MEMORIA DE ACTIVIDADES

INNOVACIÓN DOCENTE PARA EL CURSO 2008/2009.

PROYECTO: Adecuación de las enseñanzas básicas del área de matemática aplicada en el Grado de Ingeniería Mecánica de la E.P.S. de Zamora a las directrices del E.E.E.S.

CÓDIGO: ID/0076

RESPONSABLE: HIGINIO RAMOS CALLE. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

MAYO DE 2009

El proceso de convergencia europea en materia de enseñanza universitaria en lo que se ha denominado el Espacio Europeo de Educación Superior (E.E.E.S.) es un hecho que sentimos todos los implicados en esta enseñanza cada día como una realidad más próxima. Cada vez más, el profesorado universitario se implica en procesos de innovación docente, y las propias universidades ofrecen a sus profesores incentivos para que así suceda como ha sido el caso de esta convocatoria de la Universidad de Salamanca.

En general hay que señalar la buena disposición de los docentes ante esta nueva situación, aunque ante cualquier proceso de cambio siempre hay quien muestra reticencias. Hemos de insistir en que se requiere un esfuerzo añadido que generalmente no se ve recompensado. Por ello hay que aplaudir la buena disposición de la Universidad de Salamanca y pedirla que recompense en mayor medida a quienes se muestran abiertos y activos en esta faceta del conocimiento.

En este contexto quiero destacar las inquietudes que vienen mostrando desde el curso 2005-2006, en cuanto a las innovaciones metodológicas y los procesos de cambio en que están inmersos activamente todos los miembros del equipo que ha desarrollado este proyecto, y que culminarán con la implantación del Grado en Ingeniería Mecánica que sustituirá a la actual titulación de Ingeniero Técnico Industrial Mecánico en la Escuela Politécnica Superior de Zamora, previsiblemente el curso siguiente.

En lo que sigue estableceré dos apartados, el primero de ellos para mostrar una breve reseña de las actividades formativas relacionadas con la cuestión planteada en que han participado los miembros de este proyecto, y el segundo donde se describirán las actividades desarrolladas al amparo del mismo.

CENTRO DE APLICACIÓN DEL PROYECTO:

E.P.S. DE ZAMORA

MATERIAS/ TITULACIÓN:

MATEMÁTICAS/ GRADO DE INGENIERÍA MECÁNICA

CENTROS Y DEPARTAMENTOS IMPLICADOS:

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE ZAMORA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

PARTICIPANTES:

	Departamento	Categoría	E-mail
HIGINIO RAMOS CALLE	MATEMÁTICA APLICADA	TU	higra@usal.es
JESÚS VIGO AGUIAR	MATEMÁTICA APLICADA	TU	jvigo@usal.es
CESÁREO LORENZO GONZÁLEZ	MATEMÁTICA APLICADA	TEU	cesareo@usal.es
ANTONIO GARCÍA-MUÑOZ Y LÓPEZ DE LA NIETA	MATEMÁTICA APLICADA	TEU	agar@usal.es

ACTIVIDADES DE FORMACIÓN DE LOS MIEMBROS DEL EQUIPO .

ASISTENCIA A JORNADAS y CONGRESOS RELACIONADOS CON EL E.E.E.S.

- NUEVAS TITULACIONES Y NUEVOS MÉTODOS DE ENSEÑANZA Y DE EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE EN EL ESPACIO EUROPEO DE EDUCACIÓN SUPERIOR (FUNDACIÓN UNIVERSIDAD DE VERANO DE CASTILLA Y LEÓN). Zamora, 6-9 Octubre de 2004

- EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE EN EL MARCO DEL ESPACIO EUROPEO DE EDUCACIÓN SUPERIOR (UNIVERSIDAD DE SALAMANCA). Salamanca, 15 Abril 2005.

- EL ESPACIO EUROPEO DE EDUCACIÓN SUPERIOR Y LA UNIVERSIDAD DEL SIGLO XXI (UNIVRSIDAD DE SALAMANCA). Zamora 12-14 Septiembre de 2005.

- NUEVAS METODOLOGÍAS DOCENTES EN EL E.E.E.S. (UNIVERSIDAD DE SALAMANCA). Salamanca 18 Noviembre de 2005.

- LOS PROCESOS DE INNOVACIÓN DIDÁCTICA EN EL MARCO DEL ESPACIO EUROPEO DE EDUCACIÓN SUPERIOR. Salamanca 16 Diciembre de 2005

- PRIMERAS JORNADAS DE INNOVACIÓN EDUCATIVA DE LA ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE ZAMORA. LAS ENSEÑANZAS TÉCNICAS ANTE EL RETO DEL ESPACIO EUROPEO DE EDUCACIÓN SUPERIOR. Zamora 20-22 de Junio de 2006.

- SEGUNDAS JORNADAS DE INNOVACIÓN EDUCATIVA DE LA ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE ZAMORA. Zamora 20-23 de Junio de 2007.

- CURSO EXTRAORDINARIO: ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS Y DE EVALUACIÓN EN LA SOCIEDAD DEL CONOCIMIENTO PARA LA ADAPTACIÓN AL E.E.E.S. Salamanca, 1-10/3-12 2007

- PROGRAMAS E INSTRUMENTOS DE APOYO A LA TRANSFERENCIA DE CONOCIMIENTO. Salamanca, 15-7-2008

- CURSO CERO: MATEMÁTICAS Y DIBUJO TÉCNICO EN INGENIERÍAS TÉCNICAS. Septiembre 2006 y Septiembre 2007

PONENCIAS PRESENTADAS EN CONGRESOS RELACIONADOS CON EL E.E.E.S.

- *La asignatura de Cálculo ante el Espacio Europeo de Educación Superior: una propuesta en la Escuela Politécnica Superior de Zamora.* ACTAS DE LAS PRIMERAS JORNADAS DE INNOVACIÓN EDUCATIVA DE LA ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE ZAMORA. LAS ENSEÑANZAS TÉCNICAS ANTE EL RETO DEL ESPACIO EUROPEO DE EDUCACIÓN SUPERIOR. Zamora 20-22 de Junio de 2006. 11pág.

- *La asignatura de Álgebra ante el Espacio Europeo de Educación Superior: una propuesta en la Escuela Politécnica Superior de Zamora.* ACTAS DE LAS PRIMERAS JORNADAS DE INNOVACIÓN EDUCATIVA DE LA ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE ZAMORA. LAS ENSEÑANZAS TÉCNICAS ANTE EL RETO DEL ESPACIO EUROPEO DE EDUCACIÓN SUPERIOR. Zamora 20-22 de Junio de 2006. 10 pág.

- *Hacia Una Nueva Realidad Docente: Propuestas Para el Cambio en el Área De Matemática Aplicada en la Escuela Politécnica Superior de Zamora.* ACTAS DE LAS II JORNADAS DE INNOVACIÓN EDUCATIVA DE LA ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE ZAMORA. Zamora 20-23 de Junio de 2007. 7 pág.

- *¿Todavía se necesitan matemáticas en los estudios de Ingeniería?.* ACTAS DE LAS II JORNADAS DE INNOVACIÓN EDUCATIVA DE LA ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE ZAMORA. Zamora 20-23 de Junio de 2007. 9 pág.

PARTICIPACIÓN EN PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN RELACIONADOS CON EL E.E.E.S.

- Proyecto US22/05 de la Junta de Castilla y León: *"Adecuación de los estudios de Ingeniería Técnica Industrial Mecánica al EEES en la EPS de Zamora".*

- Proyecto: Métodos docentes para la enseñanza de ecuaciones diferenciales. Entidad financiadora: Junta de Castilla y León. 2004-2007

- Proyecto US30/06 de la Junta de Castilla y León: *"Elaboración de Recursos Didácticos para las titulaciones de Ingeniería en la EPS de Zamora".*

EVALUACIÓN POSITIVA DE PROYECTOS DE INNOVACION DOCENTE POR LA UNIDAD DE EVALUACIÓN DE LA CALIDAD

El responsable de este proyecto ha obtenido evaluación positiva por la UEC de la Universidad de Salamanca en las asignaturas:

- CÁLCULO (I.T.I.MECANICA) CURSO 2005-06
- CÁLCULO INTEGRAL (I.T. INFORMATICA DE GESTION) CURSO 2005-2006
- CÁLCULO (I.T.I.MECANICA) CURSO 2006-07
- CÁLCULO INTEGRAL (I.T. INFORMATICA DE GESTION) CURSO 2006-2007

PARTICIPACIÓN EN COMISIONES RELACIONADAS CON LOS ESTUDIOS DE GRADO

D. Cesáreo Lorenzo, miembro del equipo, ha participado en las siguientes comisiones:

- Comité de Autoevaluación de la Titulación de Ingeniero Técnico Industrial (mecánica) de la E.P.S. de Zamora.
- Coordinador de la Comisión encargada de la elaboración de los Planes de Estudios de la Titulacion de Ingeniero Mecánico en la E.P.S. de Zamora . Constituida el 01/10/2007
- Responsable del Proyecto de Determinación del Perfil de Egreso de la Titulación de Ingeniero Mecánico . 01/10/2007

ACTIVIDADES DESARROLLADAS.

REALIZACIÓN DE UNA ENCUESTA A LOS PROFESORES DE LA TITULACIÓN PARA DETERMINAR LAS NECESIDADES EN RELACIÓN CON LAS ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS

Los actuales programas de las diferentes asignaturas del área básica de matemáticas son muy extensos, y ello hace que se dedique un tiempo que en general resulta escaso para el desarrollo de los temas. Por ello, hemos considerado primordial realizar una encuesta al profesorado de la titulación de Ingeniería Técnica Mecánica para determinar cuales son los temas del currículo de matemáticas que necesitarán sus alumnos dentro de la idea de las matemáticas como asignatura básica pero entendida como una herramienta para las otras asignaturas.

A lo largo de los últimos cursos hemos establecido contacto con diferentes profesores de la titulación para precisar cuáles son sus necesidades en lo que respecta a la docencia impartida por el Departamento de Matemática Aplicada. El alcance de la encuesta y los diversos contactos se pondrá de manifiesto cuando se apruebe el Proyecto de Grado en Ingeniería Mecánica y se desarrollen los temas de las asignaturas de matemáticas, las cuales previsiblemente quedarán de la forma recogida en el cuadro que sigue. Se señalan el número de créditos ECTS con que cuenta cada asignatura, el carácter de la asignatura, en este caso 3 obligatorias y una optativa, y finalmente el curso en que se imparte cada una de ellas y el semestre correspondiente. Nótese que la asignatura optativa sobre Introducción y Manejo del Programa Mathematica se ha situado en cuarto curso; en realidad desde el primer curso ya se introduce a los alumnos en este software para que puedan utilizarlo, pero por la conveniencia a la hora de repartir los créditos en los distintos cursos las asignaturas optativas han debido situarse en cuarto curso. En esta situación más que Introducción al programa debería llamarse Técnicas Avanzadas en el uso del Mathematica o algo así. Trataremos de abordar esta cuestión antes de la aprobación definitiva del plan de estudios.

Asignatura 1.1

Denominación de la asignatura					
Cálculo para Ingeniería					
Créditos ECTS	6	Carácter	Obligatoria	Se imparte en	C1-S1

Asignatura 1.2

Denominación de la asignatura					
Algebra y Geometría para Ingeniería Cálculo para Ingeniería					
Créditos ECTS	6	Carácter	Obligatoria	Se imparte en	C1-S2

Asignatura 1.3

Denominación de la asignatura					
Ampliación de Matemáticas					
Créditos ECTS	6	Carácter	Obligatoria	Se imparte en	C2-S1-S2

Asignatura 1.4

Denominación de la asignatura					
Introducción y manejo del P. Mathematica					
Créditos ECTS	3	Carácter	Optativa	Se imparte en	C4-S2

REALIZACIÓN DE PRUEBAS ESCRITAS OCASIONALES

La inercia de los alumnos les lleva en muchas ocasiones a dejar abandonada la materia hasta unos pocos días antes del examen que tradicionalmente se venía haciendo, con los consiguientes desastrosos resultados. Consideramos que la realización de controles periódicos comunicados previamente a los alumnos cumple un doble objetivo:

-servir de estímulo a los alumnos para que estudien la materia que será objeto de la prueba,

-establecer un mecanismo de control con la antelación suficiente para poder adoptar, en su caso, las medidas oportunas.

Y, naturalmente, servirán para determinar la calificación final. Estos controles se han venido desarrollando a lo largo del curso en las distintas asignaturas.

PROPUESTA DE TAREAS PARA REALIZAR INDIVIDUALMENTE

Con estas tareas se trata de nuevo de mantener la actividad y el interés del alumno por la asignatura. Para ello se proponen ocasionalmente cuestiones, tareas, problemas,... que han de resolver de forma individual que el profesor recoge en la fecha indicada y que posteriormente se debaten y corrigen en clase. Y de nuevo, también esta actividad contribuye al proceso de la evaluación. La actividad en este sentido este curso ha sido escasa por cuanto la limitación del tiempo disponible ha hecho que insistiéramos más en otras cuestiones entre las que señalamos: tareas bibliográficas y de búsqueda de documentación, desarrollo de trabajos y la iniciación a la investigación.

REALIZACIÓN DE UN TRABAJO EN GRUPO

Desde el curso 2004-2005 se han venido proponiendo a los alumnos la realización opcional de un trabajo en grupo, el cual contribuía a la nota final de la asignatura. Se buscaba un complemento a la evaluación y que los alumnos se fueran adaptando a nuevas formas de trabajo. La experiencia resultó positiva para aquellos que decidieron participar. Durante el presente curso 2008-2009 la realización del trabajo tiene carácter obligatorio, y así se recoge en la guía docente y en la página web del Departamento correspondiente a la E.P.S. de Zamora (www.usal.es/dmazamora). El tema del trabajo es fruto del consenso entre el profesor con cada grupo de trabajo. Los objetivos que se consiguen con esta actividad se pueden resumir en:

-favorecer la interrelación de los alumnos del grupo y fomentar las tareas colaborativas (se ha establecido un máximo de cuatro alumnos por grupo)

-potenciar el uso de las tutorías, pues el seguimiento continuado de la evolución de los trabajos obliga a un contacto más fluido entre profesor y alumnos (hay que señalar que con esta actividad el uso de las tutorías se ha visto incrementado en torno a un 60%)

-fomentar la introducción a la investigación en los alumnos, por cuanto muchos trabajos se refieren a temas novedosos para ellos sobre los que tienen que buscar información, sacar conclusiones y hacer alguna aportación.

Encontramos una limitación en lo que se refiere al desarrollo de esta actividad relacionada con el excesivo número de alumnos (la asignatura más numerosa corresponde a un total de 112 alumnos matriculados): el trabajo debería ser expuesto para así tener un conocimiento más exacto del nivel de dominio que tienen sobre el mismo, y para tener más elementos para su calificación. Por el momento ha sido imposible llevarlo a cabo, pero esperamos que con el nuevo plan de estudios se agrupen en clases magistrales las enseñanzas teóricas y se formen grupos más pequeños para las clases prácticas, permitiendo un mejor uso del tiempo dedicado a docencia. De esta forma conseguiríamos un uso más eficaz del tiempo disponible, y parte de él podría ser dedicado a eliminar la limitación señalada.

