\mu_S$ -semiestable respecto de  $H$  basta probar que  $f^*f_*(\mathcal{F})$  es  $\mu_S$ -semiestable respecto de  $f^*H$ . Ya que todo revestimiento étale de Galois con  $C$  y  $\tilde{C}$  conexos trivializa sobre si mismo, resulta  $f^*f_*(\mathcal{F}) = \bigoplus \rho^*\mathcal{F}$ , donde  $\rho$  varía en el grupo de Galois de  $f$ . Como toda extensión de dos haces  $\mu_S$ -semiestables con la misma pendiente también es  $\mu_S$ -semiestable acabamos. El recíproco es cierto para todo morfismo finito.  $\square$

*Observación 3.8.* Destacar que la Ecuación (3.4) es cierta ya que estamos considerando la pendiente de Simpson y no la pendiente usual, definida para un haz libre de torsión como el grado dividido entre el rango. En el caso de variedades lisas es conocido (cf. [70]) que si  $f$  es un revestimiento no ramificado de grado  $\deg f$  las pendientes usuales de  $\mathcal{E}$  y  $f^*\mathcal{E}$  satisfacen que  $\mu(f^*\mathcal{E}) = \deg f \cdot \mu(\mathcal{E})$ .  $\triangle$

## 3.2. Transformadas de Fourier-Mukai preservando la estabilidad

El primer problema con el que nos encontramos a la hora de usar las transformadas de Fourier-Mukai para establecer isomorfismos, y por tanto identificar espacios de móduli de haces (semi)estables en curvas singulares de género aritmético uno, es que por lo general dichas transformadas, incluso las más sencillas como multiplicar por un haz de línea o la imagen directa por un morfismo, no preservan la estabilidad. Si  $C$  es una curva irreducible de género aritmético uno el grupo de auto-equivalencias exactas de su categoría derivada  $D_c^b(C)$  fue descrito por Burban y Kreuzler (cf. [15]). Esta descripción extiende al caso irreducible la que ya se conocía para curvas elípticas lisas (cf. [10], [36]). Así, si  $C$  es una curva irreducible de

género aritmético uno, esto es una curva elíptica lisa o una curva racional con un nodo o un punto cúspidal, el grupo  $\text{Aut } D_c^b(C)$  está generado por las autoequivalencias triviales (esto es, tensorializar por haces de línea de  $C$ , automorfismos de  $C$  o el functor traslación [1]) junto con la transformada de Fourier-Mukai cuyo núcleo es el haz de ideales  $I_\Delta$  de la diagonal  $\delta: C \hookrightarrow C \times C$ . Entonces, teniendo en cuenta que en una curva íntegra tensorializar por haces de línea preserva la (semi)estabilidad, el hecho de que una transformada de Fourier-Mukai no trivial transforme haces (semi)estables en haces en haces (semi)estables (salvo traslación) (cf. [5]) permite asegurar que toda auto-equivalencia de  $D_c^b(C)$  preserva la estabilidad. Sin embargo, como ya hemos comentado, esto no es cierto si  $C$  no es irreducible. El caso más sencillo lo encontramos entre las auto-equivalencias consistentes en tensorializar por un haz de línea, como muestra el siguiente ejemplo.

*Ejemplo 3.9.* Sea  $C$  una curva de tipo  $I_2$ . Tomemos  $\mathcal{L}$  un haz de línea en  $C$  con multigrado  $(2, -2)$ . De [45, Proposition 6.2, 6.3] se tiene que  $\mathcal{O}_C$  es  $\mu_S$ -estable pero

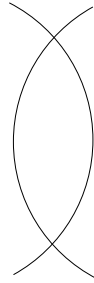


Figura 3.1: La curva  $I_2$

$\mathcal{L}$  no es  $\mu_S$ -semiestable. En consecuencia tensorializar por  $\mathcal{L}$ , esto es la transformada de Fourier-Mukai  $\Phi_{C \rightarrow C}^{\delta_* \mathcal{L}}$ , no preserva la (semi)estabilidad.

*Observación 3.10.* Del ejemplo se sigue que, a diferencia de lo que ocurre en el caso liso, existen haces simples (luego en particular indescomponibles) que no son  $\mu_S$ -semiestables.  $\triangle$

### 3.2.1. Una transformada de Fourier-Mukai no trivial en curvas de género uno

En lo que queda de sección supondremos que  $C$  es una curva proyectiva, Gorenstein con haz dualizante trivial y de género aritmético  $\dim H^1(C, \mathcal{O}_C) = 1$ .

**Proposición 3.11.** *Sea  $\mathcal{I}_\Delta$  el haz de ideales de la inmersión diagonal  $\delta: C \hookrightarrow C \times C$ . Se verifica:*

1. *El haz de ideales  $\mathcal{I}_\Delta$  es un objeto en  $D_c^b(C \times C)$  de dimensión homológica finita sobre ambos factores.*
2. *El functor integral  $\Phi = \Phi_{C \rightarrow C}^{\mathcal{I}_\Delta}: D_c^b(C) \rightarrow D_c^b(C)$  es una equivalencia de categorías.*
3. *El functor integral  $\widehat{\Phi} = \Phi_{C \rightarrow C}^{\mathcal{I}_\Delta^*}: D_c^b(C) \rightarrow D_c^b(C)$ , donde  $\mathcal{I}_\Delta^*$  es el haz dual, es salvo traslación el quasi-inverso de  $\Phi$  con  $\widehat{\Phi} \circ \Phi \simeq [-1]$  y  $\Phi \circ \widehat{\Phi} \simeq [-1]$ .*

*Demostración.* (1) y (2) son casos particulares de la Proposición 1.25. Veamos (3). Por el Teorema 1.12, el functor  $\Phi_{C \rightarrow C}^{\mathcal{I}_\Delta^\vee[1]}$  es adjunto por la derecha de  $\Phi$  siendo  $\mathcal{I}_\Delta^\vee = \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{C \times C}}^\bullet(\mathcal{I}_\Delta, \mathcal{O}_{C \times C})$  el dual en la categoría derivada, luego es suficiente demostrar que  $\mathcal{I}_\Delta^\vee$  es isomorfo al dual ordinario  $\mathcal{I}_\Delta^*$ . En efecto, hemos de probar que  $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{C \times C}}^i(\mathcal{I}_\Delta, \mathcal{O}_{C \times C}) = 0$  para  $i \geq 1$ . Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_\Delta \rightarrow \mathcal{O}_{C \times C} \rightarrow \delta_* \mathcal{O}_C \rightarrow 0.$$

Tomando homomorfismos locales en  $\mathcal{O}_{C \times C}$  se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{C \times C} \rightarrow \mathcal{I}_\Delta^* \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{C \times C}}^1(\delta_* \mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{C \times C}) \rightarrow 0$$

e isomorfismos

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{C \times C}}^{i-1}(\mathcal{I}_\Delta, \mathcal{O}_{C \times C}) \simeq \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{C \times C}}^i(\delta_* \mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{C \times C}) \quad \text{para todo } i > 1.$$

Del hecho de que  $C$  es Gorenstein se sigue que  $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{C \times C}}^i(\delta_* \mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{C \times C}) = 0$  para todo  $i > 1$ , con lo que concluimos.  $\square$

Ya que  $\mathcal{I}_\Delta$  es plano sobre el primer factor (y por simetría también lo es sobre el segundo) y las fibras de  $\pi_2$  son de dimensión uno, para todo haz  $\mathcal{E}$  en  $C$  se tiene  $\Phi^j(\mathcal{E}) = 0$  si  $j \neq \{0, 1\}$ .

La siguiente proposición recoge algunas propiedades conocidas de los haces WIT.

**Proposición 3.12.** 1. Sea  $\mathcal{E}$  un haz  $WIT_i\text{-}\widehat{\Phi}$  en  $C$ . Entonces  $\widehat{\mathcal{E}}$  es un haz  $WIT_{1-i}\text{-}\widehat{\Phi}$  en  $C$  y  $\widehat{\widehat{\mathcal{E}}} \simeq \mathcal{E}$ .

2. Existe la sucesión espectral de Mukai

$$E_2^{p,q} = \widehat{\Phi}^p(\Phi^q(\mathcal{E})) \implies \begin{cases} \mathcal{E} & \text{si } p + q = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3. Para todo haz  $\mathcal{E}$  en  $C$ , el haz  $\Phi^0(\mathcal{E})$  es  $WIT_1\text{-}\widehat{\Phi}$  y el haz  $\Phi^1(\mathcal{E})$  es  $WIT_0\text{-}\widehat{\Phi}$ .

4. Existe la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \widehat{\Phi}^1(\Phi^0(\mathcal{E})) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{\Phi}^0(\Phi^1(\mathcal{E})) \longrightarrow 0.$$

*Demostración.* 1 y 2 se siguen de las Ecuaciones (1.1) y (1.15), 3 es consecuencia directa de 1, y 4 es la sucesión de los términos bajos de la sucesión espectral de Mukai.  $\square$

Como ya hemos visto tensorializar por el haz de línea definido por la polarización  $H$  es el funtor integral  $\Psi = \Phi_{C \rightarrow C}^{\delta_* \mathcal{O}_C(H)}$  con  $\delta$  la inmersión de la diagonal. Este funtor integral es una transformada de Fourier-Mukai, cuyo quasi-inverso es  $\widehat{\Psi} = \Phi_{C \rightarrow C}^{\delta_* \mathcal{O}_C(-H)}$ .

## Cálculo de los invariantes

Ya que no estamos suponiendo que  $C$  es íntegra las clases de Chern del haz  $\mathcal{E}$  podrían no estar definidas. Es por ello que tenemos que considerar el polinomio de Hilbert de  $\mathcal{E}$  en lugar de sus invariantes topológicos. La noción de polinomio de Hilbert se puede dar también para complejos.

**Definición 3.13.** Si  $\mathcal{F}^\bullet$  es un objeto de  $D_c^b(C)$ , se define su polinomio de Hilbert como la suma alternada de los polinomios de Hilbert de sus haces de cohomología, es decir

$$P_{\mathcal{F}^\bullet}(m) = \sum_i (-1)^i \chi(\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_C(mH))).$$

En la siguiente proposición se calcula el polinomio de Hilbert del complejo que se obtiene al transformar un haz  $\mathcal{E}$  por la transformada de Fourier-Mukai definida por el ideal de la diagonal  $\Phi$  y por la definida por la polarización  $\Psi$ .

**Proposición 3.14.** Sea  $\mathcal{E}$  un haz en  $C$  con polinomio con Hilbert  $P(m) = rm + d$ . Entonces

1. El polinomio de Hilbert del complejo  $\Phi(\mathcal{E})$  (resp.  $\widehat{\Phi}(\mathcal{E})$ ) es  $(dh - r)m - d$  (resp.  $(dh + r)m + d$ ).
2. El polinomio de Hilbert del haz  $\Psi(\mathcal{E})$  (resp.  $\widehat{\Psi}(\mathcal{E})$ ) es  $rm + d + r$  (resp.  $rm + d - r$ ).

*Demostración.* (1) Denotemos  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{C \times C}$  y consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_\Delta \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \delta_* \mathcal{O}_C \rightarrow 0.$$

En la categoría derivada  $D_c^b(C)$  dicha sucesión induce un triángulo exacto

$$\Phi(\mathcal{E}) \rightarrow \Phi_{C \rightarrow C}^{\mathcal{O}}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \Phi(\mathcal{E})[1], \quad (3.5)$$

para todo haz  $\mathcal{E}$  en  $C$ . Ya que la característica de Euler es aditiva para triángulos exactos en la categoría derivada, el polinomio de Hilbert del complejo  $\Phi(\mathcal{E})$  es igual a

$$\chi(\Phi_{C \rightarrow C}^{\mathcal{O}}(\mathcal{E})(mH)) - (rm + d).$$

Si  $p: C \rightarrow \text{Spec } \mathbb{k}$  es la proyección de  $C$  en un punto y  $\pi_i: C \times C \rightarrow C$  son las proyecciones naturales, de la fórmula de cambio de base para el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C \times C & \xrightarrow{\pi_1} & C \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{p} & \text{Spec } \mathbb{k} \end{array}$$

se tiene que:

$$\Phi_{C \rightarrow C}^{\mathcal{O}}(\mathcal{E}) = \mathbf{R}\pi_{2*}(\pi_1^* \mathcal{E}) \simeq p^* \mathbf{R}p_*(\mathcal{E}) \simeq p^* \mathbf{R}\Gamma(C, \mathcal{E}) = \mathbf{R}\Gamma(C, \mathcal{E}) \otimes_k \mathcal{O}_C. \quad (3.6)$$

Entonces  $\chi(\Phi_{C \rightarrow C}^{\mathcal{O}}(\mathcal{E})(mH)) = \chi(\mathbf{R}\Gamma(C, \mathcal{E}) \otimes_k \mathcal{O}_C(sH)) = \chi(\mathcal{E})\chi(\mathcal{O}_C(mH)) = d(mh)$ , de donde se concluye.

Para calcular el polinomio de Hilbert de  $\widehat{\Phi}(\mathcal{E})$  basta tener en cuenta que  $\Phi \circ \widehat{\Phi} \simeq [-1]$ .

(2) Como la equivalencia  $\Psi$  (resp.  $\widehat{\Psi}$ ) es tensorializar por el haz de línea  $\mathcal{O}_C(H)$  (resp.  $\mathcal{O}_C(-H)$ ) esta parte es inmediata.  $\square$

### 3.2.2. Preservación de la estabilidad

Para probar la preservación de la estabilidad por la autoequivalencia de  $D_c^b(C)$  definida por el ideal de la diagonal  $\mathcal{I}_{\Delta}$  necesitamos una descripción de los haces semiestables que son  $\text{WIT}_i$  respecto de las transformadas  $\Phi$  y  $\widehat{\Phi}$ . Por lo que se refiere a  $\Psi$  y a  $\widehat{\Psi}$  es obvio que todo haz  $\mathcal{E}$  en  $C$  es  $\text{WIT}_0$  respecto de ambas.

**Corolario 3.15.** *Sea  $\mathcal{E}$  un haz en  $C$  no nulo.*

1. Si  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_0\text{-}\Phi$ , entonces  $\mu_S(\mathcal{E}) > 1/h$ .
2. Si  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_1\text{-}\Phi$ , entonces  $\mu_S(\mathcal{E}) \leq 1/h$ .
3. Si  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_0\text{-}\widehat{\Phi}$ , entonces  $\mu_S(\mathcal{E}) > -1/h$ .
4. Si  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_1\text{-}\widehat{\Phi}$ , entonces  $\mu_S(\mathcal{E}) \leq -1/h$ .

*Demostración.* Sea  $P_{\mathcal{E}}(m) = rm + d$  el polinomio de Hilbert de  $\mathcal{E}$ . Por la Proposición 3.14 el polinomio de Hilbert de  $\Phi(\mathcal{E})$  es  $P_{\Phi(\mathcal{E})}(m) = (dh - r)m - d$ . Supongamos que  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_0\text{-}\Phi$ . Entonces  $\Phi(\mathcal{E}) = \widehat{\mathcal{E}}$  y por lo tanto  $dh \geq r$ . Si  $dh = r$  el haz obtenido  $\widehat{\mathcal{E}}$  sería un haz de torsión de longitud  $-d = -r/h \leq 0$ , es decir de longitud cero. Entonces  $\widehat{\mathcal{E}}$  sería nulo lo cual no es posible ya que  $\mathcal{E}$  no lo es. La demostración para los demás casos es análoga.  $\square$

*Observación 3.16.* De la definición de haz de torsión en este tipo de curvas se sigue fácilmente lo siguiente:

1. Los haces de torsión en  $C$  son  $\text{WIT}_0$  respecto de  $\Phi$  y  $\widehat{\Phi}$ .
2. Si  $\mathcal{E}$  es un haz  $\text{WIT}_1$  con polinomio de Hilbert  $P(m) = rm + d$ , entonces  $r \neq 0$ .

△

Es claro que tensorializar por el haz amplio  $\mathcal{O}_C(H)$  preserva la estabilidad, es decir que el transformado de un haz  $\mu_S$ -(semi)estable por las equivalencias  $\Psi$  o  $\widehat{\Psi}$  es de nuevo un haz  $\mu_S$ -(semi)estable (Proposición 3.14). En esta subsección probaremos que las transformadas de Fourier-Mukai  $\Phi$  y  $\widehat{\Phi}$  también preservan la  $\mu_S$ -semi-estabilidad.

**Proposición 3.17.** *Sea  $\mathcal{E}$  un haz  $\mu_S$ -semi-estable en  $C$ , entonces*

1.  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_0$ - $\Phi$  si y sólo si  $\mu_S(\mathcal{E}) > 1/h$ .
2.  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_1$ - $\Phi$  si y sólo si  $\mu_S(\mathcal{E}) \leq 1/h$ .

*Demostración.* Si  $\mathcal{E}$  es un haz de torsión el resultado se sigue de la Observación 3.16. Supongamos entonces que  $\mathcal{E}$  es libre de torsión, y consideremos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \widehat{\Phi}^1(\Phi^0(\mathcal{E})) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{\Phi}^0(\Phi^1(\mathcal{E})) \longrightarrow 0.$$

1. El directo es el Corolario 3.15. Para probar el recíproco supongamos que  $\mu_S(\mathcal{E}) > 1/h$  y  $\mathcal{E}$  no es  $\text{WIT}_0$ - $\Phi$ . De la sucesión exacta anterior se tiene que  $\widehat{\Phi}^0(\Phi^1(\mathcal{E}))$  es un cociente no nulo de  $\mathcal{E}$ . Dicho cociente es  $\text{WIT}_1$ - $\Phi$  luego, por el Corolario 3.15, su pendiente es  $\mu_S(\widehat{\Phi}^0(\Phi^1(\mathcal{E}))) \leq 1/h$  y, en consecuencia,  $\mu_S(\widehat{\Phi}^1(\Phi^0(\mathcal{E}))) \geq 1/h$ , contradiciendo la  $\mu_S$ -estabilidad de  $\mathcal{E}$ . Así,  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_0$ - $\Phi$ .

2. El directo es el Corolario 3.15. Para demostrar el recíproco razonamos como en el apartado (1). Supongamos que  $\mu_S(\mathcal{E}) \leq 1/h$  y que  $\mathcal{E}$  no es  $\text{WIT}_1\text{-}\Phi$ . Teniendo en cuenta la sucesión exacta anterior resulta que  $\widehat{\Phi}^1(\Phi^0(\mathcal{E}))$  es un subhaz no nulo de  $\mathcal{E}$ . Como además es  $\text{WIT}_0\text{-}\Phi$  su pendiente, por el Corolario 3.15, es  $\mu_S(\widehat{\Phi}^1(\Phi^0(\mathcal{E}))) > 1/h$  contradiciendo la  $\mu_S$ -semiestabilidad de  $\mathcal{E}$ . Entonces,  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_1\text{-}\Phi$ . □

De manera similar se demuestra el resultado análogo para  $\widehat{\Phi}$ .

**Proposición 3.18.** *Sea  $\mathcal{E}$  un haz  $\mu_S$ -semiestable en  $C$ , entonces*

1.  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_0\text{-}\widehat{\Phi}$  si y sólo si  $\mu_S(\mathcal{E}) > -1/h$ .
2.  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_1\text{-}\widehat{\Phi}$  si y sólo si  $\mu_S(\mathcal{E}) \leq -1/h$ . □

El siguiente resultado es conocido como el teorema de Parseval (su demostración puede consultarse, por ejemplo en [52, Corollary 2.5] o [5, Proposition 1.34]).

**Proposición 3.19.** *Sea  $\Phi: D(X) \rightarrow D(Y)$  un functor exacto y plenamente fiel,  $\mathcal{F}$  un haz  $\text{WIT}_i\text{-}\Phi$  y  $\mathcal{G}$  un haz  $\text{WIT}_j\text{-}\Phi$  en  $X$ . Entonces, para todo  $h$ , uno tiene que*

$$\text{Ext}_X^h(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \text{Ext}_Y^{h+i-j}(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{G}})$$

*En particular si  $\mathcal{F}$  es un haz  $\text{WIT}\text{-}\Phi$  y simple, entonces el transformado  $\widehat{\mathcal{F}}$  también es simple.* □

**Proposición 3.20.** *Sea  $\mathcal{E}$  un haz simple (resp. indescomponible) y  $\mu_S$ -semiestable en  $C$ . Entonces  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}$  respecto de las transformadas  $\Phi$  y  $\widehat{\Phi}$ . En ambos casos el transformado  $\widehat{\mathcal{E}}$  también es un haz simple (resp. indescomponible).*

*Demostración.* Por las Proposiciones 3.17 y 3.18 es claro que  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}$ , respecto de ambas transformadas. En consecuencia  $\widehat{\mathcal{E}}$  es indescomponible siempre que  $\mathcal{E}$  lo sea. Además, usando el teorema de Parseval (Proposición 3.19), si  $\mathcal{E}$  es simple entonces  $\widehat{\mathcal{E}}$  también lo es. □



*Observación 3.21.* Como ya hemos comentado, en este tipo de curvas existen haces simples que no son  $\mu_S$ -semiestables. Así, en la Proposición 3.20 debemos suponer ambas condiciones si queremos que  $\Phi$  preserve la condición de ser simple. De hecho existen ejemplos concretos de haces simples cuyos transformados por  $\Phi$  son complejos y no haces. Por ejemplo, consideremos  $\mathcal{L}$  un haz de línea en  $I_2$  con multigrado  $(2, -2)$ . De la sucesión exacta (3.1) se sigue que  $H^0(I_2, \mathcal{L}) \simeq H^1(I_2, \mathcal{L}) \simeq \mathbb{k}$ . De las ecuaciones (3.5) y (3.6) se sigue que  $\Phi(\mathcal{L})$  es un complejo con dos haces de cohomología no nulos.  $\triangle$

**Lema 3.22.** *Sea  $\mathcal{E}$  un haz en  $C$  con polinomio de Hilbert  $P(m) = dhm + d$  siendo  $d > 0$ . Entonces  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_1\text{-}\Phi$  si y sólo si  $\mathcal{E}$  es un haz libre de torsión y  $\mu_S$ -semiestable. Análogamente si el polinomio de Hilbert es  $P(m) = dhm - d$  con  $d > 0$ , entonces  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_1\text{-}\widehat{\Phi}$  si y sólo si  $\mathcal{E}$  es libre de torsión y  $\mu_S$ -semiestable.*

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_1\text{-}\Phi$ , entonces es claro que todo subhaz también es  $\text{WIT}_1\text{-}\Phi$ . En virtud de la Observación 3.16 los haces de torsión son  $\text{WIT}_0\text{-}\Phi$ , luego esto muestra que  $\mathcal{E}$  es libre de torsión. Tomemos  $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{E}$  un subhaz, por el Corolario 3.15,  $\mu_S(\mathcal{F}) \leq 1/h = \mu_S(\mathcal{E})$ , es decir  $\mathcal{E}$  es  $\mu_S$ -semiestable. El recíproco es parte de la Proposición 3.17. La demostración para  $\widehat{\Phi}$  es similar.  $\square$

Como consecuencia de este lema se tiene el siguiente resultado

**Proposición 3.23.** *Si  $\mathcal{T}$  es un haz de torsión en  $C$ , entonces el transformado  $\widehat{\mathcal{T}}$  respecto de las transformadas de Fourier-Mukai  $\Phi$  y  $\widehat{\Phi}$  es un haz libre de torsión y  $\mu_S$ -semiestable.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{T}$  un haz de torsión en  $C$ , entonces  $\mathcal{T}$  es  $\text{WIT}_0\text{-}\Phi$  y su polinomio de Hilbert es  $P(m) = d$  con  $d > 0$ . Su transformado  $\widehat{\mathcal{T}}$  es  $\text{WIT}_1\text{-}\widehat{\Phi}$  y, por Proposición 3.14, su polinomio de Hilbert es  $P(m) = dhm - d$ . Por el Lema 3.22 se concluye. La demostración para  $\widehat{\Phi}$  es idéntica.  $\square$

Estamos ya en condiciones de probar la preservación de la semiestabilidad por la transformada de Fourier-Mukai definida por el haz de ideales de la diagonal  $\Phi$  y su inversa  $\widehat{\Phi}$ .

**Teorema 3.24.** *Sea  $C$  una curva proyectiva Gorenstein de género aritmético 1 y dualizante trivial. Fijemos una polarización  $H$  en  $C$ . Sea  $\mathcal{E}$  un haz de dimensión pura en  $C$ . Si  $\mathcal{E}$  es  $\mu_S$ -semiestable respecto de  $H$ , entonces su transformado  $\widehat{\mathcal{E}}$ , respecto de las transformadas de Fourier-Mukai  $\Phi$  y  $\widehat{\Phi}$ , también es  $\mu_S$ -semiestable respecto de la misma polarización  $H$ .*

*Demostración.* Sea  $P(m) = rm + d$  el polinomio de Hilbert de  $\mathcal{E}$  respecto de la polarización fijada  $H$  y denotemos por  $h$  al grado de ésta. Si  $r = 0$  se aplica el resultado de la Proposición 3.23, luego podemos suponer que  $\mathcal{E}$  es un haz libre de torsión. Distingamos los siguientes casos:

(1) Si  $dh = r$ , el transformado  $\widehat{\mathcal{E}}$  es un haz de torsión y por lo tanto es  $\mu_S$ -semiestable.

(2) Si  $dh > r$ , por la Proposición 3.17, el haz  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_0\text{-}\Phi$  luego su transformado  $\widehat{\mathcal{E}}$  es  $\text{WIT}_1\text{-}\widehat{\Phi}$ . El mismo argumento que en la demostración del Lema 3.22 muestra que  $\widehat{\mathcal{E}}$  es un haz libre de torsión. Si  $\widehat{\mathcal{E}}$  no es  $\mu_S$ -semiestable existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

con  $\mu_S(\mathcal{G}) < \mu_S(\widehat{\mathcal{E}}) < \mu_S(\mathcal{F})$ , el subhaz  $\mathcal{F}$  es  $\text{WIT}_1\text{-}\widehat{\Phi}$  y podemos suponer que  $\mathcal{G}$  es un haz libre de torsión y  $\mu_S$ -semiestable. Como  $\widehat{\mathcal{E}}$  es libre de torsión y  $\text{WIT}_1\text{-}\widehat{\Phi}$ , de la Proposición 3.17 se tiene que  $\mu_S(\widehat{\mathcal{E}}) < -1/h$ , siendo la desigualdad estricta ya que  $\mathcal{E}$  es libre de torsión. Entonces,  $\mathcal{G}$  es un haz libre de torsión,  $\mu_S$ -semiestable y con pendiente  $\mu_S(\mathcal{G}) < -1/h$ , luego  $\mathcal{G}$  es  $\text{WIT}_1\text{-}\widehat{\Phi}$  por la Proposición 3.18. Aplicando la transformada de Fourier-Mukai inversa uno obtiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{\mathcal{G}} \longrightarrow 0$$

donde  $r(\widehat{\mathcal{F}}) \neq 0$ , ya que  $\mathcal{E}$  es libre de torsión. Además como  $\widehat{\mathcal{F}}$  es  $\text{WIT}_0\text{-}\Phi$  y  $\mathcal{E}$  es  $\mu$ -semiestable se tiene  $1/h < \mu_S(\widehat{\mathcal{F}}) \leq \mu_S(\mathcal{E})$ .

Teniendo en cuenta la relación entre la pendiente un haz y la de su transformado

$$\mu_S(\widehat{\mathcal{E}}) = \frac{\mu_S(\mathcal{E})}{1 - h\mu_S(\mathcal{E})} \quad \text{y} \quad \mu_S(\mathcal{F}) = \frac{\mu_S(\widehat{\mathcal{F}})}{1 - h\mu_S(\widehat{\mathcal{F}})}$$

se sigue que  $\mu_S(\mathcal{F}) \leq \mu_S(\widehat{\mathcal{E}})$ , lo cual contradice que  $\mu_S(\mathcal{F}) > \mu_S(\widehat{\mathcal{E}})$  y en consecuencia  $\widehat{\mathcal{E}}$  es  $\mu$ -semiestable.

(3) Sea  $dh < r$ . Veamos que  $\widehat{\mathcal{E}}$  es un haz libre de torsión. De existir un subhaz de torsión  $\mathcal{T} \neq 0$  de  $\widehat{\mathcal{E}}$  este es necesariamente  $\text{WIT}_0\text{-}\widehat{\Phi}$  y  $\mu_S(\widehat{\mathcal{T}}) = 1/h$ . Aplicando la transformada  $\widehat{\Phi}$  obtenemos  $\widehat{\mathcal{T}} \hookrightarrow \mathcal{E}$  lo que contradice la  $\mu_S$ -semiestabilidad de  $\mathcal{E}$ , luego  $\widehat{\mathcal{E}}$  es libre de torsión. Si  $\widehat{\mathcal{E}}$  no es  $\mu_S$ -semiestable, como en el caso anterior podemos suponer que existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

con  $\mathcal{F}$  libre de torsión,  $\mathcal{G}$   $\text{WIT}_0\text{-}\widehat{\Phi}$  y  $\mu_S(\mathcal{F}) > \mu_S(\widehat{\mathcal{E}}) > \mu_S(\mathcal{G})$ . Además  $\widehat{\mathcal{E}}$  es  $\text{WIT}_0\text{-}\widehat{\Phi}$ , luego  $\mu_S(\mathcal{F}) > \mu_S(\widehat{\mathcal{E}}) > -1/h$ . Entonces  $\mathcal{F}$  es  $\text{WIT}_0\text{-}\widehat{\Phi}$ , por la Proposición 3.18. Aplicando la transformada inversa se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{\mathcal{G}} \longrightarrow 0.$$

Ya que  $\mu_S(\mathcal{F}) > \mu_S(\widehat{\mathcal{E}}) > -1/h$  se sigue que

$$\mu_S(\widehat{\mathcal{F}}) = \frac{\mu_S(\mathcal{F})}{1 + h\mu_S(\mathcal{F})} > \frac{\mu_S(\widehat{\mathcal{E}})}{1 + h\mu_S(\widehat{\mathcal{E}})} = \mu_S(\mathcal{E}),$$

lo que contradice la  $\mu_S$ -semiestabilidad de  $\mathcal{E}$ .

Análogamente se prueba el resultado para la transformada de Fourier-Mukai  $\widehat{\Phi}$ . □

Como consecuencias directas de la demostración del teorema tenemos

**Corolario 3.25.** *Sea  $\widehat{\mathcal{E}}$  el transformado de un haz  $\mu_S$ -semiestable  $\mathcal{E}$  con respecto de  $\Phi$  (resp.  $\widehat{\Phi}$ ). Se verifica lo siguiente*

1. *Si  $\mathcal{E}$  es un haz libre de torsión y  $\mu_S(\mathcal{E}) \neq 1/h$  (resp.  $-1/h$ ), entonces  $\widehat{\mathcal{E}}$  también es libre de torsión.*
2. *Si  $\mu_S(\mathcal{E}) \neq 1/h$  (resp.  $-1/h$ ) y  $\mathcal{E}$  es  $\mu_S$ -estable, entonces  $\widehat{\mathcal{E}}$  también es  $\mu_S$ -estable.*

3. Si  $\mu_S(\mathcal{E}) = 1/h$  (resp.  $-1/h$ ) y  $\mathcal{E}$  es  $\mu_S$ -estable, entonces  $\widehat{\mathcal{E}}$  es  $\mu_S$ -estable si y sólo si  $d = 1$ .

□

*Observación 3.26.* Observemos que si  $\mathcal{E}$  es  $\mu_S$ -semiestable con  $\mu_S(\mathcal{E}) = 1/h$ , su transformado  $\widehat{\mathcal{E}}$  es un haz de torsión e, incluso cuando  $\mathcal{E}$  sea  $\mu_S$ -estable, sólo podemos asegurar la  $\mu_S$ -estabilidad de  $\widehat{\mathcal{E}}$  para  $d = 1$ . Cuando  $d > 1$ , si  $\mathcal{E}$  es indescomponible el transformado  $\widehat{\mathcal{E}}$  es un haz de torsión e indescomponible por la Proposición 3.20. Entonces está soportado en un punto  $x \in C$ . Si dicho punto  $x$  es liso, entonces  $\widehat{\mathcal{E}} \simeq \mathcal{O}_{C,x}/\mathfrak{m}_x^d$ . La estructura de los haces de torsión soportados en un punto singular es mucho más complicada (para más detalles ver [14]). No obstante, si  $\widehat{\mathcal{E}}$  está soportado en un punto  $x$ , posiblemente singular, por inducción sobre la longitud  $d$  uno prueba que  $\widehat{\mathcal{E}}$  siempre es  $S$ -equivalente a  $\bigoplus_d \mathcal{O}_x$ .  $\triangle$

Ya que el transformado  $\widehat{\mathcal{O}}_x = \Phi(\mathcal{O}_x)$  es el haz de ideales  $\mathfrak{m}_x$  del punto  $x$ , y  $\widehat{\Phi}(\mathcal{O}_x) = \mathfrak{m}_x^*$ , se deduce el siguiente resultado de estabilidad.

**Corolario 3.27.** *Para todo punto  $x \in C$  el ideal maximal  $\mathfrak{m}_x$  y su dual  $\mathfrak{m}_x^*$  son haces  $\mu_S$ -estables.*

*Observación 3.28.* Cuando  $C$  es irreducible este hecho es trivial. Para curvas Gorenstein reducidas y con género aritmético mayor que uno, la semiestabilidad de  $\mathfrak{m}_x$  para un punto cerrado arbitrario de la curva ha sido probada recientemente en [19] usando técnicas diferentes.  $\triangle$

Terminamos esta sección con una de las principales aplicaciones de las transformadas de Fourier-Mukai. Veamos como las transformadas  $\Phi$  y  $\Psi$  definen isomorfismos de esquemas entre espacios de móduli de haces semiestables en  $C$ . El siguiente resultado generaliza la descripción de los espacios de móduli de haces semiestables para curvas Gorenstein, íntegras y de género aritmético uno (ver [5, Chapter 6]). Como ya dijimos en la introducción de este capítulo dicha clasificación fue originalmente dada por Tu para el caso de curvas elípticas lisas [73], y reinterpretada posteriormente por Bridgeland [10] y Polishchuck [63] usando la transformada de Fourier-Mukai. A diferencia de lo que ocurre en el caso íntegro tensorializar por un

haz de línea no preserva, en general, la (semi)estabilidad. Además el grado  $h$  de la polarización  $H$  es mayor que uno. Estos dos hechos hacen que en principio no podamos identificar los espacio de móduli  $\mathcal{M}_C(r, 0)$  y  $\mathcal{M}_C(0, r)$ . Si embargo el uso combinado de las transformadas  $\Phi$  y  $\Psi$  (y sus quasi-inversas) nos permite acotar las posibilidades de espacios de móduli no isomorfos.

**Corolario 3.29.** *Sea  $(r, d)$  una pareja de números enteros con  $r \geq 0$ .*

1. *Las transformadas de Fourier-Mukai  $\Phi$  y  $\Psi$  inducen los siguientes isomorfismos de esquemas de espacios de móduli*

$$\Phi_M: \mathcal{M}_C(r, d) \simeq \mathcal{M}_C(dh - r, -d) \quad \text{si } d/r > 1/h$$

$$\Phi_M: \mathcal{M}_C(r, d) \simeq \mathcal{M}_C(-dh + r, d) \quad \text{si } d/r \leq 1/h$$

$$\Psi_M: \mathcal{M}_C(r, d) \simeq \mathcal{M}_C(r, d + r).$$

2. *El espacio de móduli  $\mathcal{M}_C(r, d)$  es isomorfo a uno de los siguientes tres espacios de móduli no isomorfos*

- $\mathcal{M}_C(0, d_0) \simeq \text{Sym}^{d_0}(C)$  para cierto  $d_0 > 0$
- $\mathcal{M}_C(r_0, 0)$  para cierto  $r_0 > 0$
- $\mathcal{M}_C(r_0, d_0)$  con  $2r_0/h \leq d_0 < r_0$ .

*Demostración.* La primera parte se sigue de la Proposición 2.18 y el Teorema 3.24. Para demostrar la segunda parte observemos lo primero que, por la Observación 3.26 y argumentando como en la demostración de [5, Corollary 3.33], uno tiene que  $\mathcal{M}_C(0, d) \simeq \text{Sym}^d(C)$ . Consideremos ahora la familia  $B$  de todos las parejas de números enteros  $(r', d')$  con  $r' \geq 0$  que están relacionados con  $(r, d)$  vía los isomorfismos del apartado 1. Tomemos las parejas  $(r_0, d_0) \in B$  tal que  $r_0 \geq 0$  es el mínimo  $r'$  entre los elementos de  $B$ . Si  $r_0 = 0$ , entonces  $d_0 > 0$  y  $\mathcal{M}_C(r, d) \simeq \mathcal{M}_C(0, d_0)$ . Supongamos entonces que  $r_0 > 0$  y consideremos la subfamilia  $C$  de  $B$  formada por las parejas  $(r_0, d')$ . Ya que la transformada  $\Psi$  incrementa el valor de  $d$  y su quasi-inversa  $\widehat{\Psi}$  lo disminuye podemos tomar, usando los isomorfismos del apartado 1,  $d_0$  como el mínimo de los  $d'$  entre los elementos de  $C$  tal que  $0 \leq d_0 <$

$r_0$ . Distinguiamos dos casos según sea  $d_0$  nulo o no. Si  $d_0 = 0$  tenemos el isomorfismo  $\mathcal{M}_C(r, d) \simeq \mathcal{M}_C(r_0, 0)$ . Si  $d_0 > 0$  observemos que los puntos del móduli  $\mathcal{M}(r_0, d_0)$  representan haces semiestables  $\text{WIT}_0\text{-}\Phi$ , ya que de lo contrario  $r_0 \leq r_0 - d_0 h$  por la elección de  $r_0$  y entonces,  $d_0 < 0$  lo cual contradice la manera en que hemos elegido al entero  $d_0$ . En consecuencia tenemos la desigualdad  $r_0 \leq d_0 h - r_0$  de donde se sigue que  $\mathcal{M}_C(r, d) \simeq \mathcal{M}_C(r_0, d_0)$  con  $2r_0/h \leq d_0 < r_0$  con lo que se concluye.  $\square$

*Observación 3.30.* Una consecuencia inmediata de este resultado es que si  $C$  tiene sólo dos componentes irreducibles, por ejemplo si es de tipo  $I_2$  o  $III$  (cf. Figura 0.2), y la polarización tiene grado mínimo, esto es  $h = 2$ , el estudio de los espacios de móduli  $\mathcal{M}_C(r, d)$  se reduce al caso  $d = 0$ .  $\triangle$

*Observación 3.31.* Si  $C$  es íntegra podemos tomar  $h = 1$ , luego el último caso del apartado (2) del Corolario 3.29 no puede darse. Además combinando  $\Psi$  y  $\Phi$  se tiene  $\mathcal{M}_C(r_0, 0) \simeq \mathcal{M}_C(0, r_0) \simeq \text{Sym}^{r_0} C$ .  $\triangle$

### 3.2.3. Espacios de móduli relativos

En su versión relativa, el estudio de haces coherentes sobre fibraciones elípticas y más en general, fibraciones de género uno, es un tema interesante que tiene aplicaciones a la teoría de cuerdas, a los sistemas integrales y a la teoría de representaciones.

Sea  $p: \mathcal{C} \rightarrow B$  una fibración de género uno, es decir, un morfismo proyectivo y plano cuyas fibras son curvas Gorenstein de género aritmético uno y haz dualizante trivial. Obsérvese que no hacemos ninguna suposición adicional ni sobre  $\mathcal{C}$  ni sobre  $B$ , la característica del cuerpo base es arbitraria y se permite todo tipo de fibras singulares, en particular pudieran existir fibras no reducidas e incluso curvas no planas. Consideremos el funtor integral relativo

$$\Phi = \Phi_{\mathcal{C}-\mathcal{C}}^{\mathcal{I}_\Delta} : D_c^b(\mathcal{C}) \rightarrow D_c^b(\mathcal{C}),$$

definido por el haz de ideales  $\mathcal{I}_\Delta$  de la inmersión  $\delta: \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C} \times_B \mathcal{C}$  de la diagonal relativa. Por el Teorema 1.18 y la Proposición 1.25, dicho funtor es una auto-equivalencia

de categorías es decir, es una transformada de Fourier-Mukai.

Fijada una polarización relativa  $\mathcal{H}$  denotemos  $q: \mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r, d) \rightarrow B$  al espacio de móduli grosero de haces  $\mu_S$ -semiestables en  $\mathcal{C}/B$  que tienen polinomio de Hilbert  $P(m) = rm + d$ . Como ya vimos en el Capítulo 2 los puntos cerrados de la fibra  $q^{-1}(t) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_t}(r, d)$  representan las clases de  $S$ -equivalencia de haces  $\mu_S$ -semiestables en la fibra  $X_t$  con polinomio de Hilbert  $P(m) = rm + d$ . Denotemos además por  $\Psi$  a la autoequivalencia relativa de  $D_c^b(\mathcal{C})$  que se tiene al tensorializar por el haz de línea  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}/B}(\mathcal{H})$ .

**Corolario 3.32.** *Sea  $(r, d)$  una pareja de enteros con  $r \geq 0$ .*

1. *Las transformadas de Fourier-Mukai relativas  $\Phi$  y  $\Psi$  inducen los siguientes isomorfismos de esquemas entre los espacios de móduli*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r, d) \simeq \mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(dh - r, -d) \quad \text{para } d/r > 1/h,$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r, d) \simeq \mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(-dh + r, d) \quad \text{para } d/r \leq 1/h,$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r, d) \simeq \mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r, d + r).$$

2. *El espacio de móduli  $\mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r, d)$  es isomorfo a uno de los siguientes espacios no isomorfos*

- $\mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(0, d_0) \simeq \text{Sym}^{d_0}(\mathcal{C}/B)$  con  $d_0 > 0$
- $\mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r_0, 0)$  con  $r_0 > 0$
- $\mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r_0, d_0)$  con  $2r_0/h \leq d_0 < r_0$ .

*Demostración.* Se sigue directamente de los Corolarios 2.20 y 3.29. □

### 3.3. Espacios de móduli de haces de grado cero en $I_N$

En esta sección damos una descripción de la componente conexa del espacio de móduli  $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(r, 0)$ , con  $r > 0$ , conteniendo fibrados vectoriales cuando  $\mathcal{C}$  es una curva del tipo  $I_N$  con  $N \geq 2$ , esto es, un ciclo de  $N$  rectas proyectivas cortándose

transversalmente en  $N$  puntos diferentes (Figura 3.2). Denotamos por  $C_1, \dots, C_N$  a las componentes de  $I_N$ , y a sus puntos de intersección por  $\{x_1, \dots, x_N\}$ . Renombrando dichos puntos si fuera necesario, podemos suponer que  $x_i = C_i \cap C_{i+1}$ . Para obtener esta descripción necesitamos combinar dos resultados conocidos. Por un lado usamos la descripción de los haces libres de torsión indescomponibles en las curvas  $I_N$  dada en [24, 7] y, por otro lado la descripción de los fibrados de línea semiestables en curvas tree-like y ciclos dada en [46, 45].

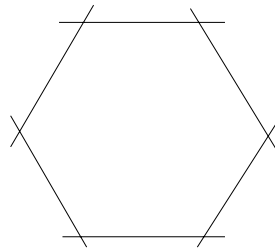


Figura 3.2: El ciclo  $E_6$

Cuando  $r = h$  el espacio de módulos  $\mathcal{M}_C(h, 0)$ , parametrizando haces de dimensión pura uno,  $\mu_S$ -semiestables y con polinomio de Hilbert  $P(m) = hm$ , es lo que se conoce como la Jacobiana de Simpson de grado 0 compactificada. La componente conexa  $\mathcal{M}_C((1, \dots, 1), 0) \subset \mathcal{M}_C(h, 0)$ , que parametriza haces de rango uno en cada una de las componentes irreducibles de  $C$  y grado 0, fue descrita por López Martín ([45] y [46]) mostrando que dicha componente es isomorfa a una curva de tipo  $I_1$ , es decir una curva racional irreducible con un punto nodal. En esta sección veremos como reinterpretar dicha caracterización usando la transformada de Fourier-Mukai y generalizarlo para rango superior.

### 3.3.1. Haces libres de torsión e indescomponibles en $I_N$

Empecemos recordando algunos resultados que se conocen sobre la clasificación de los fibrados vectoriales, y haces libres de torsión en general, en los ciclos  $I_N$  de rectas proyectivas, que usaremos posteriormente. Esta clasificación fue dada por Drozd y Greuel en [24] para cuerpos base arbitrarios. No obstante, cuando el cuerpo



base es algebraicamente cerrado, en [7] podemos encontrar una descripción geométrica de haces libres de torsión indescomponibles en  $I_N$ , la cual se sigue de la descripción clásica de los fibrados vectoriales en curvas elípticas dada por Oda en [59] (ver Teorema 3.35), que nos permitirá estudiar cuales de éstos son  $\mu_S$ -semiestables.

Siguiendo el mismo argumento usado por Atiyah para curvas elípticas lisas y teniendo en cuenta que  $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{I_N}, \mathcal{O}_{I_N}) = \mathbb{k}$ , es posible demostrar por inducción el siguiente resultado.

**Lema 3.33.** *Para todo entero  $\lambda \geq 1$  existe un único fibrado vectorial indescomponible  $\mathcal{F}_\lambda$  en  $I_N$  tal que la siguiente sucesión*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{\lambda-1} \rightarrow \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{O}_{I_N} \rightarrow 0$$

con  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{O}_{I_N}$  es exacta. □

**Definición 3.34.** Sea  $\underline{d} = (d_1, \dots, d_N, d_{N+1}, \dots, d_{2N}, \dots, d_{(s-1)N}, \dots, d_{sN})$  una upla de números enteros. Se dice que  $\underline{d}$  es no periódica si  $\underline{d} \neq \underline{d}[t]$  para  $t = 1, \dots, s-1$  siendo

$$\underline{d}[1] = (d_{N+1}, \dots, d_{2N}, \dots, d_{(s-1)N}, \dots, d_{sN}, d_1, \dots, d_N)$$

y  $\underline{d}[t] = (\underline{d}[t-1])[1]$ .

**Teorema 3.35.** *Sea  $I_N$  un ciclo de  $N$  rectas proyectivas y  $A_k$  una cadena de  $k$  rectas proyectivas (Figura 3.3). Sea  $\mathcal{E}$  un haz libre de torsión e indescomponible en  $I_N$ . Se verifica lo siguiente:*

1. *Si  $\mathcal{E}$  es un fibrado vectorial, existe un revestimiento étale  $\pi_s: I_{sN} \rightarrow I_N$ , un haz de línea  $\mathcal{L}$  en  $I_{sN}$  y un número  $\lambda \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\mathcal{E} \simeq \pi_{s*}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_\lambda).$$

*Los números naturales  $s$  y  $\lambda$  están determinados por el fibrado  $\mathcal{E}$ . Además, cuando  $s > 1$  el multigrado  $\underline{d}(\mathcal{L})$  del haz de línea  $\mathcal{L}$  es no periódico.*

2. *Si  $\mathcal{E}$  no es localmente libre, existe un morfismo finito  $p_k: A_k \rightarrow I_N$  (definido como composición de algún revestimiento étale  $\pi_s$  y alguna inmersión cerrada  $i: A_k \hookrightarrow I_{sN}$ ) y un haz de línea  $\mathcal{L}$  en  $A_k$  tal que  $\mathcal{E} \simeq p_{k*}(\mathcal{L})$ .*

*Demostración.* Ver [7, Theorem 19]. □

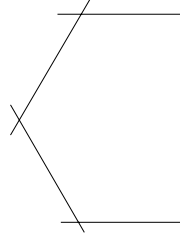


Figura 3.3: La curva  $A_4$

Una consecuencia inmediata del Teorema 3.35 es la siguiente caracterización numérica de los haces localmente libres en  $I_N$ .

**Proposición 3.36.** *Sea  $\mathcal{E}$  un haz de dimensión pura uno en  $I_N$ . Entonces*

$$\sum_{i=1}^N d_i(\mathcal{E}) - \chi(\mathcal{E}) \leq 0,$$

y la igualdad se da si y sólo si  $\mathcal{E}$  es localmente libre.

*Demostración.* Ya que la función  $\sum_{i=1}^N d_i(-) - \chi(-)$  es aditiva, podemos asumir que  $\mathcal{E}$  es indecomponible y aplicar el Teorema 3.35. Si  $\mathcal{E}$  es localmente libre ya sabemos (Proposición 3.4) que  $\sum_{i=1}^N d_i(\mathcal{E}) = \chi(\mathcal{E})$ .

Si  $\mathcal{E}$  no es localmente libre, entonces  $\mathcal{E} \simeq p_{k*}(\mathcal{L})$ , donde  $\mathcal{L}$  es un haz de línea en una cadena  $A_k$  de rectas proyectivas y  $p_k: A_k \rightarrow I_N$  es un morfismo finito. Así  $\chi(\mathcal{E}) = \chi(\mathcal{L}) = 1 + \sum_i d(\mathcal{L}_i)$ , donde  $\mathcal{L}_i$  denota la restricción de  $\mathcal{L}$  a las componentes irreducibles de  $A_k$ . Denotemos  $D_i$  a la unión de las  $s_i$  componentes irreducibles de  $A_k$  que se proyectan por  $p_k$  en la componente  $C_i$ . Por cambio de base existe un morfismo  $\mathcal{E}|_{C_i} \rightarrow p_{k*}\mathcal{L}_{D_i}$  que es isomorfismo fuera de los puntos de intersección de las componentes irreducibles de  $I_N$ . Ya que  $p_{k*}\mathcal{L}_{D_i}$  es localmente libre en  $C_i$  este morfismo induce uno entre  $\mathcal{E}_{C_i}$  y  $p_{k*}\mathcal{L}_{D_i}$  que es isomorfismo fuera de  $\{x_1, \dots, x_N\} \cap C_i$ . Existe por lo tanto un morfismo  $\mathcal{E}_{C_i} \rightarrow p_{k*}\mathcal{L}_{D_i}$  inyectivo, al ser  $\mathcal{E}_{C_i}$  localmente

libre, cuyo conúcleo está soportado en puntos. Consideremos el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \bigoplus \mathcal{E}_{C_i} & \longrightarrow & K \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & p_* \mathcal{L} & \longrightarrow & \bigoplus p_* \mathcal{L}_{D_i} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{y_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{y_{k-1}} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

siendo  $y_1, \dots, y_{k-1}$  los puntos de intersección de las componentes irreducibles de  $A_k$ . De la definición de  $p_k$  se sigue que cada  $D_i$  es unión disjunta de rectas proyectivas. Calculando los polinomios de Hilbert se sigue que  $k = \sum s_i = \sum r_i$  (de hecho ocurre que  $s_i = r_i$ ) y por tanto  $\chi(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^N d_i + k - l(K)$ . Como  $l(K) < k$  se concluye.  $\square$

### 3.3.2. Haces estables de grado cero en $I_N$

Por un haz en  $I_N$  de grado cero entenderemos un haz con polinomio de Hilbert igual a  $P(m) = rm$ .

*Observación 3.37.* Por simplificar la notación, en adelante escribiremos  $\mathcal{M}(r, 0)$  en lugar de  $\mathcal{M}_{I_N}(r, 0)$ , y análogamente para las componentes del móduli.  $\triangle$

Como ya dijimos al inicio de esta sección la estructura de la componente conexa de la Jacobiana de Simpson de grado cero compactificada, que parametriza haces de rango uno en cada una de las componentes irreducibles de  $I_N$  y grado 0  $\mathcal{M}((1, \dots, 1), 0) \subset \mathcal{M}(h, 0)$  fue determinada en [45] y [46]. Tenemos entonces el siguiente resultado conocido.

**Lema 3.38.** *Sea  $\mathcal{E}$  un haz puro de dimensión uno en  $I_N$  de grado 0 y multirango  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (1, \dots, 1)$ .*

1. *La  $\mu_S$ -(semi)estabilidad de  $\mathcal{E}$  no depende de la polarización elegida.*
2.  *$\mathcal{E}$  es  $\mu_S$ -estable si y sólo si es un haz de línea y su multigrado es  $\underline{d}(\mathcal{E}) = (0, \dots, 0)$ .*
3. *Si  $\mathcal{E}$  es estrictamente  $\mu_S$ -semiestable, su graduado es  $Gr(\mathcal{E}) \simeq \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{C_i}(-1)$ .*

**Lema 3.39.** *Sea  $\mathcal{L}$  un haz de línea en  $I_N$ . Para todo número entero  $\lambda \geq 1$ , el fibrado vectorial  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_\lambda$  es  $\mu_S$ -semiestable si y sólo si  $\mathcal{L}$  es  $\mu_S$ -semiestable. Además,  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_\lambda$  nunca es un haz  $\mu_S$ -estable si  $\lambda > 1$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{E}$  un haz de dimensión pura uno en  $I_N$ . De la sucesión exacta (3.1) se sigue que  $P_{\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}_\lambda}(m) = \lambda P_{\mathcal{E}}(m)$ . Así,  $\mu_S(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}_\lambda) = \mu_S(\mathcal{E})$  para todo  $\lambda \geq 1$ .

Supongamos que  $\mathcal{L}$  es  $\mu_S$ -semiestable. Ya que la categoría de haces semiestables con pendiente fija es cerrada por extensiones, haciendo inducción sobre  $\lambda$  se sigue que  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_\lambda$  es  $\mu_S$ -semiestable para todo  $\lambda \geq 1$ . Recíprocamente, si  $\mathcal{L}$  no fuera  $\mu_S$ -semiestable existe un subhaz  $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$  tal que  $\mu_S(\mathcal{E}) > \mu_S(\mathcal{L})$ . En consecuencia  $\mu_S(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}_\lambda) > \mu_S(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_\lambda)$ , contradiciendo la semiestabilidad de  $\mathcal{F}_\lambda \otimes \mathcal{L}$ .  $\square$

En analogía con lo que ocurre para curvas proyectivas irreducibles con género aritmético uno, en el siguiente teorema demostramos que no existen haces estables de grado 0 en rango superior.

**Teorema 3.40.** *Sea  $I_N$  con  $N \geq 2$  y  $\mathcal{E}$  un haz puro de dimensión 1 con polinomio de Hilbert  $P(m) = rm$  y multirango  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (r_1, \dots, r_N)$ . Si  $\mathcal{E}$  es  $\mu_S$ -estable, entonces o es isomorfo a  $\mathcal{O}_{C_i}(-1)$  para algún  $i \in \{1, \dots, N\}$  o es localmente libre con multirango  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (1, \dots, 1)$  y multigrado  $\underline{d}(\mathcal{E}) = (0, \dots, 0)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\mathcal{E}$  no es isomorfo a ningún  $\mathcal{O}_{C_i}(-1)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Por (3.1), tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{C_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_{C_N} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0.$$

Para cada componente  $C_i$  tal que  $\mathcal{E}_{C_i} \neq 0$ , se tiene que  $\mathcal{E}_{C_i}$  es un fibrado vectorial de rango  $r_i$  y grado  $d_i$  que, por la descripción de Grothendieck de los fibrados vectoriales en  $\mathbb{P}^1$ , es isomorfo a

$$\mathcal{E}_{C_i} \simeq \bigoplus_{j=1}^{r_i} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_{i,j})$$

con  $\sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{i,j} = d_i$ . Además, como estamos suponiendo que  $\mathcal{E}$  no es isomorfo a  $\mathcal{O}_{C_i}(-1)$ , el haz  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\alpha_{i,j})$  es un cociente estricto de  $\mathcal{E}$ , para todo  $j = 1, \dots, r_i$ . La

estabilidad de  $\mathcal{E}$  implica que  $\alpha_{i,j} \geq 0$  luego  $d_i \geq 0$ . Por la Proposición 3.36  $\mathcal{E}$  es localmente libre.

Veamos que  $r_i = 1$  para todo  $i = 1, \dots, N$ . Si  $\mathcal{E}$  no fuera un haz de línea se tiene, del Teorema 3.35, que  $\mathcal{E} \simeq \pi_{s*}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_\lambda)$ , con  $\pi_s: I_{sN} \rightarrow I_N$  un revestimiento étale,  $\lambda$  un número natural y  $\mathcal{L}$  un haz de línea en  $I_N$  cuyo multigrado  $\underline{d}(\mathcal{L})$  es no periódico. El caso  $\mathcal{E} = \mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_\lambda$  no puede darse ya que por el Lema 3.39  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_\lambda$  es estrictamente  $\mu_S$ -semiestable. Si  $m > 1$ , el haz  $\pi_{s*}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_\lambda)$  no es  $\mu_S$ -estable ya que el subhaz  $\pi_{s*}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_{\lambda-1})$  tiene la misma pendiente. Así,  $\lambda = 1$  y  $\mathcal{E} \simeq \pi_{s*}(\mathcal{L})$ . Como  $\pi_s$  es un morfismo finito  $\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{E}) = 0$ , y la  $\mu_S$ -estabilidad de  $\mathcal{E}$  implica que  $\mathcal{L}$  es un haz de línea  $\mu_S$ -estable. Por el Lema 3.38, el multigrado de  $\mathcal{L}$  es  $\underline{d} = (0, \dots, 0)$  lo que contradice la no periodicidad del mismo. Por tanto  $\mathcal{E}$  un haz de línea. Usando el Lema 3.38 se concluye.  $\square$

Este resultado y la caracterización del espacio de móduli  $\mathcal{M}^s((1, \dots, 1), 0)$  dada en [46, Theorem 4.1] nos permiten determinar la estructura de los haces estables de grado cero en  $I_N$ .

**Corolario 3.41.** *Sea  $C$  una curva de tipo  $I_N$  con  $N \geq 2$  y  $H$  una polarización de grado  $h$ . Sea  $\mathcal{M}^s(r, 0)$  el espacio de móduli de haces  $\mu_S$ -estables con polinomio de Hilbert  $P(m) = rm$ . Se tiene lo siguiente:*

1. *Si  $r = h$ , todas las componentes de  $\mathcal{M}^s(r, 0)$  dadas por (3.3) son vacías excepto  $\mathcal{M}^s((1, \dots, 1), 0)$  la cual es isomorfa al grupo multiplicativo  $\mathbb{k}^*$ . Además, la compactificación de la componente  $\mathcal{M}^s((1, \dots, 1), 0)$  es isomorfa a una curva racional con un nodo, esto es a una curva de tipo  $I_1$ .*
2. *Si  $r = h_i$  para algún  $i = 1, \dots, N$ , entonces  $\mathcal{M}^s(r, 0)$  es un único punto.*
3. *En cualquier otro caso,  $\mathcal{M}^s(r, 0)$  es vacío.*

Como consecuencia inmediata tenemos una descripción de los factores de Jordan-Hölder de un haz semiestable en  $I_N$  de grado cero.

**Corolario 3.42.** *Sea  $\mathcal{E}$  un haz  $\mu_S$ -semiestable en  $I_N$  con polinomio de Hilbert  $P(m) = rm$ . Los factores de Jordan-Hölder de  $\mathcal{E}$  son isomorfos a  $\mathcal{O}_{C_i}(-1)$ , siendo  $C_i$  las componentes irreducibles de  $I_N$ , o a haces de línea  $\mathcal{L}$  de multigrado  $\underline{d}(\mathcal{L}) = (0, \dots, 0)$ .*

**Corolario 3.43.** *La dimensión de la componente conexa  $\mathcal{M}((r_1, \dots, r_N), 0)$  es igual al mínimo  $r_i$ , con  $i \in \{1, \dots, N\}$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{E}$  un haz  $\mu_S$ -semiestable de multirango  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (r_1, \dots, r_N)$  y grado 0. Renombrando si fuera necesario podemos suponer que  $r_1$  es el menor de los  $r_i$ 's. Por el Corolario 3.42 su graduado es de la forma

$$(\oplus_{i=1}^u \mathcal{L}_i) \oplus (\oplus_{j=1}^N \mathcal{O}_{C_j}(-1)^{\oplus v_j}), \quad (3.7)$$

donde  $u \leq r_1$ , los  $\mathcal{L}_i$  son haces de línea en  $I_N$  de multigrado  $(0, \dots, 0)$  y  $u + v_j = r_j$  para todo  $j$ . Ya que el grupo de haces de línea  $\mu_S$ -estables  $\text{Pic}_s^0(I_N)$  de grado 0 en  $I_N$  está determinado por la sucesión exacta

$$1 \rightarrow \mathbb{k}^* \rightarrow \text{Pic}_s^0(I_N) \rightarrow \prod_{i=1}^N \text{Pic}^0(C_i) \rightarrow 1,$$

se concluye que la dimensión de esta componente es igual a  $r_1$ .  $\square$

En el caso de una curva racional con un nodo o un punto cuspidal, como ocurre también en el caso de curvas elípticas lisas, es conocido [15] que todos los factores de Jordan-Hölder de un haz indescomponible son isomorfos. Sin embargo esto no es cierto en  $I_N$  como veremos ahora.

**Lema 3.44.** *Para  $\lambda > 1$ , el objeto graduado del fibrado vectorial indescomponible de Atiyah  $\mathcal{F}_\lambda$  es  $\text{Gr}(\mathcal{F}_\lambda) = \oplus_{i=1}^\lambda \mathcal{O}_{I_N}$ .*

*Demostración.* Por el Lema 3.38 el haz estructural  $\mathcal{O}_{I_N}$  de todo ciclo  $I_N$  es  $\mu_S$ -estable. Usando la sucesión exacta del Lema 3.33

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{\lambda-1} \rightarrow \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{O}_{I_N} \rightarrow 0$$

se concluye.  $\square$

**Proposición 3.45.** *Sea  $\mathcal{E}$  un haz estrictamente  $\mu_S$ -semiestable indescomponible con polinomio de Hilbert  $P(m) = rm$ . Si  $\mathcal{E}$  no es localmente libre, su graduado es isomorfo a  $\bigoplus_{i \in A} \mathcal{O}_{C_i}(-1)$  con  $A \subseteq \{1, \dots, N\}$ . Si  $\mathcal{E}$  es localmente libre de rango  $r$  su graduado es isomorfo a  $\mathcal{L}^{\oplus r}$  para un haz de línea  $\mathcal{L}$  de multigrado  $\underline{d}(\mathcal{L}) = (0, \dots, 0)$ , o isomorfo a  $\bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{C_i}(-1)^{\oplus r}$ .*

*Demostración.* Si  $\mathcal{E}$  no es localmente libre, por el Teorema 3.35,  $\mathcal{E} \simeq p_{k*}(\mathcal{L})$  siendo  $\mathcal{L}$  un haz de línea de grado  $-1$  en  $A_k$ . Ya que  $p_k = \pi_s \circ i$  para algún revestimiento de Galois  $\pi_s: I_{sN} \rightarrow I_N$  y alguna inmersión cerrada  $i: A_k \hookrightarrow I_{sN}$ , usando el Lema 3.7 y [45, Lemma 3.2], uno tiene que  $\mathcal{E}$  es  $\mu_S$ -semistable respecto de  $H$  si y sólo si  $\mathcal{L}$  lo es respecto de  $p_k^*(H)$ . Por [45, Theorem 4.5], no hay haces de línea estables de grado  $-1$  en  $A_k$  y hay exactamente un haz de línea estrictamente semiestable cuyo graduado es  $Gr(\mathcal{L}) \simeq \bigoplus_D \mathcal{O}_D(-1)$ , donde estamos sumando respecto de todas las componentes irreducibles  $D$  de  $A_k$ . Ya que  $p_k$  es un morfismo finito,  $p_{k*}$  es exacto luego es compatible con las filtraciones de Jordan-Hölder de  $\mathcal{L}$ . Así  $Gr(\mathcal{E}) \simeq \bigoplus_{i \in A} \mathcal{O}_{C_i}(-1)$  para algún subconjunto  $A \subseteq \{1, \dots, N\}$ .

Supongamos ahora que  $\mathcal{E}$  es localmente libre de rango  $r$ . Nuevamente por el Teorema 3.35, existen un haz de línea  $\mathcal{L}$  de grado  $0$ , un número natural  $\lambda$  y un revestimiento étale  $\pi_s: I_{sN} \rightarrow I_N$  tal que  $\mathcal{E} = \pi_{s*}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_\lambda)$ . Por los Lemas 3.7 y 3.39,  $\mathcal{E}$  es  $\mu_S$ -semistable, respecto de  $H$ , si y sólo si  $\mathcal{L}$  es  $\mu_S$ -semistable, respecto de  $\pi_s^*H$ . Distinguimos dos casos:

1.  $\pi_s$  es la identidad luego, en particular  $\lambda = r$ . Si  $\mathcal{L}$  es  $\mu_S$ -estable, utilizando el Lema 3.44 se tiene que  $Gr(\mathcal{E}) = \mathcal{L}^{\oplus r}$  con  $\underline{d} = (0, \dots, 0)$ . Si  $\mathcal{L}$  es estrictamente  $\mu_S$ -semiestable, del Corolario 3.42 y el Lema 3.44 se sigue que  $Gr(\mathcal{E}) \simeq \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{C_i}(-1)^{\oplus r}$ .
2.  $\pi_s$  no es la identidad, luego en particular el multigrado de  $\mathcal{L}$  es no periódico. Del Lema 3.38 uno ve que  $\mathcal{L}$  es estrictamente  $\mu_S$ -semiestable. Argumentando como en el caso anterior llegamos a que  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_\lambda$  es  $\bigoplus \mathcal{O}_J(-1)^{\oplus \lambda}$ , donde sumamos en las componentes  $J$  de  $I_{sN}$ . Como  $\pi_s$  es un morfismo finito se concluye que  $Gr(\mathcal{E}) \simeq \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{C_i}(-1)^{\oplus r}$ .

□

### 3.3.3. La componente más grande del espacio de móduli

En esta subsección damos una descripción completa de la componente del espacio de móduli  $\mathcal{M}(r, 0)$  que parametriza haces  $\mu_S$ -semiestables, respecto de una polarización fijada  $H$ , de multirango homogéneo y grado 0 para las curvas de tipo  $I_N$ . Por multirango homogéneo queremos decir que  $\underline{r} = (\bar{r}, \dots, \bar{r})$ , lo que equivale a  $r = \bar{r}h$ . Para cualquier otra componente  $\mathcal{M}((r_1, \dots, r_N), 0) \subset \mathcal{M}(r, 0)$  tenemos, renumerando si es necesario las componentes irreducibles  $C_i$  de  $I_N$ , que  $r_1 \leq \dots \leq r_N$ . Luego  $r_1 \leq \bar{r}$  lo cual, teniendo en cuenta el Corolario 3.43, justifica el título de la subsección .

Para una curva elíptica lisa o para una curva racional con un punto nodal o un punto cuspidal, es conocido que el espacio de móduli  $\mathcal{M}((1), 0)$  es isomorfo a la curva  $C$ . Esto deja de ser cierto en el caso de curvas reducibles. Para una curva de tipo  $I_N$  el espacio de móduli  $\mathcal{M}((1, \dots, 1), 0)$  es isomorfo a una curva del tipo  $I_1$ , es decir, una curva racional con un nodo. Esto fue probado en [16] para  $N = 2$  y en [46] para todo  $N \geq 2$ .

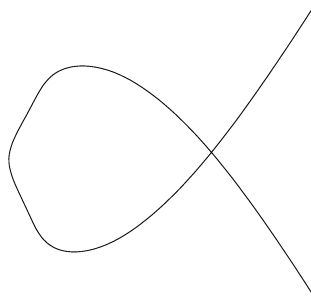


Figura 3.4: La curva racional con un nodo  $I_1$

La idea de la demostración es la siguiente. En una curva lisa elíptica  $E$  todo haz de línea de grado cero es de la forma  $\mathcal{O}_E(y - y_0)$  donde  $y_0 \in E$  es un punto fijado e



$y$  varía en  $E$ . Para poder dar una descripción similar en  $I_N$  se considera el siguiente haz en  $I_N \times I_N$

$$\mathcal{E} = \mathcal{I}_\Delta^* \otimes \pi_1^* \mathcal{O}_{I_N}(-y_0), \quad (3.8)$$

siendo  $\mathcal{I}_\Delta$  el haz de ideales de la inmersión de la diagonal  $\delta: I_N \hookrightarrow I_N \times I_N$ ,  $\pi_1$  la proyección natural de  $I_N \times I_N$  en el primer factor e  $y_0$  es un punto liso fijado. Dicho haz es plano sobre ambos factores. Si  $y \in I_N$  denotamos  $\mathcal{E}_y$  a la restricción de  $\mathcal{E}$  a la fibra  $\pi_1^{-1}(y)$ . De [46, Proposition 3.2] se sabe que para todo  $y \in I_N$  el haz  $\mathcal{E}_y$  es  $\mu_S$ -semiestable de multirango  $(1, \dots, 1)$  y grado cero. Por el Lema 3.38,  $\mathcal{E}_y$  es  $\mu_S$ -estable si y sólo si  $y$  es un punto liso y yace en la misma componente que  $y_0$ . Para el resto de puntos, esto es, para aquellos  $y$  que o bien no son puntos lisos o bien no están en la misma componente que contiene a  $y_0$ , los haces  $\mathcal{E}_y$  definen el mismo punto en el espacio de móduli. Por el Corolario 2.20, la transformada de Fourier-Mukai  $\Phi_{I_{N_2} \rightarrow I_{N_1}}^{\mathcal{E}}$  induce un morfismo  $\varphi: I_N \rightarrow \mathcal{M}((1, \dots, 1), 0)$ . Denotemos por  $C_1, \dots, C_N$  a las componentes irreducibles de  $I_N$  ordenadas de manera cíclica de manera que  $y_0 \in C_1$ . Sea  $\gamma: I_N \rightarrow I_1$  el morfismo de contracción, esto es,  $\gamma$  aplica  $C_2 \cup \dots \cup C_N$  en el punto singular de  $I_1$ , al que denotamos por  $\bar{z}$ , y da un isomorfismo  $C_1 - \{x_1, x_N\} \simeq I_1 - \{\bar{z}\}$ , siendo  $\{x_1, x_N\}$  los puntos de intersección de  $C_1$  con  $C_2$  y  $C_N$  respectivamente. Como para todos los puntos  $y \in C_2 \cup \dots \cup C_N$  los haces  $\mathcal{E}_y$  son S-equivalentes a  $\mathcal{O}_{C_1}(-1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{C_N}(-1)$ , el morfismo  $\varphi$  factoriza a través del morfismo

$$\bar{\varphi}: I_1 \rightarrow \mathcal{M}((1, \dots, 1), 0),$$

el cual es un isomorfismo (para los detalles ver [46]).

La descripción de las clases de S-equivalencia y la transformada de Fourier-Mukai nos permite dar, como veremos a continuación, una demostración diferente de que  $\bar{\varphi}$  es un isomorfismo.

Consideremos la sucesión exacta del ideal de la diagonal

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_\Delta \rightarrow \mathcal{O}_{I_N \times I_N} \rightarrow \delta_* \mathcal{O}_{I_N} \rightarrow 0$$

---

<sup>1</sup>Con la notación  $I_{N_2}, I_{N_1}$  queremos dejar claro que la transformada está definida de la categoría derivada del segundo factor de  $I_N \times I_N$  en la del primero.

Como los funtores integrales son funtores exactos la sucesión anterior induce, usando el cambio de base, un triángulo exacto en  $D_c^b(I_N)$

$$\Phi_{I_N \rightarrow I_N}^{\mathcal{E}^*[1]}(\mathcal{F}^\bullet) \rightarrow p^*(\mathbf{R}p_*(\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{I_N}(y_0)))[1] \rightarrow \mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{I_N}(y_0)[1] \rightarrow \Phi_{I_N \rightarrow I_N}^{\mathcal{E}^*[1]}(\mathcal{F}^\bullet)[1],$$

siendo  $p$  la proyección de  $I_N$  a un punto. En particular, cuando  $\mathcal{F}^\bullet$  es  $\mathcal{O}_{C_i}(-1)$  tenemos

$$\Phi_{C \rightarrow C}^{\mathcal{E}^*[1]}(\mathcal{O}_{C_i}(-1)) = \begin{cases} \mathcal{I}_{C_1}[1] & \text{si } j = 1, \text{ siendo } \mathcal{I}_{C_1} \text{ el ideal de } C_1 \\ \mathcal{O}_{C_j}(-1) & \text{si } j > 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Sea  $\tilde{\Phi}: D^b(I_N) \rightarrow D^b(I_1)$  el functor integral  $\mathbf{R}\gamma_* \circ \Phi_{I_N \rightarrow I_N}^{\mathcal{E}^*[1]}$ .

**Lema 3.46.** *Si  $\mathcal{F}$  es un haz  $\mu_S$ -semiestable en  $I_N$  de multirango  $(1, \dots, 1)$  y grado 0 entonces  $\tilde{\Phi}(\mathcal{F}) = \mathcal{O}_z$  para un único punto  $z \in I_1$ . Además,  $z$  es el punto nodal de  $I_1$  si y sólo si  $\mathcal{F}$  es estrictamente  $\mu_S$ -semiestable.*

*Demostración.* Si  $\mathcal{F}$  es  $\mu_S$ -estable, por el Lema 3.38 es un haz de línea de multigrado  $\underline{d} = (0, \dots, 0)$ . Luego, existe un punto liso  $y \in C_1$  tal que  $\mathcal{F} = \Phi^{\mathcal{E}}(\mathcal{O}_y)$ . Como  $\Phi^{\mathcal{E}}$  es una equivalencia dicho punto es único. Entonces  $\tilde{\Phi}(\mathcal{F}) = \mathcal{O}_{\gamma(y)}$ .

Si  $\mathcal{F}$  es estrictamente  $\mu_S$ -semiestable, por el Corolario 3.42 sus factores de Jordan Hölder son de la forma  $\mathcal{O}_{C_j}(-1)$ , para  $j = 1, \dots, N$ . Si  $j > 1$ , la restricción de  $\gamma$  a  $C_j$  factoriza a través del punto nodal  $\bar{z}$  de  $E_1$ . Usando la ecuación (3.9) se tiene

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{O}_{C_j}(-1)) = \mathbf{R}\gamma_*(\mathcal{O}_{C_j}(-1)) = 0.$$

Cuando  $j = 1$ , el haz de ideales  $\mathcal{I}_{C_1}$  está soportado en  $C_2 \cup \dots \cup C_N$  y, de la sucesión exacta que define dicho ideal se sigue que  $H^0(I_N, \mathcal{I}_{C_1}) = 0$  y  $\dim H^1(I_N, \mathcal{I}_{C_1}) = 1$ . Al igual que en caso anterior la restricción de  $\gamma$  a  $C_2 \cup \dots \cup C_N$  factoriza a través de  $\bar{z}$ . Usando de nuevo la ecuación (3.9) tenemos

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{O}_{C_1}(-1)) = \mathbf{R}\gamma_*(\mathcal{I}_{C_1})[1] = \mathcal{O}_{\bar{z}}.$$

Aplicando  $\tilde{\Phi}$  a una filtración de Jordan-Hölder de  $\mathcal{F}$  se concluye.  $\square$

Antes de probar que  $\tilde{\Phi}$  induce el morfismo inverso de  $\bar{\varphi}$ , recordemos unos resultados conocidos que necesitaremos en la demostración.

**Lema 3.47.** 1. Sea  $X$  un esquema de tipo finito sobre un cuerpo, entonces los puntos cerrados de  $X$  forman un abierto denso.

2. Sea  $X$  un esquema reducido e  $Y$  un esquema separado. Sean  $f$  y  $g$  dos morfismos de esquemas de  $X$  en  $Y$  que coinciden en un abierto denso de  $X$ . Entonces  $f = g$ .

*Demostración.* Ver [31, Chapter II, Exercises 3.14 y 4.2] □

**Lema 3.48.** El espacio de móduli  $\mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), 0)$  es reducido.

*Demostración.* El caso  $\bar{r} = 2$  fue probado por Seshadri en [66, Huitième partie, Théorème 18]. Para  $\bar{r} > 2$  consideremos  $\mathbb{M}(\bar{r})$  el espacio de las matrices cuadradas de orden  $\bar{r}$  y  $\mathcal{W}$  la subvariedad cerrada de  $\mathbb{M}(\bar{r}) \times \mathbb{M}(\bar{r})$  definida por las ecuaciones  $XY = YX = 0$ . De [66] se sigue que  $\mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), 0)$  es reducido si y sólo si  $\mathcal{W}$  es reducida en el origen. Por [69] se sabe que  $\mathcal{W}$  es reducida. □

**Proposición 3.49.** El functor integral  $\tilde{\Phi}: D^b(I_N) \rightarrow D^b(I_1)$  induce un morfismo

$$\eta: \mathcal{M}((1, \dots, 1), 0) \rightarrow I_1,$$

que es el inverso de  $\bar{\varphi}$ .

*Demostración.* La existencia del morfismo  $\eta$  se sigue del Lema 3.46 y Corolario 2.20. De la construcción se deduce que  $\eta$  y  $\bar{\varphi}$  son inversos a nivel de puntos cerrados, luego como  $I_1$  es proyectivo del apartado 1 del Lema 3.47 se tiene que  $\eta \circ \bar{\varphi}$  coincide con la identidad en un abierto denso. Como  $I_1$  es reducido el apartado 2 del Lema 3.47 implica que  $\eta \circ \bar{\varphi}$  es la identidad. Teniendo en cuenta que  $\mathcal{M}((1, \dots, 1), 0)$  es proyectivo y reducido, el mismo argumento prueba que  $\bar{\varphi} \circ \eta$  también es la identidad. □

Nuestro próximo objetivo es demostrar el siguiente teorema, que describe la componente  $\mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), 0)$  para rango superior.

**Teorema 3.50.** *Sea  $\mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), 0)$  el espacio de módulos de haces de dimensión pura uno,  $\mu_S$ -semiestables, de multirango  $(\bar{r}, \dots, \bar{r})$  y grado 0 en  $I_N$ . Existe un isomorfismo de esquemas*

$$\mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), 0) \cong \text{Sym}^{\bar{r}} I_1.$$

*Demostración.* Para  $\bar{r} = 1$  ya hemos visto que estos esquemas son isomorfos. Supongamos entonces  $\bar{r} > 1$ . Como antes, fijado un punto liso  $y_0 \in C_1$  existe un isomorfismo  $\bar{\varphi}: I_1 \rightarrow \mathcal{M}((1, \dots, 1), 0)$ . Ya que la suma directa de  $\bar{r}$  haces  $\mu_S$ -semiestables de multirango  $(1, \dots, 1)$  y grado 0 es un haz  $\mu_S$ -semiestable de multirango  $(\bar{r}, \dots, \bar{r})$  y grado 0, tenemos un morfismo

$$I_1 \times \cdots \times I_1 \rightarrow \mathcal{M}((1, \dots, 1), 0) \times \cdots \times \mathcal{M}((1, \dots, 1), 0) \xrightarrow{\oplus} \mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), 0).$$

Dicho morfismo factoriza a través de producto simétrico  $\text{Sym}^{\bar{r}} I_1$  e induce entonces un morfismo  $\bar{\varphi}_{\bar{r}}: \text{Sym}^{\bar{r}} I_1 \rightarrow \mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), 0)$ , el cual es un isomorfismo entre los puntos cerrados por el Corolario 3.42.

El siguiente paso es construir el morfismo inverso de  $\bar{\varphi}_{\bar{r}}$ . Para ello consideremos un haz  $\mu_S$ -semiestable  $\mathcal{F}$  de multirango  $(\bar{r}, \dots, \bar{r})$  y grado 0. Por el Corolario 3.42, su graduado es la forma

$$Gr(\mathcal{F}) = \mathcal{L}_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_m^{\oplus a_m} \oplus (\oplus_{j=1}^N \mathcal{O}_{C_j}(-1))^{\oplus (\bar{r}-u)},$$

siendo  $\mathcal{L}_i$  haces de línea de grado 0  $\mu_S$ -estables y  $u = a_1 + \cdots + a_m$ .

Manteniendo la notación del Lema 3.46, y argumentando como entonces sobre una filtración de Jordan-Jölder de  $\mathcal{F}$ , uno ve que

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{F}) = \mathcal{O}_{Z_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{Z_m} \oplus \mathcal{O}_{\bar{Z}},$$

donde denotamos por  $Z_i$  a un subesquema cerrado de  $I_1$ , 0-dimensional, de longitud  $a_i$  y soportado en un punto liso  $z_i$  y por  $\bar{Z}$  a un subesquema cerrado 0-dimensional de longitud  $\bar{r} - u$  soportado en el punto nodal  $\bar{z}$  de  $I_1$ . Entonces  $\tilde{\Phi}(\mathcal{F})$  es un haz soportado en puntos, de longitud  $\bar{r}$  en  $I_1$ . Por el Corolario 2.20 existe un morfismo

$$\eta_{\bar{r}}: \mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), 0) \rightarrow \text{Sym}^{\bar{r}} I_1,$$

que, por construcción, es el inverso de  $\bar{\varphi}_{\bar{r}}$  sobre los puntos cerrados. Procediendo como en la demostración de la Proposición 3.49 se tiene el resultado buscado.  $\square$

*Observación 3.51.* Argumentando como en la Proposición 3.14 y el Corolario 3.29 uno obtiene que las equivalencias  $\Phi$  y  $\Psi$  inducen isomorfismos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), d) &\simeq \mathcal{M}((d - \bar{r}, \dots, d - \bar{r}), -d) && \text{para } d > \bar{r} \\ \mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), d) &\simeq \mathcal{M}((\bar{r} - d, \dots, \bar{r} - d), d) && \text{para } d \leq \bar{r} \\ \mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), d) &\simeq \mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), \bar{r}h + d). \end{aligned}$$

Así, para cualesquiera enteros  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ , los espacios de móduli  $\mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), d)$  con  $d = \pm\lambda h\bar{r}$  y  $\mathcal{M}((r_0, \dots, r_0), d_0)$  con  $r_0 = \mu\lambda\bar{r} \pm \bar{r}$  y  $d_0 = \pm\lambda h\bar{r}$  son también isomorfos al producto simétrico  $Sym^{\bar{r}}I_1$ .  $\triangle$

Para terminar, usando los resultados obtenidos podemos dar una descripción completa de los espacios de móduli  $\mathcal{M}(r, d)$  de haces  $\mu_S$ -semiestables en una curva de tipo  $I_2$  fijando una polarización del menor grado posible, esto es  $h = 2$ . En este caso la desigualdad  $2r_0/h \leq d_0 < r_0$  del Corolario 3.29 no puede darse. Así tenemos que:

**Corolario 3.52.** *Sea  $C$  una curva de tipo  $I_2$  con una polarización de grado  $h = 2$ . El espacio de móduli  $\mathcal{M}(r, d)$  de haces  $\mu_S$ -semiestables con polinomio de Hilbert  $P(m) = rm + d$  en  $C$  es isomorfo o a un producto simétrico  $Sym^{d_0}(C)$  de la curva o a  $\mathcal{M}(r_0, 0)$ . Además, si  $r_0$  es par entonces la componente de mayor dimensión de  $\mathcal{M}(r_0, 0)$  es isomorfa al producto simétrico  $Sym^{r_0/2}I_1$  de la curva nodal  $I_1$ .  $\square$*



# Capítulo 4

## Haces estables en fibraciones K3

En este capítulo construimos haces estables en variedades de dimensión tres fibradas en superficies K3 usando la transformada de Fourier-Mukai relativa construida por Bridgeland y Maciocia para este tipo de fibraciones, la cual describe los haces en términos de datos espectrales similar a la construcción del revestimiento espectral para fibraciones elípticas. Cuando además la variedad es de tipo Calabi-Yau veremos que la transformada de Fourier-Mukai induce una inmersión de la Jacobiana relativa de datos espectrales en un espacio de móduli de haces. Esto permite describir el espacio de móduli de haces espectrales como una variedad fibrada genéricamente en variedades abelianas.