Los trabajos propuestos son de dos tipos, de un lado están los trabajos que buscan reforzar y completar los conocimientos adquiridos en el aula, y de otro lado están los trabajos de carácter investigador, donde se propone al alumno que estudie el estado actual de un tema concreto y analice su posible mejora, las posibles aplicaciones prácticas, comparación con otras técnicas, etc. A continuación mostramos la relación de algunos de los trabajos realizados dentro del Área de Matemática Aplicada en la especialidad de Ingeniero Técnico Industrial Mecánico durante el curso 2007-2008:

1. La transformada Z
2. La telemetría en alta competición
3. El método de cambio de variable en integración
4. Estudio de las funciones Beta y Gamma
5. El método de Numerov
6. Métodos adaptados para la integración de funciones oscilatorias
7. Polinomios de interpolación de Hermite
8. Integración numérica por el método de Gauss

9. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales
10. Ecuaciones diferenciales aplicadas a problemas de la Física
11. Curvas de Bézier
12. Interpolación por splines
13. Evaluación de integrales de funciones oscilatorias
14. Redes neuronales e inteligencia artificial
15. Ecuaciones de Bessel aplicadas a la transmisión del calor
16. Reglas del Trapecio y de Simpson modificadas
17. Método de Müller
18. Cálculo de integrales de superficie e integrales de volumen
19. Desarrollo de un algoritmo automático en Mathematica para la integración por partes
20. Cálculos del centro de gravedad
21. Métodos numéricos para la resolución de integrales impropias
22. Ecuaciones diferenciales aplicadas a la resistencia de materiales
23. Método de integración de Romberg. Programación en Mathematica.
24. Aplicación de la transformada de Laplace a la resolución de ecuaciones diferenciales en problemas de ingeniería
25. Interpolación de funciones de dos variables
26. Programación en Mathematica del método predictor corrector de Adams-Moulton
27. Modelos matemáticos aplicados al cálculo de vigas simples

La misma actividad se ha seguido utilizando durante el presente curso y la siguiente lista recoge algunos de los trabajos propuestos dentro del Área de Matemática Aplicada durante el curso 2008-2009:

1. La integral de línea y el Teorema de Riemann-Green. Aplicaciones
2. El método de Monte-Carlo y su aplicación para el cálculo de integrales múltiples.
3. Determinación automática de factores integrantes mediante el programa Mathematica.

4. Método numéricos para la resolución de problemas de valor inicial de segundo orden.

5. Métodos numéricos para la resolución de integrales impropias.

6. La integral de Riemann y aplicaciones.

7. Estudio comparado de los métodos de Romberg y de Gauss-Kronrod.

8. Uso de las ecuaciones diferenciales en Ingeniería.

9. La integral múltiple.

10. El método de Broyden.

11. El método de la secante y variantes.

12. Estudio de las funciones continuas.

13. Acondicionamiento acústico y matemáticas.

14. La Regla de L'Hôpital y sus aplicaciones.

15. Métodos de cálculo de primitivas mediante sustituciones.

16. Variantes del método de Newton para la resolución de ecuaciones.

17. Métodos de cálculo de primitivas.

18. Máximos y mínimos de funciones de una y varias variables.

19. Estudio sobre la representación de curvas planas en coordenadas polares y en forma paramétrica.

20. Estudio de las funciones Beta y Gamma y sus aplicaciones.

21. Los teoremas de los valores medios.

22. Resolución de ecuaciones diferenciales mediante cambios de variables.

23. Métodos numéricos de cálculo de integrales oscilatorias.

24. Métodos de interpolación de funciones de dos variables.

25. Los límites y la continuidad de funciones de varias variables.

26. Criterios de primalidad.

27. Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de orden superior.

28. Límites de funciones de una y dos variables.

29. Momentos de Inercia y Centros de Gravedad.

SESIONES DE BÚSQUEDA DE MATERIAL BIBLIOGRÁFICO

Con ocasión de la obligatoriedad de realizar el trabajo señalado en el punto anterior se han desarrollado sesiones con grupos de alumnos para informarles sobre las técnicas de búsqueda bibliográfica. Se les ha mostrado la forma de acceder a las bases de datos a disposición de los miembros de la Universidad de Salamanca y los mecanismos de búsqueda. Esta tarea constituye en sí misma una primera introducción a la investigación por cuanto le hace recabar información actual sobre métodos matemáticos utilizados en la Ingeniería para ver sus debilidades y puntos fuertes y contrastar su utilidad.

UTILIZACIÓN CRECIENTE DE MEDIOS INFORMÁTICOS

Las nuevas tecnologías deben servir de apoyo para la docencia. Estamos tratando de que así sea, y las actividades desarrolladas en ese sentido se manifiestan en los siguientes aspectos:

- el uso del correo electrónico como medio de intercambio entre profesor y alumno, que cada vez es más utilizado

- la utilización de software matemático con fines didácticos. En este sentido el uso del programa Mathematica, del que dispone licencia de campus la Universidad de Salamanca, es utilizado cada vez más en las clases. De hecho, varios de los trabajos obligatorios aludidos anteriormente han acompañado la parte teórica con algoritmos desarrollados por los alumnos con este software.

La limitación que señalábamos anteriormente en cuanto al elevado número de alumnos es también de aplicación aquí en cuanto a la utilización sistemática de las aulas de informática para acompañar la docencia de las materias de matemática aplicada. Pero en cuanto las condiciones sean más favorables este será un objetivo prioritario a conseguir. De hecho, es un recurso utilizado en las clases por el profesorado para ejemplificar los métodos y otras cuestiones de los temas tratados.

- Estamos utilizando la plataforma informática de intercambio entre los alumnos y el profesor que la Universidad de Salamanca ha puesto a disposición de profesores y alumnos: STUDIUM. Las distintas asignaturas tienen su correspondiente curso en esta plataforma desde donde se pueden descargar apuntes, colecciones de problemas, ejemplos desarrollados con el programa Mathematica, exámenes, etc. Es asimismo una forma de intercambio de ideas a través de los foros que se plantean.

UN NUEVO CRITERIO PARA EL PROCESO EVALUADOR

Al final del proceso de enseñanza se nos exige una calificación (ahora numérica) con que señalar los logros alcanzados por el alumno. Supeditar la valoración de esos logros a una sola calificación obtenida en un único examen final puede ser muy arriesgado, y seguramente en ocasiones injusto. Por ello hemos propuesto la realización de tareas a lo largo del curso, la realización de pruebas parciales (que pueden ser más según requiera la situación) y la realización del trabajo señalado anteriormente, además del examen final. Todo ello se tiene en cuenta para establecer la calificación final de los alumnos según la fórmula

$$NotaFinal = \frac{4PF + 3TF + \frac{1'5}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i + \frac{1'5}{m}\sum_{i=1}^{m} P_i}{10},$$

donde PF, TF, T_i, P_i son las valoraciones sobre 10 de los distintos aspectos. PF se refiere a la prueba final escrita (que en ocasiones pueden ser más de una), TF al trabajo obligatorio, T_i a los distintos trabajos prácticos que se han propuesto a lo largo del curso (obtención de la demostración de un teorema, desarrollo de alguna cuestión práctica de especial dificultad,..) y P_i a la prueba escrita que se ha realizado durante este curso (que aunque este año sólo ha sido una, considero que deben ser más).

Esta forma de obtener la calificación final resulta adecuada para valorar el trabajo a lo largo del curso y ha sido acogida favorablemente por los alumnos.

REALIZACIÓN DE UNA ENCUESTA DE SATISFACCIÓN A LOS ALUMNOS

Aunque aún no se ha realizado el examen final, en el curso pasado junto con el examen de la asignatura de Cálculo se les proporcionó un cuestionario para conocer el grado de satisfacción que mostraban en relación con la asignatura. Fue contestada por un total de 61 individuos. A continuación se recogen las preguntas de la encuesta realizada con información sobre las respuestas a algunas de las preguntas.

CUESTIONARIO SOBRE LA ASIGNATURA

1. ¿Cuánto tiempo dedicas semanalmente al estudio de la asignatura?
2. Cuándo no entiendes algo, ¿lo preguntas en clase?
3. ¿Acudes a la tutoría para resolver las dificultades que encuentras?
4. Si las dos respuestas anteriores son negativas, indica las causas por las que no preguntas o no acudes a tutoría.
5. ¿Te has presentado a las pruebas opcionales que se han realizado?
6. ¿Has entregado los trabajos que periódicamente se proponían en clase?
7. ¿Encuentras interesante el realizar un trabajo que sirva para determinar la nota final?

8. Las preguntas de los exámenes y pruebas realizadas ¿se corresponden con lo visto en clase?
9. ¿Asistes a la corrección de los exámenes para ver cómo se resuelven?
10. Señala las dificultades que encuentras en la asignatura y las propuestas que creas oportunas para mejorarla.

En la tabla que sigue aparecen las frecuencias de respuestas positivas y negativas a los distintos ítems.

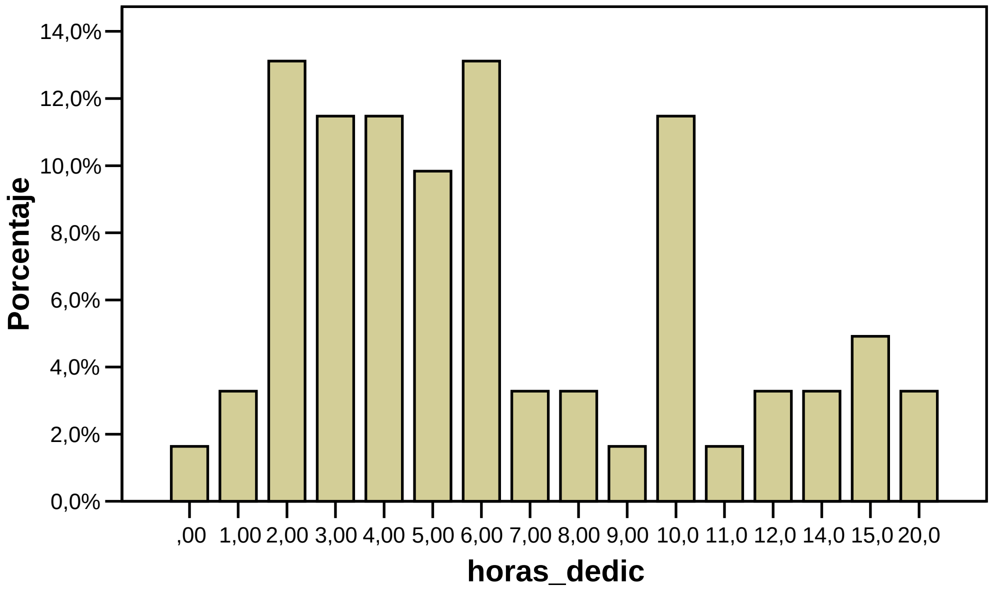
	2	**3**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
SÍ	38	35	30	31	59	59	36
NO	23	26	31	30	2	2	25

A continuación se hacen algunas observaciones sobre las respuestas obtenidas, particularmente en relación con las cuestiones 4 y 10 sobre la no asistencia a tutorías y las dificultades que encuentran en la asignatura.

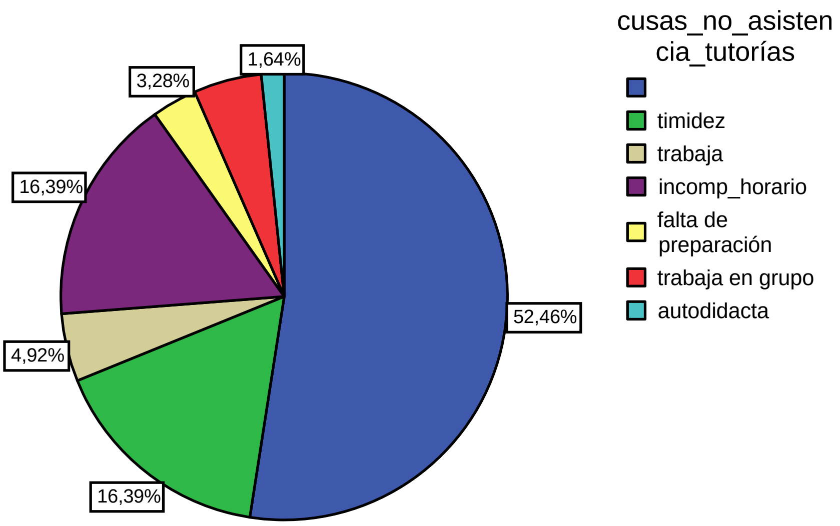
La tabla siguiente recoge los datos estadísticos sobre la primera pregunta:

N	Válidos	61
	Perdidos	0
Media		6,5902
Mediana		5,0000
Moda		2,00
Desv. típ.		4,62016
Asimetría		1,090
Error típ. de asimetría		,306
Curtosis		,793
Error típ. de curtosis		,604
Mínimo		,00
Máximo		20,00

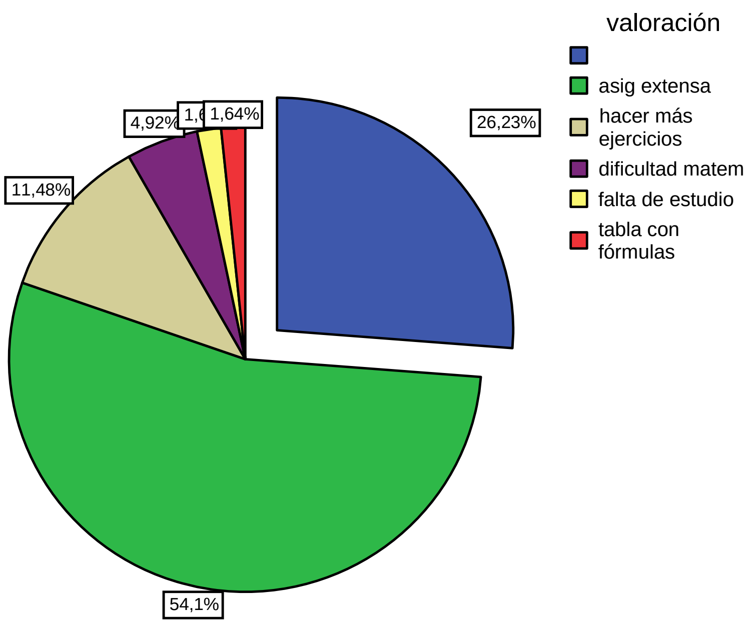
Observamos que la media de horas dedicadas semanalmente a la asignatura está en torno a seis horas y media, lo cual debiera ser suficiente para la mayoría. Llama la atención, no obstante, el hecho de que haya alumnos que dedican cero horas al estudio de la asignatura. En el gráfico de barras siguiente se aprecian con detalle estos datos.



Otro punto que hay que destacar son las causas de no asistencia a tutorías. En el gráfico siguiente aparece un 52,46% de alumnos, que aunque no indican una causa concreta, sí manifiestan tener una especial dificultad para las matemáticas. Precisamente, parte de esa dificultad que encuentran podría paliarse con la asistencia a tutorías. En la nueva docencia que se avecina propugnamos el uso de seminarios algunos de los cuales deberían ir dirigidos a los alumnos menos capacitados para orientarles sobre cómo superar las distintas asignaturas de la materia básica de matemáticas.



En cuanto a las dificultades particulares y propuestas de mejora, hay un 26,23% que no contesta al respecto. Destacar que un elevado porcentaje considera que el temario de la asignatura es muy extenso. Compartimos esa opinión, y a partir de la encuesta realizada a los profesores se intentará en un futuro próximo incidir más en los temas que van a resultar necesarios en otras asignaturas, y buscar la participación del alumno para la formación en otros temas del temario que se consideren menos importantes.



FORMACIÓN EN EL PROCESADOR LATEX Y DESARROLLO DEL CURSO EXTRAORDINARIO: EDICIÓN DE DOCUMENTOS CIENTÍFICOS CON LATEX (SEMIPRESENCIAL)

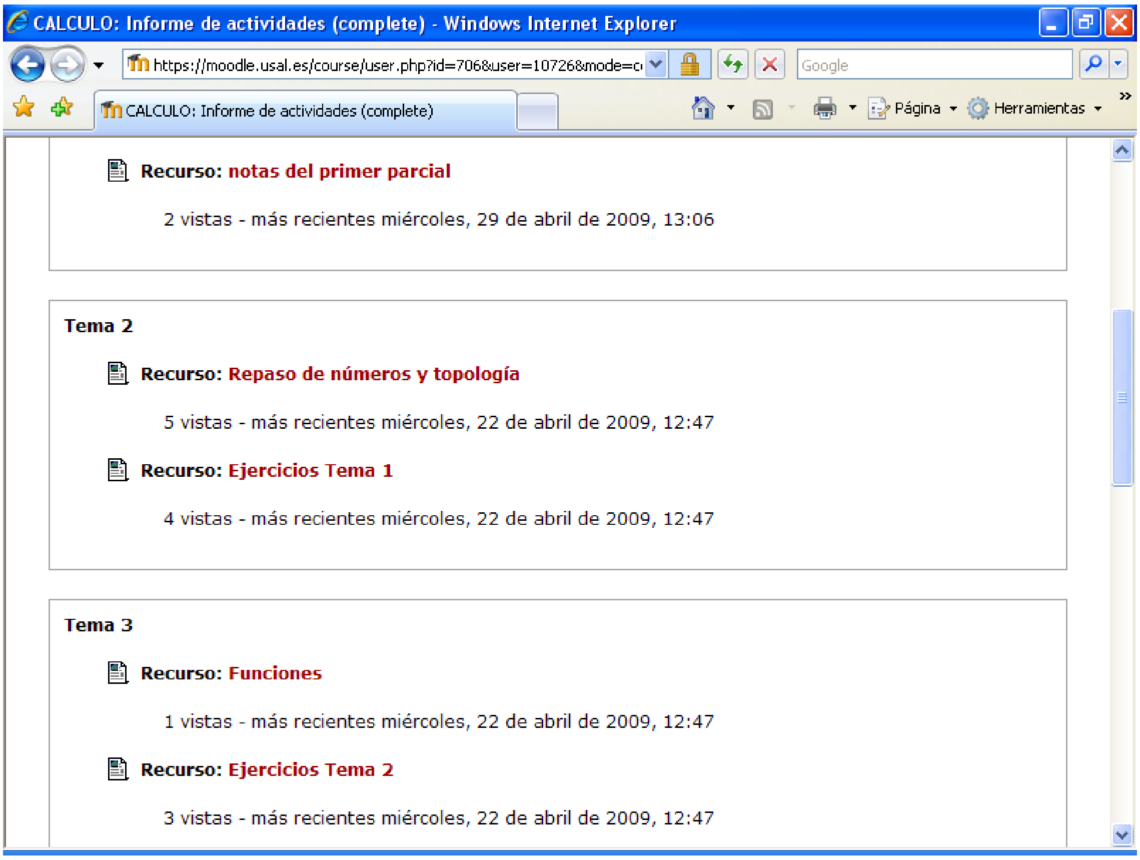
A lo largo del presente curso se han desarrollado seminarios sobre el uso del entorno de edición de documentos científicos LaTeX con la finalidad de que los trabajos fueran entregados con este formato.

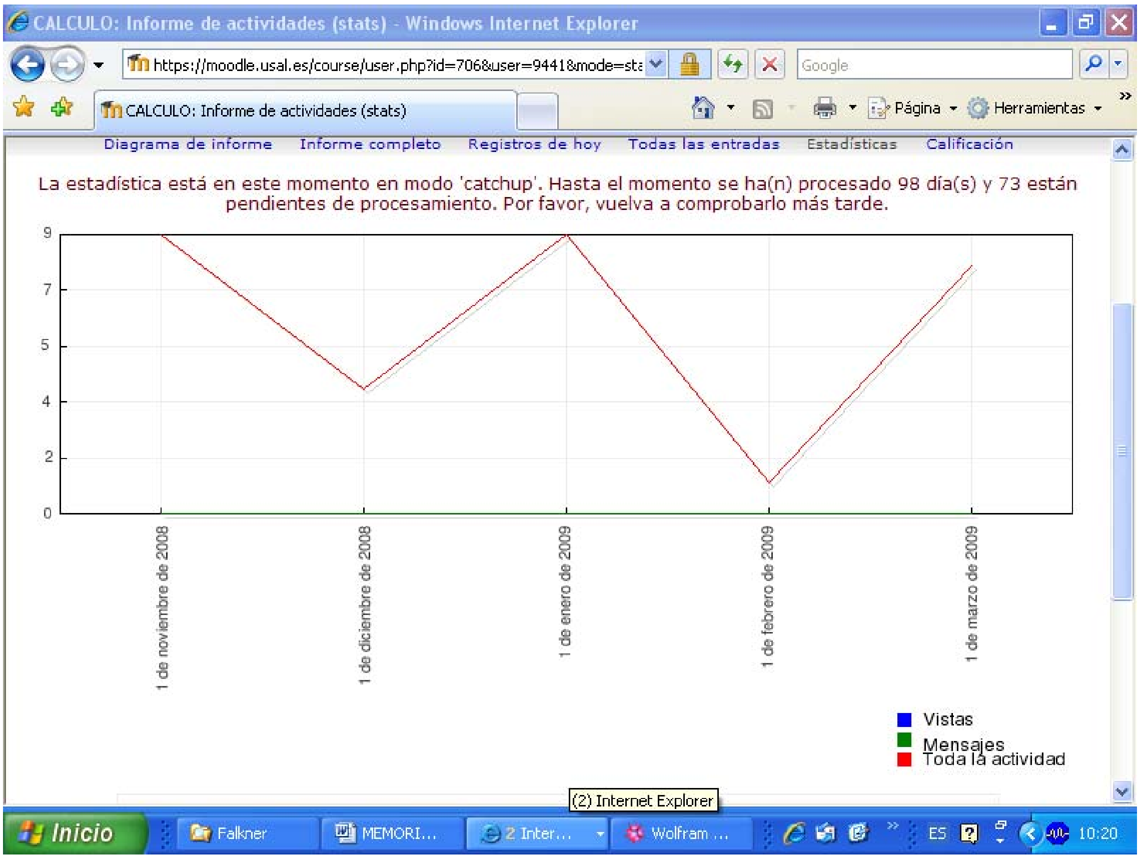
Como complemento de lo anterior durante el primer cuatrimestre del actual curso, del 26/01/2009 al 05/02/2009 se desarrolló el curso mencionado dirigido preferentemente a alumnos que estuvieran cursando estudios de Ingenierías. El objeto del curso era difundir la utilización del procesador LaTeX. Para ello se planteó el curso en una doble vertiente, con clases teóricas donde introducir los conceptos fundamentales de LaTeX, y con clases eminentemente prácticas, donde los alumnos pudieran poner de manifiesto lo aprendido anteriormente. Se complementó el curso con una parte no presencial de carácter eminentemente práctico donde cada alumno fue desarrollando individualmente una serie de documentos planteados por los profesores y con seguimiento de forma personalizada. La aplicación de este curso servirá para que los alumnos puedas desarrollar sus Proyectos Fin de Carrera u otros trabajos académicos utilizando este formato.

De hecho, los trabajos presentados han sido realizados con este procesador, obteniendo en general trabajos con una presentación de alta calidad.

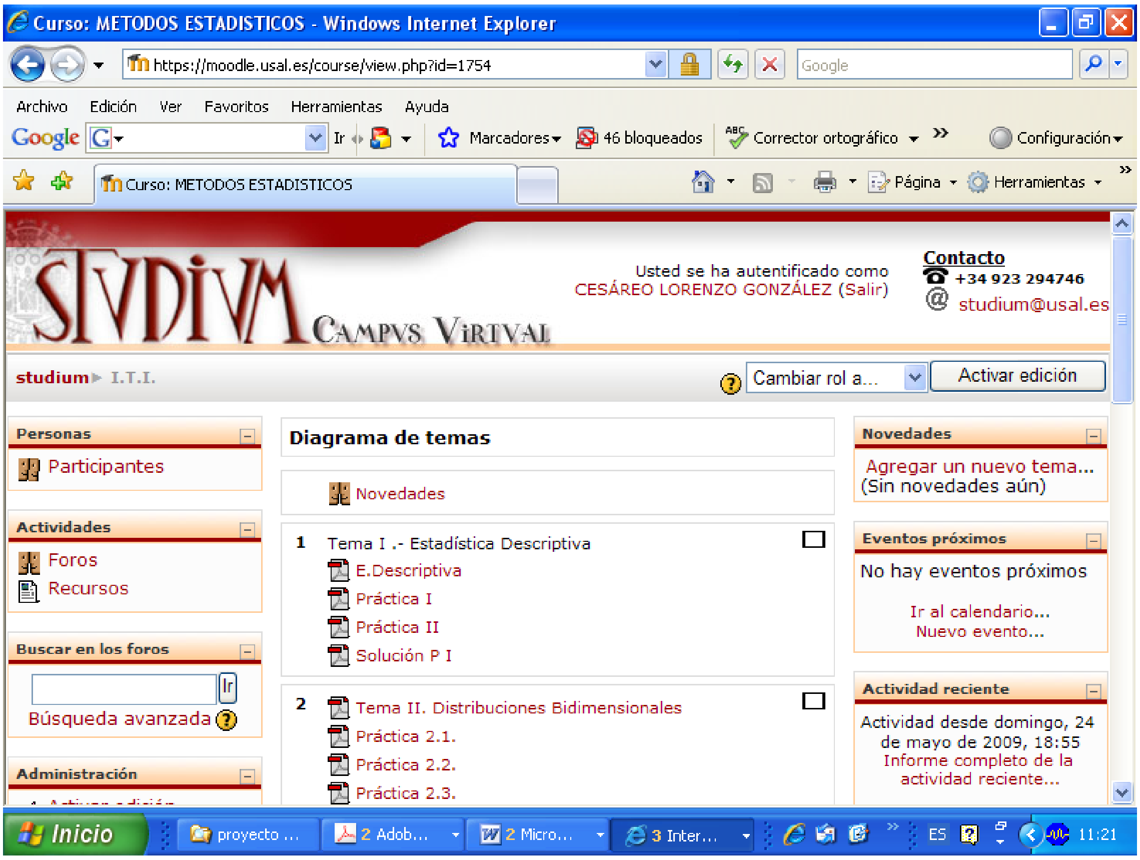
La figura que sigue recoge una de las páginas dentro de la plataforma Studium de una de las asignaturas sobre las que se ha aplicado este proyecto.
En esta plataforma se han puesto apuntes, ejercicios, prácticas, etc. a disposición de los alumnos. También se ha incluido la relación de notas del parcial efectuado. En general la acogida ha sido buena y la participación más que aceptable.

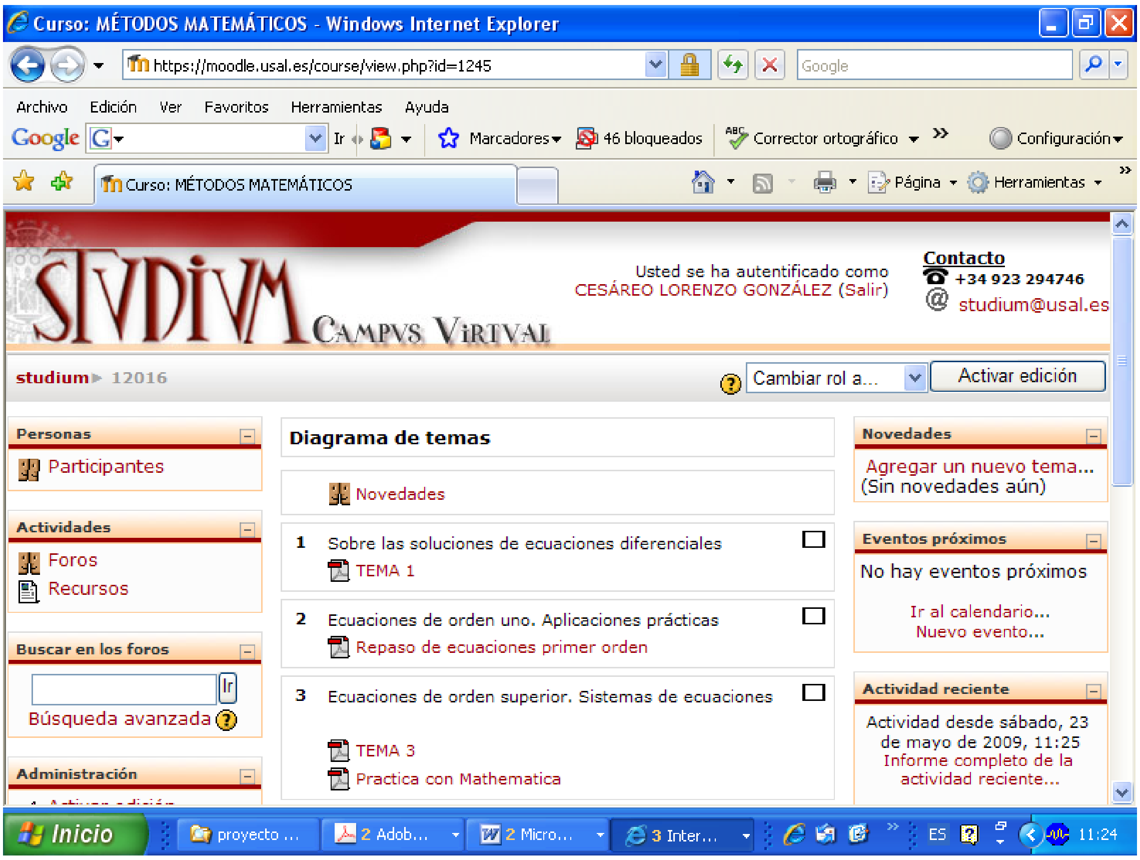
En la figura siguiente se observa el detalle de accesos a cada uno de los recursos por parte de uno de los alumnos del curso. Hay que destacar también la participación en los foros de discusión, donde se pueden plantear preguntas relacionadas con el curso y cualquiera de los participantes puede aportar una respuesta o algún comentario oportuno. No es uno de los recursos que más se hayan utilizado, sin embargo creemos que cuando el uso de estos medios esté más extendido puede ser un vehículo eficaz de comunicación.
La segunda figura en la hoja siguiente muestra un gráfica con las estadísticas de acceso a los recursos de uno de los participantes.