### 4.1. Variedades tridimensionales fibradas en K3

Sea  $X$  una variedad tridimensional fibrada en superficies de tipo K3, es decir, un morfismo  $p: X \rightarrow B$  propio y plano entre variedades proyectivas no singulares tal que:

1.  $B$  es una curva irreducible.
2. Las fibras son superficies conexas.
3. La fibra genérica es una superficie K3.

Fijemos una polarización  $H$  en  $X$ . Para cada  $t \in B$  la restricción de  $H$  a la fibra  $X_t$  de  $p$  es una polarización  $H_t$  en  $X_t$ . Por el Teorema 2.15 existe un esquema de móduli  $\mathcal{M}^s(X/B) \xrightarrow{\hat{p}} B$  cuya fibra sobre cada punto  $t \in B$  es el esquema de móduli  $\mathcal{M}^s(X_t)$  de haces estables en la fibra  $X_t$  respecto de la polarización  $H_t$ . Este espacio de móduli tiene en general infinitas componentes, cada una de las cuales es un esquema quasi-proyectivo que puede compactificarse añadiendo las clases de equivalencia de los haces semiestables. Como caso particular de un resultado de Bridgeland y Maciocia ([13]) (ver también [71]) tenemos lo siguiente.

**Proposición 4.1.** *Sea  $Y$  una componente irreducible de  $\mathcal{M}^s(X/B)$  satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1.  $q: Y \rightarrow B$  es proyectivo y fino.
2.  $\dim Y = \dim X$ . (4.1)
3.  $q: Y \rightarrow B$  es equidimensional.

Entonces, el functor integral

$$\mathcal{S} := \Phi_{Y \rightarrow X}^{\mathcal{P}}: D_c^b(Y) \rightarrow D_c^b(X),$$

definido por un haz universal  $\mathcal{P}$  en  $Y \times_B X$ , es una transformada de Fourier-Mukai y  $q: Y \rightarrow B$  es una variedad tridimensional fibrada en superficies K3.

*Demostración.* Ver [13, Teorema 1.2]. □

Denotaremos por  $\widehat{\mathcal{S}}$  al quasi-inverso de  $\mathcal{S}$  trasladado por  $[-2]$ , esto es, al functor integral  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}^\vee \otimes \pi_X^* \omega_{X/B}}: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(Y)$ . Luego  $\mathcal{S} \circ \widehat{\mathcal{S}} \simeq [-2]$  y  $\widehat{\mathcal{S}} \circ \mathcal{S} \simeq [-2]$ .

#### 4.1.1. Componentes finas del espacio de móduli relativo

Veamos cómo encontrar componentes  $Y$  de  $\mathcal{M}^s(X/B)$  que verifiquen las condiciones (4.1) de la proposición anterior. Consideremos  $i_t: X_t \hookrightarrow X$  una fibra lisa y sea  $\mathcal{E}$  un haz estable en  $X_t$  respecto de la polarización inducida en la fibra  $H_t$ . Por definición el *vector de Mukai* de  $\mathcal{E}$  es

$$v(\mathcal{E}) = (\mathrm{rk}(\mathcal{E}), \mathrm{ch}_1(\mathcal{E}), \mathrm{ch}_2(\mathcal{E}) + \mathrm{rk}(\mathcal{E})) = \mathrm{ch}(\mathcal{E}) \sqrt{\mathrm{Td} X_t}$$



Recordemos que un vector de Mukai  $v = (r, \ell, s)$  se dice que es isótropo si  $v^2 = \ell^2 - 2rs = 0$  y es primitivo si no es divisible por ningún entero  $\geq 2$ .

Supongamos que existe un divisor  $L$  en  $X$  tal que  $v(\mathcal{E}) = (r, L_t, s)$  siendo  $s = r + \text{ch}_2(\mathcal{E})$ . El polinomio de Hilbert de  $i_{t*}\mathcal{E}$  respecto de  $H$  es

$$P(m) = \frac{1}{2}rH_t^2m + L_tH_tm + s + r = rH_t^2\binom{m+1}{2} + a(L_t)m + (r+s), \quad (4.2)$$

siendo  $a(L_t) = L_tH_t - \frac{1}{2}rH_t^2 \in \mathbb{Z}$ .

**Proposición 4.2.** *Si el máximo común divisor de  $rH_t^2$ ,  $a(L_t)$  y  $s+r$  es igual a 1 y el vector de Mukai  $v$  es isótropo, entonces existe una componente irreducible  $Y$  de  $\mathcal{M}^s(X/B)$  conteniendo la clase del haz  $\mathcal{E}$  que satisface las condiciones (4.1).*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{M}^s(X/B, P(m))$  el espacio de módulos de haces estables en las fibras de  $X \rightarrow B$  con polinomio de Hilbert  $P(m)$ . Las condiciones de coprimidad garantizan que no hay haces estrictamente semiestables en las fibras con polinomio de Hilbert  $P(m)$  luego, por el Teorema 2.15,  $\mathcal{M}^s(X/B, P(m)) \rightarrow B$  es proyectivo. Usando el Teorema 2.17 se tiene que existe un haz universal relativo en  $\mathcal{M}^s(X/B, P(m)) \times_B X$ .

Tomemos una componente irreducible  $Y$  de  $\mathcal{M}^s(X/B, P(m))$  conteniendo a la clase del haz  $\mathcal{E}$ . Así, existe un haz universal  $\mathcal{P}$  en  $Y \times_B X$ .

Veamos ahora que  $\dim Y = 3$  y que  $q: Y \rightarrow B$  es equidimensional. Denotemos por  $X_{t_0}$  a la fibra lisa de  $X \rightarrow B$  donde está soportado  $\mathcal{E}$ . Entonces el correspondiente espacio de módulos  $Y_{t_0}$  es no vacío. Como  $c_1(\mathcal{E}) = L_{t_0}$  es la restricción de la primera clase de Chern de un haz de línea en  $X$ , las deformaciones de  $\det \mathcal{E}$  no tienen obstrucción. Sea  $\text{Ext}_0^i(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  el núcleo del morfismo traza (en grado  $i$ )

$$\text{tr}_i: \text{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X).$$

Como  $\mathcal{E}$  es estable, por la Proposición 2.12 y la dualidad de Serre se tiene que  $\text{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \simeq \text{Ext}^0(\mathcal{E}, \mathcal{E})^* = \mathbb{k}$  y cada elemento de  $\text{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  se identifica con una homotecia de  $\mathbb{k}$ . Por lo tanto  $\text{Ext}_0^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \simeq \text{Ext}_0^0(\mathcal{E}, \mathcal{E})^* = 0$ . Se sigue entonces que las deformaciones de  $\mathcal{E}$  no tienen obstrucción y podemos encontrar un entorno

abierto  $U$  de  $t_0$  de manera que para todo  $t \in U$  el espacio de módulos correspondiente  $Y_t$  es no vacío (cf. [71]). El hecho de que  $Y$  sea proyectivo implica que la imagen de  $q$  es un cerrado de  $B$  que, además, contiene al abierto  $U$ . Como  $B$  es, por hipótesis, irreducible se tiene que  $q: Y \rightarrow B$  es epiyectiva. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $X_t$  es una fibra lisa para todo punto  $t \in U$ . Entonces, la correspondiente fibra  $Y_t$  de  $q: Y \rightarrow B$  es un espacio de módulos fino de haces estables en  $X_t$  con vector de Mukai  $v$ . Mukai prueba (cf. [53, Teorema 1.4]) que si  $v$  es isótropo y primitivo, cosa que ocurre en nuestro caso gracias a las hipótesis del enunciado, dicho espacio de módulos  $Y_t$  también es una superficie K3 lisa. Así,  $\dim q^{-1}(U) = 3$  y también  $\dim Y = 3$  al ser irreducible.

Por último, el hecho de que  $Y$  sea irreducible evita que la dimensión de las fibras de  $q: Y \rightarrow B$  varíe, luego  $q$  es equidimensional.  $\square$

*Observación 4.3.* 1. Un morfismo entre variedades no singulares es plano precisamente cuando es equidimensional.

2.  $\Phi_{Y_t \rightarrow X_t}^{P_t}: D^b(Y_t) \simeq D^b(X_t)$  es una equivalencia de categorías para todo  $t \in B$ .
3. Si  $D^b(S) \simeq D^b(Z)$  con  $S$  una superficie K3 entonces  $Z$  también es una superficie K3. Además, se sabe ([38, Proposición 3.2]) que en tal caso  $Z$  es isomorfa a  $S$  o  $Z$  es isomorfa a un espacio de módulos fino de haces localmente libres de rango  $> 1$  y  $\mu$ -estables en  $S$ .
4. De los apartados 2 y 3 anteriores se tiene que para toda fibra lisa  $X_t$ , la correspondiente fibra  $Y_t$  es o bien isomorfa a  $X_t$  o bien es una superficie lisa K3 parametrizando fibrados vectoriales  $\mu$ -estables con  $v = (r, L_t, s)$  y  $r > 1$ .

$\triangle$

*Ejemplo 4.4.* Una de las variedades Calabi-Yau  $X$ , de dimensión tres fibrada en superficies K3, que ha sido analizada con gran detalle usando la simetría mirror [18], se obtiene resolviendo las hipersuperficies singulares de grado ocho  $\widehat{X} \subset \mathbb{P}_{1,1,2,2,2}$ . El cono de Kähler de  $X$  está generado por combinaciones lineales positivas del sistema lineal  $H = 2l + e + l$  donde,  $e$  es un divisor excepcional obtenido del blow-up de una

curva de singularidades y el sistema lineal  $l$  es un pencil de superficies K3. El anillo de intersección ha sido calculado en [18] y está dado por las siguientes relaciones

$$H \cdot l^2 = 0, \quad l^3 = 0, \quad H^3 = 8, \quad H^2 \cdot l = 4.$$

Entonces tomando  $L = xH + yl$  con  $x, y \in \mathbb{Z}$  y  $H = 2l + e$  se tiene

$$H_t^2 = H^2 \cdot l = 4, \quad L_t \cdot H_t = L \cdot H \cdot l = 4x, \quad L_t^2 = L^2 \cdot l = 4x^2.$$

#### 4.1.2. Estabilidad y estabilidad en fibra

**Definición 4.5.** Para todo haz  $\mathcal{F}$  en  $X$  se define el *grado relativo* de  $\mathcal{F}$  como el número de intersección

$$d(\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{F})H\mathfrak{f}$$

donde  $\mathfrak{f} \in A^1(X)$  denota la clase de equivalencia algebraica de la fibra genérica de  $p: X \rightarrow B$ .

Definimos la *pendiente relativa* de un haz  $\mathcal{F}$  como

$$\mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{F}) = \frac{d(\mathcal{F})}{\text{rk}(\mathcal{F})}$$

siempre que  $\text{rk}(\mathcal{F}) \neq 0$ .

Obsérvese que la restricción de un haz  $\mathcal{F}$  en  $X$  a una fibra general de  $p$  tiene grado  $d(\mathcal{F})$ . Además si el haz  $\mathcal{F}$  es plano sobre la base  $B$ , su grado relativo es el grado de la restricción  $\mathcal{F}_t$  a cualquier fibra  $X_t$  de  $p$ , luego  $\mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{F}_t)$ .

**Definición 4.6.** Sea  $\mathcal{F}$  un haz libre de torsión en  $X$ . Diremos que  $\mathcal{F}$  tiene *buenos cocientes* si para todo cociente propio  $\mathcal{G}$  que no sea de torsión se verifica  $\mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{G}) > \mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{F})$ . Equivalentemente,  $\mathcal{F}$  tiene buenos cocientes si para todo subhaz  $\mathcal{F}'$  con  $0 < \text{rk}(\mathcal{F}') < \text{rk}(\mathcal{F})$  se verifica  $\mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{F}') < \mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{F})$ .

**Proposición 4.7.** Sea  $\mathcal{F}$  un haz libre de torsión en  $X$  con buenos cocientes. Existe un entero no negativo  $M_0$  dependiendo de  $\mathcal{F}$  y  $H$  tal que  $\mathcal{F}$  es  $\mu$ -estable respecto de  $H + M\mathfrak{f}$ , para todo  $M > M_0 \geq 0$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}$  un haz en  $X$  libre de torsión, su pendiente respecto de  $H + M\mathfrak{f}$  (siguiendo la notación de la Observación 2.3) es

$$\mu_{H+M\mathfrak{f}}(\mathcal{F}) = \mu_H(\mathcal{F}) + 2M\mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{F}).$$

Luego  $\mathcal{F}$  será  $\mu$ -estable, respecto de  $H + M\mathfrak{f}$ , si para todo subhaz  $\mathcal{F}'$  con  $0 < \text{rk}(\mathcal{F}') < \text{rk}(\mathcal{F})$  se verifica

$$[\mu_H(\mathcal{F}') - \mu_H(\mathcal{F})] + 2M[\mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{F}') - \mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{F})] < 0 \quad (4.3)$$

Ya que  $\mathcal{F}$  tiene buenos cocientes se tiene  $\mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{F}') < \mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{F})$ . Si  $\mathcal{F}$  es  $\mu$ -estable respecto de  $H$  entonces la desigualdad (4.3) se verifica para todo  $M \geq 0$ . Si  $\mathcal{F}$  fuera estrictamente  $\mu$ -semiestable, respecto de  $H$ , la desigualdad (4.3) se verifica para  $M > 0$ . Supongamos entonces que  $\mathcal{F}$  no es  $\mu$ -semiestable para  $H$ . Por la existencia del máximo subhaz desestabilizante de  $\mathcal{F}$  la diferencia  $\mu_H(\mathcal{F}') - \mu_H(\mathcal{F})$ , cuando  $\mathcal{F}'$  recorre todos los subhaces de  $\mathcal{F}$ , está acotada.

Es decir, en cualquiera de los tres casos anteriores existe una cota

$$m_0 := \max_{\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}} \{\mu_H(\mathcal{F}') - \mu_H(\mathcal{F})\}.$$

Por lo tanto, existe un entero no negativo  $M_0 = \frac{1}{2} \max\{0, m_0\}$  tal que para todo  $M > M_0 \geq 0$  el haz  $\mathcal{F}$  es  $\mu$ -estable respecto de  $H + M\mathfrak{f}$ .  $\square$

## 4.2. La construcción espectral

Sea  $C \xrightarrow{i} Y$  una curva reducida de género aritmético  $g$  tal que  $C \rightarrow B$  es un revestimiento plano de grado  $n$ . Los puntos de ramificación del revestimiento  $C \rightarrow B$  son un número finito y genéricamente  $C$  interseca a la fibra genérica en  $n$  puntos diferentes. Consideremos un haz de línea  $\mathcal{L}$  en  $C$ , entonces  $\mathcal{L}$  define un haz  $\mathcal{E} = i_*\mathcal{L}$  en  $Y$  soportado en  $C$ .

**Proposición 4.8.** *El haz  $\mathcal{E}$  es  $WIT_0$ - $\mathcal{S}$  y su transformado  $\widehat{\mathcal{E}}$  es un haz plano sobre la base  $B$ .*

*Demostración.* La restricción  $\mathcal{E}_t$  de  $\mathcal{E}$  a cada fibra  $Y_t$  está soportada en un cerrado de dimensión 0 luego es  $\text{WIT}_0\text{-}\mathcal{S}_t$ . Además, como el revestimiento  $C \rightarrow S$  es plano,  $\mathcal{E}$  es plano sobre la base. Entonces, por el Corolario 1.17,  $\mathcal{E}$  es  $\text{WIT}_0\text{-}\mathcal{S}$ ,  $\widehat{\mathcal{E}}$  es plano sobre la base  $B$  y para todo punto  $t \in B$  se tiene  $(\widehat{\mathcal{E}})_t \simeq \widehat{\mathcal{E}}_t$ .  $\square$

Por analogía a la construcción espectral para fibraciones elípticas dada en [26], a los haces  $\widehat{\mathcal{E}}$  obtenidos de esta manera los llamaremos *haces espectrales* y a la curva  $C$  la llamaremos *revestimiento espectral*.

Una descripción alternativa de los haces espectrales es la siguiente. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} C \times_B X & \xrightarrow{j} & Y \times_B X & \xrightarrow{\pi_X} & X \\ p_C \downarrow & & \pi_Y \downarrow & & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{q} & B \end{array} \quad (4.4)$$

donde  $p_C$  es plano y denotamos  $p_X = \pi_X \circ j$ . Por cambio de base se tiene que

$$\Phi_{Y \rightarrow X}^{\mathcal{P}}(i_*\mathcal{L}) = p_{X*}(p_C^*\mathcal{L} \otimes \mathbf{L}j^*\mathcal{P}).$$

Observemos que para cada  $y \in C$  la imagen inversa derivada  $\mathbf{L}i_t^*\mathbf{L}j^*\mathcal{P}$  es isomorfa al haz  $\mathcal{P}_y$  donde  $i_t: X_t \hookrightarrow C \times_B X$  es la inmersión de la fibra del punto  $y \in C$ , siendo  $q(y) = t$ . Entonces, por [5, Proposición 1.11]  $\mathbf{L}j^*\mathcal{P}$  es un haz que denotamos  $\mathcal{P}_{|C \times_B X}$ , plano sobre  $C$  y tal que  $i_t^*\mathcal{P}_{|C \times_B X} \simeq \mathcal{P}_y$ . Luego

$$\widehat{\mathcal{E}} = p_{X*}(p_C^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{P}_{|C \times_B X}).$$

Denotando por  $C_t$  la restricción del revestimiento  $C$  a la fibra  $Y_t$  resulta que

$$\widehat{\mathcal{E}}_t \simeq \widehat{(\mathcal{E}_t)} \simeq \pi_{X_t*}(\mathcal{P}_{|C_t \times X_t}),$$

donde  $\pi_{X_t}$  es la proyección natural  $C_t \times X_t \rightarrow X_t$  en el segundo factor. Por otro lado para cada punto  $t \in B$  podemos escribir  $C_t = \bigsqcup_{y \in C_t} Z_y$  siendo  $Z_y \hookrightarrow C$  un cero-ciclo de longitud  $n_{i(y)}$  soportado en  $y$ , tal que  $\sum n_{i(y)} = n$ . Si  $C \rightarrow B$  no está ramificado en el punto  $y$  se tiene  $n_{i(y)} = 1$ , luego  $n_{i(y)} > 1$  para un número finito de puntos  $y \in$

$C$ . De esta manera tenemos  $\mathcal{P}|_{C_t \times X_t} \simeq \bigoplus_{y \in C_t} \mathcal{P}|_{Z_y \times X_t}$  y  $\widehat{\mathcal{E}}_t \simeq \bigoplus_{y \in C_t} \pi_{y*} \mathcal{P}|_{Z_y \times X_t}$  siendo  $\pi_y: Z_y \times X_t \rightarrow X_t$  la proyección natural. En particular, si  $C \rightarrow S$  es no ramificado en el punto  $y$ , entonces  $\pi_{y*} \mathcal{P}|_{Z_y \times X_t}$  es el haz estable  $\mathcal{P}_y$  en  $X_t$ , representado por el punto  $y$ . En otro caso se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \pi_{y*} \mathcal{P}|_{\bar{Z}_y \times X_t} \rightarrow \pi_{y*} \mathcal{P}|_{Z_y \times X_t} \rightarrow \mathcal{P}_y \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

donde  $\bar{Z}_y$  es un cero-ciclo soportado en  $y$  de longitud  $n_{i(y)} - 1$ . Por cambio de base  $\widehat{\mathcal{E}}_t \simeq \Phi_t(\mathcal{O}_{C_t})$  y es claro que  $\mathcal{O}_{C_t}$  tiene una filtración cuyos factores son isomorfos a  $\mathcal{O}_y$ , entonces  $\widehat{\mathcal{E}}_t$  tiene una filtración cuyos factores son isomorfos a  $\mathcal{P}_y$ . En particular si  $Y_t$  una fibra genérica de  $q: Y \rightarrow B$ , entonces  $C \cap Y_t = \{y_1, \dots, y_n\}$  y se sigue que  $\widehat{\mathcal{E}}_t \simeq \mathcal{P}_{y_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_{y_n}$  es un haz en  $X_t$  libre de torsión y  $\mu$ -semiestable cuya pendiente  $\mu(\widehat{\mathcal{E}}_t)$ , con respecto de  $H_t$ , es igual a la pendiente relativa de  $\widehat{\mathcal{E}}$ , esto es, igual a  $\frac{d(\widehat{\mathcal{E}})}{rn} = \frac{LHf}{r}$ . En particular,  $\widehat{\mathcal{E}}$  no es un haz de torsión.

#### 4.2.1. Estabilidad de los haces espectrales

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que existe un número entero  $M_0$  tal que  $\widehat{\mathcal{E}}$  es  $\mu$ -estable respecto de la polarización  $H + Mf$ , para todo  $M \geq M_0$ .

**Proposición 4.9.** *El haz  $\widehat{\mathcal{E}}_t$  en  $X_t$  es semiestable de grado  $LHf$ , para todo  $t \in B$*

*Demostración.* Por construcción  $\mathcal{P}_y$  es un haz en  $X_t$  de dimensión pura dos, semiestable y de grado  $LHf$ , para todo  $y \in C_t$ . El resultado se sigue de la sucesión exacta (4.5).  $\square$

**Corolario 4.10.** *Para todo  $0 \subsetneq \mathcal{E}' \subsetneq \widehat{\mathcal{E}}$  subhaz se tiene  $\mu_f(\mathcal{E}') \leq \mu_f(\widehat{\mathcal{E}})$ .*

*Demostración.* Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}/\mathcal{E}' \rightarrow \bar{\mathcal{E}} \rightarrow 0$$

donde  $\mathcal{T}$  es un haz de torsión.

Si  $\mathcal{T} = 0$  entonces  $\widehat{\mathcal{E}}/\mathcal{E}'$  es libre de torsión y  $\mu_f(\mathcal{E}') \leq \mu_f(\widehat{\mathcal{E}})$  ya que la restricción de  $\widehat{\mathcal{E}}$  a la fibra genérica es  $\mu$ -semiestable.

Si  $\bar{\mathcal{E}} = 0$  se tiene que  $d(\mathcal{E}') = c_1(\mathcal{E}')Hf \leq c_1(\widehat{\mathcal{E}})Hf = d(\widehat{\mathcal{E}})$  y por tanto  $\mu_f(\mathcal{E}') \leq \mu_f(\widehat{\mathcal{E}})$ .

Podemos suponer por tanto que  $\mathcal{T} \neq 0$  y que  $\bar{\mathcal{E}}$  es libre de torsión. Tenemos entonces las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow \widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \bar{\mathcal{E}} \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad 0 \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}'' \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0.$$

Como  $\mathcal{T}$  es un haz de torsión  $d(\mathcal{E}') = c_1(\mathcal{E}')Hf \leq c_1(\mathcal{E}'')Hf = d(\mathcal{E}'')$  y entonces  $\mu_f(\mathcal{E}') \leq \mu_f(\mathcal{E}'')$ . Argumentando como en el caso en que  $\mathcal{T} = 0$  se tiene  $\mu_f(\mathcal{E}'') \leq \mu_f(\widehat{\mathcal{E}})$ , entonces  $\mu_f(\mathcal{E}') \leq \mu_f(\widehat{\mathcal{E}})$ .  $\square$

*Observación 4.11.* Obsérvese que, a diferencia de lo que ocurre en las fibraciones elípticas, para este tipo de fibraciones no hay una condición obvia que garantice que un haz semistable en las fibras sea WIT- $\widehat{\mathcal{S}}$ . Uno de los problemas en este sentido es que el dual derivado  $\mathcal{P}^\vee$  puede no ser un haz, a diferencia de lo que ocurre en al caso de fibraciones elípticas donde el dual derivado del haz de Poincaré relativo (Ecuación 1) es un haz.  $\triangle$

Necesitamos los siguientes lemas técnicos.

**Lema 4.12.** *Sea  $A$  un anillo y  $a \in A$  un elemento no divisor del cero. Si  $M$  es un  $A$ -módulo libre de torsión, entonces  $\text{Tor}_A^1(M, A/a) = 0$ .*

*Demostración.* Como  $a \in A$  no es divisor del cero tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{a} A \rightarrow A/a \rightarrow 0.$$

Tensorializando por  $M$  se concluye.  $\square$

**Lema 4.13.** *Sea  $A \rightarrow B$  un morfismo de anillos, con  $A$  un anillo local regular de dimensión uno, y sea  $M$  un  $B$ -módulo. Si  $M$  es libre de torsión, entonces es un  $A$ -módulo plano.*

*Demostración.* Como  $M$  es un  $B$ -módulo libre de torsión, en particular es libre de torsión como  $A$ -módulo. Entonces,  $M = \varinjlim M_i$  siendo cada  $M_i$  un sub- $A$ -módulo finito generado de  $M$  libre de torsión y por tanto plano, ya que  $A$  es un anillo local regular de dimensión uno. En consecuencia  $M$  también es un  $A$ -módulo plano.  $\square$

**Proposición 4.14.** *El haz espectral  $\widehat{\mathcal{E}}$  es libre de torsión.*

*Demostración.* Si  $\widehat{\mathcal{E}}$  no es libre de torsión existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0,$$

siendo  $\mathcal{T}$  la torsión de  $\widehat{\mathcal{E}}$  y  $\mathcal{G}$  un haz libre de torsión. Por el Lema 4.13  $\mathcal{G}$  es plano sobre  $B$ . Además, restringiendo a cualquier fibra resulta la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_t \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}_t \rightarrow \mathcal{G}_t \rightarrow 0,$$

donde la inyectividad del morfismo  $\mathcal{T}_t \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}_t$  se sigue del Lema 4.12 y de que  $X \rightarrow B$  es plano. En la fibra genérica  $\widehat{\mathcal{E}}_t$  es localmente libre luego  $\mathcal{T} = 0$ .  $\square$

**Proposición 4.15.** *El haz espectral  $\widehat{\mathcal{E}}$  tiene buenos cocientes si y sólo si el revestimiento espectral  $C$  es íntegro.*

*Demostración.* Supongamos que  $C$  es íntegro y sea  $\mathcal{G}$  un cociente propio y no de torsión de  $\widehat{\mathcal{E}}$ . Distinguimos dos casos según sea la torsión de  $\mathcal{G}$ .

(1) Supongamos que  $\mathcal{G}$  es libre de torsión. Restringiendo a la fibra genérica  $X_t$  tenemos  $\widehat{\mathcal{E}}_t \rightarrow \mathcal{G}_t \rightarrow 0$  y, como  $\widehat{\mathcal{E}}_t$  es semiestable,  $\mu(\mathcal{G}_t) \geq \mu(\widehat{\mathcal{E}}_t)$ . Además  $\widehat{\mathcal{E}}_t \simeq \mathcal{P}_{y_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_{y_n}$  siendo  $y_1, \dots, y_n$  los  $n$  puntos distintos de  $Y_t$  en los que está soportado  $\mathcal{E}_t$  luego, usando la filtración de Jordan-Hölder, todo cociente  $\mu$ -estable de  $\widehat{\mathcal{E}}_t$  con pendiente  $\mu(\widehat{\mathcal{E}}_t)$  es isomorfo a algún  $\mathcal{P}_{y_i}$ . Como  $\mathcal{G}$  no es un haz de torsión existe la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{G}_t \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow 0,$$

siendo  $\mathcal{T}$  la torsión de  $\mathcal{G}_t$  y  $\mathcal{G}'$  un haz libre de torsión. En particular, uno tiene que  $\widehat{\mathcal{S}}^2(\mathcal{G})_t \simeq \widehat{\mathcal{S}}_t^2(\mathcal{G}')$  (por el Corolario 1.17) y  $\mu(\mathcal{G}_t) \geq \mu(\mathcal{G}') \geq \mu(\widehat{\mathcal{E}}_t)$ .

Supongamos que  $\mu(\mathcal{G}_t) = \mu(\widehat{\mathcal{E}}_t)$  y veamos que en tal caso  $\mathcal{G}'$  es  $\text{WIT}_{2-\widehat{\mathcal{S}}_t}$ . En efecto, de la igualdad se sigue que  $\mathcal{G}'$  también es  $\mu$ -semiestable. Si  $\mathcal{G}'$  es  $\mu$ -estable entonces es isomorfo a algún  $\mathcal{P}_{y_i}$  y por tanto es  $\text{WIT}_{2-\widehat{\mathcal{S}}_t}$ . De lo contrario tendrá una filtración de Jordan-Hölder cuyos cocientes son isomorfos a algunos de los haces  $\mathcal{P}_{y_1}, \dots, \mathcal{P}_{y_n}$ . Luego  $\mathcal{G}'$  es  $\text{WIT}_{2-\widehat{\mathcal{S}}_t}$ .



Aplicando la transformada de Fourier-Mukai  $\widehat{\mathcal{F}}$  a la sucesión exacta  $\widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$  uno tiene

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow i_*\mathcal{L} \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}^2(\mathcal{G}) \rightarrow 0.$$

Por hipótesis el revestimiento  $C$  es íntegro, luego  $\mathcal{K} \simeq i_*\mathcal{L}'$  siendo  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_Z$  con  $\mathcal{I}_Z$  el haz de ideales de un subesquema cerrado 0-dimensional  $Z$  de  $C$ . Restringiendo a la fibra genérica se tiene que  $\widehat{\mathcal{F}}^2(\mathcal{G})_t = 0$ , lo cual es absurdo ya que  $\widehat{\mathcal{F}}^2(\mathcal{G})_t \simeq \widehat{\mathcal{G}}'_t \neq 0$ . Observemos que  $\mathcal{K}$  no puede ser cero, pues de lo contrario  $\widehat{\mathcal{E}}_t \simeq \mathcal{G}_t$  lo que implica  $\widehat{\mathcal{E}} \simeq \mathcal{G}$ , usando el Lema 4.12 y el hecho de que  $\widehat{\mathcal{E}}$  es libre de torsión. Así,  $\mu_f(\mathcal{G}) > \mu_f(\widehat{\mathcal{E}})$ .

(2)  $\mathcal{G}$  no es libre de torsión. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \widetilde{\mathcal{G}} \rightarrow 0$$

donde  $\mathcal{T}$  es la torsión de  $\mathcal{G}$  y  $\widetilde{\mathcal{G}}$  es libre de torsión. Argumentando como en el Corolario 4.10 y usando el apartado (1) se concluye.

Para demostrar el recíproco supongamos que  $C$  no es íntegro. Entonces existe una subcurva cerrada propia  $C' \subset C$  reducida e irreducible la cual es un revestimiento plano de  $B$  de grado  $0 < n' < n$ . Por tanto el morfismo epiyectivo  $\mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_{C'}$  da un morfismo epiyectivo  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}|_{C'}$ . Aplicando la transformada de Fourier-Mukai obtenemos un cociente libre de torsión  $\widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{G}$  de rango  $rn'$  y de grado relativo  $n' LH_f$ , lo que implica que  $\mu_f(\mathcal{G}) = \mu_f(\widehat{\mathcal{E}})$ .  $\square$

Las Propositiones 4.7, 4.9 y 4.15 dan el siguiente resultado:

**Teorema 4.16.** *Supongamos que el revestimiento espectral  $C$  es reducido e irreducible. Si  $\mathcal{L}$  es un haz de línea en  $C$  y  $\mathcal{E} = i_*\mathcal{L}$ , existe un entero no negativo  $M_0$ , que depende del haz  $\widehat{\mathcal{E}}$ , tal que  $\widehat{\mathcal{E}}$  es  $\mu$ -estable respecto de la polarización  $H + Mf$  para todo  $M > M_0 \geq 0$ .*

La construcción espectral nos permite por lo tanto dar ejemplos de espacios de móduli, no vacíos, de haces  $\mu$ -estables en una variedad  $X$  fibrada sobre una curva genéricamente en superficies K3.

### 4.2.2. Fibrados vectoriales

En este apartado estudiaremos cuándo  $\widehat{\mathcal{E}}$  es un fibrado vectorial, esto es, estudiaremos bajo qué condiciones los haces espectrales que hemos obtenido son haces localmente libres.

Como  $\widehat{\mathcal{E}}$  es plano sobre la base  $B$  bastará ver cuándo la restricción  $\widehat{\mathcal{E}}_t$  a cada fibra es localmente libre [68, Lemma 1.27]. Como ya hemos visto

$$\widehat{\mathcal{E}}_t \simeq \bigoplus_{y \in C_t} \pi_{y*} \mathcal{P}|_{Z_y \times X_t}$$

siendo  $\pi_y: Z_y \times X_t \rightarrow X_t$  la proyección natural. Tenemos además la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \pi_{y*} \mathcal{P}|_{\bar{Z}_y \times X_t} \rightarrow \pi_{y*} \mathcal{P}|_{Z_y \times X_t} \rightarrow \mathcal{P}_y \rightarrow 0$$

donde  $\bar{Z}_y$  es un cero-ciclo soportado en  $y$  de longitud  $n_{i(y)} - 1$ . Entonces, por inducción sobre la longitud  $n_{i(y)}$ , es suficiente con saber cuándo  $\mathcal{P}_y$  es localmente libre en  $X_t$ , para todo  $y \in C$ .

Cuando  $X_t$  es una fibra lisa, sabemos que  $\widehat{\mathcal{E}}_t$  es localmente libre (Observación 4.3) siempre y cuando  $r > 1$ . Por lo tanto, lo primero que necesitamos suponer es que  $r > 1$ . El caso  $r = 1$  será analizado de manera independiente en la Sección 4.3.

**Proposición 4.17.** *Si en cada fibra singular  $Y_t$  de  $q: Y \rightarrow B$  existe un punto  $y \in Y_t$  tal que  $\mathcal{P}_y$  es localmente libre, como haz en  $X_t$ , entonces el revestimiento  $C$  puede ser elegido de manera que  $\widehat{\mathcal{E}}$  es localmente libre.*

*Demostración.* Como acabamos de decir,  $\widehat{\mathcal{E}}$  es localmente libre si y sólo si  $\widehat{\mathcal{E}}_t$  lo es, para todo  $t \in B$ . Ya que la propiedad de ser localmente libre es abierta (ver por ejemplo [39, Lemma 2.1.8]), la condición del enunciado implica que para cada fibra singular  $Y_t$  existe un abierto no vacío  $U_t \subseteq Y_t$  de manera que  $\mathcal{P}_y$  es localmente libre para todo  $y \in U_t$ . Además si  $Y_t$  es una fibra lisa (y por lo tanto  $X_t$  también) ya hemos visto que  $\widehat{\mathcal{E}}_t$  es localmente libre. Así, el conjunto  $U$  de los puntos  $y \in Y$  tales que  $\mathcal{P}_y$  es localmente libre en la fibra de  $y$  es un abierto, complementario a un número finito de curvas. En consecuencia, tomando  $C \subseteq U$  se tiene que  $\widehat{\mathcal{E}}$  es localmente libre.  $\square$

*Observación 4.18.* Comparándolo con el caso de una variedad Calabi-Yau de dimensión tres fibrada elípticamente (cf. [26]),  $U_t$  es el locus singular de  $Y_t$  ya que  $\mathcal{P}_y$  no es más que el haz de ideales del punto  $y$ , luego es localmente libre si y sólo si  $y$  es un punto no singular de  $Y_t$ .  $\triangle$

Existen ejemplos donde las condiciones de la Proposición 4.17, para obtener fibrados vectoriales, se satisfacen. Supongamos que

1. las fibras de  $X \rightarrow B$  tienen como singularidades, a lo más, puntos dobles ordinarios aislados,
2. cada fibra  $Y_t$  parametriza haces  $\mu$ -estables, y
3. la polarización que fijamos en  $X$  se elige de manera que un haz, con las clases de Chern fijadas para definir  $Y$ , es estable si y sólo si es su restricción a la fibra genérica es  $\mu$ -estable.

Bajo estas condiciones, junto a las ya supuestas para definir el espacio de móduli relativo  $Y$ , Thomas demuestra [71, Theorem 4.15] que las singularidades de  $Y_t$  son a lo más puntos dobles ordinarios. Además los puntos singulares representan haces reflexivos no localmente libres en la fibra  $X_t$  y todos los demás puntos corresponden a haces localmente libres.

*Observación 4.19.* Para la fibración trivial  $S \times E \rightarrow E$ , donde  $S$  denota una superficie K3 y  $E$  una curva elíptica, los haces espectrales  $\widehat{\mathcal{E}}$  son fibrados vectoriales cuando  $r > 1$ . Además si la superficie K3 es reflexiva (Definición 4.31) tenemos una buena descripción del haz universal  $\mathcal{P}$ , de hecho en este caso es un fibrado vectorial, la cual nos permite calcular explícitamente los caracteres de Chern de  $\widehat{\mathcal{E}}$ .  $\triangle$

*Observación 4.20.* En las hipótesis de [71, Theorem 4.18], si la base de la fibración es  $\mathbb{P}^1$  y el revestimiento  $C$  tiene grado igual a uno, esto es, el revestimiento  $C$  puede pensarse como una sección  $\sigma: \mathbb{P}^1 \rightarrow Y$ , entonces el haz espectral obtenido a partir de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$  es el fibrado vectorial  $\tilde{\sigma}^*\mathcal{P}$ , siendo  $\tilde{\sigma}: X \rightarrow Y \times_{\mathbb{P}^1} X$  la sección inducida.  $\triangle$

*Observación 4.21.* En [2, Proposition 4.1] se demuestra que, bajo ciertas condiciones numéricas, las extensiones no triviales de haces espectrales también son  $\mu$ -estables,

lo cual permite obtener más ejemplos de haces estables en variedades de dimensión tres fibradas en superficies K3.  $\triangle$

### 4.2.3. Espacios de Moduli

En esta sección veremos que la cota  $M_0$  del Teorema 4.16 puede elegirse de manera que no dependa del haz espectral, si no de sus invariantes topológicos. Esto nos permitirá poder dar isomorfismos entre espacios de móduli.

Fijemos un divisor amplio liso  $H_0$  en  $X$ , el cual existe en virtud del Teorema de Bertini (ver por ejemplo [31, Theorem 8.18]). Denotemos  $H_M = H_0 + M\mathfrak{f}$  siendo  $M$  un número entero no negativo.

**Lema 4.22.** *Sea  $D$  un divisor en  $X$  y  $k > 0$  un número entero tal que  $0 > D^2 H_0 \geq -k$ . Entonces, o bien  $DH_0\mathfrak{f} = 0$  o bien  $(DH_0\mathfrak{f})(DH_0 H_M) > 0$  para todo  $M \geq \frac{k}{2}(H_0^2\mathfrak{f})$ .*

*Demostración.* Restringiendo el divisor  $D$  a la superficie fibrada  $H_0 \rightarrow B$  se concluye por ([39, Remarks 5.3.5, 5.3.6]).  $\square$

Sea  $\mathcal{F}$  un haz en  $X$  con clases de Chern  $c_1, c_2$  y rango  $m$ . El *discriminante* de  $\mathcal{F}$  es, por definición, la clase característica

$$B(\mathcal{F}) = 2mc_2 - (m - 1)c_1^2.$$

La desigualdad de Bogomolov ([39, Theorem 7.3.1.]) afirma que si  $\mathcal{F}$  es libre de torsión y  $\mu$ -semiestable, con respecto de la polarización  $H$ , entonces  $B(\mathcal{F})H \geq 0$ .

Para demostrar que existe una cota que sólo depende de los invariantes topológicos de  $\widehat{\mathcal{E}}$  necesitamos la siguiente definición de semiestabilidad introducida por Miyaoka en [51].

**Definición 4.23.** Sean  $H_1$  y  $H_2$  dos divisores numéricamente efectivos en  $X$ . Un haz libre de torsión  $\mathcal{F}$  en  $X$  se dice que es  $(H_1, H_2)$ -semiestable si para todo subhaz no

nulo  $\mathcal{F}'$  se verifica

$$\frac{c_1(\mathcal{F}')H_1H_2}{rk(\mathcal{F}')} \leq \frac{c_1(\mathcal{F})H_1H_2}{rk(\mathcal{F})}$$

Con esta noción de semiestabilidad se verifica la siguiente desigualdad de Bogomolov.

**Proposición 4.24.** *Sea  $\mathcal{F}$  un haz libre de torsión,  $H_1$  un divisor amplio y  $H_2$  un divisor numéricamente efectivo en  $X$  tal que  $H_1H_2$  no es numéricamente trivial. Si  $\mathcal{F}$  es  $(H_1, H_2)$ -semi estable, entonces  $B(\mathcal{F})H_1 \geq 0$ .*

*Demostración.* Es un caso particular de [51, Corollary 4.7]. □

Usando esta desigualdad de Bogomolov podemos dar una cota para el valor del número entero  $M$ , la cual sólo depende de los invariantes topológicos del haz espectral  $\widehat{\mathcal{E}}$ .

**Teorema 4.25.** *Sea  $H_0$  un divisor amplio y liso en  $X$ . Entonces  $\widehat{\mathcal{E}}$  es  $\mu$ -estable, respecto de la polarización  $H_M = H_0 + M\mathfrak{f}$  para todo  $M \geq M_0 = \frac{r^2n^2}{8}B(\widehat{\mathcal{E}})H_0(H_0^2\mathfrak{f})$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\widehat{\mathcal{E}}$  no es  $\mu$ -estable respecto de  $H_{M_0}$ . Por el Teorema 4.16 sabemos que  $\widehat{\mathcal{E}}$  es  $\mu$ -estable respecto de  $H_M$  para  $M \gg 0$ . Así podemos encontrar un número real  $M_1 \geq M_0$  tal que  $\widehat{\mathcal{E}}$  es estrictamente  $\mu$ -semi estable respecto de  $H_{M_1}$  y  $\mu$ -estable respecto de  $H_M$  para todo  $M > M_1$ . De esta manera existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

siendo  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  haces libres de torsión y  $\mu$ -semi estables respecto de  $H_{M_1}$ . Consideremos ahora el divisor  $D = rk(\mathcal{F})c_1(\mathcal{G}) - rk(\mathcal{G})c_1(\mathcal{F})$ , entonces la condición de que  $\widehat{\mathcal{E}}$  sea estrictamente  $\mu$ -semi estable equivale a decir  $DH_0H_{2M_1} = DH_{M_1}^2 = 0$ . En particular  $DH_0$  no es numéricamente trivial, como divisor en la superficie lisa  $H_0$ , ya que de lo contrario se tendría que  $\widehat{\mathcal{E}}$  es estrictamente  $\mu$ -semi estable para todo valor de  $M$ . Del Teorema del Índice de Hodge se sigue que  $D^2H_0 < 0$ . Por otro lado tenemos la siguiente igualdad

$$B(\widehat{\mathcal{E}})H_0 = \frac{rn}{rk(\mathcal{F})}B(\mathcal{F})H_0 + \frac{rn}{rk(\mathcal{G})}B(\mathcal{G})H_0 - \frac{1}{rk(\mathcal{F})rk(\mathcal{G})}D^2H_0.$$

Como  $H_{t_1}^2 = H_0 H_{2t_1}$ , los haces  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son  $(H_0, H_{2M_1})$ -semiestables en el sentido de la Definición 4.23. Aplicando la Proposición 4.24 se tienen las desigualdades de Bogomolov  $B(\mathcal{F})H_0 \geq 0$  y  $B(\mathcal{G})H_0 \geq 0$ . En consecuencia, tenemos las siguientes desigualdades

$$0 > D^2 H_0 \geq -\frac{r^2 n^2}{4} B(\widehat{\mathcal{E}}) H_0.$$

Como  $M_1 \geq M_0$  y  $DH_0 H_{2M_1} = 0$  se sigue del Lemma 4.22 que  $DH_0 f = 0$ , lo cual contradice la Proposición 4.15.  $\square$

#### 4.2.4. Invariantes Topológicos

En esta sección supondremos que  $X$  es, además, una variedad Calabi-Yau, es decir  $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ . Como  $\mathcal{S}: D_c^b(X) \simeq D_c^b(Y)$ , el Teorema 1.12 garantiza que  $Y$  también es una variedad Calabi-Yau. Ya que  $Y$  es una variedad lisa, para todo objeto de la categoría derivada  $D_c^b(Y)$  los caracteres de Chern están bien definidos. Por el teorema de Grothendieck-Riemann-Roch singular [28, Corollary 18.3.1], los caracteres de Chern del transformado  $\mathcal{S}(\mathcal{E}^\bullet)$  de un objeto  $\mathcal{E}^\bullet$  de la categoría derivada  $D_c^b(Y)$  pueden calcularse en términos de los de  $\mathcal{E}^\bullet$  de la siguiente manera

$$\text{ch}(\mathcal{S}(\mathcal{E}^\bullet)) = \pi_{X*} \left( \pi_Y^* (\text{ch}(\mathcal{E}^\bullet) \cdot \text{Td}(Y/B)) \cdot \text{ch}(\mathcal{P}) \right) \quad (4.6)$$

siempre y cuando  $\text{ch}(\mathcal{P})$  exista.

Como vemos, para calcular los caracteres de Chern de  $\Phi(\mathcal{E}^\bullet)$  aplicando el teorema de Grothendieck-Riemann-Roch, necesitamos conocer también la clase de Todd del tangente relativo de la fibración  $q: Y \rightarrow B$ . Como  $q: Y \rightarrow B$  es una intersección completa local existe el fibrado tangente relativo en el grupo  $K^\bullet(Y)$ . El siguiente resultado es un cálculo inmediato

**Proposición 4.26.** *La clase de Todd del fibrado tangente (virtual)  $T_{Y/B}$  es*

$$\text{Td}(Y/B) = 1 - \alpha \hat{f} + \frac{c_2(Y)}{12} - 2\alpha \varpi_Y,$$

donde  $\alpha = \text{Td}_1(B)$ ,  $\hat{f} \in A^1(Y)$  denota la clase de equivalencia algebraica de la fibra de  $q: Y \rightarrow B$ ,  $\varpi_Y$  es la clase fundamental de la variedad  $Y$  y estamos identificando  $H^6(Y, \mathbb{Z})$  con  $\mathbb{Z}$  integrando sobre la clase fundamental de  $Y$ .

Consideremos una curva espectral reducida  $C \xrightarrow{i} Y$  de género  $g$  de manera que  $C \rightarrow B$  es un revestimiento plano de grado  $n$ , y sea  $\mathcal{L}$  un haz de línea de grado  $\delta$  en  $C$ . Como ya hemos visto,  $\mathcal{E} = i_*\mathcal{L}$  es  $\text{WIT}_0\text{-}\mathcal{S}$  y en la fibra genérica  $\widehat{\mathcal{E}}_t \simeq \mathcal{P}_{y_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_{y_n}$ . Por tanto uno tiene

$$\text{rk}(\widehat{\mathcal{E}}) = nr \quad \text{y} \quad c_1(\widehat{\mathcal{E}}) = nL + kf,$$

con  $k$  un número entero. Usando el teorema de Grothendieck-Riemann-Roch calculamos el resto de los caracteres  $\text{ch}_i(\widehat{\mathcal{E}})$  y determinamos el valor de  $k$ .

*Observación 4.27.* A diferencia de lo que ocurre en la construcción espectral en fibraciones elípticas, donde el haz universal parametriza haces de rango uno, no podemos obtener, en general, haces cuyo rango sea igual al grado del revestimiento espectral.  $\triangle$

El caracter de Chern de  $\mathcal{E}$  es

$$\text{ch}(\mathcal{E}) = i_*(\text{ch } \mathcal{L} \cdot (1 - \frac{1}{2}K_C)),$$

donde denotamos por  $K_C$  a un divisor canónico del revestimiento espectral  $C$ . Entonces, los caracteres de Chern  $\mathcal{E}$  son

$$\begin{aligned} \text{ch}_0(\mathcal{E}) &= 0, & \text{ch}_1(\mathcal{E}) &= 0, & \text{ch}_2(\mathcal{E}) &= i_*(1) = [C], \\ \text{ch}_3(\mathcal{E}) &= i_*(-\frac{1}{2}K_C + c_1(\mathcal{L})) = (1 - g + \delta)\varpi_Y. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Riemann-Roch a  $C$  se sigue que  $\chi := \chi(\mathcal{L}) = 1 - g + \delta$ .

Si el haz universal  $\mathcal{P}$  tiene dimensión homológica finita, como haz en  $Y \times_B X$ , sus caracteres de Chern existen. Denotemos  $\gamma^i = \text{ch}_i(\mathcal{P})$ , entonces  $\gamma^0 = r$ . Usando la Ecuación (4.6) tenemos las siguientes expresiones de los caracteres de Chern de  $\widehat{\mathcal{E}}$ :

$$\begin{aligned} \text{rk}(\widehat{\mathcal{E}}) &= \pi_{X*}(\pi_Y^*[C]\gamma^0) = r[C] \cdot \hat{\mathbf{f}} = rn \\ c_1(\widehat{\mathcal{E}}) &= \pi_{X*}(\pi_Y^*[C]\gamma^1) + (\chi - \alpha n)r\mathbf{f} \\ \text{ch}_2(\widehat{\mathcal{E}}) &= \pi_{X*}(\pi_Y^*[C]\gamma^2) + (\chi - \alpha n)L\mathbf{f} \\ \text{ch}_3(\widehat{\mathcal{E}}) &= \pi_{X*}(\pi_Y^*[C]\gamma^3) + (\chi - \alpha n)(s - r). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Por la fórmula de Hurwitz,  $\chi - \alpha n = \delta - \frac{R}{2}$ , siendo  $R$  el grado del divisor de ramificación de  $C \rightarrow B$ .

El primer caracter de Chern de  $\mathcal{P}$  se calcula del siguiente modo. Consideremos el haz de línea  $\mathcal{M} = \det \mathcal{P} \otimes \pi_X^* \mathcal{O}_X(-L)$  en  $Y \times_B X$ . Para cada punto  $y \in Y$ , la restricción a la fibra  $\pi_Y^{-1}(y) \simeq \{y\} \times X_t$  con  $t = q(y)$  es

$$\mathcal{M}_t \simeq \det \mathcal{P}_t \otimes \pi_X^* \mathcal{O}_X(-L)_t \simeq \det \mathcal{P}_{t|_{X_t}} \otimes \mathcal{O}_{X_t}(-L_t) \simeq \mathcal{O}_{X_t}$$

Así  $\mathcal{M} \simeq \pi_Y^* \mathcal{Q}$  para algún haz de línea  $\mathcal{Q}$  en  $Y$ . Escribiendo  $\mathcal{Q} = \mathcal{O}_Y(Q)$  resulta

$$\det \mathcal{P} \simeq \pi_X^* \mathcal{O}_X(L) \otimes \pi_Y^* \mathcal{O}_Y(Q)$$

y  $c_1(\widehat{\mathcal{E}})$  puede expresarse como

$$c_1(\widehat{\mathcal{E}}) = nL + ((\chi - \alpha n)r + [C] \cdot Q) \mathfrak{f}.$$

Si  $\mathcal{P}$  no es de dimensión homológica finita, tendríamos que considerar la imagen directa  $j_* \mathcal{P}$ , de  $\mathcal{P}$  por la inmersión  $j: Y \times_B X \hookrightarrow Y \times X$ , cuyas clases de Chern existen ya que  $Y \times X$  es una variedad lisa. El functor integral relativo de núcleo  $\mathcal{P}$  es igual al functor integral absoluto de núcleo  $j_* \mathcal{P}$  y podemos computar los caracteres de Chern de  $\widehat{\mathcal{E}}$  en términos de  $\text{ch}(j_* \mathcal{P})$ , la clase de Todd de  $Y$  y  $\text{ch}(\mathcal{E})$ .

La expresión de los invariantes topológicos de  $\widehat{\mathcal{E}}$ , dada en la Ecuación (4.7), permite expresar el discriminante de  $\widehat{\mathcal{E}}$  en términos de los invariantes topológicos de  $\mathcal{E} = i_* \mathcal{L}$ :

$$B(\widehat{\mathcal{E}}) = n^2 L^2 + 2rn([C] \cdot Q)L \cdot \mathfrak{f} - 2rn(\pi_{X*}(\pi_Y^*[C] \cdot \gamma^2)).$$

Esto muestra que la clase  $B(\widehat{\mathcal{E}})$  sólo depende de la clase de cohomología de la curva espectral  $C$ . En consecuencia, una vez que fijamos la polarización inicial  $H_0$ , el número entero  $M_0$  depende solamente de la clase  $[C]$  del revestimiento espectral.

Este hecho nos va a permitir identificar los haces espectrales con cierta Jacobiana relativa de la siguiente manera. Fijemos los siguientes datos:

1. Tres números enteros  $n \geq 1$ ,  $g \geq 0$  y  $\delta$ .



2. La clase de cohomología  $[C]$  de una curva  $i: C \hookrightarrow Y$  de género aritmético  $g$  que es plana y de grado  $n$  sobre la base  $B$ .

Denotemos por  $\mathcal{M}([C], g)$  el espacio de módulos de curvas íntegras en  $Y$  de género aritmético  $g$  y con clase de cohomología  $[C]$ , y por  $\text{Pic}^\delta([C], g)$  la Jacobiana de haces de línea de grado  $\delta$  en las curvas parametrizadas por  $\mathcal{M}([C], g)$ . Existe entonces un morfismo  $\text{Pic}^\delta([C], g) \rightarrow \mathcal{M}([C], g)$  cuya fibra sobre un punto  $C' \in \mathcal{M}([C], g)$  es la Jacobiana  $\text{Pic}^\delta(C')$ . Como acabamos de ver el número entero  $M_0$  depende solamente de la clase de cohomología  $[C]$ , luego el Teorema 4.25 garantiza que la transformada de Fourier-Mukai  $\mathcal{S}$  induce una inmersión de esquemas

$$\text{Pic}([C], g, \delta) \hookrightarrow \mathcal{M}(X, rn, c_1, \text{ch}_2, \text{ch}_3; H_{M_0})$$

donde  $\mathcal{M}(X, rn, c_1, \text{ch}_2, \text{ch}_3; H_{M_0})$  denota el espacio de módulos de haces en  $X$ , de rango  $rn$  y con caracteres de Chern  $c_1, \text{ch}_2$  y  $\text{ch}_3$  como los de la Ecuación (4.7), y estables con respecto a  $H_{M_0}$ . Entonces, la imagen de este morfismo es el espacio de módulos de haces espectrales  $\mu$ -estables con esos caracteres de Chern. Denotando  $\mathcal{S}pec(X, rn, c_1, \text{ch}_2, \text{ch}_3; H_{M_0})$  a dicho espacio de módulos de haces espectrales tenemos de esta manera un isomorfismo

$$\text{Pic}^\delta([C], g) \simeq \mathcal{S}pec(X, rn, c_1, \text{ch}_2, \text{ch}_3; H_{M_0}).$$

Tenemos entonces el siguiente resultado:

**Teorema 4.28.** *Existe un morfismo  $\mathcal{S}pec(X, rn, c_1, \text{ch}_2, \text{ch}_3; H_{M_0}) \rightarrow \mathcal{M}([C], g)$  que dota al espacio de módulos de haces espectrales en  $X$ , con caracteres de Chern  $rn, c_1, \text{ch}_2, \text{ch}_3$  y  $\mu$ -estables respecto de la polarización  $H_{M_0}$ , de estructura de fibration abeliana sobre el espacio de módulos  $\mathcal{M}([C], g)$  de curvas de género aritmético  $g$  con clase de cohomología  $[C]$ .  $\square$*

### 4.3. El caso de rango $r = 1$

En esta sección nos ocuparemos del caso, hasta ahora descartado, en el que el rango es  $r = 1$ . Supondremos además que  $X$  es una variedad Calabi-Yau. Por la

fórmula de adjunción la condición de que  $X$  sea de tipo Calabi-Yau garantiza que todas las fibras de  $p: X \rightarrow B$  tienen haz dualizante trivial.

Empecemos con una descripción de los haces libres de torsión de rango 1 en una superficie. Sea  $X_t$  una fibra genérica de  $p$  y  $\mathcal{E}$  un haz libre de torsión de rango 1 en  $X_t$ . Existe la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{**} \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

donde  $Z$  es un subesquema cerrado de  $X_t$  de codimensión al menos 2. Ya que en una superficie los haces reflexivos son localmente libres, se tiene que  $\mathcal{E}^{**}$  es un haz de línea. Denotando por  $\mathcal{L}$  a ese haz de línea resulta que  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^* \subset \mathcal{O}_{X_t}$  es un haz de ideales de un subesquema cerrado de codimensión al menos 2. Tenemos entonces que en  $X_t$  todo haz libre de torsión de rango 1 se escribe de la forma  $\mathcal{E} = \mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_Z$  siendo  $\mathcal{L}$  un haz de línea y  $Z$  un subesquema de  $X_t$  de codimensión mayor o igual que 2. Si además suponemos que  $\mathcal{E}$  es un haz estable en  $X_t$  con vector de Mukai  $v(\mathcal{E}) = (1, L_t, s)$ , se sigue fácilmente que  $l(Z) = 1$  y en consecuencia  $\mathcal{E} = \mathcal{I}_x \otimes L_t$ , para algún punto  $x \in X_t$ . Luego en este caso el haz  $\mathcal{I}_\Delta \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_X(L)$  haría las veces del haz universal de la Sección 4.1 utilizado hasta ahora, siendo  $\mathcal{I}_\Delta$  el haz de ideales de la inmersión diagonal relativa  $\delta: X \hookrightarrow X \times_B X$ . Por cambio de base

$$\mathbf{R}\pi_{2*}(\pi_1^* \mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{I}_\Delta \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_X(L)) \simeq \mathbf{R}\pi_{2*}(\pi_1^* \mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{I}_\Delta) \otimes \mathcal{O}_X(L)$$

luego basta considerar el functor integral definido por  $\mathcal{I}_\Delta$ .

Ya que en una fibra singular  $X_t$  el haz de ideales de un punto  $\mathcal{I}_x$  podría no ser estable, no podemos aplicar el resultado de Bridgeland-Maciocia (Teorema 4.1) para demostrar que el haz de ideales  $\mathcal{I}_\Delta$  define una autoequivalencia de la categoría derivada acotada de  $X$ . Luego debemos demostrarlo directamente.

**Proposición 4.29.** *El functor integral relativo*

$$\Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{I}_\Delta}: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(X)$$

definido por el haz de ideales  $\mathcal{I}_\Delta$  de la diagonal relativa es una autoequivalencia de  $D_c^b(X)$ , esto es, una transformada de Fourier-Mukai.

*Demostración.* Ya que  $\mathcal{I}_\Delta$  es un objeto de dimensión homológica finita sobre ambos factores  $\Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{I}_\Delta}$  es una autoequivalencia si y sólo si  $\mathcal{I}_{\Delta_t}$  define una autoequivalencia de  $D_c^b(X_t)$  para todo  $t \in B$ , por el Teorema 1.18. Por hipótesis  $X_t$  es una superficie conexa y Gorenstein con haz dualizante trivial, para todo  $t \in B$ . Además, ya que la fibrición  $p: X \rightarrow B$  es plana y la fibra genérica es una superficie K3 se tiene que  $\chi(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 2$  para todo  $t \in B$ . Por la Proposición 1.25 se sigue el resultado.  $\square$

Consideremos  $C \hookrightarrow X$  un revestimiento espectral de  $B$ , íntegro y de grado  $n$ , y  $\mathcal{L}$  un haz de línea de grado  $\delta$  en  $C$ . Los resultados de la Proposición 4.8 y del Teorema 4.16 no dependen del valor de  $r$  y, para cada  $x \in X$ , el soporte del haz de ideales  $\mathcal{I}_x$  es la correspondiente fibra  $X_t$ . Entonces, siguiendo con la notación anterior, el haz espectral  $\widehat{\mathcal{E}}$  obtenido a partir de  $\mathcal{E} = i_*\mathcal{L}$  es  $\mu$ -estable. La restricción de  $\widehat{\mathcal{E}}$  a la fibra genérica es  $\mathcal{I}_{x_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_{x_n}$  siendo  $C \cap \mathfrak{f} = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Como para cada punto  $x$  de la fibra genérica el haz de ideales  $\mathcal{I}_x$  no es localmente libre  $\widehat{\mathcal{E}}$  tampoco lo es. Sin embargo, un cálculo directo muestra que el dual  $\mathcal{I}_x^*$  es localmente libre. Veamos que esto también lo cumple el dual de  $\widehat{\mathcal{E}}$ .

**Proposición 4.30.** *El haz  $\widehat{\mathcal{E}}^*$  es localmente libre en  $X$ .*

*Demostración.* Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} C \times_B X & \xrightarrow{j} & X \times_B X & \xrightarrow{\pi_2} & X \\ p_1 \downarrow & & \pi_1 \downarrow & & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

donde los diagramas son cartesianos y los morfismos son planos. Denotemos  $\pi = p \circ i$  y  $p_2 = \pi_2 \circ j$ .

La sucesión exacta  $0 \rightarrow \mathcal{I}_\Delta \rightarrow \mathcal{O}_{X \times_B X} \rightarrow \mathcal{O}_\Delta \rightarrow 0$  induce el siguiente triángulo exacto en categoría derivada

$$\Phi^{\mathcal{I}_\Delta}(i_*\mathcal{L}) \rightarrow \Phi^{\mathcal{O}_{X \times_B X}}(i_*\mathcal{L}) \rightarrow \Phi^{\mathcal{O}_\Delta}(i_*\mathcal{L}),$$

donde  $\Phi^{\mathcal{I}_\Delta}(i_*\mathcal{L}) = \widehat{\mathcal{E}}$ ,  $\Phi^{\mathcal{O}_\Delta}(i_*\mathcal{L}) = i_*\mathcal{L}$  y, por cambio de base,  $\Phi^{\mathcal{O}_{X \times_B X}}(i_*\mathcal{L}) = p_{2*}p_1^*\mathcal{L}$ , no siendo necesario derivar  $p_2$  ya que es un morfismo finito. Tomando cohomología tenemos

$$0 \rightarrow \widehat{\mathcal{E}} \rightarrow p_{2*}p_1^*\mathcal{L} \rightarrow i_*\mathcal{L} \rightarrow 0.$$

Tomando dual se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow (p_{2*}p_1^*\mathcal{L})^* \rightarrow \widehat{\mathcal{E}}^* \rightarrow \mathcal{E}xt^1(i_*\mathcal{L}, \mathcal{O}_X) \rightarrow 0.$$

Finalmente, como  $i: C \hookrightarrow X$  es una inmersión cerrada y una intersección local completa de codimensión 2, tenemos  $\mathcal{E}xt^1(i_*\mathcal{L}, \mathcal{O}_X) = 0$ . Como  $\pi$  es un morfismo plano, el haz  $\widehat{\mathcal{E}}^* \simeq (p_{2*}p_1^*\mathcal{L})^* \simeq (p^*\pi_*\mathcal{L})^*$  es localmente libre.  $\square$

El isomorfismo  $\widehat{\mathcal{E}}^* \simeq (p^*\pi_*\mathcal{L})^*$  permite calcular fácilmente los invariantes de  $\widehat{\mathcal{E}}^*$  a partir de los del fibrado vectorial  $p^*\pi_*\mathcal{L}$ . Se tiene

$$\text{ch}(\widehat{\mathcal{E}}^*) = n + (-\delta + \frac{1}{2} \deg K_{C/B})f.$$

Por la fórmula de Hurwitz  $\text{ch}(\widehat{\mathcal{E}}^*) = n - (\chi - \alpha n)f$  (según la notación de la Subsección 4.2.4).

Cuando  $\chi$  sea múltiplo de  $n$ , haciendo producto tensorial por  $\mathcal{O}_X(af)$  siendo  $a = \frac{\chi}{n} - \alpha$ , se obtiene un fibrado vectorial  $\mu$ -estable de rango  $n$  y con todas las clases de Chern nulas.

## 4.4. Fibraciones Triviales

Para terminar este capítulo analizaremos el caso de la fibración trivial  $X = S \times E \rightarrow E$ , donde  $S$  es una superficie K3 reflexiva y  $E$  una curva elíptica.

Empezamos recordamos la definición de superficie K3 reflexiva y algunos resultados conocidos para este tipo de superficies. Para los detalles consultar [6].

**Definición 4.31.** Una superficie K3  $S$  se dice que es *reflexiva* si posee una polarización  $\Theta$  y un divisor  $\ell$  tal que

1.  $\Theta^2 = 2$ .
2.  $\ell^2 = -12$  y  $\ell \cdot \Theta = 0$ .
3.  $\ell + 2\Theta$  es un divisor no efectivo en  $S$ .

**Proposición 4.32.** *Fijemos el vector de Mukai  $v = (2, \ell, -3)$  en la superficie K3 reflexiva  $S$  y sea  $\mathcal{M}(S, v; \Theta)$  el espacio de módulos de haces en  $S$  estables, respecto de  $\Theta$  y con vector de Mukai  $v$ . Se verifica lo siguiente:*

1.  $\mathcal{M}(S, v; \Theta)$  es un espacio de módulos fino, no vacío, parametrizando fibrados vectoriales  $\mu$ -estables en  $S$ .
2. El functor integral  $\Phi^{\mathcal{P}_S}: D_c^b(\mathcal{M}(S, v; \Theta)) \simeq D_c^b(S)$  definido por un fibrado universal  $\mathcal{P}_S$  en  $\mathcal{M}(S, v; \Theta) \times S \rightarrow \mathcal{M}(S, v; \Theta)$  es una transformada de Fourier-Mukai.
3.  $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}(S, v; \Theta)$  si y sólo si existe la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{E}(\Theta) \longrightarrow \mathcal{I}_x(\ell + 2\Theta) \longrightarrow 0$$

donde el punto  $x$  depende sólo de  $[\mathcal{E}]$ .

4.  $\mathcal{M}(S, v; \Theta)$  es una superficie K3 reflexiva y existe un isomorfismo de superficies K3

$$\mathcal{M}(S, v; \Theta) \simeq S$$

que a cada  $[\mathcal{E}]$  le asigna el punto  $x$  determinado por la sucesión exacta del apartado anterior.

Fijemos  $H = \Theta \times E$  y  $L = \ell \times E$ . Siguiendo la Sección 4.1 existe un espacio de módulos fino  $Y \rightarrow E$  y un fibrado universal  $\mathcal{P}$  en  $Y \times_E X \rightarrow Y$  tal que para cada punto  $t \in E$  la restricción  $\mathcal{P}_t$  es  $\mathcal{P}_S$ . Además  $Y \rightarrow E$  también es una fibración trivial, esto es  $Y \simeq \mathcal{M}(S, v; \Theta) \times E$ .

Tomemos  $\mathcal{F} \simeq \mathcal{O}_X(L + 2H) \simeq \mathcal{O}_X((\ell + 2\Theta) \times E)$ , entonces:

**Proposición 4.33.** *Existe una extensión no trivial*

$$0 \longrightarrow \pi_1^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{I}_\Delta \otimes \pi_2^* \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

*Demostración.* Para cada  $t \in E$  se tiene  $H^i(S, \mathcal{O}_S(\ell + 2\Theta)) = 0$ , para todo  $i \geq 0$ , ya que  $\pm(\ell + 2\Theta)$  es un divisor no efectivo y  $\chi(\mathcal{O}_S(\ell + 2\Theta)) = 0$ . Entonces

$\mathbf{R}\pi_{1*}\pi_2^*\mathcal{F} = 0$  para todo  $i \geq 0$ . Aplicando  $\pi_{1*}$  a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_\Delta \otimes \pi_2^*\mathcal{F} \longrightarrow \pi_2^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \otimes \pi_2^*\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

se sigue que  $\mathcal{F} \simeq \mathbf{R}\pi_{1*}(\mathcal{O}_\Delta \otimes \pi_2^*\mathcal{F}) \simeq \mathbf{R}\pi_{1*}(\mathcal{I}_\Delta \otimes \pi_2^*\mathcal{F})[1]$ . Usando dualidad de Grothendieck-Verdier y la fórmula de adjunción se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^\vee[-1], \mathcal{F}^\vee[-1]) &\simeq \mathrm{Hom}(\pi_1^*\mathcal{F}^\vee[-1], \mathbf{R}\mathcal{H}om(\mathcal{I}_\Delta \otimes \pi_2^*\mathcal{F}, \pi_2^*\omega_{X/E})) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\pi_1^*\mathcal{F}^\vee[-1] \otimes \mathcal{I}_\Delta \otimes \pi_2^*\mathcal{F}, \pi_2^*\omega_{X/E}) \\ &\simeq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_\Delta \otimes \pi_2^*\mathcal{F}, \pi_1^*\mathcal{F}) \quad (\text{ya que } \omega_{X/E} \simeq \omega_S \simeq \mathcal{O}_S). \end{aligned}$$

Así, la identidad  $Id \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^\vee[-1], \mathcal{F}^\vee[-1])$  induce una extensión no trivial

$$0 \longrightarrow \pi_1^*\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{I}_\Delta \otimes \pi_2^*\mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

□

Restringiendo esta sucesión exacta a la fibra de  $\pi_1$  se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(\ell + 2\Theta) \longrightarrow \mathcal{N}_{|\{x\} \times S} \longrightarrow \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{O}_S(\ell + 2\Theta) \longrightarrow 0.$$

Por la Proposición 4.32 resulta  $\mathcal{N}_{|\{x\} \times S} \simeq \mathcal{E}(\Theta)$ , siendo  $\mathcal{E}$  un fibrado vectorial en  $S$ ,  $\mu$ -estable respecto de  $\Theta$  y con vector de Mukai  $(2, \ell, -3)$ . Así,  $\mathcal{N} \otimes \pi_2^*\mathcal{O}_X(-H)$  es un haz en  $X \times_E X$  plano sobre ambos factores y tal que, para cada punto  $x \in X$ , su restricción a la fibra  $\{x\} \times S$  corresponde a un punto de  $\mathcal{M}(S, v; \Theta)$ . De esta manera tenemos un morfismo de esquemas sobre  $E$

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\psi} Y \\ x &\mapsto \mathcal{N} \otimes \pi_2^*\mathcal{O}_X(-H)_{|\{x\} \times S} \end{aligned}$$

que es un isomorfismo ya que lo es en cada fibra. Entonces,

$$(\psi \times 1)^*\mathcal{P} \otimes \pi_1^*\mathcal{U} \simeq \mathcal{N} \otimes \pi_2^*\mathcal{O}_X(-H)$$

para algún fibrado de línea  $\mathcal{U}$  en  $X$ .

**Proposición 4.34.** *El functor integral relativo*

$$\mathcal{S}: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(X)$$

definido por  $\mathcal{N} \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_X(-H)$  es una autoequivalencia de  $D_c^b(X)$ , es decir una transformada de Fourier-Mukai.

*Demostración.* Es inmediata usando el Teorema 1.18 y la Proposición 4.32.  $\square$

Teniendo en cuenta el isomorfismo  $\psi: X \simeq Y$  podemos aplicar la construcción espectral de la Sección 4.2 directamente a  $X$ . Consideremos entonces un revestimiento  $i: C \hookrightarrow X$  un revestimiento plano de  $E$  y sea  $\mathcal{L}$  un haz de línea en  $C$ . El haz  $\mathcal{E} = i_* \mathcal{L}$  es  $\text{WIT}_0$ - $\mathcal{S}$  y su transformado  $\widehat{\mathcal{E}}$  es un haz en  $X$  localmente libre y  $\mu$ -estable. Usando la fórmula de proyección se tiene que  $\mathcal{S}(\mathcal{E}) \simeq \Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{N}}(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{O}_X(-H)$ . En consecuencia,  $\mathcal{E}$  también es  $\text{WIT}_0$ - $\Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{N}}$ . La descripción del haz  $\mathcal{N}$  dada por la sucesión exacta de la Proposición 4.33 nos va a permitir dar expresamente los caracteres de Chern  $\widehat{\mathcal{E}}$  en función de los datos iniciales del problema, esto es en función de los invariantes topológicos de  $\mathcal{L}$ , del revestimiento  $C$  y de los divisores fijados en el fibración  $X \rightarrow E$ .

**Proposición 4.35.** *Los caracteres de Chern del transformado  $\widehat{\mathcal{E}}$  de  $\mathcal{E}$  respecto de  $\mathcal{S}$  son:*

$$\begin{aligned} \text{ch}_0(\widehat{\mathcal{E}}) &= 2n \\ \text{ch}_1(\widehat{\mathcal{E}}) &= nL + k\mathfrak{f}, \quad \text{con } k = 2\chi(\mathcal{L}) + [C] \cdot (L + 2H) \\ \text{ch}_2(\widehat{\mathcal{E}}) &= \chi(\mathcal{L})\ell - ([C] \cdot (L + 2H))\Theta - 4nE - [C] \\ \text{ch}_3(\widehat{\mathcal{E}}) &= -5\chi(\mathcal{L}) + HC \end{aligned}$$

*Demostración.* Llamando  $\widetilde{\mathcal{E}}$  al transformado de  $\mathcal{E}$  respecto de  $\Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{N}}$  resulta  $\text{ch}(\widehat{\mathcal{E}}) = \text{ch}(\widetilde{\mathcal{E}}) \cdot \text{ch} \mathcal{O}_X(-H)$ .

Por la sucesión exacta de la Proposición 4.33 tenemos el triángulo exacto

$$\mathbf{R}\pi_{2*} \pi_1^*(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \rightarrow \widetilde{\mathcal{E}} \rightarrow \Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{I}\Delta}(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{F}.$$

Por otro lado la sucesión exacta del haz de ideales de la inmersión de la diagonal relativa

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_\Delta \longrightarrow \mathcal{O}_{X \times_E X} \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0$$

da lugar al triángulo exacto

$$\Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{I}_\Delta}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbf{R}\pi_{2*}\pi_1^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Entonces, el caracter de Chern de  $\tilde{\mathcal{E}}$  es:

$$\text{ch}(\tilde{\mathcal{E}}) = \text{ch}\left(\mathbf{R}\pi_{2*}\pi_1^*(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})\right) + \left(\text{ch}(\mathbf{R}\pi_{2*}\pi_1^*\mathcal{E}) - \text{ch}(\mathcal{E})\right) \cdot \text{ch} \mathcal{F}.$$

Aplicando el Teorema de Grothendieck-Riemann-Roch se obtiene el resultado.  $\square$

Por la Observación 4.19, los haces espectrales  $\hat{\mathcal{E}}$  son fibrados vectoriales. Además por la Proposición 4.9 su restricción  $\hat{\mathcal{E}}_t$  a cualquier fibra de  $S \times E \rightarrow E$  es semiestable de grado cero. Si el revestimiento espectral  $C$  es reducido e irreducible, entonces el fibrado  $\hat{\mathcal{E}}$  es  $\mu$ -estable respecto de  $H + M\mathfrak{f}$ , para todo  $M \geq M_0$  siendo  $M_0$  un número entero que depende solamente de  $H$  y  $[C]$  (Teoremas 4.16 y 4.25).



**Parte III**

**Apéndice**



# Apéndice A

## Quick overview of the work

Let us summarize in this appendix the contents of the work.

### Introduction

#### A.0.1. Motivation

In this thesis we study (semi)stable sheaves and its moduli spaces on elliptic and K3 fibrations by using Fourier-Mukai transforms.

Moduli spaces of sheaves are important because are intrinsically interesting objects containing a great deal of geometric information and they allow one to define new invariants of varieties. Furthermore from a physical point of view some moduli spaces are interpreted as solution spaces to physically interesting differential equations. Moduli spaces of stable sheaves are particularly interesting. One of the most important applications of Fourier-Mukai transforms is to the study of stable sheaves on projective varieties. Since Fourier-Mukai transforms are compatible, under some assumptions, with base change one can use them to define morphisms between certain moduli spaces. The idea behind the theory of Fourier-Mukai transforms is to replace a problem about moduli with other, hopefully easier, problem.

Fourier-Mukai transforms were introduced by Mukai in [52], who constructed geometrically motivated equivalences between derived categories of non-isomorphic varieties. One of the first reasons that reveal the importance of these functors is due to a result of Orlov. In [61] he proved that any equivalence between derived categories of coherent sheaves of two projective smooth varieties is a Fourier-Mukai transform.

Although the derived category was originally introduced by Verdier [74] as a technical tool needed to generalize Poincaré and Serre duality to the relative setting, and its introduction greatly simplifies many results and proofs which involve homological algebra, it was usually considered as a rather formal object without much interesting internal structure. Contrary to the cohomology and the Chow ring of a projective variety, the derived category of coherent sheaves as an invariant of the variety had not been investigated thoroughly. This has changed completely since Fourier-Mukai transform appeared. The derived category turns out to be a very reasonable invariant. Due to results of Bondal and Orlov [9], one knows that it determines the variety whenever the canonical bundle is either ample or anti-ample. However, when the canonical bundle is not ample or anti-ample there exist equivalences between derived categories of non-isomorphic varieties, ([52], [61]).

From a physical point of view, the most interesting case is the case of Calabi-Yau varieties, that is, varieties with trivial canonical sheaf. Bridgeland [12] proved that two birational Calabi-Yau threefolds are derived equivalent varieties and it is conjectured that if we have two Calabi-Yau threefolds with equivalent derived categories, then one is deformation equivalent to a birational model of the other. This conjecture has great interest in Physics because if we interpret D-branes as objects of the derived category, then derived equivalent varieties should have the same D-branes and therefore they should give the same Physics. Since the birational equivalence of two Calabi-Yau varieties is produced by means of singular varieties, which is interpreted in terms of D-branes as a topological transition of conifold type, it seems natural to extend the study of Fourier-Mukai transforms to singular varieties. For Calabi-Yau varieties is not easy to provide examples of non-isomorphic varieties with the same derived category [17]. In order to give evidences for the conjecture, or in the contrary to disprove it, one should exhibit them as compactified relative Simpson Jacobians of

pure dimensional one sheaves on an elliptic Calabi-Yau. It leads to study the derived category and moduli spaces of semistable sheaves on arithmetic genus one curves. For irreducible genus one curves there are some results in [14, 15], and for the so-called Kodaira curves Căldăraru [16] and López Martín [45, 46] describe the moduli spaces of pure dimension one sheaves with rank one and degree zero.

On the other hand, string theory has provided us with conjectures which have led to develop applications of Fourier-Mukai transforms and it has returned interest toward abstract problems as the characterization of algebraic varieties. The most prominent example was given by Kontsevich's homological mirror symmetry conjecture [43]. The conjecture predicts, for mirror dual pairs of Calabi-Yau varieties, an equivalence between the bounded derived category of a certain projective variety and the Fukaya category corresponding to the symplectic geometry of the mirror variety. The conjecture implies a correspondence between self-equivalences of the derived category and certain symplectic self-equivalences of the mirror variety.

Besides its importance on geometrical aspects of mirror symmetry, the Fourier-Mukai transform has been shown to be also important for heterotic string compactifications on elliptic fibrations. This is motivated from the conjectured correspondence between the heterotic string and the so called F-theory. On the heterotic side, the preservation of absolute stability under relative Fourier-Mukai transforms on elliptic Calabi-Yau's has been studied in [1]. On the other side of F theory, the proof of the conjecture would require the computation of the moduli spaces of stable sheaves on Calabi-Yau varieties fibred by K3 surfaces over a curve. The basis of this study lies on the absolute Fourier-Mukai transform for K3 surfaces, which was developed by Bartocci, Bruzzo and Hernández Ruipérez [6], Mukai [54] and Yoshioka [75], and on the partial results for fibrations with K3 fibres contained in [13]. The construction of compactifications of the heterotic string requires the construction of stable bundles on Calabi-Yau varieties satisfying certain conditions. One of the methods exploited to construct these bundles is the spectral cover construction given by Friedman, Morgan and Witten [26]. They showed how to construct vector bundles in terms of a hypersurface in the Calabi-Yau variety together with a line bundle on it. Moreover, a physical way to understand this bundle construction can be given if one views vector

bundles, or more generally objects of the derived category, as D-branes and uses the fact that D-branes are mapped under T-duality to new D-branes. This can be formulated in terms of a relative Fourier-Mukai transform [35, 1]. Thus, the Fourier-Mukai transform can be interpreted as a symmetry of string theory [3].

### A.0.2. Outline, results and conclusions

This thesis is divided in two parts. The first part (Sections A.1 and A.2) collects some known facts concerning Fourier-Mukai transforms and moduli spaces that we will use in the second part. We shall refer to [37, 5, 68] for further details.