CALCULO: Informe de actividades (complete) - Windows Internet Explorer
https://moodle.usal.es/course/user.php?id=706&user=10726&mode=c
CALCULO: Informe de actividades (complete)
Página
Herramientas
Recurso: notas del primer parcial
2 vistas - más recientes miércoles, 29 de abril de 2009, 13:06
Tema 2
Recurso: Repaso de números y topología
5 vistas - más recientes miércoles, 22 de abril de 2009, 12:47
Recurso: Ejercicios Tema 1
4 vistas - más recientes miércoles, 22 de abril de 2009, 12:47
Tema 3
Recurso: Funciones
1 vistas - más recientes miércoles, 22 de abril de 2009, 12:47
Recurso: Ejercicios Tema 2
3 vistas - más recientes miércoles, 22 de abril de 2009, 12:47


CALCULO: Informe de actividades (stats) - Windows Internet Explorer
https://moodle.usal.es/course/user.php?id=706&user=9441&mode=st
CALCULO: Informe de actividades (stats)
Página
Herramientas
Diagrama de informe
Informe completo
Registros de hoy
Todas las entradas
Estadísticas
Calificación
La estadística está en este momento en modo 'catchup'. Hasta el momento se ha(n) procesado 98 día(s) y 73 están pendientes de procesamiento. Por favor, vuelva a comprobarlo más tarde.
9
7
5
4
2
0
1 de noviembre de 2008
1 de diciembre de 2008
1 de enero de 2009
1 de febrero de 2009
1 de marzo de 2009
Vistas
Mensajes
Toda la actividad
(2) Internet Explorer
Inicio
Falkner
MEMORI...
2 Inter...
Wolfram ...
ES
10:20

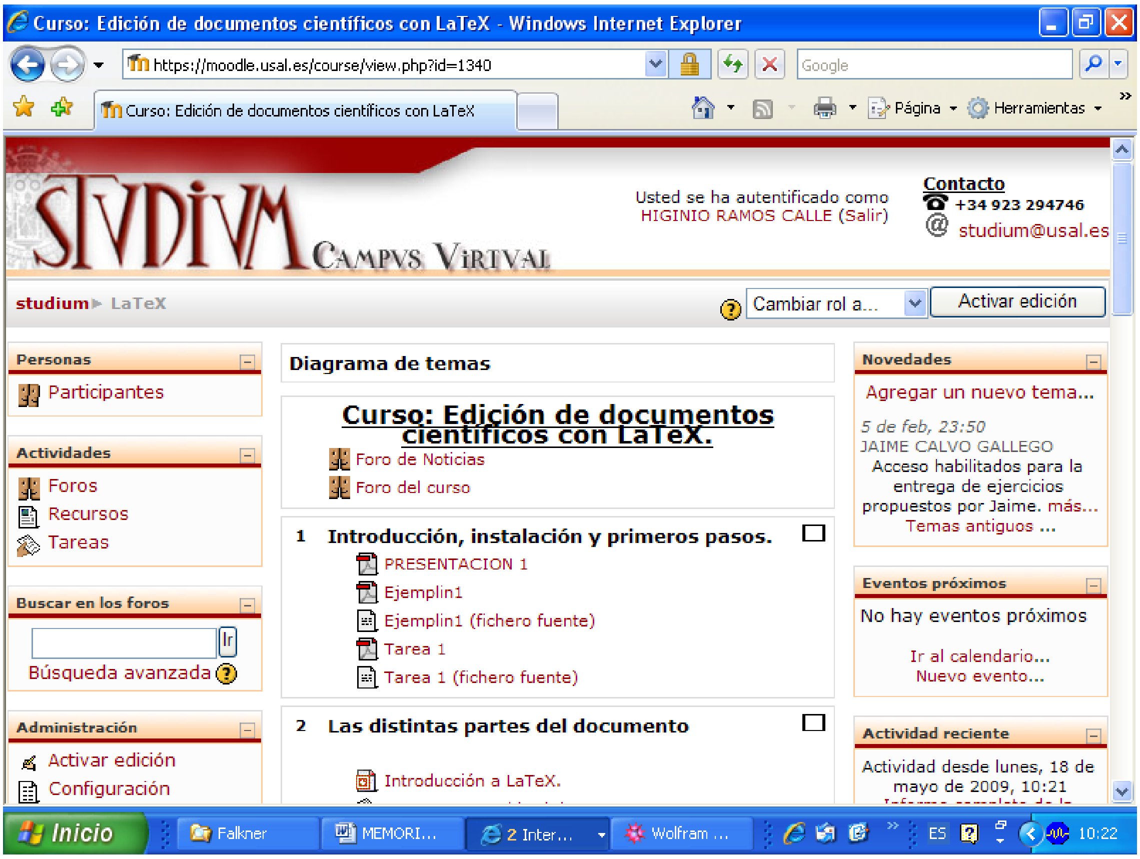
Se muestran a continuación dos imágenes de otras sendas asignaturas cuyos cursos están disponibles para los alumnos en Studium:



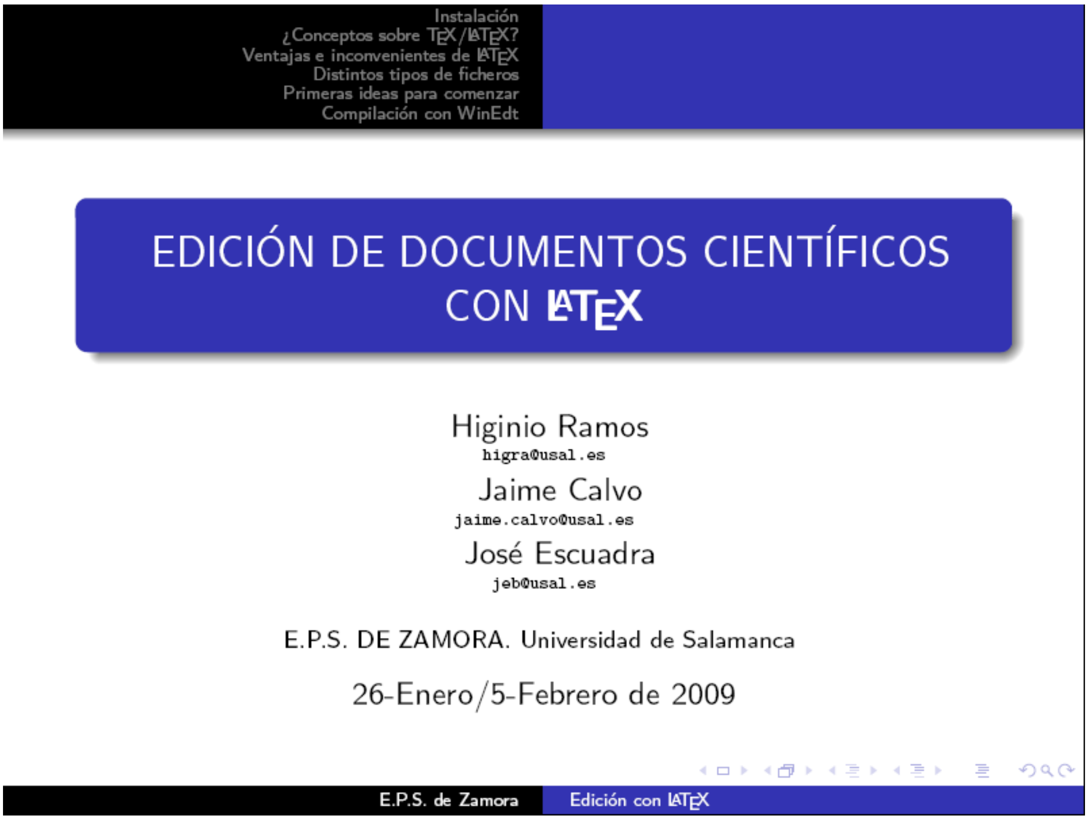


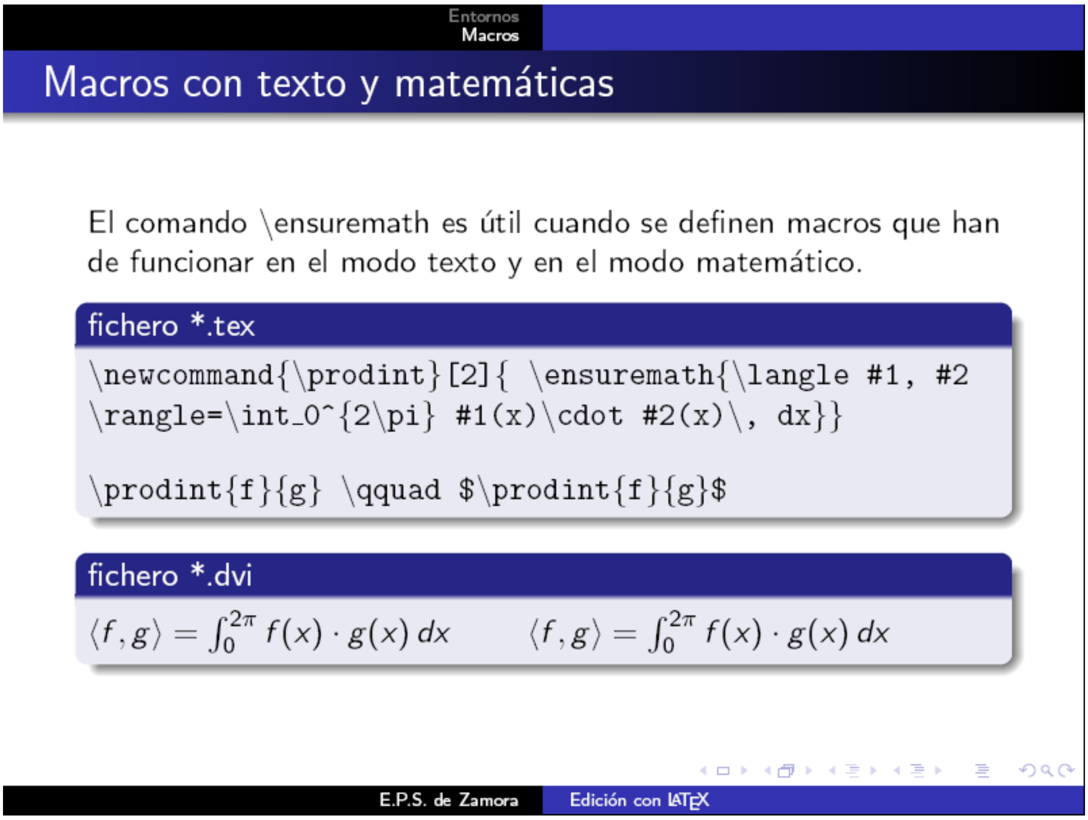
El curso de Edición de documentos científicos con LaTeX resultó satisfactorio en cuanto al interés mostrado por los alumnos. Sólo se matricularon 15 alumnos, en parte porque coincidió con otro curso extraordinario sobre Autocad. En este sentido quizás debiera pedirse a los gestores de Cursos Extraordinarios que informen de la existencia de otros cursos que puedan solaparse con la consiguiente imposibilidad que originan de poderse matricular en dos cursos a la vez.
En cualquier caso los alumnos que participaron fueron a su vez transmisores de los conocimientos adquiridos a otros compañeros. La calidad de presentación de los trabajos ha sido notable, y el hecho de utilizar un mismo formato favorece el intercambio y la complementariedad por cuanto algunos de los trabajos pueden ser susceptibles de futuras modificaciones.

Mostramos en la imagen que sigue la página del curso en la plataforma Studium:



En estas figuras se observan dos de las pantallas de la presentación del curso.





MUESTRA DE ALGUNOS TRABAJOS REALIZADOS A MODO DE JUSTIFICACIÓN DOCUMENTAL

En las páginas que siguen mostraremos sólo una pequeña parte de los distintos materiales elaborados y actividades realizadas. No podemos adjuntar todo el material elaborado entre apuntes de las asignaturas, colecciones de problemas, material complementario, prácticas, trabajos realizados, etc. etc. por la gran cantidad de espacio que ocupa.

COLECCIÓN DE EJERCICIOS DE UNA DE LAS ASIGNATURAS

EJERCICIOS Tema III

1.- ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un polígono convexo de n lados?

*2***.-** Se tiene una baraja y un dado. Sea el experimento consistente en extraer dos cartas simultáneamente y lanzar un dado. ¿De cuantos elementos consta el espacio muestral correspondiente a este experimento?

3.- Comprobar que los siguientes sucesos son idénticos: A–B = $A \cap \overline{B}$. (*utilice un diagrama de Venn*)

4.- Sea A el suceso obtener puntuación 1, 2 o 3 al lanzar un dado y B ser un múltiplo de dos. Determinar los sucesos: A-B, A∆B.

5.- Si se verifica que dos sucesos son tales que $A_1 \subseteq A_2$ ¿cómo están relacionadas $P(A_1)$ y $P(A_2)$? Demuéstrelo.

6.- Sean A y B dos sucesos independientes de probabilidad 0,30 y 0,15 respectivamente. Se pide calcular:

$P(A \cup B)$

$P(\overline{A})$

$P(\overline{B})$

$P(\overline{A \cup B})$

7.- Se lanzan consecutivamente seis dados perfectos. Calcúlese:

a) La probabilidad de obtener los 6 números distintos.
b) La probabilidad de obtener 6 números distintos en orden de menor a mayor**.**

8.- Una pieza de artillería dispone de 7 obuses para hacer objetivo. En cada disparo se tiene 1/7 de posibilidad de hacer blanco. ¿Cuál es la probabilidad de alcanzar objetivo con 7 disparos?

9.- La probabilidad de que apruebe matemáticas 0.6, física 0,5 y de que apruebe las dos las materias es de 0,2. Determine la probabilidad que apruebe matemáticas y no física.

10.- Tres personas resuelven un problema con probabilidades respectivas 1/3, 1/4 y 1/5. ¿Cuál es la probabilidad que entre los tres lo resuelvan?

11.- En una urna hay 25 bolas numeradas del 1 al 25. Determinar la probabilidad de que al extraer una bola resulte un múltiplo de 2, 3 u 8.

12.- En una urna hay 10 bolas blancas numeradas del 1 al 10 y 10 negras numeradas del 11 al 20. Se extraen dos bolas a la vez. Calcular:

a) Probabilidad de que las dos sean blancas.

b) Probabilidad de que se obtenga una blanca y otra negra.

c) Probabilidad de que se obtenga una negra y otra blanca.

13.- Un opositor preparó 18 temas del total de 50 de su temario. El examen consiste en exponer correctamente ante el tribunal al menos uno de entre tres temas elegidos al azar. Determine la probabilidad de superar el examen.

14.- Se traza una cuerda en una circunferencia. Calcular la probabilidad de que sea de longitud menor longitud que el lado del triángulo equilátero inscrito en dicha circunferencia?

15.- El punto (x,y) del plano está situado en la región $0 \leq x \leq 3$; $-2 \leq y \leq 0$. Calcular la probabilidad de que $x-y>3$.

16.- En una fábrica, la máquina A produce piezas de buena calidad con una probabilidad de 0,8; la máquina B con 0,9. Se selecciona al azar una pieza de cada máquina. Se pide calcular:

a) Probabilidad de que ambas sean defectuosas.

b) Probabilidad de que una sea defectuosa y la otra no.

17.- Hay una epidemia de cólera y un síntoma de esta enfermedad es la diarrea, pero también se presenta el cólera con intoxicación e incluso en personas que no tienen ninguno de estos síntomas. La probabilidad de tener cólera teniendo diarrea es 0,94; teniendo intoxicación 0,5 y no teniendo nada un 0,004. También se conoce que el 2% de la población tiene cólera y el 0,5% intoxicación**.**
-Elegido en la población un individuo al azar,¿Qué probabilidad hay de que tenga cólera?
-Se sabe que un individuo tiene diarrea ¿Qué probabilidad hay de que tenga cólera?

18.- En una población el 10% de los machos y el 18% de las hembras están enfermos. Hay doble número de hembras que de machos. Elegido un individuo al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que este enfermo? .Un individuo que estaba enfermo ¿Qué probabilidad tiene de ser macho?

*19***.-** Una máquina tragaperras es tal que recauda 4 € por apuesta y está programada de tal forma que en su vida útil obtenga como beneficios el 20% de lo recaudado. Además da premios de 5€ con probabilidad de 1/4, de 10€ con probabilidad de 1/8 y de 100€ con probabilidad que usted ha de determinar. Determinar esta última probabilidad.

20- Una factoría dispone de tres maquinas para fabricar artículos y lo hacen de la siguiente manera:

- Maquina A: fabrica el 50 % de la producción y son defectuoso el 10% de los artículos que fabrica.
- Maquina B: fabrica el 40 % de la producción y son defectuoso el 5% de los artículos de los artículos que fabrica.
- Maquina C: fabrica el 10 % de la producción y son defectuoso el 1% de los artículos de los artículos que fabrica.

a) Elegida al azar una pieza calcular la probabilidad de que sea defectuosa.
b) Una determinada pieza es defectuosa,¿cual es la probabilidad de que fuese fabricada por la máquina C?.

21.- Se dispone de 2 dados del tipo A 3 del tipo B y 4 del tipo C, trucados según se especifica en la tabla:

Puntuación / Dado	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	2	1	0	1	1	1
B	2	2	0	1	0	1
C	2	2	0	0	2	0

En un experimento elegimos un dado al azar y lo lanzamos tres veces obteniendo como resultado la terna de puntuaciones (4,2,1).
¿ Cual es la probabilidad de que el dado elegido fuese el dado A.?

22.- Se dispone de tres vacunas contra la misma enfermedad. En el mercado se obtienen con probabilidades respectivas 1/6, 1/2, 1/3, y son efectivas con probabilidades respectivas 0.9, 0.94 y 0.88. Una persona vacunada no resulto inmune a la enfermedad, ¿Cuál es la probabilidad de que fuera vacunada con la primera de las vacunas?

23.- Por los síntomas se deduce la enfermedad A o B, con probabilidades respectivas 1/3 o 2/3. Para precisar se somete a un análisis, se conoce que para enfermos de A el análisis es positivo con el 0,99 de probabilidad y en los que padecen B lo es de un 0,16. El enfermo fue sometido a un análisis que salió positivo.
Determine la probabilidad de sufrir la enfermedad A.

24.- La probabilidad de que un hombre viva mas de 25 años es de 3/5 y la de una mujer 2/3. Determine la probabilidad de que ambos vivan más de 25 años. Determine la probabilidad de que al menos uno de los dos viva más de 25 años.

25.- Sobre un círculo de radio R se toma un punto al azar. Determine la probabilidad de que se localice más cerca del centro del círculo que de la circunferencia que lo bordea.

UNO DE LOS TRABAJOS REALIZADO POR LOS ALUMNOS

LOS NÚMEROS PRIMOS

Angel Alvaredo Atienza

Teresa López Martín

6 de mayo de 2009

Índice

Índice de cuadros

Índice de figuras

1. Introducción

Desde hace 2500 años los números primos atraen la atención de matemáticos y aficionados de todo el mundo, por varias razones. Una de ellas es la fascinación que produce su irregular distribución a lo largo de la recta numérica. Los números primos aparecen esparcidos aquí y allá, encontrándose sectores donde se encuentran en abundancia y otros en donde escasean.

Se los califica de misteriosos e indomables pues no parece existir ninguna regla que determine su ubicación entre los demás números naturales. No existe una fórmula que prediga la distancia entre un primo y otro, pero cabría preguntarse lo siguiente: ¿Acaso no es la superposición de distintos patrones regulares lo que produce esa irregularidad?

2. La naturaleza de los números

Un número es una entidad abstracta que representa una cantidad (de una magnitud). El símbolo de un número recibe el nombre de numeral. Los números se usan con mucha frecuencia en la vida diaria como etiquetas (números de teléfono, numeración de carreteras, numeración de portales), como indicadores de orden (números de serie), como códigos (ISBN), etc. En matemáticas, la definición de número se extiende para incluir abstracciones tales como números fraccionarios, negativos, irracionales, trascendentales y complejos.

2.1. Tipos de números

Los números más conocidos son los números naturales, que se usan para contar. Si añadimos los números negativos obtenemos los números enteros. Cocientes de enteros generan los números racionales.

Si incluimos todos los números que son expresables con decimales pero no con fracciones de enteros (números irracionales), obtenemos los números reales; si a éstos les añadimos los números complejos, tendremos todos los números necesarios para resolver cualquier ecuación algebraica.

Podemos ampliar aún más los números, si añadimos los infinitos, hiperreales y transfinitos. Entre los reales, existen números que no son soluciones de una ecuación polinomial o algebraica, que reciben el nombre de trascendentales. Ejemplos famosos de estos números son π (Pi) y el número $\mathbf{e}$ (base de los logaritmos naturales) los cuales están relacionados entre sí por la identidad de Euler.

Existe toda una teoría de los números, que clasifica a los números en:

- Números naturales.
    - Número primo.
    - Número compuesto.
    - Números perfectos.
- Números enteros
    - Números pares.
    - Números impares.
- Números racionales.
- Números reales.
    - Números irracionales.
    - Números algebraicos.
    - Números trascendentes.
- Números complejos.
- Números infinitos.
- Números transfinitos.
- Números negativos.
- Números fundamentales.
    - Número Pi (π).
    - Número $\mathbf{e}$.

$$Complejos\begin{cases} Reales\begin{cases} Racionales\begin{cases} Enteros\begin{cases} Naturales\\ Cero\\ Enteros\ negativos\end{cases}\\ Fraccionarios\end{cases}\\ Irracionales\end{cases}\\ Imaginarios\end{cases}$$

3. numeros naturales

3.1. definicion

Un número natural es cualquier símbolo o marca, que haga el hombre bajo la acción de un proceso de cuantificar objetos que se presentan ante él, y que clasifica desde las cualidades de su naturaleza, de allí que cualquier elemento del conjunto de los números: (0)*, 1, 2, 3, 4, 5..., (de un o más dígito o cifras de notación Indu Arabiga) o que se pueden usar para contar los elementos del mismo u otro conjunto. Reciben ese nombre porque se hacen bajo el proceso de cuantificar los objetos que se presentan en forma natural y que crea en el ser humano la necesidad imperiosa de contar objetos, de allí que su utilización precede a nuestra condición de seres racionales.

3.2. clasificacion dentro de los numeros naturales

3.2.1. numeros primos

El conjunto de los números primos es un subconjunto propio de los números naturales que engloba a todos los elementos de este conjunto mayores que 1 que son divisibles únicamente por sí mismos y por la unidad. En otros términos, un número natural es primo o lineal si tiene exactamente dos divisores distintos que son el 1 y el mismo número en cuestión.

3.2.2. numeros compuestos

Un número natural es compuesto si tiene más de dos divisores distintos. También lo podemos definir como aquel número natural que es mayor que 1 y no es primo. Todo número compuesto puedo descomponerse de forma única como producto de números primos.

3.2.3. numeros perfectos

Un número perfecto es un número natural que es igual a la suma de sus divisores propios positivos, sin incluirse él mismo.

4. numeros enteros

4.1. definicion

Los números enteros son una generalización del conjunto de números naturales que incluye números negativos (resultados de restar a un número natural otro mayor además del cero). Así los números enteros están formados por un conjunto de enteros positivos que podemos interpretar como los números naturales convencionales, el cero, y un conjunto de enteros negativos que son los opuestos de los naturales (éstos pueden ser interpretados como el resultado de restar a 0 un número natural). Para estudiar los números enteros es necesario conocer la necesidad de crear un sistema numérico. Los números negativos pueden aplicarse en diversos contextos, como la representación de deudas, profundidades bajo el nivel del mar, temperaturas bajo cero, entre otros. Inicialmente el primer campo de aplicación fue la contabilidad donde los números negativos significaban deudas y los positivos haberes o activos poseídos. El hecho de que un número sea entero, significa que no tiene parte decimal.

4.2. clasificacion dentro de los numeros enteros

4.2.1. numeros pares

En matemática la paridad de un objeto se refiere a si éste es par o impar. Un número par es un número entero múltiplo de 2.

4.2.2. numeros impares

Los números impares son aquellos números enteros que no son pares y por tanto no son múltiplos de 2.

5. numero racional

5.1. definicion

En sentido amplio, se llama número racional o fracción común, a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros con denominador distinto de cero el término racional.ªlude a ración.º parte de un todo, y no al pensamiento o actitud racional, para no confundir este término con un atributo del pensamiento humano.En sentido estricto, número racional es el conjunto de todas las fracciones equivalentes a una dada; de todas ellas, se toma como representante canónico del número racional en cuestión a la fracción irreducible, la de términos más sencillos. Las fracciones equivalentes entre sí número racional son una clase de equivalencia, resultado de la aplicación de una relación de equivalencia al conjunto de números fraccionarios. Definimos un número racional como un decimal finito o infinito periódico. Por ejemplo, el número decimal finito 0.75 es la representación decimal del número racional 3/4.

6. numeros reales

En matemáticas, los números reales pueden ser descritos informalmente de varias formas aunque no tienen el rigor necesario para los propósitos formales de matemáticas. En primera instancia, se puede describir a los números reales como todos aquellos que poseen una expansión decimal. Los números reales incluyen tanto a los números racionales como: 31, 25.4, 37/22, así como a los números irracionales. Otro concepto de los reales seria decir que los numeros reales son los conformados por los numeros racionales e irracionales.Los numeros irracionales son aquellos que no se pueden expresar de manera fraccionaria y tienen infinitas cifras decimales no periodicas. Durante los siglos XVI y XVII el cálculo avanzó mucho aunque carecía de una base rigurosa, puesto que en el momento no se consideraba necesario el formalismo de la actualidad, usando expresiones como «pequeño», «límite», «se acerca» sin una definición precisa. Esto llevó finalmente a una serie de paradojas y problemas lógicos que hicieron evidente la necesidad de crear una base rigurosa a la nueva matemática, la cual incluyó definiciones formales y rigurosas (aunque ciertamente técnicas) del concepto de número real.

7. numeros hiperreales

El concepto de número hiperreal proviene del análisis estándar, dominio que fue desarrollado en los años 1970 por Abraham Robinson. El análisis no estándar pretende, y logra, justificar rigurosamente el empleo de números infinitos e infinitesimales. Estos números, llamados hiperreales, ya fueron empleados por los matemáticos griegos, pero de un modo totalmente intuitivo. Para ellos, una longitud a era infinitesimal comparada con b si multiplicándola por cualquier entero nunca se lograría superar a b: 2a, 3a, 4a ... 1000a ...n·a ... son todos inferiores a b (con n un entero cualquiera). Esta definición es la negación misma de la propiedad fundamental que dice que el conjunto de los números reales. Entre el renacimiento y el siglo XVIII se volvió a utilizar los infinitesimales y Gottfried Leibniz propuso una teoría, construida a partir de un número infinito «mayor que todos enteros existentes». Esta teoría no tenía fundamentos lógicos sólidos, pero permitía hacer los cálculos que necesitaban los físicos, sobre todo en las ecuaciones diferenciales. Se siguió empleando los infinitesimales hasta bien entrado el siglo XVIII, cuando se inventó y perfeccionó la teoría de los límites, que los hizo inútiles. El precio de este rigor fue un formalismo pesado y poco intuitivo, aunque más productivo. Se soñó en los siglos XIX y XX con inventar unas matemáticas que dejarían cabida para los añorados números infinitos (grandes o pequeños). La tentación era siempre añadir estas cantidades mal definidas al conjunto de los números reales, pero el problema era que se tenía entonces que averiguar si los teoremas vigentes en los reales eran o no válidos para los hiperreales. Naturalmente, nunca se logró, porque no era el método adecuado.

8. complejos

El término número complejo describe la suma de un número real y un número imaginario (que es un múltiplo real de la unidad imaginaria, que se indica con la letra i). Los números complejos se utilizan en todos los campos de las matemáticas, en muchos de la física (y notoriamente en la mecánica cuántica) y en ingeniería, especialmente en la electrónica y las telecomunicaciones, por su utilidad para representar las ondas electromagnéticas y la corriente eléctrica.

En matemáticas, los números constituyen un cuerpo y, en general, se consideran como puntos del plano: el plano complejo. La propiedad más importante que caracteriza a los números complejos es el teorema fundamental del álgebra, que afirma que cualquier ecuación algebraica de grado n tiene exactamente n soluciones complejas

9. Números primos

El conjunto de los números primos es un subconjunto propio de los números naturales que engloba a todos los elementos mayores que 1 que son divisibles únicamente por sí mismos y por la unidad. En otros términos, un número natural es primo o lineal si tiene exactamente dos divisores distintos que son el 1 y el mismo número en cuestión. El número 1, al ser solo divisor sí mismo, se conoce como número unitario.

Un número natural con más de dos divisores distintos se conoce como número compuesto o rectangular. Por ejemplo, el número 4 tiene más de dos divisores distintos: el 1, el 2 y el 4, por lo que 4 es un número compuesto o rectangular, porque se puede formar un rectángulo con el número de puntos mientras que con el número primo solo se puede formar una hilera de puntos, por lo que es conocido también como número lineal.

Los números primos menores que cien son 25, a saber: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

El teorema fundamental de la Aritmética establece que cualquier número natural mayor que 1 siempre puede representarse como un producto de números primos, y esta representación (factorización) es única módulo el orden de los factores.