In Section A.1 is devoted to the theory of Fourier-Mukai transforms. In particular we focus on the relative set up of these kind of functors.

Fourier-Mukai functors were defined by Mukai in the 80's ([52]) as a tool to study certain properties of Picard bundles on abelian varieties. Mukai proved that the integral functor, defined by the Poincaré bundle, between the derived category of an abelian variety and the derived category of its dual variety is an equivalence. This kind of equivalences, which he called Fourier functors, is nowadays known as Fourier-Mukai transforms.

One of their most important properties is their compatibility with base changes. It is this property which makes them so useful since it allow us to induce isomorphisms between certain moduli spaces. Moreover, this property allows us to study stable sheaves on fibered schemes from what we know about them fiberwise.

A recent result of Hernández Ruipérez, López Martín and Sancho de Salas deserves to be remarked. They proved [33, 34] that any relative Fourier-Mukai functor is an equivalence if and only if it is an equivalence fiberwise. Thus we can define equivalences between the derived categories of fibered schemes with no conditions either on the base or on the total space. An example is the relative integral functor defined by the ideal sheaf of the relative diagonal of a Gorenstein morphism. The theory of spherical objects allows us to prove easily that the ideal sheaf of the diagonal on a Gorenstein scheme defines an equivalence. Then the relative diagonal also defines a

Fourier-Mukai transform.

Section A.2 deals with semistable sheaves on a projective scheme and their moduli spaces in the sense of Simpson [68]. The concept of a stable sheaf was introduced by Mumford [55] in the 60's for vector bundles on a smooth curve. He used his geometric invariant theory [56] to show that the class of semistable bundles of rank  $r$  and degree  $d$  on a smooth curve  $X$  has a coarse moduli space  $\mathcal{M}_X(r, d)$ . It follows from his construction that  $\mathcal{M}_X(r, d)$  is a projective scheme and is a fine moduli space whenever  $r$  and  $d$  are coprime. In the 70's Gieseker [29], Maruyama [47, 48] and Takemoto [70] attempted to generalize Mumford's construction to higher-dimensional projective varieties, particularly smooth surfaces. They required to include torsion free sheaves which are not locally free, in order to obtain a compact moduli space, and to choose a polarization. The problem of calculating moduli spaces of sheaves on smooth surfaces was given added impetus in the 80's by a work of Donaldson on real four-manifolds [23]. He showed that a vector bundle on a complex algebraic surface is stable if and only if the corresponding bundle on the underlying four-manifold admits an irreducible Hermitian-Einstein connection [21]. This allowed certain moduli spaces of stable sheaves to be interpreted as solution spaces to the anti-self-dual Yang-Mills equations. Moreover Donaldson defined new invariants for four-manifolds [22], which in the case of complex algebraic surfaces were most easily computed by studying the corresponding moduli spaces of stable sheaves [60, 44].

In this section we review the general definition of stability of sheaves in an arbitrary projective scheme, which is due to Simpson [68] and the existence theorem of the moduli spaces of semistable sheaves.

The second part (Sections A.3 and A.4) contains the original results of this work. By using Fourier-Mukai transforms we study stable sheaves and their moduli spaces for K3 and elliptic fibrations.

In Section A.3 we study moduli spaces of semistable sheaves on singular curves which occur as degenerations of smooth elliptic curves. The analysis of these moduli spaces and, in general, the derived categories of arithmetic genus one projective curves, is motivated on the one hand by the Mackay correspondence [40] and, on the

other hand by the homological mirror symmetry [26, 43].

The study of the moduli spaces of vector bundles on a smooth elliptic curves dates back to Atiyah [4] and Tu [73]. They proved that for an elliptic curve  $E$  there is an isomorphism  $\mathcal{M}(r, d) \simeq \text{Sym}^m E$ , where  $m = \gcd(r, d)$ , between the moduli space of semistable sheaves of rank  $r$  and degree  $d$  and the symmetric product of the curve. A very simple way to prove this isomorphism is by using Fourier-Mukai transforms (cf. [63, 10]). This method has been generalized to irreducible elliptic curves (i.e., rational curves with a simple node or cusp) in [5, Chapter 6]) obtaining that  $\mathcal{M}(r, d) \simeq \text{Sym}^m X$ , where  $m = \gcd(r, d)$  also in this case.

A study of these relative spaces for a more general class of genus one fibrations, for instance, with non-irreducible fibers and even singular total spaces turns out to be an interesting problem.

In the case of singular curves, the moduli spaces of semistable torsion free sheaves were first constructed and studied by Seshadri [66]. His construction can now be seen as a particular case of the general construction of the moduli spaces of semistable pure sheaves due to Simpson [68]. The properties of these moduli spaces and their degeneration properties have been studied by many authors (see, for instance, [67, 57, 58]).

The goal of this Section is to carry out a similar study for an arbitrary Gorenstein genus one curve  $C$  with trivial dualizing sheaf. The group of all integral functors that are exact autoequivalences of  $D_c^b(C)$  is still unknown and a criterion characterizing those Fourier-Mukai transforms that preserve semistability for this sort of curves seems to be a difficult problem. We find some equivalences of its derived category  $D_c^b(C)$  of coherent sheaves that preserve the (semi)-stability of pure dimensional sheaves. One is given by the ideal of the diagonal and the other is provided by twisting by an ample line bundle (see Theorem A.3.22). These two equivalences enable us to prove that there are only a finite number of non isomorphic moduli spaces of semistable sheaves (see Corollary A.3.27). Unlike the case of a smooth curve, moduli spaces of semistable sheaves on a curve with many irreducible components are not normal (even in the case where the rank is 1). Its structure depend very strongly on the particular configuration of every single curve. The difficulty in determining the



stability conditions for a sheaf in this case points out the relevance of these results. In fact, for a curve with two irreducible components endowed with a polarization of minimal degree, they reduce the study either to the case of rank 0 or to the case of degree 0.

From a relative point of view we also obtain (see Corollary A.3.30) analogous results for a *genus one fibration*, that is to say for a flat projective morphism  $p: X \rightarrow B$  whose fibers are Gorenstein curves of arithmetic genus one and trivial dualizing sheaf. Notice that the generic fiber of  $p$  is a smooth elliptic curve but non-irreducible singular curves can appear. There are some cases where the structure of the singular fibers is known. For smooth elliptic surfaces over the complex numbers, the classification was given by Kodaria [42] and for smooth elliptic threefolds over a base field of characteristic different from 2 and 3, they were classified by Miranda [49]. In both cases, the possible singular fibers are plane curves of the same type, the so-called Kodaira fibers (Figure 2, page 17). Nevertheless, in an arbitrary genus one fibration non-plane curves can also appear as degenerated fibers.

Proposition A.3.6 computes the Grothendieck group of coherent sheaves for any reduced connected and projective curve whose irreducible components are isomorphic to  $\mathbb{P}^1$ . The discrete invariants corresponding to the Grothendieck group behave well with respect to Fourier-Mukai transforms and are important tools for the analysis of the moduli spaces.

Later, we focus our study on a curve of type  $I_N$  and in the case of degree 0, which is particularly interesting as in this case semistability does not depend on the polarization. Although a description of all torsion free sheaves on a cycle of projective lines  $I_N$  is known, it is by no means a trivial problem to find out which of them are semistable. For instance, contrary to what happens for an elliptic curve, semistability is not guaranteed by the simplicity of the sheaf. For  $I_1$ , that is, a rational curve with one node, this was done in [14] for the degree zero case and in [15] otherwise. Using the description of indecomposable torsion-free sheaves on  $I_N$  given in [7] and the study of semistable torsion-free sheaves on  $I_N$  and on tree-like curves of [45], Theorem A.3.37 proves that the only degree 0 stable sheaves that exist are the line bundles having degree 0 on every irreducible component of  $I_N$  and  $\mathcal{O}_{C_i}(-1)$  for

some irreducible component  $C_i$ . Then Corollary A.3.39 gives the possible Jordan-Hölder factors of any degree 0 semistable sheaf. In the integral case, if the sheaf is indecomposable all Jordan-Hölder factors are isomorphic to each other. This is no longer true for cycles of projective lines. Proposition A.3.42 computes the graded object of any indecomposable semistable sheaf of degree 0. The structure of the connected component of the moduli space that contains vector bundles of rank  $r$  is given in Theorem A.3.45. Namely, it is isomorphic to the  $r$ -th symmetric product  $Sym^r I_1$  of the rational curve with one node. Having studied the case of degree zero, the results of the first part of the section allow to cover other cases (see Remark A.3.46). In particular, the connected component of the moduli space that contains vector bundles of rank  $r$  and degree  $rh$ , where  $h$  is the degree of the polarization, is also isomorphic to  $Sym^r I_1$ .

In Section A.4 we construct stable sheaves on a K3 fibered threefold by using the technique of the spectral cover construction.

Aside from their mathematical importance, moduli spaces of these sheaves provide a geometric background for various aspects in string theory such as heterotic string compactifications or the description of D-branes on complex three-dimensional Calabi-Yau varieties, which occur in the mirror symmetry program.

When the variety admits a fibration structure, a natural procedure to describe moduli spaces of sheaves or bundles is first to construct them fiberwise and then to find an appropriate global description. This method has been successfully employed by Friedman, Morgan and Witten to construct stable vector bundles on elliptic fibrations in terms of a hypersurface in the elliptic fibration together with a line bundle on it [25, 26]. This construction is known as the *spectral cover construction* and can be described as follows. Let  $p: X \rightarrow B$  is an elliptic fibration, that is, a genus one fibration such that all fibers are geometrically integral. Therefore singular fibers have at most one singular point, either a simple node or a cusp. In addition we assume that there is a section which does not meet the singular points of the fibers. Consider a vector bundle  $V$  of rank  $n$  on  $X$  such that the restriction to every fiber of  $p: X \rightarrow B$  is semistable and regular with trivial determinant. Then the bundle  $V$  determines a subscheme  $C \hookrightarrow X$  such the  $C \rightarrow B$  is a  $n$ -fold flat cover, *the spectral cover*.

Moreover there exists a unique line bundle  $\mathcal{L}$  such that

$$V = p_{X*}(p_C^*\mathcal{L} \otimes \bar{\mathcal{P}}),$$

where  $p_C$  and  $p_X$  are the natural projections of  $C \times_B X$  onto its factors and  $\bar{\mathcal{P}}$  is a bundle on  $C \times_B X$  parametrizing the Jordan-Holder factors of the restriction of  $V$  to the corresponding fiber, that is,  $\bar{\mathcal{P}}$  is the Poincaré sheaf on  $X \times_B X$  restricted to  $C \times_B X$ . Thus, these *spectral bundles* on an elliptic fibration are determined by their *spectral data*  $(C, \mathcal{L})$  on  $X$  [26, Proposition 5.7].

Friedman, Morgan and Witten also found sufficient conditions for the spectral bundles to be stable with respect to  $H_0 + Mp^*H_B$ , where  $H_0$  and  $H_B$  are fixed polarizations on  $X$  and  $B$  respectively, and  $M \gg 0$ . It turns out that if the spectral cover is reduced and irreducible, then there exists an integer number  $M_0$  depending on  $V$  such that  $V$  is stable with respect to  $H_0 + Mp^*H_B$  for all  $M \geq M_0$ . Furthermore, in the case of elliptic surfaces, i.e.,  $\dim B = 1$ , there exists an effective bound of  $M_0$  depending only on the topological invariants of  $V$  [26, Theorems 7.1 and 7.4]. For higher dimensions, that is, when  $\dim B > 1$ , finding an effective estimate for  $M_0$  which depends only on topological invariant of  $V$ , is still an open question. Anyhow since it is in general rather difficult to produce examples of stable bundles on Calabi-Yau threefolds, the spectral cover construction is an important tool for that purpose and for proving that certain moduli spaces of stable sheaves are not empty.

Equivalently, this construction can be understood as a relative Fourier-Mukai transform. The spectral construction is better understood in terms of the Fourier-Mukai transform ([20, 35, 1]). This leads to a larger class of stable spectral sheaves than the originally constructed in [26]. This is due to the fact that one does no longer need to have irreducible spectral covers nor than the restriction of the sheaf to the general fiber is regular with trivial determinant.

Denote by  $q: \hat{X} \rightarrow B$  the Altman-Kleiman compactification of the relative Jacobian of  $p$ . This is a fine moduli space for torsion free rank one and degree zero sheaves on the fibers of  $p: X \rightarrow B$  and then there is a universal sheaf  $\hat{\mathcal{P}}$  on  $X \times_B \hat{X}$  (the relative Poincaré sheaf). The generic fiber of  $q$  is just the dual elliptic curve of the corresponding fiber of  $p$ . Moreover, the section  $\sigma$  of  $p$  induces an isomorp-

hism  $\varpi: X \simeq \hat{X}$  of elliptic fibrations defined by  $\varpi(x) = \mathfrak{m}_x \otimes \mathcal{O}_{X_b}(\sigma(t))$ , where  $t = p(x)$  and  $\mathfrak{m}_x$  is the ideal sheaf of  $x$  in its fiber  $X_t$ . If we identify  $X$  and  $\hat{X}$  by  $\varpi$  the relative Poincaré sheaf can be considered as a sheaf on  $X \times_B X$ , which can be normalized so that

$$\mathcal{P} = \mathcal{I}_\Delta \otimes \tilde{\pi}_1^* \mathcal{O}_X(\Theta) \otimes \tilde{\pi}_2^* \mathcal{O}_X(\Theta) \otimes \rho^* \omega^{-1},$$

where  $\omega = p_*(\omega_{X/B})^*$ ; note that when  $X$  is a Calabi-Yau threefold or a K3 elliptic surface, one has  $\omega = \omega_B$ . We consider the relative integral functor

$$\Phi: D^b(X) \rightarrow D^b(X)$$

defined by  $\mathcal{P}$ , that is,  $\Phi(\mathcal{E}^\bullet) = \mathbf{R}\pi_{2*}(\pi_1^*(\mathcal{E}^\bullet) \otimes \mathcal{P})$ . By Theorem A.1.11 and Proposition A.1.16 such a functor is a Fourier-Mukai transform, that is, an autoequivalence of  $D_c^b(X)$ . The basic properties of integral functors tell us that the quasi-inverse of  $\Phi$  is the relative integral functor with kernel  $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^* \otimes \pi_2^* \omega_{X/B}[1]$ . By the invertibility of the Fourier-Mukai transform, for elliptic fibrations one gets a one-to-one correspondence between fiberwise torsion free semistable sheaves of rank  $n$  and degree 0 and spectral data  $(C, \mathcal{L})$ , where  $C \hookrightarrow X$  is a closed subscheme which is a finite cover of  $B$  and  $\mathcal{L}$  is a torsion free sheaf on  $C$  of rank one. To do that, we have to know the structure of the semistable sheaves of rank  $n$  and degree 0 on a fiber  $X_t$ . This structure was given by Atiyah [4] and Tu [73] in the smooth case and by Friedman, Morgan and Witten [26] for Weierstrass curves and vector bundles. Using the structure of the semistable sheaves of rank  $n$  and degree 0 on the fibers, one proves that a sheaf  $\mathcal{F}$  on  $X$  flat over  $B$  of rank  $n \geq 1$  and fiberwise of degree 0 is relatively torsion free and semistable if and only if it is  $\text{WIT}_1$  (that is its Fourier-Mukai transform is a complex concentrated on -1 degree) and the Fourier-Mukai transform  $\hat{\mathcal{F}}$  is flat over  $B$ . Moreover,  $\hat{\mathcal{F}}_t \simeq (\hat{\mathcal{F}})_t$  for every  $t \in B$ , and  $\hat{\mathcal{F}}_t$  is supported at a finite number of points. One then defines the spectral cover  $C(\mathcal{F})$  of  $\mathcal{F}$  as the modified support of  $\hat{\mathcal{F}}$ , (i.e., the closed subscheme of  $X$  defined by the 0-th Fitting ideal of  $\hat{\mathcal{F}}$ ); the reason for taking the modified support instead of the support is that the former is compatible with base change and the second may be not, i.e., the fiber over  $b$  of the support of  $\hat{\mathcal{F}}$  may fail to be equal to the support of  $\hat{\mathcal{F}}_b$ . The spectral cover gives a flat finite morphism of  $C(\mathcal{F}) \rightarrow B$  of degree  $n$ , and the restriction  $\mathcal{L}$  of  $\hat{\mathcal{F}}$  to the spectral cover

is a pure sheaf of dimension  $\dim B$  and polarized rank one. Conversely if  $i: C \hookrightarrow X$  is a flat finite covering of degree  $n$  of  $B$  and  $\mathcal{L}$  is a pure sheaf of dimension equal to  $\dim B$  and polarized rank one, then  $i_*\mathcal{L}$  is a  $\text{WIT}_0$  sheaf on  $X$  whose Fourier-Mukai transform  $\mathcal{F} = \widehat{\Phi}(i_*\mathcal{L})$  is relatively torsion free and semistable of rank  $n$  and degree 0.

This spectral construction is used to build  $\mu$ -stable sheaves on elliptic surfaces and on elliptic Calabi-Yau threefolds. Fix a polarization  $H_0$  on  $X$  which can be assumed to be of the form  $H_0 = \sigma(B) + p^*H_B$ , where  $H_B$  is a polarization on the base  $B$ . If  $X$  is an elliptic surface, there exists an integer number  $M_0$  depending only on the topological invariants of  $\mathcal{F}$  such that for any  $M \geq M_0$  the sheaf  $\mathcal{F}$  is  $\mu$ -stable with respect to  $H_M = H_0 + M\mathfrak{f}$  (with  $\mathfrak{f}$  being a general fiber) if and only if  $\mathcal{L}$  is  $\mu$ -stable with respect to the restriction of  $H_M$  as a sheaf on the spectral cover  $C(\mathcal{F})$  [35, 5]. In particular, when  $C$  is integral,  $\mathcal{L}$  is always stable and thus there exists an effective bound  $M_0$  such that for every  $M \geq M_0$  and every line bundle  $\mathcal{L}$  on  $C$ , the sheaf  $\mathcal{F}$  constructed out spectral data  $(C, \mathcal{L})$  is a  $\mu$ -stable vector bundle with respect to  $H_M$ ; this generalizes Friedman-Morgan-Witten's spectral construction to the case of non integral spectral covers. In case of Calabi-Yau threefolds it is still true that given a spectral sheaf  $\mathcal{F}$ , there exists an integer  $M_0$  which depends on  $\mathcal{F}$ , such that for any  $M \geq M_0$  the sheaf  $\mathcal{F}$  is  $\mu$ -stable with respect to  $H_M = H_0 + Mp^*H_B$  if and only if  $\mathcal{L}$  is  $\mu$ -stable on the spectral cover  $C(\mathcal{F})$  with respect to  $H_M \cap C(\mathcal{F})$ . As in the case of surfaces, when the spectral cover is irreducible and reduced and  $\mathcal{L}$  is a line bundle on  $C(\mathcal{F})$ , the latter stability condition is automatically fulfilled, and then  $\mathcal{F}$  is a stable vector bundle with respect to  $H_M$  for  $M \geq M_0$ . In contrast with the elliptic surface case, it is not known if there is an effective bound for  $M_0$ , that is, whether  $M_0$  depends only on the topological invariants of  $\mathcal{F}$ .

Note that whenever a sheaf  $\mathcal{F}$  is stable on the generic fiber, then it is also stable with respect to  $H_M$  for  $M \gg 0$  [13, Lemma 2.1]. However we cannot apply this result to spectral sheaves because they are only semistable on the fibers; due to this fact the proof of stability is more difficult and involved.

Since some elliptic fibrations also admit a K3 fibrations it is natural to ask if stable sheaves can be also constructed by using a similar technique, taking the K3

fibration structure into account. In this case the role of Jacobian variety is played by certain moduli space. Let  $p: X \rightarrow B$  be a K3 fibered threefold and consider  $Y$  a component of the relative moduli space of stable sheaves on the fibers of  $p$ , which is a fine moduli space, so that there is a universal sheaf  $\mathcal{P}$  on  $Y \times X$ . If, in addition,  $X$  and  $Y$  have the same dimension and  $\hat{p}: Y \rightarrow B$  is equidimensional, Bridgeland and Maciocia [13] proved that  $Y$  is a non-singular projective variety,  $q: Y \rightarrow B$  is a K3 fibered threefold and the integral functor  $\mathcal{S}: D^b(Y) \rightarrow D^b(X)$  with kernel  $\mathcal{P}$  is an equivalence of derived categories, that is, a Fourier-Mukai transform. We construct torsion free sheaves on a K3 fibration  $X$  which are  $\mu$ -stable with respect to some appropriate polarization. In analogy to the elliptic fibration set-up, we consider a  $n$ -fold cover  $C$  (the *spectral cover*) over  $B$  and prove that whenever  $C$  is integral and  $\mathcal{L}$  a line bundle over  $C$ , then the Fourier-Mukai transform of  $\mathcal{L}$  leads to a single torsion free sheaf  $\hat{\mathcal{E}}$  (the *spectral sheaf*) on  $X$ . We prove that  $\hat{\mathcal{E}}$  is  $\mu$ -stable with respect to  $H + M\mathfrak{f}$  with  $M > 0$  and  $H$  a fixed ample divisor on  $X$  and  $\mathfrak{f}$  the class of the fiber of  $p$  (Theorem A.4.13). Furthermore, under some conditions, the cover  $C$  can be chosen such that the spectral sheaf  $\hat{\mathcal{E}}$  is locally free. If we restrict  $X$  to be a K3 fibered Calabi-Yau threefold, that is,  $X$  has a trivial canonical bundle, one can compute topological invariants of  $\hat{\mathcal{E}}$ .

We also prove the existence of an effective bound  $M_0$  for  $M$  which depends only on  $X, H, c_1(\hat{\mathcal{E}})$  and  $c_2(\hat{\mathcal{E}})$  (Theorem 4.25). In case of elliptic fibrations a similar bound has been proven for elliptic surfaces (cf. Theorem 7.4, [26]) and it was expected that such a bound exists also in higher dimensions. As a result we show in Theorem A.4.20) that the Fourier-Mukai transform induces an embedding of the relative Jacobian of line bundles of degree  $\delta$  on a curve (in the moduli space of curves  $\mathcal{M}([C], g)$  of arithmetic genus  $g$  in the cohomology class  $[C]$ ) into the moduli space of sheaves on  $X$  with Chern classes  $rn, c_1, ch_2, ch_3$ . In particular, this makes the moduli space of  $H_{M_0}$ -stable spectral sheaves with Chern classes  $rn, c_1, ch_2, ch_3$  into a generic torus fibration over the moduli space  $\mathcal{M}([C], g)$ .

## Conventions

By a scheme we understand a separated scheme of finite type over an algebraically closed field  $\mathbb{k}$  of characteristic zero.

By a point we always mean a closed point. As it is usual, if  $x \in X$  is a point,  $\mathcal{O}_x$  denotes the skyscraper sheaf of length 1 at  $x$ , that is, the structure sheaf of  $x$  as a closed subscheme of  $X$ , while the stalk of  $\mathcal{O}_X$  at  $x$  is denoted  $\mathcal{O}_{X,x}$ .

By a Gorenstein or a Cohen-Macaulay morphism, we understand a *flat* morphism of schemes whose fibers are respectively Gorenstein or Cohen-Macaulay.

For any scheme  $X$  we denote by  $D(X)$  the derived category of complexes of  $\mathcal{O}_X$ -modules with quasi-coherent cohomology sheaves. Analogously  $D^+(X)$ ,  $D^-(X)$  and  $D^b(X)$  denote the derived categories of complexes which are respectively bounded below, bounded above and bounded on both sides, and have quasi-coherent cohomology sheaves. The subscript  $c$  will refer to the corresponding subcategories of complexes with coherent cohomology sheaves.

By a Calabi-Yau threefold we understand a smooth projective variety of dimension 3 with trivial canonical bundle.

## A.1. Fourier-Mukai transforms

To begin we give a short review of some basic features of the theory of integral functors and Fourier-Mukai transforms. For further details we refer [37, 5].

Let  $X$  and  $Y$  be proper schemes and we denote the two projections of the direct product  $X \times Y$  to  $X$  and  $Y$  by  $\pi_X$  and  $\pi_Y$ .

Any object  $\mathcal{K}^\bullet$  of  $D^-(X \times Y)$  defines a *integral functor*:

$$\begin{aligned} \Phi_{Y \rightarrow X}^{\mathcal{K}^\bullet} : D^-(Y) &\rightarrow D^-(X) \\ \mathcal{E}^\bullet &\mapsto \Phi_{Y \rightarrow X}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{E}^\bullet) = \mathbf{R}\pi_{X,*}(\pi_Y^*(\mathcal{E}^\bullet) \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \mathcal{K}^\bullet), \end{aligned}$$

We say that  $\mathcal{K}^\bullet$  is the *kernel* of the integral functor.

An important feature of integral functors is that they are exact as functors between triangulated categories because they are compositions of three exact functors. In particular, for any exact sequence of sheaves on  $X$

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

we obtain an exact sequence

$$\dots \rightarrow \Phi^{i-1}(\mathcal{G}) \rightarrow \Phi^i(\mathcal{E}) \rightarrow \Phi^i(\mathcal{F}) \rightarrow \Phi^i(\mathcal{G}) \rightarrow \dots$$

where  $\Phi^i(\mathcal{F})$  denotes the  $i$ -th cohomology sheaf, that is  $\mathcal{H}^i(\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{F}))$ .

In order to determine whether an integral functor maps bounded complexes to bounded complexes, the following notion was introduced in [33].

**Definition A.1.1.** Let  $f: Z \rightarrow T$  be a morphism of schemes. An object  $\mathcal{E}^\bullet$  in  $D_c^b(Z)$  is said to be of *finite homological dimension over  $T$*  if  $\mathcal{E}^\bullet \otimes_{\mathbf{L}} \mathbf{L}f^* \mathcal{G}^\bullet$  is bounded for any  $\mathcal{G}^\bullet$  in  $D_c^b(T)$ .

**Proposition A.1.2.** Assume that  $X$  is a projective scheme and let  $\mathcal{K}^\bullet$  be an object in  $D_c^b(X \times Y)$ . The functor  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$  maps  $D_c^b(X)$  to  $D_c^b(Y)$  if and only if  $\mathcal{K}^\bullet$  has finite homological dimension over  $X$ .

*Proof.* Proposición 1.4. □

**Definition A.1.3.** An integral functor  $\Phi_{Y \rightarrow X}^{\mathcal{K}^\bullet}: D_c^b(Y) \rightarrow D_c^b(X)$  is called a *Fourier-Mukai functor* when it is an equivalence of categories. If in addition the kernel  $\mathcal{K}^\bullet$  reduces to a single sheaf, the functor is said to be a *Fourier-Mukai transform*.

One of the first reasons that reveal the importance of these functors is the following representability result due to Orlov [62, Theorem 2.2].

**Theorem A.1.4.** Let  $X$  and  $Y$  be smooth projective varieties over an algebraically closed field. Any fully faithful exact functor  $F: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(Y)$  is an integral functor.



Since any equivalence, at least in a non-singular context, between derived categories is a Fourier-Mukai functor it looks like reasonable to have a characterization of them by means of their kernels. Such a characterization was given by Bondal and Orlov [8] and Bridgeland [11]

**Theorem A.1.5.** *Let  $X$  and  $Y$  projective smooth varieties over an algebraically closed field of characteristic zero, and let  $\mathcal{K}^\bullet$  be an object of  $D_c^b(X \times Y)$ . The integral functor  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$  is fully faithful if and only if  $\mathcal{K}^\bullet$  is strongly simple over  $X$ , that is to say if and only if  $\mathcal{K}^\bullet$  satisfies the following conditions:*

1.  $\text{Hom}^i(\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{O}_{x_1}), \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{O}_{x_2})) = 0$ , unless  $x_1 = x_2$  and  $0 \leq i \leq \dim X$ .
2.  $\text{Hom}(\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{O}_x), \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{O}_x)) = \mathbb{k}$ , for every point  $x \in X$ .

Moreover,  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$  is a Fourier-Mukai functor, that is, an equivalence if and only if it is fully faithful and  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{O}_x) \simeq \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{O}_x) \otimes \omega_Y$ , for every point  $x \in X$ .

To extend this result to singular schemes it is not an easy task. Note, for instance, that  $\mathcal{O}_x$  may fail to be of finite homological dimension, for a singular point  $x \in X$ , and one may have an infinite number of non zero  $\text{Ext}^i(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x)$ . By considering  $\mathcal{O}_{Z_x}$ , where  $Z_x$  is a locally complete intersection zero cycle supported on  $x$ , instead of  $\mathcal{O}_x$  Hernández Ruipérez, López Martín and Sancho de Salas extend the above result to Gorenstein [33] and Cohen-Macaulay [34] schemes. By using the Koszul complex theory Sancho de Salas [64] gives a criterion for an integral functor to be fully faithful for any proper scheme in arbitrary characteristic.

The existence of a Fourier-Mukai functor between the derived categories of two schemes has the following geometric consequences.

**Theorem A.1.6.** *Let  $X$  and  $Y$  be two projective schemes and let  $\mathcal{K}^\bullet$  be an object in  $D_c^b(X \times Y)$  such that the integral functor  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(Y)$  is Fourier-Mukai functor. Then:*

1.  $\mathcal{K}^\bullet$  is of finite homological dimension over both factors  $X$  and  $Y$ .

2. The right adjoint to  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$  is a quasi-inverse integral functor to  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$ , whose kernel is  $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X \times Y}}^\bullet(\mathcal{K}^\bullet, \pi_Y^! \mathcal{O}_Y)$ .
3. If  $X$  is equidimensional and Cohen-Macaulay and  $Y$  is reduced, then  $Y$  is also equidimensional and  $\dim Y = \dim X$ .
4. If  $X$  is equidimensional and Cohen-Macaulay and  $Y$  is equidimensional with  $\dim Y = \dim X$ , then  $Y$  is Cohen-Macaulay. Moreover if  $X$  is Gorenstein, then  $Y$  is also Gorenstein. In this case,  $\omega_X$  is trivial if and only if  $\omega_Y$  is trivial.
5. If  $X$  is smooth and  $Y$  is Cohen-Macaulay, then  $Y$  is smooth as well.

### A.1.1. Relative Fourier-Mukai transforms

Let  $p: X \rightarrow B$  and  $q: Y \rightarrow B$  be proper morphisms. We denote by  $\pi_X, \pi_Y$  the projections of the fibre product  $X \times_B Y$  onto its factors and by  $\rho = p \circ \pi_X = q \circ \pi_Y$  the projection of  $X \times_B Y$  onto the base  $B$ . We have the diagram

$$\begin{array}{ccc}
 & X \times_B Y & \\
 \pi_X \swarrow & & \searrow \pi_Y \\
 X & & Y \\
 p \searrow & & \swarrow q \\
 & B & 
 \end{array}$$

(The diagram shows a diamond shape with  $X \times_B Y$  at the top,  $X$  on the left,  $Y$  on the right, and  $B$  at the bottom. Arrows point from  $X \times_B Y$  to  $X$  ( $\pi_X$ ),  $Y$  ( $\pi_Y$ ), and  $B$  ( $\rho$ ). Arrows also point from  $X$  to  $B$  ( $p$ ) and from  $Y$  to  $B$  ( $q$ ).

Let  $\mathcal{K}^\bullet$  be an object in  $D^-(X \times_B Y)$ , the *relative integral functor* defined by  $\mathcal{K}^\bullet$  is the functor  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}: D^-(X) \rightarrow D^-(Y)$  given by

$$\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}(\mathcal{E}^\bullet) = \mathbf{R}\pi_{Y*}(\mathbf{L}\pi_X^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{K}^\bullet).$$

Note that any relative integral functor with can be regarded as an absolute integral functor. One just considers the immersion  $j: X \times_B Y \hookrightarrow X \times Y$  and then  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$  coincides with the absolute integral functor with kernel  $j_* \mathcal{K}^\bullet$ .

We assume that  $X \rightarrow B$  is locally projective and let  $\mathcal{K}^\bullet$  be an object in  $D_c^b(X \times_B Y)$ . Then  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$  maps  $D_c^b(X)$  to  $D_c^b(Y)$  if and only if  $\mathcal{K}^\bullet$  has finite homological dimension over  $X$ .

As we shall see Fourier-Mukai transforms induce, under some assumptions, isomorphisms between certain moduli spaces. In this way we need to know when the Fourier-Mukai transform maps sheaves to sheaves, up to shift.

**Definition A.1.7.** Given an integral functor  $\Phi = \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet}$ , an object  $\mathcal{E}^\bullet$  on  $D^-(X)$  is said to be  $\text{WIT}_i\text{-}\Phi$ , if the  $j$ -th cohomology sheaf  $\Phi^j(\mathcal{E}^\bullet) = 0$  for all  $j \neq i$ . Equivalently  $\mathcal{E}^\bullet$  is  $\text{WIT}_i\text{-}\Phi$  if there is a sheaf  $\mathcal{G}$  on  $X$  such that  $\Phi(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{G}[-i]$ . We shall write  $\widehat{\mathcal{E}}^\bullet = \mathcal{G}$  and  $\widehat{\mathcal{E}}^\bullet$  is called the Fourier-Mukai transform of  $\mathcal{E}^\bullet$ .

If  $\widehat{\Phi}: D_c^b(Y) \rightarrow D_c^b(X)$  denotes the quasi-inverse of a Fourier-Mukai functor  $\Phi$ , then we have an isomorphism  $\widehat{\Phi}(\Phi(\mathcal{E}^\bullet)) \simeq \mathcal{E}^\bullet$ , in the derived category. When  $\mathcal{E}^\bullet$  is a sheaf  $\mathcal{E}$  in degree zero the above isomorphism and the Grothendieck spectral sequence guarantee the existence of the following convergent spectral sequence

$$E_2^{p,q} = \widehat{\Phi}^p(\Phi^q(\mathcal{E})) \implies \begin{cases} \mathcal{E} & \text{if } p+q=0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

As a consequence one has

**Proposition A.1.8.** *If  $\mathcal{E}$  is  $\text{WIT}_i\text{-}\Phi$ , then  $\widehat{\mathcal{E}}$  is  $\text{WIT}_{-i}\text{-}\widehat{\Phi}$ . Moreover  $\widehat{\widehat{\mathcal{E}}} \simeq \mathcal{E}$ .*

### A.1.2. Base change compatibility

In order to apply change base formula we shall assume from now on that  $p: X \rightarrow B$  and  $q: Y \rightarrow B$  are flat morphisms. Note that it is not a strong restriction for our interest because we want to apply this theory to fibered schemes, which will always be supposed to be flat morphisms. As we shall show Fourier-Mukai transforms behave well with respect to base change, which let us to induce morphisms between moduli spaces.

Let us fix some notation. Let  $f: T \rightarrow B$  be a morphism, for any morphism  $g: Z \rightarrow B$  we denote by  $g_T: Z_T \rightarrow T$  and  $f_T: Z_T \rightarrow Z$  the induced morphisms, where  $Z_T = Z \times_B T$ .  $\Phi_T$  denotes the integral functor

$$\Phi_T(\mathcal{E}^\bullet) = \mathbf{R}\pi_{Y_T*}(\mathbf{L}\pi_{X_T}^* \mathcal{E}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}} \mathcal{K}_T)$$

defined by  $\mathcal{K}_T^\bullet = \mathbf{L}f_{X \times_B Y}^* \mathcal{K}^\bullet$ , which maps  $D^-(X_T)$  to  $D^-(Y_T)$ . In particular if  $T = \{t\}$  is a point of  $B$ , then  $X_t$  and  $Y_t$  denote, respectively, the fiber of  $p$  and  $q$  over this point.  $\Phi_t: D^-(X_t) \rightarrow D^-(Y_t)$  denotes the integral functor define by  $\mathcal{K}_t^\bullet = \mathbf{L}j_t^* \mathcal{K}^\bullet$ , where  $j_t: X_t \times Y_t \hookrightarrow X \times_B Y$  is the fiber of  $\rho$  over  $t$ . If  $\mathcal{E}$  is a sheaf on  $X$ , then its restriction  $j_t^* \mathcal{E}$  to the fibre  $j_t: X_t \hookrightarrow X$  is denoted by  $\mathcal{E}_t$ . Under above flatness condition the following result is a straightforward base change computation.

**Proposition A.1.9.** *For any object  $\mathcal{E}^\bullet$  in  $D^-(X)$  there is a functorial isomorphism*

$$\mathbf{L}f_Y^* \Phi(\mathcal{E}^\bullet) \simeq \Phi_S(\mathbf{L}f_X^* \mathcal{E}^\bullet)$$

in the derived category of  $Y_T$ .

If the kernel  $\mathcal{K}^\bullet$  is of finite homological dimension over  $X$ , then so is  $\mathcal{K}_T^\bullet$  and therefore  $\Phi_T$  maps  $D_c^b(X_T)$  to  $D_c^b(Y_T)$ .

Base change compatibility means that if we think of an object  $\mathcal{E}^\bullet$  in  $D_c^b(X_T)$  as a family of objects  $\mathbf{L}j_t^* \mathcal{E}^\bullet$  in  $D_c^b(X_t)$ , then  $\Phi_T(\mathcal{E}^\bullet)$  is a family of objects  $\Phi_t(\mathbf{L}j_t^* \mathcal{E}^\bullet)$ , that is,

$$\mathbf{L}j_t^* \Phi_T(\mathcal{E}^\bullet) \simeq \Phi_t(\mathbf{L}j_t^* \mathcal{E}^\bullet). \quad (\text{A.2})$$

We are interested in transforming a complex that reduces to a single sheaf  $\mathcal{E}$  which is supposed to be flat over  $B$ . Note that  $\Phi^i(\mathcal{E}) = 0$  for  $i > \dim X_t$

**Corollary A.1.10.** *Let  $\mathcal{E}$  be a sheaf on  $X$  and let  $n$  be the dimension of the fibers  $X_t$  of  $p: X \rightarrow B$ . The functor  $\Phi^n$  is compatible with base change for sheaves, that is to say for every point  $t \in B$  we have*

$$\Phi^n(\mathcal{E})_t \simeq \Phi_t^n(\mathcal{E}_t).$$

Moreover if  $\mathcal{E}$  is flat over  $B$  we have

1. For every point  $t \in B$  there exists the spectral sequence

$$E_2^{-p,q}(t) = \mathcal{T}or_p^{\mathcal{O}_B}(\Phi^q(\mathcal{E}), \mathcal{O}_t) \implies E_\infty^{q-p}(t) = \Phi_t^{q-p}(\mathcal{E}_t).$$

2. If  $\mathcal{E}$  is  $WIT_i$ - $\Phi$ , then for every point  $t \in B$  there are isomorphisms of sheaves over  $X_t$

$$\mathrm{Tor}_j^{\mathcal{O}_B}(\widehat{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_t) \simeq \Phi_t^{i-j}(\mathcal{E}_t) \quad j \leq i.$$

3. The sheaf  $\mathcal{E}_t$  on  $X_t$  is  $WIT_i$ - $\Phi_t$  for every  $t \in B$  if and only if  $\mathcal{E}$  is  $WIT_i$  and  $\widehat{\mathcal{E}}$  is flat over  $B$ . In such a case  $(\widehat{\mathcal{E}})_t \simeq \widehat{\mathcal{E}}_t$ .

*Proof.* Corollary 1.17. □

The relationship between relative Fourier-Mukai transforms and Fourier-Mukai transforms fiberwise have been studied by Hernández Ruipérez, López Martín and Sancho de Salas [34, Proposition 2.15].

**Theorem A.1.11.** *Let  $X \rightarrow B$  be a locally projective morphism and let  $\mathcal{K}^\bullet$  be an object in  $D_c^b(X \times_B Y)$  of finite homological dimension over both  $X$  and  $Y$ . The relative integral functor  $\Phi = \Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet} : D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(Y)$  is an equivalence if and only if  $\Phi_t : D_c^b(X_t) \rightarrow D_c^b(Y_t)$  is an equivalence, for every point  $t \in B$ .*

As a straightforward consequence we obtain the following useful result in order to produce morphism between moduli spaces.

**Corollary A.1.12.** *Let  $X \rightarrow B$  be a locally projective morphism and let  $\mathcal{K}^\bullet$  be an object in  $D_c^b(X \times_B Y)$  such that the relative integral functor  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{K}^\bullet} : D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(Y)$  is an equivalence of categories. Then, for every morphism  $T \rightarrow B$  the relative integral functor  $\Phi_{X_T \rightarrow Y_T}^{\mathcal{K}^\bullet} : D_c^b(X_T) \rightarrow D_c^b(Y_T)$  is an equivalence of categories.*

### A.1.3. The ideal sheaf of the diagonal

In this subsection we analyze the Fourier-Mukai transform defined by the ideal sheaf of the diagonal immersion, which will be used throughout this work.