9.1. Conceptos básicos

Los números naturales son los números que utilizamos a diario para contar: 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. Están formados por el número 1, los números primos y los números compuestos.

Los números primos son los números que tienen 2 divisores: sólo pueden dividirse de forma exacta por la unidad y por sí mismos. Entre los primeros 10 números naturales encontramos 4 primos: 2, 3, 5 y 7. Del 1 al 100 hay 25 primos. Del 1 al 1000 hay 168 y a medida que avanzamos por la recta se hacen cada vez más escasos, siendo su distribución muy irregular.

Los números primos son importantes porque son como los "átomos" de la Matemática. Todos los demás números se construyen a partir de ellos. Los números primos son infinitos como lo demostró Euclides alrededor del año 300 a.c.

Los primos menores que 10 son extraordinarios: El 2 es el único primo par. El 2 y el 3 son los únicos primos contiguos. El 5 es el único primo terminado en 5. Por último: 3, 5 y 7 forman la única tríada de primos gemelos en toda la recta numérica. Las lagunas, desiertos o boquetes son los sectores de la recta numérica en donde no aparece ningún primo.

Por ejemplo; una pequeña laguna está localizada en el intervalo que contiene a los números 8, 9 y 10. Se sabe que estas regiones formadas por números compuestos pueden llegar a tener cualquier longitud que se desee. Los números compuestos son los que tienen más de 2 divisores. Los divisores de un número son los números que pueden dividirlo en forma exacta. Por ejemplo: Los divisores del 4 son: 1, 2 y 4. Los divisores del 6 son: 1, 2, 3 y 6. Entre los primeros 10 números naturales se encuentran los siguientes compuestos: 4, 6, 8, 9 y 10.

Para determinar si un número es primo se sabe que no hace falta dividirlo por todos los números menores a él. Basta con dividirlo por los números impares mayores que 1 y menores o iguales a la raíz cuadrada del número. Si no se encuentra ningún divisor entonces el número es primo. Si se encuentra un divisor, o si el número es par y mayor que 2, entonces el número es compuesto.

10. ¿Cúantos números primos existen?

Existen infinitos números primos. Euclides realizó la primera demostración alrededor del año 300 a. C. Otros matemáticos han demostrado la infinitud de los números primos con métodos diversos, contándose entre ellos Álgebra Conmutativa y Topología.

A pesar de que sabemos que hay infinitos números primos, aún quedan preguntas en el aire sobre procedimientos exactos para saber con certeza si un número determinado es primo o no en tiempo computacionalmente bajo.

Un procedimiento empleado para hallar todos los números primos menores que un entero dado es el de la criba de Eratóstenes. Además, se sabe que no hay límite para la distancia entre dos primos consecutivos; para ver esto basta notar que para n entero positivo en el conjunto $\{(n+1)!+1+k : k = 1, 2, ..., n\}$ consta de n números consecutivos y no hay números primos entre ellos, pues sus elementos son divisibles por 2, 3, $n+1$ respectivamente.

Si nos preguntamos por la cantidad de primos bajo una cierta cantidad dada se conocen resultados satisfactorios. Denotando por $\pi(x)$ la cantidad de primos hasta x, se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}$$

Donde ln denota el logaritmo natural. Este es el Teorema del Número Primo en su versión más sencilla, pero su demostración no es trivial.

Hasta hoy se mantienen abiertos numerosos problemas relativos a la distribución y frecuencia de aparición de los primos y de algunas familias particulares de estos. Por ejemplo, se conjetura que existen infinitos números primos de la forma $p_1 = p_2 + 2$ (siendo p_1 y p_2 primos) o primos gemelos.

10.1. Clases de primos

1. Número primo de Fermat: De la forma $2^{2^n} + 1$.

2. Número primo de Mersenne: De la forma $M_p = 2^p - 1$ donde p es primo.

3. Número primo de Sophie Germain: Un p primo tal que $2p+1$ es primo.

4. Números primos gemelos: Donde p y $p + 2$ son primos.

5. Números primos reversibles: Son aquellos que al leerlos al reves (de derecha a izquierda) dan un nuevo número primo. Ej: 13 y 31 ó 1201 y 1021.

10.1.1. Número de Fermat

Un número de Fermat, nombrado en honor a Pierre de Fermat, quien fue el primero que estudió estos números, es un número natural de la forma:

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

donde n es natural. De particular interés son los números primos de Fermat.Pierre de Fermat conjeturó que todos los números naturales de la forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ con n natural eran números primos. Después de todo, los cinco primeros términos, 3 (n=0), 5 (n=1), 17 (n=2), 257 (n=3) y 65537 (n=4) lo son.

Pero Leonhard Euler probó que no era así en 1732. En efecto, al tomar n=5 se obtiene un número compuesto:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

4294967297 es el número más pequeño que, siendo número de Fermat, no es primo.

Actualmente, sólo se conocen cinco números primos de Fermat, que son los que ya se conocían en tiempos del propio Fermat, y sólo se conoce la factorización completa de los doce primeros números de Fermat (desde n=0 hasta n=11).

10.1.2. Número primo de Mersenne

Se dice que un número M es un número de Mersenne si es una unidad menor que una potencia de 2.

$$M_n = 2^n - 1$$

Un número primo de Mersenne es un número de Mersenne que es primo. Se denominan así en memoria del filósofo del siglo XVII Marin Mersenne quien en su "Cognitata Physico-Mathematica" realizó una serie de postulados sobre ellos que sólo pudo refinarse tres siglos después.

También compiló una lista de números primos de Mersenne con exponentes menores o iguales a 257, y conjeturó que eran los únicos números primos de esa forma. Su lista sólo resultó ser parcialmente correcta, ya que por error incluyó M_{67} y M_{257}, que son compuestos, y omitió M_{61}, M_{89} y M_{107}, que son primos; y su conjetura se revelaría falsa con el descubrimiento de números primos de Mersenne más grandes. No proporcionó ninguna indicación de cómo dio con esa lista, y su verificación rigurosa sólo se completó más de dos siglos después.

A fecha del 16 de septiembre de 2008, sólo se conocen 46 números primos de Mersenne, siendo el mayor de ellos $M_{43,112,609} = 2^{43,112,609} - 1$, un número de casi trece millones de cifras. El número primo más grande que se conocía en una fecha dada casi siempre ha sido un número primo de Mersenne: desde que empezó la era electrónica en 1951 siempre ha sido así salvo en 1951 y entre 1989 y 1992. No se sabe si existen infinitos primos de Mersenne

10.1.3. Número primo de Sophie Germain

Un número primo p es un número de Sophie Germain si $2p+1$ también es número primo. Ejemplo: $p=2$, $2 \cdot 2+1=5$ que también es un número primo.

Los números primos de Sophie Germain recibieron su nombre por la matemática francesa que demostró que el Último teorema de Fermat era cierto para estos números, esto es que, si p es un número primo de estas características entonces no existen soluciones enteras no triviales para la ecuación $x^p + y^p = z^p$.

Se conjetura que existen infinitos números primos de Sophie Germain, pero, al igual que la conjetura de los números primos gemelos, aún no se ha demostrado. Existen 190 números primos de Sophie Germain en el intervalo $[1, 10^4]$.

La secuencia $\{p\,, 2p+1\,, 2(2p+1)+1\,, ...\}$ de primos de Sophie Germain también recibe el nombre de cadenas de Cunningham de primera clase.

10.1.4. Números primos gemelos

Dos números primos (p, q) son números primos gemelos si están separados por una distancia de 2, es decir, si:

$$q = p + 2$$

Todos los números primos, excepto el 2, son impares. Los únicos dos números primos consecutivos son el 2 y el 3. Surge la cuestión de encontrar dos números primos que sean impares consecutivos, es decir que se hallen a una distancia de 2. A éstos se los llama números primos gemelos.

No se sabe si existen infinitos números primos gemelos, aunque se cree ampliamente que sí. Éste es el contenido de la conjetura de los números primos gemelos. Una forma fuerte de la conjetura de los números primos gemelos, la conjetura de Hardy-Littlewood, postula una ley de distribución de los números primos gemelos similar al teorema de los números primos.

Se sabe que la suma de los inversos de todos los números primos gemelos converge. Esto contrasta con la suma de los inversos de todos los primos, que diverge.

11. Propiedades de los números primos

1. Si p es un número primo y divisor del producto de números enteros ab, entonces p es divisor de a o de b. (Lema de Euclides).

2. Si p es primo y a es algún número natural diferente de 1, entonces $ap - a$ es divisible por p (Pequeño Teorema de Fermat).

3. Un número p es primo si y solo si el factorial $(p-1)! + 1$ es divisible por p. (Teorema de Wilson).

4. Si n es un número natural, entonces siempre existe un número primo p tal que $n < p < 2n$. (Postulado de Bertrand).

5. En toda progresión aritmética $a_n = a + nq$, donde los enteros positivos $a, q \geq 1$ son primos entre sí, existen infinitos números primos. (Teorema de Dirichlet).

6. El anillo Z/nZ es un cuerpo si y solo si n es primo. Equivalentemente: n es primo si y solo si $\varphi(n) = n - 1$.

7. El número de primos menores que un x dado sigue una función asintótica $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ (Teorema de los nº primos).

11.1. Conjeturas sobre los números primos

- Existen infinitos números primos de la forma $(10^n + 53)/9$: Números de la forma 111...1117 que consiste en $n - 1$ unidades y un 7.

- Todo número par mayor o igual que 4 es suma de dos números primos. (Conjetura de Goldbach).

- Existen infinitos pares de números primos gemelos.

- Existen infinitos números primos de Mersenne.
- Existen infinitos números primos de la forma $n^2 + 1$.
- La sucesión de Fibonacci contiene infinitos números primos.

12. Criba de Eratóstenes

La criba de Eratóstenes es un antiguo y efectivo método para hallar números primos. Consiste en una tabla de números naturales dispuestos en columnas.

Es un algoritmo que permite hallar todos los números primos menores que un número natural dado N. Se forma una tabla con todos los números naturales comprendidos entre 2 y N y se van tachando los números que no son primos de la siguiente manera: cuando se encuentra un número entero que no ha sido tachado, ese número es declarado primo, y se procede a tachar todos sus múltiplos. El proceso termina cuando el cuadrado del mayor número confirmado como primo es mayor que N.

12.1. Proceso de criba

Determinemos, mediante este procedimiento, la lista de los números primos menores de 20.

1. Primer paso: pongamos los números naturales comprendidos entre 2 y 20. Cuadro 1

2. Segundo paso: Marcamos el primer número, no rayado ni marcado, como número primo. Cuadro 2

3. Tercer paso: Tachamos todos los múltiplos del número que acabamos de marcar como primo. Cuadro 3

4. Cuarto paso: Si el cuadrado del primer número que no ha sido rayado ni marcado es inferior a 20, entonces repetimos el segundo paso. Si no, el algoritmo termina, y todos los enteros no tachados son declarados primos. Cuadro 4

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Cuadro 1: Primer paso

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Cuadro 2: Segundo paso

2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~

Cuadro 3: Tercer paso

Como $3^2 = 9 < 20$ volvemos al segundo y tercer paso:

2	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~	**11**	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~

Cuadro 4: Cuarto paso

En el cuarto paso, el primer número que no ha sido tachado ni marcado es 5. Como su cuadrado es mayor que 20, el algoritmo termina y consideraremos primos todos los números que no han sido tachados.

Resultado: Los números primos comprendidos entre 2 y 20 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

12.2. Limitaciones

El algoritmo se detiene cuando el cuadrado del último número primo encontrado es mayor que 20 por la siguiente razón: sea P el mayor primo encontrado que cumple $P^2 \leq N$, y se supone la existencia de un número X tal que:

1. X es compuesto (esto es, existen Y y Z, ambos distintos de 1, tales que $X = YZ$).

2. $P < X < N$.

Como X no fue tachado en el proceso, quiere decir que Y y Z no son menores que P (1). A su vez, tanto Y como Z deben ser menores que X, ya que X, Y, Z son naturales (2).

Por (1) y (2), resulta que Y y Z deben estar entre P y X. Pero como P^2 es mayor que N, entonces YZ es mayor que N. Por lo tanto, X resulta mayor que N, siendo que fue definido como menor.

La conclusión es entonces, que no existe un X que cumpla las condiciones iniciales.

13. La criba de 30 columnas

Un intento de percibir algún patrón subyacente en la distribución de los números primos es la construcción de una criba formada por 30 columnas. La tabla 1 muestra en forma ordenada los 3 tipos de parejas de primos gemelos.

Estos son los primos que están separados por un número. Por ejemplo: (11 y 13), (17 y 19), (29 y 31), etc. En la tabla, no figuran los números pares mayores que 2 y las posiciones de los números compuestos impares están identificadas con un guión.

Nótese que la serie de números primos comienza recién en la mitad de la primera fila de la tabla 1. Con ello se logra un ordenamiento mucho mayor que con otros tipos de tablas. Las tablas con menor cantidad de columnas no pueden mostrar separadas y ordenadas las 3 clases de primos gemelos y en las tablas con mayor cantidad de columnas las parejas de primos gemelos aparecen desordenadas o en columnas duplicadas.

Nótese que los números primos mayores que 10 sólo pueden aparecer en las columnas 1, 7, B, D, H, J, N y T. Estos caracteres alfanuméricos corresponden a las terminaciones de los números primos si, en lugar de expresarlos con un sistema decimal, se los expresa con un sistema de 30 caracteres o trígesimal.

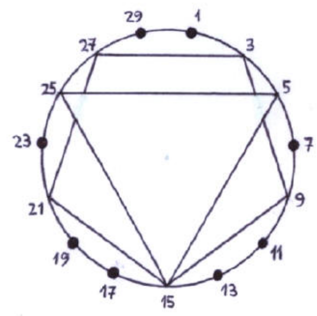
G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
																2	3		5		7		-		11		13		-
	17		19		-		23		-		-		29		31		-		-		37		-		41		43		-
	47		-		-		53		-		-		59		61		-		-		67		-		71		73		-
	-		79		-		83		-		-		89		-		-		-		97		-		101		103		-
	107		109		-		113		-		-		-		-		-		-		127		-		131		-		-
	137		139		-		-		-		-		149		151		-		-		157		-		-		163		-
	167		-		-		173		-		-		179		181		-		-		-		-		191		193		-
	197		199		-		-		-		-		-		211		-		-		-		-		-		223		-
	227		229		-		233		-		-		239		241		-		-		-		-		251		-		-
	257		-		-		263		-		-		269		271		-		-		277		-		281		283		-
	-		-		-		293		-		-		-		-		-		-		307		-		311		313		-
	317		-		-		-		-		-		-		331		-		-		337		-		-		-		-
	347		349		-		353		-		-		359		-		-		-		367		-		-		373		-
	-		379		-		383		-		-		389		-		-		-		397		-		401		-		-
	-		409		-		-		-		-		419		421		-		-		-		-		431		433		-
	-		439		-		443		-		-		449		-		-		-		457		-		461		463		-
	467		-		-		-		-		-		479		-		-		-		487		-		491		-		-
	-		499		-		503		-		-		509		-		-		-		-		-		521		523		-
	-		-		-		-		-		-		-		541		-		-		547		-		-		-		-
	557		-		-		563		-		-		569		571		-		-		577		-		-		-		-
	587		-		-		593		-		-		599		601		-		-		607		-		-		613		-
	617		619		-		-		-		-		-		631		-		-		-		-		641		643		-
	647		-		-		653		-		-		659		661		-		-		-		-		-		673		-
	677		-		-		683		-		-		-		691		-		-		-		-		701		-		-
	-		709		-		-		-		-		719		-		-		-		727		-		-		733		-
	-		739		-		743		-		-		-		751		-		-		757		-		761		-		-
	-		769		-		773		-		-		-		-		-		-		787		-		-		-		-
	797		-		-		-		-		-		809		811		-		-		-		-		821		823		-
	827		829		-		-		-		-		839		-		-		-		-		-		-		853		-
	857		859		-		863		-		-		-		-		-		-		877		-		881		883		-
	887		-		-		-		-		-		-		-		-		-		907		-		911		-		-
	-		919		-		-		-		-		929		-		-		-		937		-		941		-		-
	947		-		-		953		-		-		-		-		-		-		967		-		971		-		-
	977		-		-		983		-		-		-		991		-		-		997		-						

Figura 1: Tabla de primos gemelos

13.1. Clasificación de números primos

En la tabla anterior 1 se distinguen, en general, 3 clases de primos. Por lo tanto se puede intentar una clasificación al dividirlos en primos gemelos, primos casi-gemelos y primos solitarios.