We recall the definition of *spherical object* introduced by Seidel and Thomas [65]

**Definition A.1.13.** An object  $\mathcal{E}^\bullet$  in  $D_c^b(X)$  is called *spherical* if

1.  $\mathrm{Hom}^*(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)$  and  $\mathrm{Hom}^*(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet)$  are finite dimensional for any  $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(X)$
2.  $\mathrm{Hom}^i(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet) = \begin{cases} \mathbb{k} & \text{if } i = 0, \dim X \\ 0 & \text{if } i \neq 0, \dim X \end{cases}$
3. There is an isomorphism  $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \simeq \mathrm{Hom}^n(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet)^\vee$  for all object  $\mathcal{F}^\bullet \in D_c^b(X)$ .

Let  $\mathcal{E}^\bullet$  be an object of  $D_c^b(X)$  such that for any  $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(X)$ , both  $\mathrm{Hom}^*(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)$  and  $\mathrm{Hom}^*(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet)$  have finite total dimension over  $\mathbb{k}$ . The *twist functor* along  $\mathcal{E}^\bullet$  is by definition the functor  $T_{\mathcal{E}^\bullet}: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(X)$  given by

$$T_{\mathcal{E}^\bullet}(\mathcal{F}^\bullet) = \mathrm{Cone}(\mathrm{Hom}^*(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \otimes \mathcal{E}^\bullet \xrightarrow{ev} \mathcal{F}^\bullet)$$

where  $ev$  is the obvious evaluation map.

The importance of spherical objects is justified by the following result ([65, Proposition 2.10]).

**Theorem A.1.14.** *Let  $\mathcal{E}^\bullet$  be a spherical object, then the twist functor  $T_{\mathcal{E}^\bullet}$  is an equivalence of categories.*

The twist functor can be described as a Fourier-Mukai functor in the following way. We consider the diagonal immersion  $\delta: X \hookrightarrow X \times X$ . Using the cone construction, one associates to any object  $\mathcal{E}^\bullet$  the following object in the derived category  $D_c^b(X \times X)$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{E}^\bullet} := \mathrm{Cone}(\pi_1^* \mathcal{E}^{\bullet\vee} \otimes \pi_2^* \mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta).$$

In other words  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}^\bullet}$  is an object that completes the morphism  $\pi_1^* \mathcal{E}^{\bullet\vee} \otimes \pi_2^* \mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta$  to a distinguished triangle

$$\mathcal{I}_{\mathcal{E}^\bullet}[-1] \longrightarrow \pi_1^* \mathcal{E}^{\bullet\vee} \otimes \pi_2^* \mathcal{E}^\bullet \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta.$$

Since the cone construction is not functorial the object  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}^\bullet}$  exists, but it is defined only up to non-unique isomorphism.

**Proposition A.1.15.** *There exists a morphism of functors  $\Phi^{\mathcal{I}_{\mathcal{E}^\bullet}} \longrightarrow T_{\mathcal{E}^\bullet}$  which is an isomorphism if  $\mathcal{E}^\bullet$  has finite homological dimension.*

*Proof.* Proposición 1.24. □

We consider the integral functor

$$\Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{I}_\Delta} : D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(X)$$

defined by the ideal sheaf  $\mathcal{I}_\Delta$  of the diagonal immersion  $\delta: X \hookrightarrow X \times X$ . Taking in account the exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_\Delta \rightarrow \mathcal{O}_{X \times X} \rightarrow \mathcal{O}_\Delta \rightarrow 0$$

and the projection formula, one can easily see that  $\mathcal{O}_\Delta$  is of finite homological dimension over both factors of  $X \times X$  and therefore so is  $\mathcal{I}_\Delta$ . Then  $\Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{I}_\Delta}$  maps  $D_c^b(X)$  to  $D_c^b(X)$ . Furthermore by the very definition one has that  $\Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{I}_\Delta} = T_{\mathcal{O}_X}[-1]$ .

**Proposition A.1.16.** *Let  $X$  be a projective connected Gorenstein scheme of dimension  $n$ . If  $X$  has trivial dualizing sheaf and  $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$  for all  $i \neq 0$ ,  $\dim X$ , then the integral functor defined by  $\mathcal{I}_\Delta$  is a Fourier-Mukai transform.*

*Proof.* Proposición 1.25 □

## A.2. Moduli spaces

### A.2.1. Stable and semistable sheaves on a projective scheme

A notion of stability and semistability for pure sheaves on a projective scheme with respect to an ample divisor was given by Simpson in [68]. He also proved the existence of the corresponding moduli spaces.

Let  $X$  be a projective scheme of dimension  $n$  over an algebraically closed field  $\mathbb{k}$  and fix  $H$  a polarization, that is, an ample divisor on  $X$ . For any sheaf  $\mathcal{E}$  on  $X$ , denote  $\mathcal{E}(mH) = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(mH)$ .

**Definition A.2.1.** The *Hilbert polynomial* of  $\mathcal{E}$  with respect to  $H$  is defined to be the unique polynomial  $P_{\mathcal{E}}(m) \in \mathbb{Q}[m]$  given by

$$P_{\mathcal{E}}(m) = h^0(X, \mathcal{E}(mH)) \text{ for all } m \gg 0.$$

This polynomial has the form

$$P_{\mathcal{E}}(m) = \frac{r(\mathcal{E})}{s!} m^s + \frac{d(\mathcal{E})}{(s-1)!} m^{s-1} + \dots$$

where  $r(\mathcal{E}) \geq 0$  and  $d(\mathcal{E})$  are integer numbers and its degree  $s \leq n$  is equal to the dimension of the support of  $\mathcal{E}$ . We refer to the *dimension* of  $\mathcal{E}$  as the dimension of its support.

**Definition A.2.2.** The *reduced Hilbert polynomial* of  $\mathcal{E}$  is

$$p_{\mathcal{E}}(m) = \frac{1}{r(\mathcal{E})} P_{\mathcal{E}}(m),$$

and, the *Simpson slope* of  $\mathcal{E}$  is defined as

$$\mu_S(\mathcal{E}) = \frac{d(\mathcal{E})}{r(\mathcal{E})}.$$

If the sheaf  $\mathcal{E}$  is of finite homological dimension, so that its Chern classes are defined, we can apply the Riemann-Roch theorem for singular varieties [27][ Corollary 18.3.1] to prove that the Hilbert polynomial is given by

$$P_{\mathcal{E}}(m) = \int_X \text{ch}(\mathcal{E}) \cdot \text{ch}(\mathcal{O}_X(mH)) \cdot \text{Td}(X), \quad (\text{A.3})$$

where  $\text{Td}(X)$  is the Todd class of  $X$ . In particular we have

$$\begin{aligned} r(\mathcal{E}) &= \text{ch}_{n-s}(\mathcal{E}) \cdot H^s \\ d(\mathcal{E}) &= (\text{ch}_{n-s+1}(\mathcal{E}) + \text{ch}_{n-s}(\mathcal{E}) \cdot \text{td}_1(X)) \cdot H^{s-1} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

When  $X$  is integral and  $\mathcal{E}$  is a torsion free sheaf on it, one has classical notions of rank of  $\mathcal{E}$  and degree of  $\mathcal{E}$ . The Riemann-Roch theorem gives us what is the relation between the coefficients of the Hilbert polynomial and the usual rank and degree of  $\mathcal{E}$ , namely

$$\begin{aligned} r(\mathcal{E}) &= \text{deg}(X) \cdot \text{rk}(\mathcal{E}) \\ d(\mathcal{E}) &= \text{deg}(\mathcal{E}) + \text{rk}(\mathcal{E}) \cdot \chi(\mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

where  $\text{deg}(X)$  is the degree of  $X$  defined in terms of the polarization  $H$ . In this case, the Simpson slope agrees with the usual *slope*, defined as

$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{\text{deg}(\mathcal{E})}{\text{rk}(\mathcal{E})}. \quad (\text{A.5})$$



**Definition A.2.3.** A sheaf  $\mathcal{E}$  is *pure dimensional  $s$*  if the support of  $\mathcal{E}$  has dimension  $s$  and the support of any nonzero subsheaf  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$  has dimension  $s$  as well.

When  $X$  is integral of dimension  $n$ , pure dimensional  $n$  sheaves are precisely torsion-free sheaves. We can then adopt the following definition.

**Definition A.2.4.** A coherent sheaf  $\mathcal{E}$  on  $X$  is *torsion free* if it is pure dimensional  $n = \dim X$ , and it is a *torsion* sheaf if the dimension of its support is  $m < n$ .

We order the elements of  $\mathbb{Q}[m]$  lexicographically.

**Definition A.2.5.** For two polynomials  $P, Q \in \mathbb{Q}[m]$  we say that  $P \leq Q$  if  $P(m) \leq Q(m)$  for all  $m \gg 0$ .

**Definition A.2.6.** A sheaf  $\mathcal{E}$  on  $X$  is *semistable*, with respect to  $H$ , if it is pure dimensional and if for every subsheaf  $0 \neq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$  one has

$$p_{\mathcal{F}} \leq p_{\mathcal{E}}.$$

A sheaf  $\mathcal{E}$  on  $X$  is *stable* if the above inequality holds strictly for every non-zero subsheaf with  $r(\mathcal{F}) < r(\mathcal{E})$ .

**Definition A.2.7.** A sheaf  $\mathcal{E}$  on  $X$  is  $\mu_S$ -*semistable* with respect to  $H$ , if it is pure and for every proper subsheaf  $0 \neq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$  one has

$$\mu_S(\mathcal{F}) \leq \mu_S(\mathcal{E}).$$

A sheaf  $\mathcal{E}$  on  $X$  is  $\mu_S$ -*stable* if the above inequality holds strictly for every non-zero subsheaf with  $r(\mathcal{F}) < r(\mathcal{E})$ .

*Remark A.2.8.* 1. From now on, we shall agree that the Simpson slope of any 0-dimensional sheaf is equal to infinity. Then any 0-dimensional sheaf is  $\mu_S$ -semistable and it is  $\mu_S$ -stable if and only if it is isomorphic to  $\mathcal{O}_x$ , the structural sheaf of a point  $x \in X$

2. If  $X$  is integral and  $\mathcal{E}$  is a torsion free sheaf, then  $\mu$ -(semi)stability can be given in terms of its quotients.

- $\mathcal{E}$  is  $\mu$ -semistable if  $\mu(\mathcal{G}) \leq \mu(\mathcal{E})$  for every torsion free quotients  $\mathcal{G}$  of  $\mathcal{E}$ .
- $\mathcal{E}$  is  $\mu$ -stable if  $\mu(\mathcal{G}) < \mu(\mathcal{E})$  for every torsion free quotients  $\mathcal{G}$  of  $\mathcal{E}$  with  $\text{rk}(\mathcal{G}) < \text{rk}(\mathcal{E})$ .

△

Every pure dimensional  $s$  sheaf  $\mathcal{E}$  on  $X$  has a unique filtration

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_k = \mathcal{E}$$

called the *Harder-Narasimhan filtration*, such that for each  $1 \leq i \leq k$ , the factor  $\mathcal{F}_i = \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$  is semistable of dimension  $s$  and  $p_{\mathcal{F}_1} > \cdots > p_{\mathcal{F}_k}$ .

Every semistable sheaf  $\mathcal{E}$  on  $X$  has a filtration

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_k = \mathcal{E}$$

called a *Jordan-Hölder filtration* such that for each  $1 \leq i \leq k$ , the factor  $\mathcal{F}_i = \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$  is stable and  $p_{\mathcal{F}_i} = p_{\mathcal{E}}$ . Note that the sheaves  $\mathcal{E}_i$ , for  $i > 0$  are also semistable with  $p_{\mathcal{E}_i} = p_{\mathcal{E}}$ . This filtrations is not unique but it graded object  $G(\mathcal{E}) = \bigoplus_i \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$  does not depend on the choice of the filtration.

**Definition A.2.9.** Two semistable sheaves  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{E}'$  with the same Hilbert polynomial are called  $S$ -equivalent if  $G(\mathcal{E}) \simeq G(\mathcal{E}')$ .

## A.2.2. Moduli space of semistable sheaves

Let  $X \rightarrow B$  be a projective morphism with a fixed relative polarization  $\mathcal{H}$ .

**Definition A.2.10.** A sheaf  $\mathcal{E}$  on  $X$  is a stable (respectively semistable) sheaf on  $X/B$  with Hilbert polynomial  $P(m)$  if it is flat over  $B$  and for each  $t \in B$  the restriction  $\mathcal{E}_t$  is stable (respectively semistable) on  $X_t$  with Hilbert polynomial  $P(m)$ .

Consider the *moduli functor of semistable sheaves on  $X/B$*  which associates to any scheme  $T \rightarrow B$  the set

$$\mathbf{M}(X/B, P(m))(T/B) = \left[ \begin{array}{c} \text{Equivalence classes} \\ \text{of semistable sheaves on } X_T/T \\ \text{with Hilbert polynomial } P(m) \end{array} \right]$$

where  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{F}$  are equivalent if there exists a line bundle  $\mathcal{L}$  on  $T$  such that  $\mathcal{E} \simeq \mathcal{F} \otimes \pi_T^* \mathcal{L}$ .

**Definition A.2.11.** We say that  $\mathcal{M}(X/B, P(m)) \rightarrow B$  *co-represents* the moduli functor  $\mathbf{M}(X/B, P(m))$  if there is a morphism of functors

$$\phi: \mathbf{M}(X/B, P(m)) \rightarrow \mathrm{Hom}_B(\quad, \mathcal{M}(X/B, P(m)))$$

with the following universal property: if  $Z \rightarrow B$  is a  $B$ -scheme, for every morphism of functors  $\psi: \mathbf{M}(X/B, P(m)) \rightarrow \mathrm{Hom}_B(\quad, Z)$  there is a unique morphism of  $B$ -schemes  $g: \mathcal{M}(X/B, P(m)) \rightarrow Z$  such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}(X/B, P(m)) & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Hom}_B(\quad, \mathcal{M}(X/B, P(m))) \\ & \searrow \psi & \downarrow g \\ & & \mathrm{Hom}_B(\quad, Z) \end{array}$$

commutes.

We say that  $\mathcal{M}(X/B, P(m)) \rightarrow B$  is a *coarse moduli space* for  $\mathbf{M}(X/B, P(m))$  if it universally corepresents, that is if for every base change  $T \rightarrow B$  the fibre product  $T \times_B \mathcal{M}(X/B, P(m))$  corepresents  $\mathrm{Hom}_B(\quad, T) \times_{\mathrm{Hom}_B(\quad, B)} \mathbf{M}(X/B, P(m))$ .

By the very definition one can easily see that a coarse moduli space, if it exists, is unique up to isomorphisms.

The moduli space  $\mathcal{M}(X/B, P(m)) \rightarrow B$  is called *fine* if *represents* the functor  $\mathbf{M}(X/B, P(m))$ , that is, if  $\phi: \mathbf{M}(X/B, P(m)) \rightarrow \mathrm{Hom}_B(\quad, \mathcal{M}(X/B, P(m)))$  is an isomorphism of functors.

If the class of semistable sheaves on a fibre  $X_t$  with Hilbert polynomial  $P(m)$  is non-empty, one has the following existence result ([68, Theorem 1.21]).

**Theorem A.2.12.** 1. *There exists a coarse moduli  $\mathcal{M}(X/B, P(m)) \rightarrow B$  for the moduli functor  $\mathbf{M}(X/B, P(m))$  of  $\mu_S$ -semistable on  $X/B$  with Hilbert polynomial  $P(m)$ .*

2. *The morphism  $\mathcal{M}(X/B, P(m)) \rightarrow B$  is projective.*

3. *The closed points of  $\mathcal{M}(X/B, P(m)) \rightarrow B$  represent  $S$ -equivalence classes of  $\mu_S$ -semistable sheaves on the fibres of  $X \rightarrow B$  with Hilbert polynomial  $P(m)$ .*
4. *There exists an open subscheme  $\mathcal{M}^s(X/B, P(m)) \subseteq \mathcal{M}(X/B, P(m))$  whose closed points represent the isomorphism classes of stable sheaves.*
5. *Locally for the étale topology on  $\mathcal{M}^s(X/B, P(m))$ , there exists a universal sheaf  $\tilde{\mathcal{E}}$  on  $X \times_B \mathcal{M}^s(X/B, P(m)) \rightarrow \mathcal{M}^s(X/B, P(m))$ .*

### A.2.3. Fourier-Mukai transform between moduli spaces

Here we show integral functors as a useful tool to define in a natural way algebraic morphisms between moduli spaces.

Let  $X \rightarrow B$  and  $Y \rightarrow B$  be projective and flat morphisms and consider the relative integral functor  $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet} : D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(Y)$ . Let  $\mathbf{M}(X/B)$  be the functor associating any  $B$ -scheme  $T$  the set of equivalence classes sheaves on  $X \times_B T$  flat over  $T$  whose restrictions  $\mathcal{E}_t$  to the fibres  $X_t$  of  $X \times_B T \rightarrow T$  have Hilbert polynomial  $P$ . Consider  $\mathbf{M}_W(X/B)$  a subfunctor of  $\mathbf{M}(X/B, P)$  parameterizing  $\text{WIT}_i$ - $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$  sheaves, for a certain index  $i$ . By Corollary A.1.10 if  $\mathcal{E}$  is in  $\mathbf{M}_W(X/B)(T)$ , then  $\hat{\mathcal{E}} = \Phi_T^i(\mathcal{E})$  is a sheaf flat over  $T$ , so that the restrictions  $(\hat{\mathcal{E}})_t \simeq \hat{\mathcal{E}}_t$  have the same Hilbert polynomial  $\hat{P}$ . Therefore  $\Phi_T^i$  maps  $\mathbf{M}_W(X/B)(T)$  to  $\mathbf{M}(Y/B, \hat{P})(T)$ .

By compatibility of integral functor with base change,  $\Phi^i$  induces a morphism of functors

$$\Phi_M : \mathbf{M}_W(X/B) \rightarrow \mathbf{M}(Y/B, \hat{P}).$$

**Proposition A.2.13.** *Assume that  $\mathbf{M}_W(X/B)$  has a coarse moduli scheme  $\mathcal{M}_W(X/B)$ .*

1. *If there exists a subfunctor  $\mathbf{M}(Y/B) \subset \mathbf{M}(Y/B, \hat{P})$  containing the image of  $\Phi_M$  that is also coarsely representable by a moduli space  $\mathcal{M}(Y/B)$ , then the integral functor  $\Phi$  gives rise a morphism of schemes*

$$\Phi_M : \mathcal{M}_W(X/B) \rightarrow \mathcal{M}(Y/B).$$

2. If  $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$  is a Fourier-Mukai functor, then there exists a moduli scheme  $\mathcal{M}_W(Y/B)$  which is a coarse moduli space for the image functor  $\Phi(\mathbf{M}_W(X/B))$ , and  $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$  induces an isomorphism of  $B$ -schemes.

$$\Phi_M: \mathcal{M}_W(X/B) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}_W(Y/B).$$

Moreover  $\mathcal{M}_W(X/B)$  is a fine moduli scheme if and only if  $\mathcal{M}_W(Y/B)$  is a fine scheme.

*Proof.* Proposición 2.18. □

Assume that there are relative polarizations on  $X \rightarrow B$  and  $Y \rightarrow B$  and let  $\mathbf{M}(X/B, P)$  and  $\mathbf{M}(Y/B, \widehat{P})$  be the corresponding moduli functors of semistable sheaves. Furthermore we assume that all sheaves parametrized by  $\mathbf{M}(X/B, P)$  are  $\text{WIT}_i$ - $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$  and that their images  $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$  are semistables on  $Y/B$  as well. Then we have

**Corollary A.2.14.** 1.  $\Phi^i$  induces a morphism of  $B$ -schemes

$$\mathcal{M}(X/B, P) \rightarrow \mathcal{M}(Y/B, \widehat{P})$$

2. If  $\Phi^{\mathcal{K}^\bullet}$  is a Fourier-Mukai functor such that  $\Phi^i(\mathbf{M}(X/B, P)) = \mathbf{M}(Y/B, \widehat{P})$ , then the induced morphism between moduli spaces is an isomorphism

$$\mathcal{M}(X/B, P) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}(Y/B, \widehat{P}).$$

*Proof.* Corolario 2.20. □

### A.3. Moduli spaces of semistable sheaves on genus one singular curves

In this part we find some equivalences of the derived category of coherent sheaves on a Gorenstein genus one curve that preserve the (semi)-stability of pure dimensional sheaves. Using them we establish new identifications between certain Simpson moduli spaces of semistable sheaves on the curve. We prove similar results for the

relative semistable moduli spaces on an arbitrary genus one fibration with no conditions either on the base or on the total space. For a cycle  $I_N$  of projective lines we prove that the connected component of the moduli space that contains vector bundles of rank  $r$  is isomorphic to the  $r$ -th symmetric product of the rational curve with one node.

### A.3.1. Coherent sheaves on reducible curves

We collect some results about coherent sheaves on reducible curves. Let  $C$  be any projective connected and reduced curve over an algebraically closed field  $\mathbb{k}$ . Denote by  $C_1, \dots, C_N$  the irreducible components of  $C$  and by  $x_1, \dots, x_k$  the intersection points of  $C_1, \dots, C_N$ . Let  $\mathcal{E}$  a coherent sheaf on  $C$  and denote  $\mathcal{E}_{C_i} = (\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{C_i})/\text{torsion}$  its restriction to  $C_i$  modulo torsion. Let  $r_i = r_i(\mathcal{E})$  and  $d_i = d_i(\mathcal{E})$  be the rank and the degree of  $\mathcal{E}_{C_i}$ , in the usual sense.

**Definition A.3.1.** The *multirank* and *multidegree* of a coherent sheaf  $\mathcal{E}$  on  $C$  are the  $N$ -tuples  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (r_1, \dots, r_N)$  and  $\underline{d}(\mathcal{E}) = (d_1, \dots, d_N)$ .

**Lemma A.3.2.** For any pure dimension one sheaf  $\mathcal{E}$  on  $X$ , there is an exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{C_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_{C_N} \rightarrow T \rightarrow 0, \quad (\text{A.6})$$

where  $T$  is a torsion sheaf whose support is contained in the set  $\{x_1, \dots, x_k\}$ .

*Proof.* Lema 3.2. □

The following lemma, due to Seshadri, describes the stalk of a pure dimension one sheaf on  $C$  at those intersection points  $x_i$  which are ordinary double points.

**Proposition A.3.3.** Let  $\mathcal{E}$  be a pure dimension one sheaf on  $C$ . If  $x_i \in \{x_1, \dots, x_k\}$  is an ordinary point lying on  $C_i \cap C_{i+1}$ , then

$$\mathcal{E}_{x_i} \simeq \mathcal{O}_{C, x_i}^{a_1} \oplus \mathcal{O}_{C_i, x_i}^{b_i} \oplus \mathcal{O}_{C_{i+1}, x_i}^{b_{i+1}}$$

where  $a_i, b_i$  y  $b_{i+1}$  are the integer numbers determined by

$$\begin{aligned} a_i + b_i &= \mathrm{rk}(\mathcal{E}_{x_i} \oplus_{\mathcal{O}_{C,x_i}} \mathcal{O}_{C_i,x_i}) \\ a_i + b_{i-1} &= \mathrm{rk}(\mathcal{E}_{x_i} \oplus_{\mathcal{O}_{C,x_i}} \mathcal{O}_{C_{i+1},x_i}) \\ a_i + b_i + b_{i+1} &= \mathrm{rk}(\mathcal{E}_{x_i} \otimes \mathbb{k}). \end{aligned}$$

*Proof.* Proposición 3.3 □

As a straightforward consequence of Lemma A.3.2 one has

**Proposition A.3.4.** *Let  $\mathcal{E}$  be a locally free sheave of rank  $r$  on  $C$ , then  $\chi(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^N d_i(\mathcal{E}) + r\chi(\mathcal{O}_C)$ .*

*Proof.* Proposición 3.4 □

We fix a polinomial  $P(m) = rm + d \in \mathbb{Z}[m]$  and a polarization  $H$  on  $C$  of degree  $h$  and denote by  $h_i$  the degree of  $H$  on  $C_i$ .

As a particular case of Simpson's work (Teorema A.2.12), we have that if the class of  $\mu_S$ -semistable sheaves on  $C$  with Hilbert polynomial equal to  $P(m)$ , with respect to  $H$ , is non-empty, then there exists a coarse moduli space  $\mathcal{M}_C(r, d)$  which is a projective scheme over  $\mathbb{k}$ . Points of  $\mathcal{M}_C(r, d)$  correspond to  $S$ -equivalence classes of  $\mu_S$ -semistable sheaves with Hilbert polynomial  $P(m) = rm + d$ .

Since the Hilbert polynomial is additive, from the above exact sequence, (A.6), one obtains that

$$r = r_1 h_1 + \cdots + r_N h_N.$$

Hence, there is a natural decomposition

$$\mathcal{M}_C(r, d) = \coprod_{\underline{r} \in \mathbb{Z}^N} \mathcal{M}_C(\underline{r}, d) \tag{A.7}$$

where  $\mathcal{M}_C(\underline{r}, d)$  is the moduli space of those semistable sheaves  $\mathcal{E}$  on  $X$  of multirank  $\underline{r}$  and the union runs over all  $N$ -tuples  $\underline{r} = (r_1, \dots, r_N)$  of non-negative integers such that  $r = r_1 h_1 + \cdots + r_N h_N$ .

This decomposition becomes necessary in the analysis of some moduli spaces  $\mathcal{M}_C(r, d)$  because, if  $\Gamma$  is an equivalence of  $D_c^b(C)$  and  $\mathcal{E}$  is a WIT- $\Gamma$  sheaf, then it is not true in general that the coefficients of the Hilbert polynomial of  $\Gamma(\mathcal{E})$  are linear functions of the coefficients of the Hilbert polynomial of  $\mathcal{E}$ . This means that the action of an arbitrary equivalence of  $D_c^b(C)$  does not send all connected components of the moduli space  $\mathcal{M}_C(r, d)$  into the same moduli space  $\mathcal{M}_C(r', d')$ . Here we have an example of this fact.

*Example A.3.5.* Let  $C$  be a curve of type  $I_2$ , that is, two rational curves  $C_1$  and  $C_2$  meeting transversally at two points with a polarization  $H$  such that  $h_1 = h_2 = 1$  (Figure 3.9). Let  $\mathcal{L}$  be a line bundle on  $c$  with multidegree  $\underline{d}(\mathcal{L}) = (d_1, d_2)$  with  $d_1 \neq d_2$  and take  $\Gamma = \Phi_{X \rightarrow X}^{\delta_* \mathcal{L}}$  the equivalence defined by twisting by  $\mathcal{L}$ . If  $\mathcal{E}$  is a coherent sheaf on  $X$  with Hilbert polynomial  $P(m) = rm + d$  and multirank  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (r_1, r_2)$ , the Hilbert polynomial of  $\Gamma(\mathcal{E})$  is equal to  $rs + d + (r_1 d_1 + r_2 d_2)$ . Thus, the connected component  $\mathcal{M}_C((r, 0), d) \subseteq \mathcal{M}_C(r, d)$  is sent by  $\Gamma$  into the moduli space  $\mathcal{M}_C(r, d + r d_1)$  while the component  $\mathcal{M}_C((0, r), d)$  is mapped into  $\mathcal{M}_C(r, d + r d_2)$ .

The following proposition provides better invariants. Let  $K(D_c^b(C))$  be the Grothendieck group of the triangulated category  $D_c^b(C)$  (cf. [30]), one has  $K(D_c^b(C)) \simeq K(\text{Coh}(C))$  and this group is usually denoted  $K_\bullet(C)$ .

**Proposition A.3.6.** *Let  $C$  be any reduced connected and projective curve. If every irreducible component of  $C$  is isomorphic to  $\mathbb{P}^1$  the projective line, then there is an isomorphism  $K_\bullet(C) \simeq \mathbb{Z}^{N+1}$  where  $N$  is the number of irreducible components of  $X$ . Moreover the above isomorphism is defined by sending the class of any coherent sheaf  $[\mathcal{E}]$  in  $K_\bullet(C)$  to  $(\underline{r}(\mathcal{E}), \chi(\mathcal{E})) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ .*

*Proof.* Proposición 3.6. □

All the functions defining the isomorphism of Proposition A.3.6, that is, the ranks  $r_i$  and the Euler characteristic  $\chi$ , are additive on exact triangles of  $D_c^b(C)$ . Hence, any equivalence  $\Gamma$  of  $D_c^b(X)$  induces a group automorphism  $\gamma$  of  $K_\bullet(C)$ , such that there



is a commutative square

$$\begin{array}{ccc} D_c^b(C) & \xrightarrow{\Gamma} & D_c^b(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_\bullet(C) & \xrightarrow{\gamma} & K_\bullet(C) \end{array}$$

where the vertical arrows are the natural ones.

As we have already seen (Proposition A.3.4) if  $\mathcal{E}$  is a vector bundle on  $X$ , then  $\sum_{i=1}^N d_i + r\chi(\mathcal{O}_C) = d$ . Thus, the category of vector bundles on  $C$  of rank  $r$  and degree  $d$  (whose Hilbert polynomial is  $P(m) = rhm + d$ ) decomposes as

$$\mathrm{VB}_C(r, d) \simeq \coprod_{\underline{d} \in \mathbb{Z}^N} \mathrm{VB}_C(r, \underline{d}),$$

where now the union runs over all  $\underline{d} = (d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{Z}^N$  such that  $\sum_{i=1}^N d_i + r\chi(\mathcal{O}_C) = d$ . However, since for non-locally free sheaves the above equality may fail to hold true, (see Proposition A.3.33), there is not a similar decomposition for the moduli space  $\mathcal{M}_C(r, d)$ .

To finish this subsection, let us show how  $\mu_S$ -semistability behaves under direct and inverse images by Galois coverings of reducible curves. For non-singular projective and irreducible varieties, similar results were proved by Takemoto in [70].

**Lemma A.3.7.** *Let  $C$  be a projective connected and reduced curve whose irreducible components are smooth. Let  $H$  be a polarization on  $C$  and let  $f: \tilde{C} \rightarrow C$  be an étale Galois covering of degree  $n$  where  $\tilde{C}$  is also connected.*

1. *If  $\mathcal{E}$  is a torsion-free sheaf on  $C$  such that  $f^*\mathcal{E}$  is  $\mu_S$ -semistable with respect to  $f^*H$ , then  $\mathcal{E}$  is  $\mu_S$ -semistable with respect to  $H$ .*
2. *A torsion-free sheaf  $\mathcal{F}$  on  $\tilde{C}$  is  $\mu_S$ -semistable with respect to  $f^*H$  if and only if  $f_*(\mathcal{F})$  is  $\mu_S$ -semistable with respect to  $H$ .*

*Proof.* Lema 3.7. □

### A.3.2. Fourier-Mukai transforms preserving stability

If  $C$  is an irreducible curve of arithmetic genus one, the group of exact auto-equivalences of its derived category  $D_c^b(C)$  is described in [15]. As it happens for the smooth case, this group is generated by the trivial equivalences (twists by line bundles on  $C$ , automorphisms of  $C$  and the shift functor [1]) together with the Fourier-Mukai transform  $\Phi$  whose kernel is the ideal of the diagonal. Then, taking into account that on integral curves tensoring by line bundles preserves trivially the (semi)stability of sheaves, the fact that the non-trivial Fourier-Mukai functor  $\Phi$  transforms (semi)stable sheaves into (semi)stable sheaves (up to shift) and stable sheaves into stable ones (also up to shift) (cf. [5]) ensures that any auto-equivalence of the derived category  $D_c^b(C)$  preserves stability.

However, this is no longer true for non-irreducible curves. Actually, if  $C$  is a non-irreducible curve, there are examples of equivalences of  $D_c^b(C)$  that do not preserve semistability, and we can find examples of such equivalences among those of the most simple type, namely, among the equivalences  $\Phi_{C \rightarrow C}^{\delta_* \mathcal{L}}$  consisting of twisting by a line bundle  $\mathcal{L}$ .

*Example A.3.8.* Consider a curve  $C$  of type  $I_2$ , that is, two rational curves meeting transversally at two points (cf. Figure 3.9). Take a line bundle  $\mathcal{L}$  on  $C$  which has degree 2 in one irreducible component and degree  $-2$  in the other one. From Propositions 6.2 and 6.3 in [45],  $\mathcal{O}_C$  is a stable sheaf but  $\mathcal{L}$  is not even semistable. Then twisting by  $\mathcal{L}$  is a Fourier-Mukai transform which does not preserve semistability.

Thus, it is important to characterize the auto-equivalences of  $D_c^b(C)$  which preserve stability on a non-irreducible curve  $X$  of arithmetic genus 1. This seems to be a difficult task, and here we just provide non-trivial instances of such equivalences.

#### A non-trivial Fourier-Mukai transform on genus one curves

In what follows we suppose that  $C$  is a projective Gorenstein curve with arithmetic genus  $\dim H^1(C, \mathcal{O}_C) = 1$  such that its dualizing sheaf is trivial. We do not assume that  $C$  is a plane curve. Notice also that an irreducible curve of arithmetic

genus one has always trivial dualizing sheaf, but this is no longer true for reducible curves.

**Proposition A.3.9.** *Let  $\mathcal{I}_\Delta$  be the ideal sheaf of the diagonal immersion  $\delta: C \hookrightarrow C \times C$ . One has:*

1. *The ideal sheaf  $\mathcal{I}_\Delta$  is an object in  $D_c^b(C \times C)$  of finite homological dimension over both factors.*
2. *The functor  $\Phi = \Phi_{C \rightarrow C}^{\mathcal{I}_\Delta}: D_c^b(C) \rightarrow D_c^b(C)$  is an equivalence of categories.*
3. *The integral functor  $\widehat{\Phi} = \Phi_{C \rightarrow C}^{\mathcal{I}_\Delta^*}: D_c^b(C) \rightarrow D_c^b(C)$  where  $\mathcal{I}_\Delta^*$  is the dual sheaf is a shift of the quasi-inverse of  $\Phi$  with  $\widehat{\Phi} \circ \Phi \simeq [-1]$  and  $\Phi \circ \widehat{\Phi} \simeq [-1]$ .*

*Proof.* Proposición 3.11. □

Since  $\mathcal{I}_\Delta$  is flat over the first factor and the fibers of  $\pi_2$  are of dimension one, for any sheaf  $\mathcal{E}$  on  $X$  one has  $\Phi^j(\mathcal{E}) = 0$  unless  $0 \leq j \leq 1$ .

We now collect some well-known properties about WIT sheaves.

**Proposition A.3.10.** *The following results hold:*

1. *Let  $\mathcal{E}$  be a  $\text{WIT}_i$ - $\Phi$  sheaf on  $X$ . Then  $\widehat{\mathcal{E}}$  is a  $\text{WIT}_{1-i}$ - $\widehat{\Phi}$  sheaf on  $X$  and  $\widehat{\widehat{\mathcal{E}}} = \mathcal{E}$ .*
2. *There exists a Mukai spectral sequence*

$$E_2^{p,q} = \widehat{\Phi}^p(\Phi^q(\mathcal{E})) \implies \begin{cases} \mathcal{E} & \text{if } p + q = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

3. *For every sheaf  $\mathcal{E}$  on  $C$ , the sheaf  $\Phi^0(\mathcal{E})$  is  $\text{WIT}_1$ - $\widehat{\Phi}$ , while the sheaf  $\Phi^1(\mathcal{E})$  is  $\text{WIT}_0$ - $\widehat{\Phi}$ .*
4. *There exists a short exact sequence*

$$0 \longrightarrow \widehat{\Phi}^1(\Phi^0(\mathcal{E})) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \widehat{\Phi}^0(\Phi^1(\mathcal{E})) \longrightarrow 0.$$

*Proof.* Proposición 3.12. □

### Invariants of the transforms

Since the curve  $C$  may be a singular curve, we will work with the Hilbert polynomial of a sheaf instead of its Chern characters that might not be defined. The following proposition computes the Hilbert polynomial of the transform of  $\mathcal{E}$  by the equivalences  $\Phi$  and  $\widehat{\Phi}$  and by  $\Psi = \Phi_{C \rightarrow c}^{\delta_* \mathcal{O}_X(H)}$  and  $\widehat{\Psi} = \Phi_{C \rightarrow C}^{\delta_* \mathcal{O}_X(-H)}$ .

**Definition A.3.11.** Let  $\mathcal{F}^\bullet$  be a bounded complex, the Euler characteristic is defined to be the alternate sum

$$\chi(\mathcal{F}^\bullet) = \sum_i (-1)^i \chi(\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)).$$

and the Hilbert polynomial is by definition  $P_{\mathcal{F}^\bullet}(m) = \chi(\mathcal{F}^\bullet(mH))$ .

**Proposition A.3.12.** Let  $\mathcal{E}$  be a sheaf on  $C$  with Hilbert polynomial  $P(m) = rm + d$ . Then

1. The Hilbert polynomial of the complex  $\Phi(\mathcal{E})$  (resp.  $\widehat{\Phi}(\mathcal{E})$ ) is equal to  $(dh - r)m - d$  (resp.  $(dh + m)s + d$ ).
2. The Hilbert polynomial of the sheaf  $\Psi(\mathcal{E})$  (resp.  $\widehat{\Psi}(\mathcal{E})$ ) is equal to  $rm + d + r$  (resp.  $rm + d - r$ ).

*Proof.* Proposición 3.14. □

### Preservation of stability

In order to prove the preservation of stability under the equivalence of  $D_c^b(C)$  defined by the ideal of the diagonal  $\mathcal{I}_\Delta$ , we shall need a description of semistable sheaves  $\text{WIT}_i$  with respect to the Fourier-Mukai transforms  $\Phi$  and  $\widehat{\Phi}$ . As far as  $\Psi$  and  $\widehat{\Psi}$  are concerned it is obvious that any sheaf  $\mathcal{E}$  on  $X$  is  $\text{WIT}_0$  with respect to both transforms.

**Corollary A.3.13.** Let  $\mathcal{E}$  be a non-zero sheaf on  $C$ .

1. If  $\mathcal{E}$  is  $\text{WIT}_0$ - $\Phi$ , then  $\mu_S(\mathcal{E}) > 1/h$ .

2. If  $\mathcal{E}$  is  $WIT_1\text{-}\widehat{\Phi}$ , then  $\mu_S(\mathcal{E}) \leq 1/h$ .
3. If  $\mathcal{E}$  is  $WIT_0\text{-}\widehat{\Phi}$ , then  $\mu_S(\mathcal{E}) > -1/h$ .
4. If  $\mathcal{E}$  is  $WIT_1\text{-}\widehat{\Phi}$ , then  $\mu_S(\mathcal{E}) \leq -1/h$

*Proof.* Corolario 3.15. □

*Remark A.3.14.* The following easy properties will be used in the rest of the subsection:

1. Torsion sheaves on  $C$  are  $WIT_0$  with respect to both equivalences  $\Phi$  and  $\widehat{\Phi}$ .
2. If a sheaf  $\mathcal{E}$  is  $WIT_1$  with Hilbert polynomial  $P(m) = rm + d$ , then  $r \neq 0$ .

△

It is clear that twisting by the ample sheaf  $\mathcal{O}_C(H)$  trivially preserves stability, that is, the transform of a  $\mu_S$ -(semi)stable sheaf by the equivalences  $\Psi$  or  $\widehat{\Psi}$  is again  $\mu_S$ -(semi)stable (Proposition A.3.12). In this subsection we prove that the non-trivial Fourier-Mukai functors  $\Phi$  and  $\widehat{\Phi}$  preserve semistability as well.

**Proposition A.3.15.** *If  $\mathcal{E}$  is a  $\mu_S$ -semistable sheaf on  $C$ , then*

1.  $\mathcal{E}$  is  $WIT_0\text{-}\Phi$  if and only if  $\mu_S(\mathcal{E}) > 1/h$ .
2.  $\mathcal{E}$  is  $WIT_1\text{-}\Phi$  if and only if  $\mu_S(\mathcal{E}) \leq 1/h$ .

*Proof.* Proposición 3.17. □

There exists a similar result for  $\widehat{\Phi}$  whose proof is analogous.

**Proposition A.3.16.** *If  $\mathcal{E}$  is a  $\mu_S$ -semistable sheaf on  $C$ , then*

1.  $\mathcal{E}$  is  $WIT_0\text{-}\widehat{\Phi}$  if and only if  $\mu_S(\mathcal{E}) > -1/h$ .
2.  $\mathcal{E}$  is  $WIT_1\text{-}\widehat{\Phi}$  if and only if  $\mu_S(\mathcal{E}) \leq -1/h$ .

□

The following simple but useful result is known as the Parseval theorem (see for instance [52, Corollary 2.5] or [5, Proposition 1.34] for a proof).