- Los primos gemelos pueden formar 3 tipos de parejas cuyas terminaciones son: (7,9); (9,1) y (1,3).
- Los primos casi-gemelos son los primos que están en las columnas de primos gemelos pero les falta el compañero. La serie de primos casi-gemelos comienza con: 47, 79, 89, 131, 163, 167...
- Los primos solitarios se hallan en las columnas 7 y N de la tabla y se clasifican en 2 tipos cuyas terminaciones son 3 y 7. Los primos solitarios no pueden ser gemelos porque su compañero es divisible por 5. La serie de primos solitarios comienza con: 23, 37, 53, 67, 83, 97,113, 127, 157...

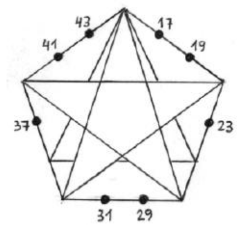


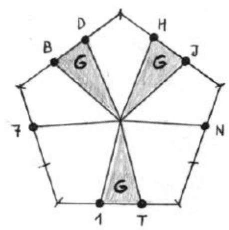
14. El reloj

Otro intento de asociar la distribución de los primos a figuras geométricas es utilizar la aritmética del reloj:

Pensemos ahora en un cilindro imaginario de longitud infinita. Enrosquemos la recta numérica sobre su cara lateral haciendo que cada vuelta sea de 30 números. Marquemos con un punto únicamente los números impares.

Ahora dibujemos un triángulo y un pentágono inscritos en la base circular teniendo en cuenta que sus vértices coincidan con el número 15. Los números mayores que 10 encolumnados en los vértices del triángulo no pueden ser primos porque son divisibles por 5. Los encolumnados en los vértices del pentágono tampoco pueden ser primos porque son divisibles por 3. La figura se corresponde con la criba de 30 columnas.





15. El pentágono

Pensemos ahora en un prisma imaginario de longitud infinita cuya base sea un pentágono:

Enrosquemos la recta numérica sobre sus caras laterales, haciendo que cada vuelta sea de 30 números y teniendo en cuenta que el número 3 se ubique en una de las aristas longitudinales del prisma.

Si ahora observamos la base pentagonal del prisma notaremos que los primos gemelos aparecen encolumnados en 3 de sus lados, 2 de los cuales son contiguos.

16. Modelos insuficientes

La criba de 30 columnas, el reloj y el pentágono parecen revelar la existencia de cierto orden subyacente, pero en forma muy difusa. Sin embargo, las formas sencillas y regulares de estos modelos no dejan aflorar el patrón geométrico verdadero, que tiene una mayor complejidad. En este sentido decimos que son modelos insuficientes.

La determinación geométrica exacta de los números primos se logra sólo si se tiene en cuenta la estructura de divisores de los números naturales. La serie de la cantidad de divisores de los números naturales es tan o más irregular que la de los números primos y comienza con: 1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 6, ...

Esta estructura se pone de manifiesto en el modelo de curvas periódicas superpuestas y en el diagrama Número/Divisor que se muestran a continuación.

17. El modelo de curvas periódicas superpuestas

La serie de la cantidad de divisores de los números naturales y la serie de los números primos se determinan en forma geométrica de la siguiente manera:

Desde el origen de la recta numérica se traza una curva periódica por cada número natural. Cada curva debe interceptar al número natural y a sus múltiplos. Finalmente se remarca con un punto grueso a los números que han sido interceptados sólo por 2 curvas: Estos son los números primos.

17.1. Propiedades del modelo

- La cantidad de divisores de cada número natural es igual a la cantidad de curvas que lo interceptan sobre la recta numérica. Por ejemplo: el 6 aparece interceptado por 4 curvas, por lo tanto tiene 4 divisores.

- Los números primos son los números que aparecen interceptados por 2 curvas. Por ejemplo: 2, 3, 5, 7, 11...

- Los números compuestos son los que aparecen interceptados por más de 2 curvas. Por ejemplo: 4, 6, 8, 9, 10, 12...

- Los números cuadrados son aquellos interceptados por una cantidad impar de curvas. Por ejemplo: 1, 4, 9,...

- Las lagunas son los segmentos de la recta numérica donde los números naturales son interceptados por más de 2 curvas. Por ejemplo; una pequeña laguna está localizada en el intervalo que contiene a los números 8, 9 y 10 (Véase la figura).

- Los divisores de cada número natural se corresponden con los semi-períodos de las curvas que lo interceptan. Por ejemplo: Las curvas que interceptan al número 6 tienen semi-períodos: 1, 2, 3 y 6. Por lo tanto los divisores de 6 son: 1, 2, 3 y 6.

- La forma de la curva no es relevante sino los puntos en donde intercepta a la recta numérica.

- El tamaño del modelo puede extenderse trasladando el límite arbitrario CC' hacia la derecha hasta donde se desee.

- El diagrama se va haciendo cada vez más complejo pero no tiene un límite teórico: Es infinito.

La construcción del diagrama se debe realizar con regla y compás o sino, utilizando gráficas de funciones periódicas. Por ejemplo: la gráfica de la función trigonométrica seno.

17.2. La fuente de divisores

Con este nombre metafórico llamaremos a esta figura que se obtiene del modelo principal anulando las curvas que se encuentren debajo de la recta numérica.

Se verá entonces salir o "brotar", de cada número, una cantidad de líneas igual a la cantidad de divisores o factores del número. Por ejemplo: De los números primos 2, 3 y 5 "brotan" 2 divisores de cada número. Del número 4 "brotan" 3 divisores, etc.

18. Las parejas de factores

En un contexto de multiplicación a los divisores también se los puede llamar factores.

Los factores se organizan en parejas cuyo producto es igual al número. Los números cuadrados se distinguen porque siempre tienen un divisor central igual a la raíz cuadrada del número. Los divisores menores al número se llaman divisores propios o partes del número.

Si la suma de divisores propios es mayor al número entonces se dice que el número es abundante. Si la suma es menor al número entonces se dice que el número es deficiente. Si la suma es igual al número entonces el número es perfecto.

19. El diagrama Número/Divisor

En este diagrama los divisores de cada número natural aparecen remarcados con un punto grueso sobre la vertical del número. Los números primos están determinados en forma geométrica al ser los únicos números que no presentan divisores intermedios entre sí mismos y la unidad.

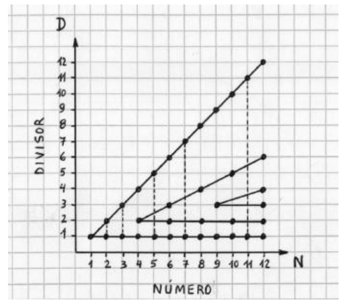
Esta característica aparece en el diagrama como una línea de trazos entre los divisores externos. La línea no es interceptada por ningún otro divisor en la vertical de cada primo.

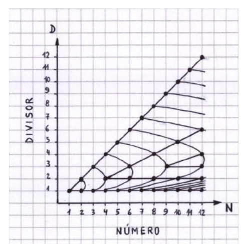
Se observa además que sobre la vertical de un número, los divisores que aparecen sobre el perímetro del mismo sector triangular forman parejas de divisores complementarios. Estos son los factores que al ser multiplicados entre sí dan como resultado el número original.

Una variante opcional del dibujo consiste en trazar una línea que conecte los divisores o factores centrales de cada número. Otra opción es considerar la línea dibujada a 45º como si fuera la recta numérica.

Nótese que el diagrama también determina la ubicación de los números cuadrados (1, 4, 9, 16, 25, etc.). Estos son los únicos números naturales que tienen una cantidad impar de divisores. Los números cuadrados se distinguen porque su divisor central aparece en los vértices de los triángulos del diagrama.

Si se traza una línea que una los vértices de los triángulos, entonces el diagrama queda dividido en 2 partes, siendo que cualquiera de ellas es suficiente para la determinación de los números primos. Una versión simplificada del diagrama, válida únicamente para números impares, se logra al omitir los





triángulos en cuyo vértice se haya una raíz cuadrada par.

19.1. La red de factores

Partiendo del diagrama Número/Divisor se puede construir una red de factores al trazar curvas que los relacionan. Por cada número natural hay una curva.

Las curvas están dispuestas de manera tal que la línea imaginaria que une las raíces de 2 cuadrados siempre es interceptada sólo por una curva. La cantidad de factores contenidos en cada curva es igual al número de orden de la curva, siendo la primera de ellas la correspondiente al número 1, formada sólo por un punto. Este grafico permite lograr la factorización relativa de un número.

19.2. Factorización relativa

Llamamos aquí factorización relativa al proceso de encontrar los factores de un número sin operar directamente sobre él.

La idea consiste en tomar el grafico anterior y tratar de reproducir la red de aristas y vértices o factores cercanos al número y con ello obtener los factores del número propiamente dicho.

Debido a que es predecible la distancia entre los vértices adyacentes este proceso también puede lograrse utilizando solamente operaciones de suma y resta, prescindiendo de cualquier otra.

20. El modelo 3D

El modelo de curvas periódicas superpuestas y el diagrama Número/Divisor se relacionan entre sí pues son partes de un modelo mayor que tiene una estructura tridimensional.

En el modelo 3D las curvas periódicas no se encuentran sobre el mismo plano, sino que cada curva se halla ubicada en un plano paralelo a los demás. Estos planos están separados entre sí por la unidad. A su vez la recta numérica se encuentra en un plano perpendicular a los planos que contienen las curvas.

Los 2 diagramas mencionados al principio son sólo 2 vistas de este objeto tridimensional. Los puntos remarcados que se observan en el diagrama Número/Divisor son los puntos en donde las curvas interceptan en forma periódica al plano numérico, situado en forma perpendicular a ellas.

Entonces el diagrama Número/Divisor contiene la parte esencial del modelo de curvas periódicas superpuestas.

21. La cometa

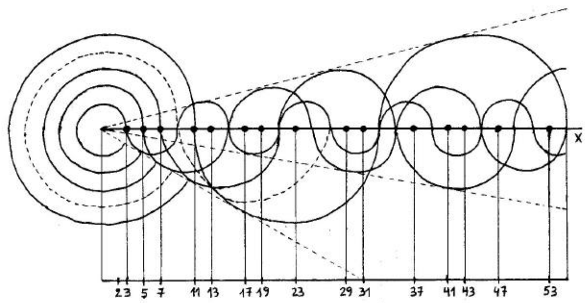
El cometa es un modelo que ha sido arreglado con círculos concéntricos para hacerlo más nemotécnico. Su forma recuerda a los objetos astronómicos conocidos desde la antigüedad.

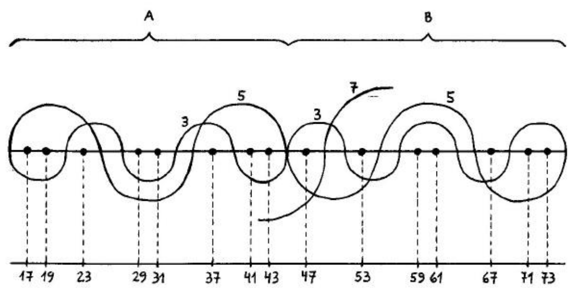
La figura está formada por curvas periódicas que tienen una amplitud máxima en el origen de la recta numérica. Cada curva intercepta a un número y a todos sus múltiplos impares. La figura se puede trazar con regla y compás, o sino, utilizando la gráfica de otra función periódica, por ejemplo; la gráfica de la función trigonométrica coseno.

Los números pares no se tienen en cuenta. Las curvas correspondientes a los números compuestos impares son opcionales. En este modelo no aparecen todos los divisores de los números naturales. El modelo utiliza una menor cantidad de líneas para determinar los números primos. Se destaca en forma especial la ubicación de los primos gemelos.

En la figura se distinguen 2 zonas: En la cabeza del cometa los números primos mayores a 2 aparecen interceptados únicamente por una curva, mientras que en la cola del cometa los primos son los números que no son interceptados. El diagrama es eficaz en la determinación de primos y compuestos hasta el número anterior al cuadrado del número primo siguiente al último número dibujado dentro de la cabeza.

El diagrama dibujado arriba es eficaz hasta el número $168 = (13 \cdot 13) - 1$. Para prolongar su eficacia hay que agregarle más curvas. El modelo puede tener una extensión infinita.





21.1. El sombrero

El sombrero es una figura que aparece dentro de la cola del cometa y que se repite una y otra vez en forma periódica.

La figura está formada por curvas que representan a los divisores 3 y 5. Las curvas interceptan a los múltiplos impares de esos números. La figura se presenta, al derecho (B) y al revés (A), cada 30 números.

Esta figura es interesante pues determina la ubicación de las parejas de primos gemelos. Los primos gemelos solo pueden alojarse en la copa o en las alas del sombrero. Vemos entonces que la figura puede contener como máximo 8 números primos: 6 de ellos formando 3 parejas de gemelos, más 2 primos solitarios.

22. Construcción de funciones

La gráfica de la función trigonométrica seno se representa como una onda periódica que intercepta una y otra vez a la recta numérica.

Ahora decimos que un número a es divisible por otro b si:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{180^{\text{o}} \cdot a}{b}\right) = 0$$

Utilizando esta afirmación adecuamos la función seno para que intercepte al número primo 2 y a todos sus múltiplos sobre la recta numérica.

$$f(x) = A \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\text{o}} \cdot x}{2}\right)$$

El factor designado con la letra A es un coeficiente de amplitud que sirve para regular la altura de la curva con respecto a la recta numérica.