**Proposition A.3.17.** *Let  $\Phi: D(X) \rightarrow D(Y)$  be an exact fully faithful functor,  $\mathcal{F}$  a  $WIT_i$ - $\Phi$  sheaf and  $\mathcal{G}$  a  $WIT_j$ - $\Phi$  sheaf on  $X$ . Then for all  $h$ , one has*

$$\mathrm{Ext}_X^h(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Ext}_Y^{h+i-j}(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathcal{G}})$$

*In particular if  $\mathcal{F}$  is a simple  $WIT$ - $\Phi$  sheaf, then the transform  $\widehat{\mathcal{F}}$  is also simple.  $\square$*

**Proposition A.3.18.** *Let  $\mathcal{E}$  be a simple (resp. indecomposable) semistable sheaf on  $C$ . Then the transform  $\widehat{\mathcal{E}}$  with respect to both  $\Phi$  and  $\widehat{\Phi}$  is also a simple (resp. indecomposable) sheaf.*

*Proof.* Proposición 3.20.  $\square$

*Remark A.3.19.* Take a line bundle  $\mathcal{L}$  on  $I_2$  which has degree 2 in one irreducible component and degree  $-2$  in the other one. As we have already said  $\mathcal{L}$  is not semistable. Thus, in this sort of curves there are sheaves which are simple but not semistable. On the other hand, a straightforward computation shows that both  $H^0(C, \mathcal{L})$  and  $H^1(C, \mathcal{L})$  are one dimensional vector spaces. Using Equations (3.5) and (3.6) we deduce that  $\Phi(\mathcal{L})$  is a complex with two nonzero cohomology sheaves. This proves that simple (unstable) sheaves on  $C$  may fail to be WIT.  $\triangle$

**Lemma A.3.20.** *Let  $\mathcal{E}$  be a sheaf on  $C$  with Hilbert polynomial  $P(m) = dhm + d$  and  $d > 0$ . Then  $\mathcal{E}$  is  $WIT_1$ - $\Phi$  if and only if  $\mathcal{E}$  is a torsion free  $\mu_S$ -semistable sheaf. Analogously if  $P(m) = dhm - d$  with  $d > 0$ , then  $\mathcal{E}$  is  $WIT_1$ - $\widehat{\Phi}$  if and only if  $\mathcal{E}$  is a torsion free  $\mu_S$ -semistable sheaf.*

*Proof.* Lema 3.22.  $\square$

As a consequence we have the following result.

**Proposition A.3.21.** *Let  $\mathcal{T}$  a non-zero torsion sheaf on  $C$ . Then the transform  $\widehat{\mathcal{T}}$  with respect to both equivalences  $\Phi$  and  $\widehat{\Phi}$  is a torsion-free  $\mu_S$ -semistable sheaf.*

*Proof.* Proposición 3.23.  $\square$

We state now the result that ensures the preservation of semistability under the Fourier-Mukai transforms  $\Phi$  and  $\widehat{\Phi}$ .

**Theorem A.3.22.** *Let  $C$  be a projective Gorenstein curve of arithmetic genus one and trivial dualizing sheaf. Fix a polarization  $H$  on  $C$ . Let  $\mathcal{E}$  be a pure dimensional sheaf on  $C$ . If  $\mathcal{E}$  is  $\mu_S$ -semistable with respect to  $H$ , then its transform  $\widehat{\mathcal{E}}$  with respect to both equivalences  $\Phi$  and  $\widehat{\Phi}$  is also  $\mu_S$ -semistable with respect to  $H$ .*

*Proof.* Teorema 3.24. □

The proof of the theorem implies the following consequences

**Corollary A.3.23.** *Let  $\widehat{\mathcal{E}}$  be the transform of a  $\mu_S$ -semistable sheaf  $\mathcal{E}$  with respect to  $\Phi$  (resp.  $\widehat{\Phi}$ ). The following holds*

1. *If  $\mathcal{E}$  is a torsion-free sheaf and  $\mu_S(\mathcal{E}) \neq 1/h$  (resp.  $-1/h$ ), then  $\widehat{\mathcal{E}}$  is also torsion-free.*
2. *If  $\mu_S(\mathcal{E}) \neq 1/h$  (resp.  $-1/h$ ) and  $\mathcal{E}$  is  $\mu_S$ -stable, then  $\widehat{\mathcal{E}}$  is  $\mu_S$ -stable as well.*
3. *If  $\mu_S(\mathcal{E}) = 1/h$  (resp.  $-1/h$ ), then  $\widehat{\mathcal{E}}$  is  $\mu_S$ -stable if and only if  $d = 1$ .*

□

*Remark A.3.24.* Note that if  $\mathcal{E}$  is semistable with  $\mu_S(\mathcal{E}) = 1/h$ ,  $\widehat{\mathcal{E}}$  is a torsion sheaf and, even when the sheaf  $\mathcal{E}$  is stable, we can only ensure the stability of  $\widehat{\mathcal{E}}$  for  $d = 1$ . When  $d > 1$ , if  $\mathcal{E}$  is indecomposable (for instance, if it is stable), the transform  $\widehat{\mathcal{E}}$  is a torsion sheaf and it is indecomposable by Proposition A.3.18; thus it is supported at a single point  $x \in C$ . If  $x$  is a smooth point, then  $\widehat{\mathcal{E}} \simeq \mathcal{O}_{C,x}/\mathfrak{m}_x^d$ . The structure of torsion sheaves supported at a singular point is much more complicated (see [14] for more details). Nevertheless, if  $\widehat{\mathcal{E}}$  is supported at a possibly singular point  $x$ , one can see by induction on the length  $d$  that  $\widehat{\mathcal{E}}$  is always  $S$ -equivalent to  $\bigoplus_d \mathcal{O}_x$ . △

Since the transform  $\widehat{\mathcal{O}}_x = \Phi(\mathcal{O}_x)$  is the ideal sheaf  $\mathfrak{m}_x$  of the point  $x$ , and  $\widehat{\Phi}(\mathcal{O}_x) = \mathfrak{m}_x^*$ , we deduce the following stability result.

**Corollary A.3.25.** *For any point  $x \in C$  the maximal ideal  $\mathfrak{m}_x$  and its dual  $\mathfrak{m}_x^*$  are stable sheaves.*

*Remark A.3.26.* If  $C$  is irreducible, this is a trivial fact. For Gorenstein reducible curves of arithmetic genus bigger or equal than 2, the semistability of  $\mathfrak{m}_x$  for an arbitrary point  $x$  of  $X$  has been recently proved in [19] using different techniques.  $\triangle$

The equivalences  $\Phi$  and  $\Psi$  define scheme isomorphisms between the corresponding moduli spaces:

**Corollary A.3.27.** *Let  $(r, d)$  be a pair of integers with  $r \geq 0$ .*

1. *The Fourier-Mukai functors  $\Phi$  and  $\Psi$  induce scheme isomorphisms of moduli spaces*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_C(r, d) &\simeq \mathcal{M}_C(dh - r, -d) \quad \text{for } d/r > 1/h, \\ \mathcal{M}_C(r, d) &\simeq \mathcal{M}_C(-dh + r, d) \quad \text{for } d/r \leq 1/h, \text{ and} \\ \mathcal{M}_C(r, d) &\simeq \mathcal{M}_C(r, d + r). \end{aligned}$$

2. *The moduli space  $\mathcal{M}_C(r, d)$  is isomorphic either to  $\mathcal{M}_C(0, d_0) \simeq \text{Sym}^{d_0}(C)$  with  $d_0 > 0$ , or to  $\mathcal{M}_C(r_0, 0)$  with  $r_0 > 0$  or to  $\mathcal{M}_C(r_0, d_0)$  with  $2r_0/h \leq d_0 < r_0$ .*

*Proof.* Corolario 3.29 □

*Remark A.3.28.* Notice that if  $C$  has only two irreducible components, as it happens for the Kodaira fibers  $I_2$  (cf. Figure 3.9) and  $III$ , and the polarization  $H$  has degree  $h = 2$ , Corollary A.3.27 reduces the study of the moduli spaces  $\mathcal{M}_C(r, d)$  just to the case  $d = 0$ . Some results in this case can be found in the next section.  $\triangle$

*Remark A.3.29.* If  $C$  is irreducible, we can take  $h = 1$ , so that  $r$  and  $d$  are the usual rank and degree. In this situation, the last case in (2) of Corollary A.3.27 does not occur; moreover, there is an isomorphism  $\mathcal{M}(r_0, 0) \simeq \mathcal{M}_C(0, r_0)$ . We get then that  $\mathcal{M}(r, d) \simeq \text{Sym}^{r_0}(C)$ . Using the transforms  $\Phi$  and  $\Psi$  and the Euclid algorithm, one can see that  $r_0 = \gcd(r, d)$ , as proven in [5, Chapter 6] by generalizing an argument described for smooth elliptic curves by Bridgeland [10] and Polishchuk [63]. A consequence is that there are no stable sheaves on  $X$  if  $\gcd(r, d) > 1$ . A complete description of these moduli spaces can be found in [5, Chapter 6].  $\triangle$



### Relative moduli spaces

Let  $p: \mathcal{C} \rightarrow B$  a genus one fibration, that is, a flat projective morphism whose fibers are curves of arithmetic genus one and trivial dualizing sheaf but without further assumptions on  $\mathcal{C}$ ,  $B$  or the fibers; in particular, non-reduced fibers are allowed. Consider the relative integral functor

$$\Phi = \Phi_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}}^{\mathcal{I}_\Delta}: D_{\mathcal{C}}^b(\mathcal{C}) \rightarrow D_{\mathcal{C}}^b(\mathcal{C}),$$

with kernel the ideal sheaf  $\mathcal{I}_\Delta$  of the relative diagonal immersion  $\delta: \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C} \times_B \mathcal{C}$ . By [34, Proposition 2.16], it is an equivalence of categories.

Fix a relative polarization  $\mathcal{H}$  on the fibers of  $p$  and denote  $q: \mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r, d) \rightarrow B$  the relative coarse moduli space of  $\mu_S$ -semistable sheaves on  $\mathcal{C}/B$  (with respect to the induced polarization) that have Hilbert polynomial  $P(m) = ms + d$ . Closed points of the fiber  $q^{-1}(t) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}_t}(r, d)$  represent  $S$ -equivalence classes of  $\mu_S$ -semistable sheaves on the fiber  $\mathcal{C}_t$  with Hilbert polynomial  $P(m) = rm + d$ . Denote also  $\Psi$  the relative auto-equivalence of  $D_{\mathcal{C}}^b(\mathcal{C})$  given by twisting by the line bundle  $\mathcal{O}_{\mathcal{C}/B}(\mathcal{H})$ .

Taking into account Corollaries A.2.14 and A.3.27, we get:

**Corollary A.3.30.** *Let  $(r, d)$  be a pair of integers with  $r \geq 0$ .*

1. *The Fourier-Mukai functors  $\Phi$  and  $\Psi$  induce scheme isomorphisms of moduli spaces*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r, d) &\simeq \mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(dh - r, -d) \quad \text{for } d/r > 1/h, \\ \mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r, d) &\simeq \mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(-dh + r, d) \quad \text{for } d/r \leq 1/h, \text{ and} \\ \mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r, d) &\simeq \mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r, d + r). \end{aligned}$$

2. *The moduli space  $\mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r, d)$  is isomorphic either to  $\text{Sym}^{d_0}(\mathcal{C}/B)$  with  $d_0 > 0$ , or to  $\mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r_0, 0)$  with  $r_0 > 0$  or to  $\mathcal{M}_{\mathcal{C}/B}(r_0, d_0)$  with  $2r_0/h \leq d_0 < r_0$ .*

□

### A.3.3. Moduli spaces of degree zero sheaves for $I_N$

In this section, we give a description of the connected component of the moduli space  $\mathcal{M}_C(r, 0)$  with  $r > 0$  containing vector bundles when  $C$  is a curve of type  $I_N$ , that is, a cycle of  $N$  projective lines (Figure 3.2). The description is achieved by combining two different ingredients; the first one is the description of indecomposable torsion-free sheaves on cycles  $I_N$  given in [24, 7], and the second one is the description of (semi)stable line bundles on tree-like curves and cycles carried out by López Martín in [46, 45].

#### Indecomposable torsion free sheaves on $I_N$

The purpose of this subsection is just to state some known results about the classification of indecomposable vector bundles and torsion free sheaves on cycles  $I_N$  of projective lines that we shall use later. This classification was obtained for the first time by Drozd and Greuel in [24] for arbitrary base fields. Nevertheless, for algebraically closed base fields, one can find a geometric description of indecomposable torsion free sheaves on  $I_N$  in [7] that follows the classical description of vector bundles on elliptic curves given by Oda in [59] (see Theorem A.3.32 below) and allows to study which of these sheaves are semistable.

Following the same argument that Atiyah used for smooth elliptic curves and taking into account that  $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{I_N}, \mathcal{O}_{I_N}) = \mathbb{k}$ , it is possible to prove inductively the following result.

**Lemma A.3.31.** *Let  $I_N$  be a cycle of  $N$  projective lines. For any integer  $m \geq 1$  there is a unique indecomposable vector bundle  $\mathcal{F}_\lambda$  on  $I_N$  appearing in the exact sequence*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{\lambda-1} \rightarrow \mathcal{F}_\lambda \rightarrow \mathcal{O}_{I_N} \rightarrow 0, \quad \mathcal{F}_1 = \mathcal{O}_{I_N}.$$

□

**Theorem A.3.32.** [7, Theorem 19] *Let  $I_N$  be a cycle of  $N$  projective lines and  $A_k$  be a chain of  $k$  projective lines (Figure 3.3). Let  $\mathcal{E}$  be an indecomposable torsion free sheaf on  $I_N$ . The following holds:*

1. If  $\mathcal{E}$  is a vector bundle, there is an étale covering  $\pi_s: I_{sN} \rightarrow I_N$ , a line bundle  $\mathcal{L}$  on  $I_{rN}$  and a number  $\lambda \in \mathbb{N}$  such that

$$\mathcal{E} \simeq \pi_{s*}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_\lambda).$$

The integers  $s, \lambda$  are determined by  $\mathcal{E}$ . Moreover, when  $s > 1$  the multidegree  $\underline{d}(\mathcal{L})$  of the line bundle  $\mathcal{L}$  is non-periodic.

2. If  $\mathcal{E}$  is not locally free, then there exists a finite map  $p_k: A_k \rightarrow I_N$  (defined as the composition of some  $\pi_s$  and some closed immersion  $i: A_k \hookrightarrow I_{sN}$ ) and a line bundle  $\mathcal{L}$  on  $A_k$  such that  $\mathcal{E} \simeq p_{k*}(\mathcal{L})$ .

□

Remember that if  $\underline{d} = (d_1, \dots, d_N, d_{N+1}, \dots, d_{2N}, \dots, d_{(r-1)N}, \dots, d_{sN})$ , then the non-periodicity means that  $\underline{d} \neq \underline{d}[t]$  for  $t = 1, \dots, s-1$  where

$$\underline{d}[1] = (d_{N+1}, \dots, d_{2N}, \dots, d_{(s-1)N}, \dots, d_{sN}, d_1, \dots, d_N)$$

and  $\underline{d}[t] = (\underline{d}[t-1])[1]$ .

As a consequence of Theorem A.3.32 we have

**Proposition A.3.33.** *Let  $\mathcal{E}$  be a pure dimension one sheaf on  $I_N$ . Then*

$$\sum_{i=1}^N d_i(\mathcal{E}) - \chi(\mathcal{E}) \leq 0,$$

and the equality holds true if and only if  $\mathcal{E}$  is locally free.

*Proof.* 3.36.

□

### Stable sheaves of degree zero on $I_N$

From now on, if the Hilbert polynomial of  $\mathcal{E}$  is  $P(m) = rm$ , then we will refer to it as a degree 0 sheaf.

*Remark A.3.34.* For the sake of simplicity we shall omit the subscript  $C$  in the moduli spaces. △

When  $r = h$ , the structure of the component  $\mathcal{M}((1, \dots, 1), 0) \subset \mathcal{M}(h, 0)$  was determined in [45] and [46]. There, one can find the following result.

**Lemma A.3.35.** *Let  $\mathcal{E}$  be a pure dimension one sheaf on  $C$  of degree 0 and multirank  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (1, \dots, 1)$ .*

1. *The (semi)stability of  $\mathcal{E}$  does not depend on the polarization.*
2.  *$\mathcal{E}$  is  $\mu_S$ -stable if and only if it is a line bundle and its multidegree is  $\underline{d}(\mathcal{E}) = (0, \dots, 0)$ .*
3. *If  $\mathcal{E}$  has multirank  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (1, \dots, 1)$  and is strictly semistable, then its graded object is  $\text{Gr}(\mathcal{E}) \simeq \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{C_i}(-1)$ , where  $C_1, \dots, C_N$  are the irreducible components of  $C$ .*

**Lemma A.3.36.** *Let  $\mathcal{L}$  be a line bundle on  $C$ . For any integer  $m \geq 1$ , the vector bundle  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_\lambda$  is  $\mu_S$ -semistable if and only if  $\mathcal{L}$  is  $\mu_S$ -semistable. For  $\lambda > 1$ ,  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{F}_\lambda$  is never a  $\mu_S$ -stable sheaf.*

*Proof.* Lema 3.39. □

In analogy to what happens for smooth elliptic curves and irreducible projective curves of arithmetic genus one, the following theorem proves that there are no stable degree 0 sheaves of higher rank.

**Theorem A.3.37.** *Let  $C$  be a polarized curve of type  $I_N$  with  $N \geq 2$ . Let  $\mathcal{E}$  be a sheaf of pure dimension 1 on  $C$  with Hilbert polynomial  $P(m) = rm$  and multirank  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (r_1, \dots, r_N)$ . If  $\mathcal{E}$  is  $\mu_S$ -stable, then either it is isomorphic to  $\mathcal{O}_{C_i}(-1)$  for some  $i = 1, \dots, N$  or it is a locally free sheaf with multirank  $\underline{r}(\mathcal{E}) = (1, \dots, 1)$  and multidegree  $\underline{d}(\mathcal{E}) = (0, \dots, 0)$ .*

*Proof.* Teorema A.3.37 □

Using the results on the moduli space  $\mathcal{M}^s((1, \dots, 1), 0)$  given in [46, Theorem 4.1] for  $r = h$ , we can summarize the structure of the open set of stable degree 0 sheaves as follows.

**Corollary A.3.38.** *Let  $C$  be a curve of type  $I_N$  with  $N \geq 2$  and  $H$  a polarization on it of degree  $h$ . Let  $\mathcal{M}^s(r, 0)$  be the open subset of stable sheaves with Hilbert polynomial  $P(m) = rm$ . The following holds:*

1. *If  $r = h$ , all the components of  $\mathcal{M}^s(r, 0)$  given by (A.7) are empty except  $\mathcal{M}^s((1, \dots, 1), 0)$  which is isomorphic to the multiplicative group  $\mathbb{k}^*$ . Moreover, the compactification of the component  $\mathcal{M}^s((1, \dots, 1), 0)$  is isomorphic to a rational curve with one node.*
2. *If  $r = h_i$  for some  $i = 1, \dots, N$ , then  $\mathcal{M}^s(r, 0)$  is a single point.*
3. *Otherwise,  $\mathcal{M}^s(r, 0)$  is empty.*

As an immediate consequence we determinate the possible Jordan-Hölder factors of any degree 0 semistable sheaf.

**Corollary A.3.39.** *Let  $\mathcal{E}$  be a semistable sheaf on  $I_N$  with Hilbert polynomial  $P(m) = rm$ . If  $\mathcal{F}$  is a Jordan-Hölder factor of  $\mathcal{E}$ , then  $\mathcal{F}$  is isomorphic either to one of the sheaves  $\mathcal{O}_{C_i}(-1)$ , where  $C_i$  are the irreducible components of  $C$ , or to a line bundle  $\mathcal{L}$  on  $X$  of multidegree  $\underline{d}(\mathcal{L}) = (0, \dots, 0)$ .*

**Corollary A.3.40.** *Let  $\underline{r} = (r_1, \dots, r_N) \in \mathbb{Z}^N$  such that  $r = r_1 h_1 + \dots + r_N h_N$ . The dimension of the connected component  $\mathcal{M}((r_1, \dots, r_N), 0)$  is equal to the minimum of the  $r_i$  with  $i = 1, \dots, N$ .*

In the case of a rational curve with one node or one cusp, as happens also for smooth elliptic curves, it is known [15] that all the Jordan-Hölder factors of any indecomposable sheaf are isomorphic to each other. This is no longer true for cycles  $I_N$  of projective lines, as we will now prove.

**Lemma A.3.41.** *For  $\lambda > 1$ , the graded object of the Atiyah indecomposable vector bundle  $\mathcal{F}_\lambda$  is  $Gr(\mathcal{F}_\lambda) = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{I_N}$*

*Proof.* Lema 3.44. □

**Proposition A.3.42.** *Let  $\mathcal{E}$  be a strictly semistable indecomposable sheaf on  $X$  with Hilbert polynomial  $P(m) = rm$ . If  $\mathcal{E}$  is not locally free, its graded object is  $Gr(\mathcal{E}) \simeq \bigoplus_{i \in A} \mathcal{O}_{C_i}(-1)$  for a subset  $A \subseteq \{1, \dots, N\}$ . If  $\mathcal{E}$  is locally free of rank  $r$ , then  $Gr(\mathcal{E})$  is isomorphic either to  $\mathcal{L}^{\oplus r}$  for a line bundle  $\mathcal{L}$  of multidegree  $\underline{d}(\mathcal{L}) = (0, \dots, 0)$ , or to  $\bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{C_i}(-1)^{\oplus r}$ .*

*Proof.* Proposición 3.45. □

### The biggest component of the moduli space

Now we shall describe completely the component  $\mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), 0) \subset \mathcal{M}(\bar{r}h, 0)$  of semistable sheaves of multirank  $(\bar{r}, \dots, \bar{r})$  and degree zero for the curve  $I_N$ , with respect to an arbitrary polarization  $H$ .

For any smooth elliptic curve or a rational curve with one node or one cusp, it is well known that the moduli space  $\mathcal{M}^s((1), 0)$  is isomorphic to the curve. This is no longer true for reducible fibers. In the particular case of  $I_N$ , the moduli space  $\mathcal{M}((1, \dots, 1), 0)$  is isomorphic to a rational curve with a node  $I_1$ . This was proved in [16] if  $N = 2$  and in [46] for any  $N \geq 2$ .

Let us describe the isomorphism  $\mathcal{M}((1, \dots, 1), 0) \simeq I_1$ , following [46, Proposition 3.2], and the inverse isomorphism. Let  $C_1, \dots, C_N$  be the rational components of  $I_N$  ordered cyclically and let us denote by  $\gamma: I_N \rightarrow I_1$  the morphism which contracts  $C_2, \dots, C_N$  and gives an isomorphism  $C_1 - \{x_1, x_N\} \simeq I_1 - \{\bar{z}\}$ , where  $\{x_1, x_N\}$  are the intersection points of  $C_1$  with the other components and  $\bar{z}$  is the singular point of  $I_1$ . Let us consider the sheaf on  $I_N \times I_N$

$$\mathcal{E} = \mathcal{I}_\Delta^* \otimes \pi_1^* \mathcal{O}_{I_N}(-y_0), \quad (\text{A.8})$$

where  $\mathcal{I}_\Delta$  is the ideal sheaf of the diagonal immersion  $\delta$ ,  $\pi_1$  is the canonical projection onto the first factor, and  $y_0$  is a fixed smooth point of  $C_1$ . For every point  $y \in I_N$  the restriction  $\mathcal{E}_y$  of  $\mathcal{E}$  to  $I_N \times \{y\}$  is a semistable pure dimension one sheaf of multirank  $(1, \dots, 1)$  and degree 0 [45, Proposition 3.2]. By Corollary A.2.14, the Fourier-Mukai functor  $\Phi_{I_N \rightarrow I_N}^{\mathcal{E}}$  induces a morphism  $\varphi: I_N \rightarrow \mathcal{M}((1, \dots, 1), 0)$ . Moreover, for all points  $y \in C_2 \cup \dots \cup C_N$ , the sheaves  $\mathcal{E}_y$  are S-equivalent [46,

Proposition 3.2], and then  $\varphi$  factors through a morphism

$$\bar{\varphi}: I_1 \rightarrow \mathcal{M}((1, \dots, 1), 0),$$

which one proves to be an isomorphism [46]. We shall give here a different proof (see Proposition A.3.44).

The smooth points  $y \in C_1$  are mapped to stable line bundles  $\mathfrak{m}_y^* \otimes \mathcal{O}_X(-y_0)$  and all the remaining points are mapped to the strictly semistable sheaves, all of them S-equivalent to  $\mathcal{O}_{C_1}(-1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{C_N}(-1)$ .

Let us describe the action on  $D_c^b(C)$  of the quasi-inverse  $\Phi_{I_N \rightarrow I_N}^{\mathcal{E}^*[1]}$  of  $\Phi_{I_N \rightarrow I_N}^{\mathcal{E}}$ . Using the exact sequence  $0 \rightarrow \mathcal{I}_\Delta \rightarrow \mathcal{O}_{I_N \times I_N} \rightarrow \delta_* \mathcal{O}_{I_N} \rightarrow 0$  and flat cohomology base-change, we get for every complex  $\mathcal{F}^\bullet$  in  $D_c^b(I_N)$  an exact triangle

$$\Phi_{I_N \rightarrow I_N}^{\mathcal{E}^*[1]}(\mathcal{F}^\bullet) \rightarrow p^*(\mathbf{R}p_*(\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{I_N}(y_0)))[1] \rightarrow \mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_{I_N}(y_0)[1] \rightarrow \Phi_{I_N \rightarrow I_N}^{\mathcal{E}^*[1]}(\mathcal{F}^\bullet)[1],$$

where  $p$  is the projection of  $I_N$  onto one point. Applying this formula to the Jordan-Hölder factors  $\mathcal{O}_{C_i}(-1)$  we have

$$\begin{aligned} \Phi_{I_N \rightarrow I_N}^{\mathcal{E}^*[1]}(\mathcal{O}_{C_1}(-1)) &= \mathcal{I}_{C_1}[1], \quad \mathcal{I}_{C_1} \text{ being the ideal sheaf of } C_1 \text{ in } I_N, \\ \Phi_{I_N \rightarrow I_N}^{\mathcal{E}^*[1]}(\mathcal{O}_{C_j}(-1)) &= \mathcal{O}_{C_j}(-1), \quad \text{for } j > 1. \end{aligned}$$

We now consider the integral functor  $\tilde{\Phi}: D_c^b(I_N) \rightarrow D_c^b(I_1)$  obtained as the composition of  $\Phi_{I_N \rightarrow I_N}^{\mathcal{E}^*[1]}$  and the derived push-forward  $\mathbf{R}\gamma_*: D_c^b(I_N) \rightarrow D_c^b(I_1)$ . This is the integral functor with kernel

$$\mathcal{K}^\bullet = \mathbf{R}(1 \times \gamma)_* \mathcal{E}^*[1]. \tag{A.9}$$

**Lemma A.3.43.** *If  $\mathcal{F}$  is a semistable sheaf on  $I_N$  of multirank  $(1, \dots, 1)$  and degree 0, then  $\tilde{\Phi}(\mathcal{F}) = \mathcal{O}_z$  for a uniquely determined point  $z \in I_1$ . Moreover  $z$  is the singular point of  $I_1$  if and only if  $\mathcal{F}$  is strictly semistable.*

*Proof.* Lema 3.46. □

**Proposition A.3.44.** *The integral functor  $\tilde{\Phi}$  induces a morphism*

$$\eta: \mathcal{M}((1, \dots, 1), 0) \rightarrow I_1,$$

*which is the inverse of  $\bar{\varphi}$ .*

*Proof.* Proposición 3.49. □

Our next aim is to find the relationship between the moduli space  $\mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), 0)$  of semistable pure dimension one sheaves of multirank  $(\bar{r}, \dots, \bar{r})$  and degree 0 on a cycle  $I_N$ , and the symmetric product  $Sym^{\bar{r}} I_1$  of the rational curve with a node.

**Lema A.1.** *The moduli space  $\mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), 0)$  is reduced.*

*Proof.* Lema 3.48. □

**Theorem A.3.45.** *Assume  $\bar{r} > 1$ . There exists a scheme isomorphism*

$$\mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), 0) \simeq Sym^{\bar{r}} I_1.$$

*Proof.* Teorema 3.50. □

*Remark A.3.46.* Arguing as in Proposition A.3.12 and Corollary A.3.27, one gets that the equivalences  $\Phi$  and  $\Psi$  in Section 1 induce isomorphisms

$$\begin{aligned} \mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), d) &\simeq \mathcal{M}((d - \bar{r}, \dots, d - \bar{r}), -d) && \text{for } d > \bar{r} \\ \mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), d) &\simeq \mathcal{M}((\bar{r} - d, \dots, \bar{r} - d), d) && \text{for } d \leq \bar{r} \\ \mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), d) &\simeq \mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), \bar{r}h + d). \end{aligned}$$

Thus, for any integers  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ , one gets that the moduli spaces  $\mathcal{M}((\bar{r}, \dots, \bar{r}), d)$  where  $d = \lambda h \bar{r}$  and  $\mathcal{M}((r_0, \dots, r_0), d_0)$  where  $r_0 = \mu \lambda \bar{r} \pm \bar{r}$  and  $d_0 = \pm \lambda h \bar{r}$  are also isomorphic to the  $\bar{r}$ -th symmetric product  $Sym^{\bar{r}} I_1$  of the nodal curve. △

Using the results obtained so far, we give a complete description of all moduli spaces  $\mathcal{M}(r, d)$  of semistable sheaves on the curve  $I_2$  (cf. Figure 3.9) with respect to a polarization of the minimum possible degree  $h = 2$ . Note that if  $h = 2$ , the case  $2r_0/h \leq d_0 < r_0$  in Corollary A.3.27 is not possible. One then has:

**Corollary A.3.47.** *Let  $X$  be a curve of type  $I_2$  with a polarization  $H$  of degree  $h = 2$ , and let  $(r, d)$  be a pair of integers with  $r \geq 0$ . The moduli space  $\mathcal{M}(r, d)$  of semistable sheaves with Hilbert polynomial  $P(s) = rs + d$  on  $X$  is isomorphic either to the  $d_0$ -th symmetric power  $Sym^{d_0}(X)$  of the curve or to  $\mathcal{M}(r_0, 0)$ . Moreover, if  $r_0$  is even, then the biggest connected component of  $\mathcal{M}(r_0, 0)$  is isomorphic to the symmetric power  $Sym^{r_0/2} I_1$  of the nodal curve  $I_1$ . □*



## A.4. Stable sheaves on K3 fibered threefolds

In this part we construct stable sheaves over K3 fibered threefolds using a relative Fourier-Mukai transform which describes the sheaves in terms of spectral data. This procedure is similar to the construction for elliptic fibrations, which we also describe. On K3 fibered Calabi-Yau threefolds, we show that the Fourier-Mukai transform induces an embedding of the relative Jacobian of spectral line bundles on spectral covers into the moduli space of sheaves of given invariants. This allows us to see the moduli space of spectral sheaves as a generic torus fibration over the moduli space of curves of given arithmetic genus on the Calabi-Yau manifold.

### A.4.1. K3 fibered threefold

Let  $X$  be a K3 fibered threefold, that is, a proper flat morphism  $p: X \rightarrow B$  of non-singular projective varieties with connected fibers whose generic fiber is a smooth K3 surface and  $B$  is an irreducible curve.

Let  $H$  be a polarization on  $X$ . For each  $t \in B$ ,  $H$  induces a polarization  $H_t$  on the fiber  $X_t$  of  $p$ , defined by restricting  $H$  to  $X_t$ . By Theorem A.2.12 there exists a moduli scheme  $\hat{p}: \mathcal{M}(X/B) \rightarrow B$  whose fiber over a point  $t \in B$  is the moduli scheme  $\mathcal{M}(X_t)$  of stable sheaves on the fiber with respect to  $H_t$ , and the points of  $\mathcal{M}(X/B)$  correspond to stable sheaves whose scheme-theoretic support is contained in some fiber  $X_t$  of  $p$ . This moduli space in general has infinitely many components, each of which is a quasi-projective scheme which may be compactified by adding equivalence classes of semistable sheaves. As a particular case of Bridgeland and Maciocia result (cf. [13]) we have.

**Proposition A.4.1.** *Let  $Y$  be a irreducible component of  $\mathcal{M}(X/B)$  such that the following holds:*

1.  $q: Y \rightarrow B$  is projective and fine.
  2.  $\dim Y = \dim X$ .
  3.  $q: Y \rightarrow B$  is equidimensional.
- (A.10)

Then the integral functor

$$\mathcal{S} := \Phi_{Y \rightarrow X}^{\mathcal{P}} : D_c^b(Y) \rightarrow D_c^b(X),$$

defined by a universal sheaf  $\mathcal{P}$  on  $Y \times_B X$ , is a Fourier-Mukai transform and  $q: Y \rightarrow B$  is a K3 fibered threefold.

*Proof.* Proposición 4.1. □

We denote by  $\widehat{\mathcal{S}}$  the quasi-inverse of  $\mathcal{S}$  shifted by  $[-2]$ , that is to say  $\widehat{\mathcal{S}}$  is the integral functor  $\Phi_{X \rightarrow Y}^{\mathcal{P}^\vee \otimes \pi_X^* \omega_{X/B}} : D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(Y)$ . Then  $\mathcal{S} \circ \widehat{\mathcal{S}} \simeq [-2]$  and  $\widehat{\mathcal{S}} \circ \mathcal{S} \simeq [-2]$ .

### Fine components of the moduli space

Let us see how to find such components  $Y$  of the relative moduli space  $\mathcal{M}(X/B)$ . We assume that there exists a divisor  $L$  on  $X$  and integer numbers  $r > 0$ ,  $s$ , such that there exists a sheaf  $\mathcal{E}$  on a non-singular fiber  $i_t: X_t \hookrightarrow X$ , which is stable with respect to  $H_t$  and has Mukai vector  $v = (r, L_t, s = \text{ch}_2(\mathcal{E}) + r)$ , where  $L_t$  is the restriction of  $L$  to  $X_t$ . The Hilbert polynomial of  $\mathcal{E}$  is

$$P(n) = \frac{1}{2}rH_t^2n^2 + L_tH_tn + (r + s) = rH_t^2 \binom{n+1}{2} + a(L_t)n + (r + s), \quad (\text{A.11})$$

with  $a(L_t) = L_tH_t - \frac{1}{2}rH_t^2 \in \mathbb{Z}$ .

**Proposition A.4.2.** *If the greatest common divisor of  $rH_t^2$ ,  $a(L_t)$ , and  $s + r$  is equal to 1 and  $L_t^2 - 2rs = 0$ , then there exists an irreducible component  $Y$  of  $\mathcal{M}(X/B)$  containing the class of sheaf  $\mathcal{E}$  such that satisfies the above conditions (A.10).*

*Proof.* Proposición 4.2. □

*Remark A.4.3.* As for every smooth fiber  $X_t$  the integral functor

$$\Phi^{P_t} : D_c^b(Y_t) \rightarrow D_c^b(X_t)$$

is an equivalence, then by [38, Proposition 3.2] either  $Y_t \simeq X_t$  or the fiber  $Y_t$  is a smooth K3 surface, which parametrizes  $\mu$ -stable vector bundles on  $X_t$  with  $v = (r, L_t, s)$  and  $r > 1$ . △

*Example A.4.4.* One of the K3 fibered Calabi-Yau threefolds  $X$  which has been analyzed in great detail using mirror symmetry [18] is obtained by resolving singularities of degree eight hypersurfaces  $\widehat{X} \subset \mathbb{P}_{1,1,2,2,2}$ . The Kähler cone of  $X$  is generated by positive linear combinations of the linear system  $H = 2l + e$  and  $l$  where  $e$  is an exceptional divisor coming from blowing-up a curve of singularities and the linear system  $l$  is a pencil of K3 surfaces. The intersection ring has been computed in [18] and is given by the relations

$$H \cdot l^2 = 0, \quad l^3 = 0, \quad H^3 = 8, \quad H^2 \cdot l = 4.$$

So let us choose  $L = xH + yl$  with  $x, y \in \mathbb{Z}$  we then find

$$H_t^2 = H^2 \cdot l = 4, \quad L_t \cdot H_t = L \cdot H \cdot l = 4x, \quad L_t^2 = L^2 \cdot l = 4x^2.$$

### Stability and relative semistability

In this section we give a criterion of stability of torsion free sheaves with respect to  $H + M\mathfrak{f}$  for  $M \gg 0$  on a K3 fibration  $p: X \rightarrow B$  as above, assuming that their quotients are good enough.

**Definition A.4.5.** The relative degree of a sheaf  $\mathcal{F}$  on  $X$  is the intersection number

$$d(\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{F}) \cdot H \cdot \mathfrak{f}$$

where  $\mathfrak{f} \in A^1(X)$  denotes the algebraic equivalence class of the fiber of  $p: X \rightarrow B$ . The relative slope is defined as

$$\mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{F}) = \frac{d(\mathcal{F})}{\text{rk}(\mathcal{F})},$$

whenever  $\text{rk}(\mathcal{F}) \neq 0$ .

Note that the restriction of a sheaf  $\mathcal{F}$  on  $X$  to a general fiber of  $p$  has degree  $d(\mathcal{F})$ . Moreover if  $\mathcal{F}$  is a sheaf on  $X$  flat over  $B$ , its relative degree is the degree of the restriction  $\mathcal{F}_t$  to any fiber  $X_t$  of  $p$ , so that  $\mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{F}_t)$ .

**Definition A.4.6.** We say that a torsion free sheaf  $\mathcal{F}$  on  $X$  has *good quotients* if for every subsheaf  $\mathcal{F}'$  of  $\mathcal{F}$  with  $0 < \text{rk}(\mathcal{F}') < \text{rk}(\mathcal{F})$  one has  $\mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{F}') < \mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{F})$ .

**Proposition A.4.7.** *Let  $\mathcal{F}$  be a torsion free sheaf on  $X$  with good quotients. There exists a non-negative integer  $M_0$  depending on  $\mathcal{F}$  and  $H$  such that  $\mathcal{F}$  is  $\mu$ -stable with respect to  $H + M\mathfrak{f}$  for all  $M \geq M_0$ .*

*Proof.* Proposición 4.7. □

### A.4.2. The spectral construction

Let  $C \xrightarrow{i} Y$  be a reduced curve of genus  $g$  such that  $C \rightarrow B$  is a flat covering of degree  $n$ , and  $\mathcal{L}$  a line bundle on  $C$ . The covering  $C \rightarrow B$  could have at most a finite number of ramification points and  $C$  intersects the generic fiber in  $n$  different points. The line bundle  $\mathcal{L}$  defines a sheaf  $\mathcal{E} = i_*\mathcal{L}$  on  $Y$ , supported on  $C$ .

**Proposition A.4.8.**  *$\mathcal{E}$  is  $WIT_0$ - $\mathcal{S}$ , and the transformed sheaf  $\widehat{\mathcal{E}}$  is flat over the base  $B$ .*

*Proof.* Proposición 4.8. □

We refer to  $\widehat{\mathcal{E}}$  as the *spectral sheaves* constructed out of *spectral data*  $(C, \mathcal{L})$ . The cover  $C$  is called *the spectral cover*.

An alternative description of spectral sheaves is as follows. Let us consider the diagram

$$\begin{array}{ccccc} C \times_B X & \xrightarrow{j} & Y \times_B X & \xrightarrow{\pi_X} & X \\ p_C \downarrow & & \pi_Y \downarrow & & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{q} & B \end{array}$$

where  $p_C$  is a flat morphism and we denote  $p_X = \pi_X \circ j$ . By base change the spectral sheaf  $\widehat{\mathcal{E}}$  can be described as

$$\Phi_{Y \rightarrow X}^{\mathcal{P}}(i_*\mathcal{L}) = p_{X*}(p_C^*\mathcal{L} \otimes \mathbf{L}j^*\mathcal{P}).$$

For each point  $y \in C$  with  $q(y) = t$ , the derived inverse image  $\mathbf{L}i_t^*\mathbf{L}j^*\mathcal{P}$  is isomorphic to the sheaf  $\mathcal{P}_y$  where as usual  $i_t: \{y\} \times X_t \hookrightarrow C \times_B X$  denotes the immersion of the fiber  $p_C^{-1}(y)$ . By [5, Proposición 1.11]  $\mathbf{L}j^*\mathcal{P}$  is a coherent sheaf

$\mathcal{P}_{|C \times_B X}$  on  $C \times_B X$ , flat over  $C$ , and such that  $i_t^* \mathcal{P}_{|C \times_B X} \simeq \mathcal{P}_y$  for every  $y \in C$ . Then

$$\widehat{\mathcal{E}} = p_{X*}(p_C^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{P}_{|C \times_B X}).$$

If  $C_t$  denotes the restriction of  $C$  to any fiber  $Y_t$ , then  $C_t = \bigsqcup_{y \in C_t} Z_y$  where  $Z_y \hookrightarrow C$  is a zero-cycle of length  $n_{i(y)}$  supported on  $y$  and such that  $\sum n_{i(y)} = n$ . If  $C \rightarrow B$  is not ramified at  $y$  one has  $n_{i(y)} = 1$ , so  $n_{i(y)} > 1$  at only finitely many points  $y \in C$ . Therefore  $\mathcal{O}_{C_t}$  has a filtration with factors isomorphic to  $\mathcal{O}_y$ , for every  $y \in C_t$ . By base-change  $\widehat{\mathcal{E}}_t = \Phi_t(i_* \mathcal{O}_{C_t})$  and we have also a filtration for  $\widehat{\mathcal{E}}_t$  whose factors are isomorphic to  $\mathcal{P}_y$ , for every  $y \in C_t$ . In particular, if  $Y_t$  is a generic fiber, then  $C$  intersects  $Y_t$  at  $n$  different points  $\{y_1, \dots, y_n\}$  and  $\widehat{\mathcal{E}}_t = \mathcal{P}_{y_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_{y_n}$ .

### Stability of spectral bundles

We now show that there exists an integer number  $M_0$ , such that  $\widehat{\mathcal{E}}$  is a  $\mu$ -stable torsion free sheaf on  $X$  with respect to  $H + M\mathfrak{f}$  for all  $M \geq M_0$ .

**Proposition A.4.9.** *The restriction  $\widehat{\mathcal{E}}_t$  of the transformed sheaf  $\widehat{\mathcal{E}}$  to any fiber  $X_t$  is semistable of degree  $nLH\mathfrak{f}$  with respect to  $H_t$ .*

*Proof.* Proposición 4.9. □

**Corollary A.4.10.** *For every subsheaf  $0 \neq \mathcal{E}' \subsetneq \widehat{\mathcal{E}}$  one has  $\mu_{\mathfrak{f}}(\mathcal{E}') \leq \mu_{\mathfrak{f}}(\widehat{\mathcal{E}})$ .*

*Remark A.4.11.* Note that unlike elliptic fibrations for K3 fibrations there is no obvious condition which guarantees that the inverse Fourier-Mukai transform of a sheaf  $\mathcal{F}$  (semistable on the fibers) is a single sheaf. One problem is that the derived dual of  $\mathcal{P}$  may fail to be a single sheaf, in contrast to the elliptic fibrations where the derived dual of the Poincaré sheaf is again a single sheaf. △

**Proposition A.4.12.** *The spectral sheaf  $\widehat{\mathcal{E}}$  is torsion free. Moreover  $\widehat{\mathcal{E}}$  has good quotients if and only if the spectral cover  $C$  is reduced and irreducible.*

*Proof.* Proposiciones 4.14 y 4.15. □

Propositions A.4.7, A.4.9 and A.4.10 give the following stability result:

**Theorem A.4.13.** *Assume that the spectral cover  $C$  is irreducible and reduced. If  $\mathcal{L}$  is a line bundle on  $C$  and  $\mathcal{E} = i_*\mathcal{L}$ , there exists a non-negative integer  $M_0$  depending on  $\widehat{\mathcal{E}}$ , such that the spectral sheaf  $\widehat{\mathcal{E}}$  is  $\mu$ -stable with respect to  $H + M\mathfrak{f}$  for all  $M \geq M_0$ .  $\square$*

Since it is in general rather difficult to produce examples of stable sheaves, the spectral cover construction is an important tool for that purpose and for proving that certain moduli spaces of stable sheaves are not empty.

### Vector Bundles in the case $r > 1$

Here we assume  $r > 1$  and we study the question when  $\widehat{\mathcal{E}}$  is a locally free sheaf.

**Proposition A.4.14.** *If for any singular fiber  $Y_t$  there exists a point  $y \in Y_t$  such that  $\mathcal{P}_y$  is locally free on  $X_t$ , then one can choose the covering  $C$  in such a way that  $\widehat{\mathcal{E}}$  is locally free.*

*Proof.* Proposición 4.17  $\square$

For elliptically fibered Calabi-Yau threefolds (cf. [26]),  $\mathcal{P}_y$  is nothing but the ideal sheaf of the point  $y$ , so it is locally free if and only if  $y$  is a non singular point of  $Y_t$ .

The hypothesis of Proposition A.4.14 is fulfilled when the following conditions are fulfilled:

1. The fibers of  $X \rightarrow B$  have at worst ordinary double points as singularities,
2. each fiber  $Y_t$  parametrizes  $\mu$ -stable sheaves, and
3. the polarization on  $X$  is chosen in such a way that a sheaf, with the Chern classes fixed to define  $Y$ , is stable if and only if it is  $\mu$ -stable on the generic fiber.

Actually, Thomas shows [71, theorem 4.15] that when both these conditions and the assumptions of Section A.4.1 hold true, then  $Y_t$  has at worst ordinary double point

singularities. Moreover singular points represent reflexive non locally free sheaves on  $X_t$  and all other points correspond to locally free sheaves.

*Remark A.4.15.* For the trivial fibration  $S \times B \rightarrow B$ , where  $S$  is a K3 surface, all fibers are smooth. In this case the spectral sheaves  $\widehat{\mathcal{E}}$  are vector bundles. Moreover if the K3 surface is reflexive, in the sense of [6], then we have a good description of the universal sheaf  $\mathcal{P}$  which allows the computation of the whole Chern character of  $\widehat{\mathcal{E}}$ .  $\triangle$

*Remark A.4.16.* Under the assumptions of [71], if  $B = \mathbb{P}^1$  and the cover  $C$  has degree equal to one, that is  $C$  can be thought of as a closed immersion  $\sigma$  of  $\mathbb{P}^1$  into  $Y$ , then the spectral sheaf  $\widehat{\mathcal{E}}$  corresponding to  $\mathcal{O}_C$  is the vector bundle  $\tilde{\sigma}^*\mathcal{P}$ , where  $\tilde{\sigma}^*\mathcal{P}$ , where  $\tilde{\sigma}: X \rightarrow Y \times_{\mathbb{P}^1} X$  is the induced section.  $\triangle$

*Remark A.4.17.* Other examples of stable sheaves and vector bundles on K3 fibered Calabi-Yau threefolds can be constructed as non-split extensions of stable spectral bundles provided the slopes of the input sheaves satisfy certain conditions, which are required to rule out possible destabilizing subsheaves [2, Proposition 4.1].  $\triangle$

## Moduli Spaces

Although we can use Theorem A.4.13 to produce  $\mu$ -stable torsion free sheaves on  $X$ , that result cannot be used directly in order to produce isomorphisms between moduli spaces, because the polarization  $H = H_0 + M\mathfrak{f}$  depends on the sheaf  $\widehat{\mathcal{E}}$ . Our next aim is to prove that we can find  $M$  an effective bound for  $M$ , which only depends on the topological invariants of  $\widehat{\mathcal{E}}$ .

Let  $H_0$  a smooth ample divisor on  $X$ , which exists by Bertini's theorem (c.f. [31, Theorem 8.18]). We put  $H_M = H_0 + M\mathfrak{f}$  for  $M \geq 0$ . The following result is a straightforward consequence of [39, 5.3.5 and 5.3.6].

**Lemma A.4.18.** *Let  $D$  be a divisor on  $X$  and  $k > 0$  an integer number such that  $0 > D^2H_0 \geq -k$ . Then either  $DH_0\mathfrak{f} = 0$  or  $(DH_0\mathfrak{f})(DH_0H_M) > 0$  for every  $M \geq \frac{k}{2}(H_0^2\mathfrak{f})$ .*

Let  $\mathcal{F}$  be a coherent sheaf on  $X$  with Chern classes  $c_1$  and  $c_2$  and rank  $m$ . The

*discriminant* of  $\mathcal{F}$  by definition is the characteristic class

$$B(\mathcal{F}) = 2mc_2 - (m-1)c_1^2.$$

The Bogomolov inequality states that if  $\mathcal{F}$  is torsion free and  $\mu$ -semistable with respect to a some polarization  $H$ , then  $B(\mathcal{F})H \geq 0$  ([39, Theorem 7.3.1.]).

**Theorem A.4.19.** *Let  $H_0$  be a smooth ample divisor on  $X$ . Then  $\widehat{\mathcal{E}}$  is  $\mu$ -stable with respect to  $H_M = H_0 + M\mathfrak{f}$  for every  $M \geq M_0 = \frac{r^2 n^2}{8} B(\widehat{\mathcal{E}})H_0(H_0^2\mathfrak{f})$ .*

*Proof.* Teorema 4.25. □

### Topological Invariants

In this subsection we will assume that  $p: X \rightarrow B$  is a K3 fibered Calabi-Yau threefold. Since  $\mathcal{S}: D_c^b(X) \simeq D_c^b(Y)$ , then  $Y$  is also a K3 fibered Calabi-Yau threefold (Theorem A.1.6). By the singular Grothendieck-Riemann-Roch theorem [28, Corollary 18.3.1], the Chern characters of the Fourier-Mukai transform  $\Phi(\mathcal{E}^\bullet)$  of an object  $\mathcal{E}^\bullet$  in  $D^b(Y)$  can be computed in terms of those of  $\mathcal{E}^\bullet$  as follows

$$\text{ch}(\Phi(\mathcal{E}^\bullet)) = \pi_{X*} \left( \pi_Y^* (\text{ch}(\mathcal{E}^\bullet) \cdot \text{Td}(Y/B)) \cdot \text{ch}(\mathcal{P}) \right)$$

whenever  $\text{ch}(\mathcal{P})$  exists. Also note that since  $p: Y \rightarrow B$  is a local complete intersection morphism, there exists a virtual relative tangent bundle in the K-group  $K^\bullet(Y)$ . The following is a straightforward computation

**Proposición A.2.** *The Todd class of the (virtual) tangent bundle  $T_{Y/B}$  is*

$$\text{Td}(Y/B) = 1 - \alpha\hat{\mathfrak{f}} + \frac{c_2(Y)}{12} - 2\alpha\varpi_Y,$$

where  $\alpha = \text{Td}_1(B)$ ,  $\hat{\mathfrak{f}} \in A^1(Y)$  denotes the algebraic equivalence class of the fiber of  $q: Y \rightarrow B$ ,  $\varpi_Y$  is the fundamental class of  $Y$ , and, as usual, we have identified  $H^6(Y, \mathbb{Z})$  with  $\mathbb{Z}$  by integrating over the fundamental class of  $Y$ .

We now take a reduced and irreducible spectral curve  $C \xrightarrow{i} Y$  of genus  $g$  such that  $C \rightarrow B$  is a flat covering of degree  $n$ , and  $\mathcal{L}$  a line bundle of degree  $\delta$  on  $C$ .



We consider the sheaf  $\mathcal{E} = i_*\mathcal{L}$  on  $Y$ , supported on  $C$ . As we have already seen  $\mathcal{E}$  is  $\text{WIT}_0$ , with respect to  $\Phi$ , and gives then rise to a transform  $\widehat{\mathcal{E}}$  on  $X$ . Since on a generic fiber  $\widehat{\mathcal{E}}_t \simeq \mathcal{P}_{y_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_{y_n}$  we should get

$$\text{rk}(\widehat{\mathcal{E}}) = nr \quad \text{and} \quad c_1(\widehat{\mathcal{E}}) = nL + kf \quad \text{with } k \text{ an integer number.}$$

Note that we cannot obtain sheaves with rank equal to the degree of the cover as in the spectral cover construction on elliptic fibrations where the universal sheaf parametrizes sheaves with rank equal to one.

The Chern character of  $\mathcal{E}$  is given by

$$\text{ch}(\mathcal{E}) = i_*(\text{ch } \mathcal{L} \cdot (1 - \frac{1}{2}K_C)),$$

where  $K_C$  is a canonical bundle of  $C$ . Thus the Chern characters of  $\mathcal{E}$  are

$$\begin{aligned} \text{ch}_0(\mathcal{E}) &= 0, & \text{ch}_1(\mathcal{E}) &= 0, & \text{ch}_2(\mathcal{E}) &= i_*(1) = [C], \\ \text{ch}_3(\mathcal{E}) &= i_*(-\frac{1}{2}K_C + c_1(\mathcal{L})) = (1 - g + \delta)\varpi_Y. \end{aligned}$$

The Riemann-Roch theorem on  $C$  implies  $\chi := \chi(\mathcal{L}) = 1 - g + \delta$ .

When the universal sheaf  $\mathcal{P}$  has finite homological dimension as a sheaf on  $Y \times_B X$ , the Chern character exists and to compute it we should need an explicit expression of  $\mathcal{P}$ . Let us denote  $\gamma^i = \text{ch}_i(\mathcal{P})$ , then  $\gamma^0 = r$ .

We find for  $\text{ch}_i(\widehat{\mathcal{E}})$  the following expressions

$$\begin{aligned} \text{rk}(\widehat{\mathcal{E}}) &= \pi_{X*}(\pi_Y^*[C]\gamma^0) = r[C] \cdot \hat{\mathfrak{f}} = rn \\ c_1(\widehat{\mathcal{E}}) &= \pi_{X*}(\pi_Y^*[C]\gamma^1) + (\chi - \alpha n)r\mathfrak{f} \\ \text{ch}_2(\widehat{\mathcal{E}}) &= \pi_{X*}(\pi_Y^*[C]\gamma^2) + (\chi - \alpha n)L\mathfrak{f} \\ \text{ch}_3(\widehat{\mathcal{E}}) &= \pi_{X*}(\pi_Y^*[C]\gamma^3) + (\chi - \alpha n)(s - r). \end{aligned} \tag{A.12}$$

By Hurwitz's formula  $\chi - \alpha n = d - \frac{R}{2}$  where  $R$  denotes the ramification of  $C \rightarrow B$ .

Since  $\mathcal{P}$  is of finite homological dimension, the determinant bundle  $\det \mathcal{P}$  is defined, and the first Chern character of  $\mathcal{P}$  can be computed as follows. We consider the line bundle  $\mathcal{M} = \det \mathcal{P} \otimes \pi_X^*\mathcal{O}_X(-L)$  on  $Y \times_B X$ ; for every point  $y \in Y$  one

has  $\pi_Y^{-1}(y) \simeq \{y\} \times X_t$  with  $t = q(y)$ , and by restricting to the fiber  $\pi_Y^{-1}(y)$  we obtain

$$\mathcal{M}|_{X_t} \simeq \det \mathcal{P}|_{X_t} \otimes \pi_X^* \mathcal{O}_X(-L)|_{X_t} \simeq \det \mathcal{P}_{t|X_t} \otimes \mathcal{O}_{X_t}(-L_t) \simeq \mathcal{O}_{X_t}$$

Thus  $\mathcal{M} \simeq \pi_Y^* \mathcal{Q}$  for a line bundle  $\mathcal{Q} = \mathcal{O}_Y(Q)$  on  $Y$ . Then one has

$$\det \mathcal{P} \simeq \pi_X^* \mathcal{O}_X(L) \otimes \pi_Y^* \mathcal{O}_Y(Q)$$

and  $c_1(\widehat{\mathcal{E}})$  can be expressed as

$$c_1(\widehat{\mathcal{E}}) = nL + ((\chi - \alpha n)r + [C] \cdot Q)\mathfrak{f}$$

If  $\mathcal{P}$  is not of finite homological dimension, we can only consider the push-forward  $j_* \mathcal{P}$  where  $j: Y \times_B X \hookrightarrow Y \times X$ , which always has Chern classes because  $Y \times X$  is smooth. The relative integral functor with kernel  $\mathcal{P}$  is equal to the absolute integral functor with kernel  $j_* \mathcal{P}$  and one can also compute the Chern characters of  $\widehat{\mathcal{E}}$  in terms of  $\text{ch}(j_* \mathcal{P})$  and the Todd class of  $Y$ .

Notice that due to Equation (A.12), if we express the discriminant class  $B(\widehat{\mathcal{E}})$  in terms of the topological invariants of  $\mathcal{E} = i_* \mathcal{L}$ , we obtain the formula:

$$B(\widehat{\mathcal{E}}) = n^2 L^2 + 2n([C] \cdot Q)L \cdot \mathfrak{f} - 2rn(\pi_{X*}(\pi_Y^*[C] \cdot \gamma^2)),$$

where  $\gamma^2 = \text{ch}_2(\mathcal{P})$ , which proves that  $B(\widehat{\mathcal{E}})$  depends only on the cohomology class of spectral curve  $C$ . Then, once we have fixed the original polarization  $H_0$ , the number  $M_0$  depends also only on  $[C]$ .

Let us now fix the following data:

1. Three integer numbers  $n \geq 1$ ,  $g \geq 0$  and  $\delta$ .
2. The cohomology class  $[C]$  of a curve  $i: C \hookrightarrow Y$  of arithmetic genus  $g$  which is flat of degree  $n$  over  $B$ .

We denote by  $\mathcal{M}([C], g)$  the moduli space of integral flat covers of  $B$  of arithmetic genus  $g$  in the cohomology class  $[C]$  and by  $\text{Pic}^\delta([C], g)$  the relative Jacobian

of line bundles of degree  $d$  on the curves in  $\mathcal{M}([C], g)$ ; there is then a morphism  $\text{Pic}^\delta([C], g) \rightarrow \mathcal{M}([C], g)$  whose fiber over a point  $C' \in \mathcal{M}([C], g)$  is the Jacobian  $\text{Pic}^\delta(C')$ . Now as  $M_0$  depends only on  $[C]$ , Theorem 4.25 implies that the Fourier-Mukai transform  $\mathcal{S}$  induces an immersion of algebraic varieties

$$\text{Pic}^\delta([C], g) \hookrightarrow \mathcal{M}(X, rn, c_1, ch_2, ch_3; H_{M_0})$$

where  $\mathcal{M}(X, rn, c_1, ch_2, ch_3; H_{M_0})$  is the moduli space of sheaves on  $X$  with Chern classes  $rn, c_1, ch_2$  and  $ch_3$  given by the right hand side of Equation (A.12), and which are stable with respect to  $H_{M_0}$ . The image is the moduli space of stable spectral sheaves with those Chern classes,  $\text{Spec}(X, rn, c_1, ch_2, ch_3 : H_{M_0})$ , and there is an isomorphism

$$\text{Pic}^\delta([C], g) \simeq \text{Spec}(X, rn, c_1, ch_2, ch_3 : H_{M_0}).$$

On then has:

**Theorem A.4.20.** *There is a morphism*

$$\text{Spec}(X, rn, c_1, ch_2, ch_3 : H_{M_0}) \rightarrow \mathcal{M}([C], g)$$

*which makes the moduli space of  $H_{M_0}$ -stable spectral sheaves with Chern classes  $(rn, c_1, ch_2, ch_3)$ , into a generic abelian fibration over the moduli space  $\mathcal{M}([C], g)$  of curves of arithmetic genus  $g$  in the cohomology class  $[C]$ .  $\square$*

### A.4.3. The Case $r = 1$

In this section we will treat the rather special case  $r = 1$  and assume that  $X$  is a K3 fibered Calabi-Yau threefold. Note that by the adjunction formula every fiber has also trivial canonical bundle. In this case the universal sheaf of Section A.4.1 is just the ideal sheaf  $\mathcal{I}_\Delta$  of the relative diagonal immersion  $\delta: X \hookrightarrow X \times_B X$ . Since for a singular fiber  $X_t$  the ideal sheaf of a point  $\mathcal{I}_x$  may be not stable, we cannot use Bridgeland-Maciocia result ([13, Theorem 1.2 ]) to show that the ideal sheaf  $\mathcal{I}_\Delta$  defines an autoequivalence of the bounded derived category of  $X$ . So, we shall prove this directly. Let us denote by  $\Phi$  the relative integral functor defined by  $\mathcal{I}_\Delta$ .

**Proposition A.4.21.** *The relative integral functor*

$$\Phi: D_c^b(X) \rightarrow D_c^b(X)$$

defined by the ideal sheaf of the relative diagonal is a Fourier-Mukai transform, that is an equivalence of categories.

*Proof.* Proposición 4.29 □

Let us then consider a spectral cover  $C \rightarrow B$  of degree  $n$  embedded into  $X$  by  $i: C \hookrightarrow X$  and a line bundle  $\mathcal{L}$  of degree  $\delta$  on  $C$ . By Proposition A.4.9 and Theorem A.4.13, the Fourier-Mukai transform  $\widehat{\mathcal{E}} = \Phi(\mathcal{E})$ , with  $\mathcal{E} = i_*\mathcal{L}$ , is a  $\mu$ -stable torsion free sheaf. By base change, the restriction of  $\widehat{\mathcal{E}}$  to a generic fiber is just  $\mathcal{I}_{x_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_{x_n}$  where  $C \cap \mathfrak{f} = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Notice that for each point  $x$  of a generic fiber the ideal sheaf  $\mathcal{I}_x$  is a  $\mu$ -stable torsion free sheaf on the fiber, but not locally free. However a straightforward computation shows that the dual  $\mathcal{I}_x^*$  is locally free. Then, the restriction to the generic fibre of the dual  $\widehat{\mathcal{E}}^*$  of a spectral sheaf  $\widehat{\mathcal{E}}$  is locally free. Actually one has the following result:

**Proposition A.4.22.**  $\widehat{\mathcal{E}}^*$  is a vector bundle on  $X$  and the Chern character of  $\widehat{\mathcal{E}}^*$  is given by  $\text{ch}(\widehat{\mathcal{E}}^*) = n - (\chi(\mathcal{L}) - \text{Td}_1(B)n)$ .

*Proof.* Proposición 4.30. □

#### A.4.4. Trivial fibrations

In this section we study the case of a trivial K3 fibration  $p: X \rightarrow B$ , that is  $X \simeq S \times B$ , where  $S$  is a reflexive K3 surface and  $E$  an elliptic curve.

**Definition A.4.23.** A K3 surface  $S$  is *reflexive* if it carries a polarization  $\Theta$  and a divisor  $\ell$  such that

1.  $\Theta^2 = 2$ .
2.  $\ell^2 = -12$  and  $\ell \cdot \Theta = 0$ .

3.  $\ell + 2\Theta$  is non effective on  $S$ .

We recall some well known results about reflexive K3 surfaces. For details we refer to [6].

**Proposition A.4.24.** *Let us fix the following Mukai vector  $v = (2, l, -3)$  on the reflexive K3 surface  $S$  and, we denote  $\mathcal{M}(S, v; \Theta)$  the moduli space of stable sheaves on  $S$  with Mukai vector  $v$ . The following holds:*

1.  $\mathcal{M}(S, v; \Theta)$  is a non empty fine moduli space parameterizing  $\mu$ -stable locally free sheaves on  $S$ .
2. The universal sheaf  $\mathcal{P}_S$  on  $\mathcal{M}(S, v; \Theta) \times S \rightarrow \mathcal{M}(S, v; \Theta)$  defines a Fourier-Mukai transform  $D_c^b(\mathcal{M}(S, v; \Theta)) \simeq D_c^b(S)$ .
3.  $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}(S, v; \Theta)$  if and only if there exists the exact sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{E}(\Theta) \longrightarrow \mathcal{I}_x(\ell + 2\Theta) \longrightarrow 0,$$

where  $x$  depends only on  $[\mathcal{E}]$ .

4.  $\mathcal{M}(S, v; \Theta)$  is a reflexive K3 surface and there exists an isomorphism

$$\mathcal{M}(S, v; \Theta) \simeq S$$

as K3 surfaces, which identifies  $[\mathcal{E}] \in \mathcal{M}(S, v; \Theta)$  with the point  $x$  determined by the above exact sequence.

We fix  $H = \Theta \times E$  and  $L = \ell \times E$ . Following Section A.4.1 there exists a fine relative moduli space  $Y \rightarrow E$  and a universal sheaf  $\mathcal{P}$  on  $Y \times_E X$  such that for every point  $t \in E$  the restriction  $\mathcal{P}_t$  is  $P_S$ . Moreover  $Y$  is a trivial fibration as well, that is  $Y \simeq \mathcal{M}(S, v; \Theta) \times E$ .

Put  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(L + 2H) \simeq \mathcal{O}_X((\ell + 2\Theta) \times E)$ .

**Proposition A.4.25.** *There exists a non split exact sequence*

$$0 \longrightarrow \pi_1^* \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{I}_\Delta \otimes \pi_2^* \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

*Proof.* Proposición A.4.25. □

The restriction to the fiber of  $\pi_1$  gives

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(\ell + 2\Theta) \longrightarrow \mathcal{N}_{|\{x\} \times S} \longrightarrow \mathcal{I}_x \otimes \mathcal{O}_S(\ell + 2\Theta) \longrightarrow 0.$$

By Proposition A.4.24  $\mathcal{N}_{|\{x\} \times S} \simeq \mathcal{E}(\Theta)$  where  $\mathcal{E}$  is a  $\mu$ -stable vector bundle, with respect to  $\Theta$ , on  $S$  with Mukai vector  $(2, l, -3)$ . Then  $\mathcal{N} \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_X(-H)$  is a sheaf on  $X \times_E X$ , flat over both factors, and for every point  $x \in X$  its restriction to the fiber  $\{x\} \times S$  corresponds to a point of  $\mathcal{M}(S, v; \Theta)$ . In this way we have a morphism

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\psi} Y \\ x &\mapsto \mathcal{N} \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_X(-H)|_{\{x\} \times S} \end{aligned}$$

which is an isomorphism as on each fiber is an isomorphism. Then

$$(\psi \times 1)^* \mathcal{P} \otimes \pi_1^* \mathcal{U} \simeq \mathcal{N} \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_X(-H)$$

for some line bundle  $\mathcal{U}$  on  $X$ .

**Proposition A.4.26.** *The integral functor*

$$\mathcal{S}: D^b(X) \rightarrow D^b(X)$$

defined by  $\mathcal{N} \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_X(-H)$  is an autoequivalence of  $D^b(X)$ , that is, a Fourier-Mukai transform.

*Proof.* Proposición 4.34. □

Taking in account the isomorphism  $\psi: X \simeq Y$  we can apply the spectral construction of Section A.4.2 directly to  $X$ . We fix a cover  $i: C \hookrightarrow X$  flat over  $B$  and  $\mathcal{L}$  a line bundle on  $C$ . Then  $\mathcal{E} = i_* \mathcal{L}$  is  $\text{WIT}_0$ - $\mathcal{S}$  and the Fourier-Mukai transform  $\widehat{\mathcal{E}}$  is a  $\mu$ -stable vector bundle on  $X$ . Since  $\mathcal{S}(\mathcal{E}) \simeq \Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{N}}(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{O}_X(-H)$ , the sheaf  $\mathcal{E}$  is also  $\text{WIT}_0$ - $\Phi_{X \rightarrow X}^{\mathcal{N}}$  and the Chern character of  $\widehat{\mathcal{E}}$  can be computed using Proposition A.4.25.

**Proposition A.4.27.** *The Chern characters of the transformed  $\widehat{\mathcal{E}}$  of  $\mathcal{E}$  with respect to  $S$  are:*

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}_0(\widehat{\mathcal{E}}) &= 2n \\ \mathrm{ch}_1(\widehat{\mathcal{E}}) &= nL + kf, \quad \text{with } k = 2\chi(\mathcal{L}) + [C] \cdot (L + 2H) \\ \mathrm{ch}_2(\widehat{\mathcal{E}}) &= \chi(\mathcal{L})\ell - ([C] \cdot (L + 2H))\Theta - 4nE - [C] \\ \mathrm{ch}_3(\widehat{\mathcal{E}}) &= -5\chi(\mathcal{L}) + H \cdot [C]. \end{aligned}$$

By Remark A.4.15, the spectral sheaves  $\widehat{\mathcal{E}}$  are vector bundles. Moreover, their restrictions to the generic fiber of  $S \times B \rightarrow B$  are semistable of degree zero by Proposition A.4.9. If in addition  $C$  is irreducible and reduced,  $\widehat{\mathcal{E}}$  is stable with respect to  $H + Mf$  for all  $M \geq M_0$  for an integer  $M_0$  depending only on  $H$  and  $[C]$  (cf. Theorems A.4.13 and A.4.19).





# Bibliografía

- [1] B. ANDREAS AND D. HERNÁNDEZ RUIPÉREZ, *Comments on  $N = 1$  heterotic string vacua*, Adv. Theor. Math. Phys., 7 (2003), pp. 751–786.
- [2] B. ANDREAS, D. HERNÁNDEZ RUIPÉREZ, AND D. SÁNCHEZ GÓMEZ, *Stable sheaves over K3 fibrations*, Internat. J. Math., (2009). To appear, also preprint math.AG/0802.2903.
- [3] B. ANDREAS, S.-T. YAU, G. CURIO, AND D. HERNÁNDEZ RUIPÉREZ, *Fibrewise  $T$ -duality for  $D$ -branes on elliptic Calabi-Yau*, J. High Energy Phys., (2001), pp. Paper 20, 13.
- [4] M. F. ATIYAH, *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Soc. (3), 7 (1957), pp. 414–452.
- [5] C. BARTOCCI, U. BRUZZO, AND D. HERNÁNDEZ RUIPÉREZ, *Fourier-Mukai and Nahm transforms in geometry and mathematical physics*. To appear in Progress in Mathematics, Birkhäuser, 2009.
- [6] ———, *A Fourier-Mukai transform for stable bundles on K3 surfaces*, J. Reine Angew. Math., 486 (1997), pp. 1–16.
- [7] L. BODNARCHUK, I. BURBAN, Y. DROZD, AND G.-M. GREUEL, *Vector bundles and torsion free sheaves on degenerations of elliptic curves*, in Global aspects of complex geometry, Springer, Berlin, 2006, pp. 83–128.
- [8] A. I. BONDAL AND D. O. ORLOV, *Semi orthogonal decomposition for algebraic varieties*. MPIM Preprint 95/15 (1995), math.AG/9506012.

- [9] —, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, *Compositio Math.*, 125 (2001), pp. 327–344.
- [10] T. BRIDGELAND, *Fourier-Mukai transforms for elliptic surfaces*, *J. Reine Angew. Math.*, 498 (1998), pp. 115–133.
- [11] —, *Equivalences of triangulated categories and Fourier-Mukai transforms*, *Bull. London Math. Soc.*, 31 (1999), pp. 25–34.
- [12] —, *Flops and derived categories*, *Invent. Math.*, 147 (2002), pp. 613–632.
- [13] T. BRIDGELAND AND A. MACIOCIA, *Fourier-Mukai transforms for K3 and elliptic fibrations*, *J. Algebraic Geom.*, 11 (2002), pp. 629–657.
- [14] I. BURBAN AND B. KREUSSLER, *Fourier-Mukai transforms and semistable sheaves on nodal Weierstraß cubics*, *J. Reine Angew. Math.*, 564 (2005), pp. 45–82.
- [15] —, *Derived categories of irreducible projective curves of arithmetic genus one*, *Compos. Math.*, 142 (2006), pp. 1231–1262.
- [16] A. CĂLDĂRARU, *Derived categories of twisted sheaves on elliptic threefolds*, *J. Reine Angew. Math.*, 544 (2002), pp. 161–179.
- [17] —, *Fiberwise stable bundles on elliptic threefolds with relative Picard number one*, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334 (2002), pp. 469–472.
- [18] P. CANDELAS, X. DE LA OSSA, A. FONT, S. KATZ, AND D. R. MORRISON, *Mirror symmetry for two parameter models. I*, in *Mirror symmetry, II*, vol. 1 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 483–543.
- [19] L. CAPORASO, J. COELHO, AND E. ESTEVES, *Abel maps of Gorenstein curves*. Preprint arXiv:0712.1457v1 [math.AG].
- [20] R. DONAGI, *Taniguchi lectures on principal bundles on elliptic fibrations*, in *Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997)*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1998, pp. 33–46.

- [21] S. K. DONALDSON, *Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. London Math. Soc. (3), 50 (1985), pp. 1–26.
- [22] ———, *Polynomial invariants for smooth four-manifolds*, Topology, 29 (1990), pp. 257–315.
- [23] S. K. DONALDSON AND P. B. KRONHEIMER, *The geometry of four-manifolds*, The Clarendon Press – Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [24] Y. A. DROZD AND G.-M. GREUEL, *Tame and wild projective curves and classification of vector bundles*, J. Algebra, 246 (2001), pp. 1–54.
- [25] R. FRIEDMAN, J. W. MORGAN, AND E. WITTEN, *Vector bundles and F theory*, Comm. Math. Phys., 187 (1997), pp. 679–743.
- [26] ———, *Vector bundles over elliptic fibrations*, J. Algebraic Geom., 8 (1999), pp. 279–401.
- [27] W. FULTON, *Intersection theory*, vol. 2 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [28] ———, *Intersection theory*, vol. 2 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, second ed., 1998.
- [29] D. GIESEKER, *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface*, Ann. of Math. (2), 106 (1977), pp. 45–60.
- [30] A. GROTHENDIECK, *Cohomologie  $l$ -adique et fonctions  $l$* , in Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I, Springer-Verlag, Berlin, 1977, pp. 351–371. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965–1966 (SGA 5), Exposé VIII. Dirigé par A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 589.

- [31] R. HARTSHORNE, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [32] D. HERNÁNDEZ RUIPÉREZ, A. C. LÓPEZ MARTÍN, D. SÁNCHEZ GÓMEZ, AND C. TEJERO PRIETO, *Moduli spaces of semistable sheaves on singular genus one curves*, (2009). preprint math.AG/0806.2034.
- [33] D. HERNÁNDEZ RUIPÉREZ, A. C. LÓPEZ MARTÍN, AND F. SANCHO DE SALAS, *Fourier-Mukai transform for Gorenstein schemes*, *Adv. Math.*, 211 (2007), pp. 594–620.
- [34] —, *Relative integral functors for singular fibrations and singular partners*, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, (2008). To appear. Also arXiv:math/0610319.
- [35] D. HERNÁNDEZ RUIPÉREZ AND J. M. MUÑOZ PORRAS, *Stable sheaves on elliptic fibrations*, *J. Geom. Phys.*, 43 (2002), pp. 163–183.
- [36] L. HILLE AND M. D. VAN DEN BERGH, *Fourier-Mukai transforms*, in *Handbook on tilting theory*, vol. 332 of London Math. Soc. Lecture Note Series, Cambridge Univ. Press, 2007.
- [37] D. HUYBRECHTS, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press – Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [38] —, *Derived and abelian equivalence of  $k3$  surfaces*, *J. Algebraic Geom.*, (to appear). also arXiv:math.AG/0604150.
- [39] D. HUYBRECHTS AND M. LEHN, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.
- [40] C. P. KAHN, *Reflexive modules on minimally elliptic singularities*, *Math. Ann.*, 285 (1989), pp. 141–160.
- [41] S. KOBAYASHI, *Differential geometry of complex vector bundles*, vol. 15 of Publications of the Mathematical Society of Japan, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987. Kanô Memorial Lectures, 5.

- [42] K. KODAIRA, *On compact analytic surfaces. II, III*, Ann. of Math. (2) 77 (1963), 563–626; *ibid.*, 78 (1963), pp. 1–40.
- [43] M. KONTSEVICH, *Homological algebra of mirror symmetry*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Basel, 1995, Birkhäuser, pp. 120–139.
- [44] J. LI, *Algebraic geometric interpretation of Donaldson’s polynomial invariants*, J. Differential Geom., 37 (1993), pp. 417–466.
- [45] A. C. LÓPEZ MARTÍN, *Simpson Jacobians of reducible curves*, J. Reine Angew. Math., 582 (2005), pp. 1–39.
- [46] ———, *Relative Jacobians of elliptic fibrations with reducible fibers*, J. Geom. Phys., 56 (2006), pp. 375–385.
- [47] M. MARUYAMA, *Moduli of stable sheaves. I*, J. Math. Kyoto Univ., 17 (1977), pp. 91–126.
- [48] ———, *Moduli of stable sheaves. II*, J. Math. Kyoto Univ., 18 (1978), pp. 557–614.
- [49] R. MIRANDA, *Smooth models for elliptic threefolds*, in The birational geometry of degenerations (Cambridge, Mass., 1981), vol. 29 of Progr. Math., Birkhäuser Boston, Mass., 1983, pp. 85–133.
- [50] ———, *The basic theory of elliptic surfaces*, Dottorato di Ricerca in Matematica. [Doctorate in Mathematical Research], ETS Editrice, Pisa, 1989.
- [51] Y. MIYAOKA, *The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety*, in Algebraic geometry, Sendai, 1985, vol. 10 of Adv. Stud. Pure Math., North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 449–476.
- [52] S. MUKAI, *Duality between  $D(X)$  and  $D(\hat{X})$  with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J., 81 (1981), pp. 153–175.

- [53] —, *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or  $K3$  surface*, *Invent. Math.*, 77 (1984), pp. 101–116.
- [54] —, *On the moduli space of bundles on  $K3$  surfaces. I*, in *Vector bundles on algebraic varieties* (Bombay, 1984), *Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math.*, vol. 11, *Tata Inst. Fund. Res.*, Bombay, 1987, pp. 341–413.
- [55] D. MUMFORD, *Projective invariants of projective structures and applications*, in *Proc. Internat. Congr. Mathematicians* (Stockholm, 1962), *Inst. Mittag-Leffler*, Djursholm, 1963, pp. 526–530.
- [56] —, *Geometric invariant theory*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge, Band 34*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [57] D. S. NAGARAJ AND C. S. SESHADRI, *Degenerations of the moduli spaces of vector bundles on curves. I*, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 107 (1997), pp. 101–137.
- [58] —, *Degenerations of the moduli spaces of vector bundles on curves. II. Generalized Gieseker moduli spaces*, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 109 (1999), pp. 165–201.
- [59] T. ODA, *Vector bundles on an elliptic curve*, *Nagoya Math. J.*, 43 (1971), pp. 41–72.
- [60] K. G. O'GRADY, *Algebraic-geometric analogues of Donaldson's polynomials*, *Invent. Math.*, 107 (1992), pp. 351–395.
- [61] D. O. ORLOV, *Equivalences of derived categories and  $K3$  surfaces*, *J. Math. Sci. (New York)*, 84 (1997), pp. 1361–1381. *Algebraic geometry*, 7.
- [62] —, *Derived categories of coherent sheaves on abelian varieties and equivalences between them*, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 66 (2002), pp. 131–158.
- [63] A. POLISHCHUK, *Abelian varieties, theta functions and the Fourier transform*, *Cambridge Tracts in Mathematics*, vol. 153, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

- [64] F. SANCHO DE SALAS, *Koszul complexes and fully faithful functors*. Preprint, arXiv:math.AG/0712.0261.
- [65] P. SEIDEL AND R. THOMAS, *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves*, *Duke Math. J.*, 108 (2001), pp. 37–108.
- [66] C. S. SESHADRI, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, vol. 96 of *Astérisque*, Société Mathématique de France, Paris, 1982. Notes written by J.-M. Drezet from a course at the École Normale Supérieure, June 1980.
- [67] ———, *Degenerations of the moduli spaces of vector bundles on curves*, in *School on Algebraic Geometry (Trieste, 1999)*, vol. 1 of *ICTP Lect. Notes*, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2000, pp. 205–265.
- [68] C. T. SIMPSON, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 79 (1994), pp. 47–129.
- [69] E. STRICKLAND, *On the conormal bundle of the determinantal variety*, *J. Algebra*, 75 (1982), pp. 523–537.
- [70] F. TAKEMOTO, *Stable vector bundles on algebraic surfaces. II*, *Nagoya Math. J.*, 52 (1973), pp. 173–195.
- [71] R. P. THOMAS, *A holomorphic Casson invariant for Calabi-Yau 3-folds, and bundles on K3 fibrations*, *J. Differential Geom.*, 54 (2000), pp. 367–438.
- [72] B. TOËN, *The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory*, *Invent. Math.*, 167 (2007), pp. 615–667.
- [73] L. W. TU, *Semistable bundles over an elliptic curve*, *Adv. Math.*, 98 (1993), pp. 1–26.
- [74] J.-L. VERDIER, *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*, *Astérisque*, (1996), pp. xii+253 pp. (1997). With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.

[75] K. YOSHIOKA, *A note on Fourier-Mukai transform.* math.AG/0112267.



# Índice alfabético

- Buenos cocientes, 95
- Cohen-Macaulay, 24
- Complejo
  - de dimensión homológica finita sobre  $T$ , 28
  - WIT, 33
- Construcción espectral, 20
- Datos espectrales, 21
- Dimensión de un haz, 42
- Discriminante de un haz, 104
- Espacio de módulos
  - fino, 48
  - grosero, 47
- Fibración
  - de género uno, 15, 74
  - elíptica, 20
  - en  $K3$ , 91
- Fibrados espectrales, 21
- Fibras de Kodaira, 16
- Filtración
  - de Harder-Narasimhan, 45
  - de Jordan-Hölder, 45
- Fourier Mukai
  - functor, 30
  - transformada, 30
- Functor
  - integral, 27
  - integral relativo, 33
  - twist, 38
- Functor de módulos de haces semiestables, 46
- Gorenstein, 24
- Grado de un haz, 42
- Grado relativo, 95
- Haz
  - $\mu$ -estable, 44
  - $\mu$ -semi estable, 44
  - de dimensión pura, 44
  - de torsión, 44
  - espectral, 97
  - estable, 44, 46
  - libre de torsión, 44
  - semi estable, 44, 46
  - simple, 46
  - universal, 48
  - WIT, 33
- Haz dualizante, 24
- Jacobiana de Simpson, 76
- Multigrado de un haz, 56
- Multiplicidad de un haz, 42
- Multirango de un haz, 56

Núcleo de un functor integral, 27

Objeto esférico, 37

Pendiente

de Simpson, 42

relativa, 95

Pendiente de un haz, 43

Polinomio de Hilbert , 42

de un complejo, 65

reducido, 42

Revestimiento espectral, 20, 97

S-equivalencia, 46

Sucesión espectral de Mukai, 34

Superficie K3 , 43

reflexiva, 112

Vector de Mukai , 92

isótropo, 93

primitivo, 93