Al dibujar la gráfica de esta función vemos que la curva es útil para determinar los números primos y los compuestos en el intervalo [3, 8]:

La curva tiene amplitudes en los números primos 3, 5 y 7 e interceptos en los números compuestos 4, 6 y 8. Fuera de ese intervalo la curva no es eficaz.

Si ahora se superpone al dibujo anterior una gráfica que intercepte al número 3 y a todos sus múltiplos, se obtiene la siguiente figura:

En el intervalo [4,24] las 2 curvas presentan amplitudes en los números primos 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23, mientras que en los números compuestos 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22 y 24 por lo menos una de las curvas intercepta al número. Esto permite identificar a primos y compuestos. La gráfica sólo es eficaz en el intervalo [4,24].

El límite inferior del intervalo es el número compuesto siguiente al mayor primo utilizado en las fórmulas. El límite superior es el número anterior al cuadrado del siguiente primo.

Por ejemplo: El número 4 es el compuesto siguiente al número primo 3 y el número 24 es el compuesto anterior al cuadrado del número primo 5.

Ahora se multiplica las funciones que generaron las 2 curvas vistas arriba y se obtiene una función sencilla que permite dibujar una curva unificada:

$$f(x) = A \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\text{o}} \cdot x}{2}\right) \cdot A \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^{\text{o}} \cdot x}{3}\right)$$

La nueva función se representa con una curva que muestra amplitudes para los números primos e interceptos para los números compuestos en el intervalo [4,24].

Puede aumentarse las amplitudes de la curva aumentando el valor del coeficiente de amplitud A. También se puede asignar un valor general al coeficiente, o sino, asignar un valor individual para cada componente de la serie de productos. Al coeficiente de amplitud se le asigna un valor constante o variable (por ejemplo $n/2$) según sea conveniente en la representación de la función.

También puede utilizarse la función coseno a partir del segundo término de la serie con la salvedad que el denominador de cada término debe ser el doble del usado para la función seno.

Si ahora se aumenta la serie de productos de la función agregando el término relacionado con el tercer número primo, el 5, entonces se obtiene una gráfica con amplitudes para los primos e interceptos para los números compuestos en el intervalo [6,48].

A medida que agregamos términos a la fórmula se pierde un poco de eficacia por el lado izquierdo de la recta numérica pero se compensa en demasía al ganar mucho más por el lado derecho de dicha recta.

Finalmente, si ahora se eleva al cuadrado la función anterior entonces se obtiene una gráfica que muestra picos para los números primos y líneas prácticamente rectas para los números compuestos.

Obsérvese como, bajo la apariencia irregular y asimétrica de la gráfica, subyacen dos simetrías superpuestas centradas respectivamente en los números 15 y 30.

23. Test de primalidad

Es un algoritmo que, dado un número de entrada n, no consigue verificar la hipótesis de un teorema cuya conclusión es que n es compuesto.

23.1. Test de Lucas-Lehmer

El test de Lucas-Lehmer nos dice que para un número natural n conocidos sus factores primos n-1. Existe un numero natural a menor que n y mayor que 1 que verifica estas condiciones.

$$a^n - 1 = 1(modn)$$

asi como

$$a^[(n-1)/2] \neq 1(modn)$$

Para todos los factores primos q de n entonces n es primo. Si no se puede encontrar a entonces n es compuesto. Advertir que el test de Lucas-Lehmer solo sirve para los numeros primos de Mersenne.

23.2. Test Miller-Rabin

Es un test de primalidad, pero a diferencia del anterior se basa en la probabilidad por lo que el resultado no es exacto o correcto en su totalidad.

Supongamos que $n \geq 1$ es un numero impar y no sabemos si es primo o compuesto. Dado m un valor impar tal que $n - 1 = 2^k m$ y a un entero escogido entre 2 y n-2.

Si se cumple que:

$$a^m = \pm 1 modm$$

$$a^{2^r m} = -1 modm$$

Si existe r entre 1 y k-1 probablemente el numero sea primo, sino existe el numero es compuesto.

24. Conclusión

La distribución de los números primos es perfectamente entendible con los modelos visuales que hemos visto.

Los modelos geométricos que permiten determinar la posición de los números primos son los que tienen en cuenta la estructura de divisores de los números naturales. El modelo principal es un modelo de curvas periódicas superpuestas. Cada curva periódica representa un divisor.

Las irregularidades en la distribución de los primos y las lagunas, o zonas desérticas, son el resultado de la complejidad que origina la superposición de infinitas curvas periódicas, especialmente cuanto más se sumergen en las profundidades de la recta numérica.

Referencias

MODELOS DE EXÁMENES

EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO (I.T.I. MECÁNICA)
9-Enero-2009

1.– Halle las raíces cúbicas del número $z = 2 + 4i$.

2.– Estudie la inyectividad y calcule la función inversa de

$$f(x) = \sqrt{\frac{4-x}{\sqrt{4+x}}}$$

3.– Represente gráficamente el dominio de la función

$$h(x,y) = \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^3+y^3+16}-4}$$

4.– Represente la curva dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = 3t^3+1 \\ y(t) = t^2+t \end{cases}$$

5.– Dada la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

siendo y función de la variable independiente x, realice el cambio $x = e^t$ para transformarla en otra donde la variable independiente sea t. Resuelva la ecuación diferencial obtenida.

6.– Determine el triángulo rectángulo de mayor área que puede inscribirse en una circunferencia de radio R dado.

7.– Estudie el carácter de la integral siguiente según los valores de $p \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$$

EXAMEN PARCIAL DE CÁLCULO (I.T.I. MECÁNICA)
15-Abril-2009

1.– Dibuje la gráfica de la función $f(x) = 3^{|x^2-3x+1|}$.

2.– Simplifique

$$\operatorname{sen}(2 \operatorname{arc\,cos} x)$$

3.– Halle la función inversa de

$$f(x) = \frac{3x}{1+2x-x^3}$$

en un intervalo donde esté definida y que contiene al origen.

4.– Halle el límite

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{cotg} x}{x} \right)$$

5.– Halle los números complejos tales que su cuadrado es igual a su conjugado.

6.– Determine el triángulo rectángulo de mayor área que puede inscribirse en una circunferencia de radio R dado.

7.– Si $f(x) = x^2 e^x$ halle $f^{1001)}(x)$.

8.– Sabiendo que y es una función de x que verifica

$$xy^2 - \ln(y) = x + \operatorname{sen} x$$

halle $y'(0)$.

UNA DE LAS PRÁCTICAS DE UNA ASIGNATURA

Práctica 2.1

Linealización de algunas funciones de interés para el problema del ajuste de distribuciones bidimensionales

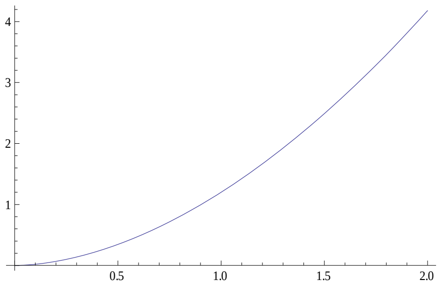
Ante un problema de ajuste lineal de una distribución bidimensional, el método de mínimos cuadrados conduce al sistema, siempre compatible y determinado

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = na + b\sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

que, una vez resuelto, proporciona la pendiente y la ordenada en el origen una función lineal de ajuste $y = a + bx$.

Ante la comodidad de resolución de estos sistemas, y en la necesidad de localizar otras funciones muy frecuentemente utilizadas en problemas de ajuste cabe tener en cuenta que un modelo que relaciona una variable y con otra x se dice intrínsecamente lineal si por una transformación adecuada se puede reducir dicho modelo a otro lineal.

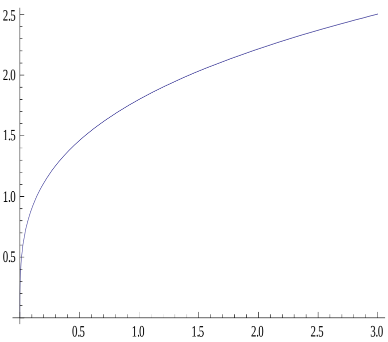
En tal sentido es interesante conocer cómo linealizar los siguientes modelos de ecuaciones ya, por otro lado, familiares.



$\beta > 0$

$y = k\,x^{\beta}, \beta > 1,$

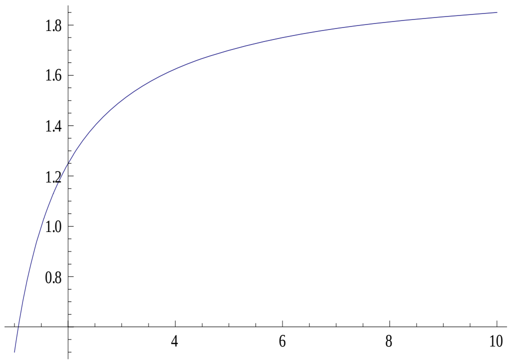
$linealiza \rightarrow Lny = Lnk + \beta Lnx$



$\beta > 0$

$y = k\, x^{\beta}, \beta < 1,$

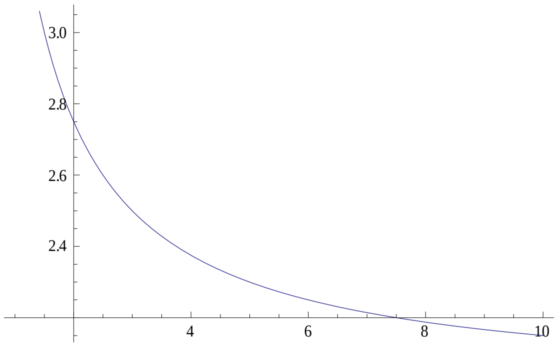
$linealiza \rightarrow Lny = Lnk + \beta Lnx$



$$y = k - \frac{\beta}{x}$$

$\beta > 0$

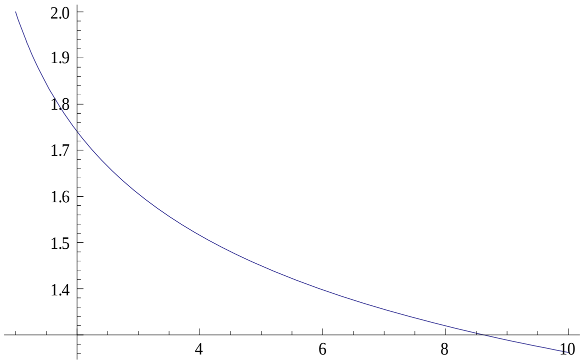
$Linealiza \rightarrow y = k - \beta\, x^{-1}$



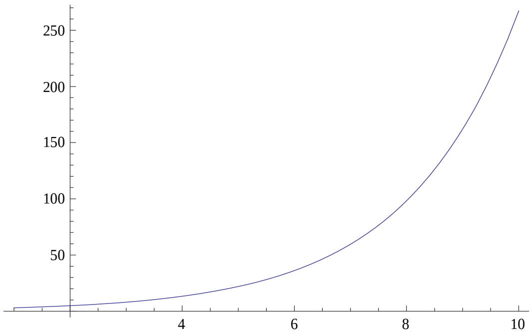
$$y = k + \frac{\beta}{x}$$

$\beta > 0$

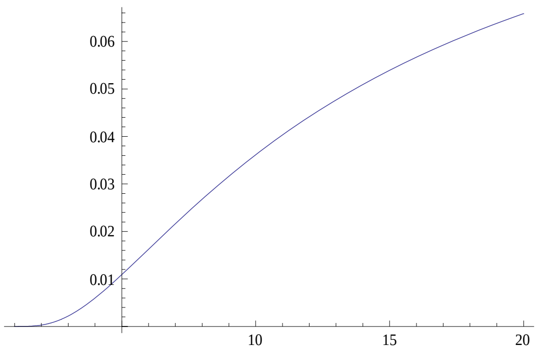
$Linealiza \rightarrow y = k + \beta\, x^{-1}$



$$y = k\,x^{-\beta}$$
$$\beta > 0$$
$$Linealiza \rightarrow Lny = Lnk - \beta Ln\,x$$



$$y = k\,e^{\beta x}$$
$$\beta > 0$$
$$Linealiza \rightarrow Lny = Lnk + \beta\,x$$



$$y = k\,e^{-\beta / x}$$
$$Linealiza \rightarrow Lny = Lnk - \beta\,x^{-1}$$

Aplicación

La tabla adjunta señala el número de bacterias localizadas en otras tantas superficies en contacto con materiales contaminados

Superficie de contacto (cm^2)	*Nº de bacterias* ***localizadas***
2.99	780
3.23	440
3.39	445
3.59	700
3.67	1265
3.87	934
4.02	1499
4.03	2663
4.27	1697
4.18	3272
4.36	3907
4.37	5075
4.49	5734

Determine una función de la forma $y = k\,e^{\beta x}$ *que ajuste el número de bacterias en función de la superficie de contacto, determinando e interpretando el índice de bondad que presenta el ajuste efectuado.*

Haga otro tanto considerando ahora una función de la forma $y = k\,x^{\beta}$

Compare los resultados obtenidos y comente sobre los ajustes realizados.

UNA DE LAS PRÁCTICAS CON EL PROGRAMA MATHEMATICA

Prácticas de Matemáticas con *Mathematica* .

Práctica sobre la Integración numérica.

Departamento de Matemática Aplicada.

E.P.S. de Zamora

Universidad de Salamanca

Introducción.

En esta práctica vamos a ilustrar la capacidad de *Mathematica* para calcular integrales definidas, exactas y aproximadas de funciones de una variable. Las instrucciones básicas son **`Integrate`** y **`NIntegrate`**, aunque pueden escribirse con la notación habitual que se utiliza en matemáticas, gracias a las paletas que incorpora *Mathematica* en su versión 3.0.

Las instrucciones de integración básicas: Integrate y NIntegrate.

Mathematica nos permite calcular integrales indefinidas y definidas utilizando las instrucciones siguientes:

La expresión:

```
∫f[x] ⅆx
```

calcula una función primitiva de f[x]. Esta expresión es equivalente a:

```
Integrate[f[x], x]
```

donde f[x] es una función de la variable x.

- Ejemplo 1:

Calcular la integral indefinida de la función f[x]= $\frac{1}{(x-2)^2+4}$

Basta evaluar la célula siguiente para obtener una función primitiva:

$$\int \frac{1}{(x-2)^2+4}\, dx$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{1}{2}\,(-2+x)\right]$$

La expresión para calcular integrales definidas es:

$$\int_a^b f[x]\, dx$$

siendo [a,b] el intervalo donde se quiere calcular la integral definida de la función f [x]. Si se quiere determinar el valor numérico de la integral definida se utiliza la instrucción **NIntegrate.** La expresión anterior es equivalente a:

```
Integrate[f[x], {x, a, b}]
```

Ejemplo 2:

Calcular la integral de la función del ejemplo anterior en el intervalo [1, 2]. Dar el valor numérico de dicha integral.

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2+4}\, dx$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{ArcTan}\left[\frac{1}{2}\right]$$

Para calcular su valor numérico podemos hacerlo de varias formas:

$$N\left[\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2+4}\, dx\right]$$

```
0.231824
```

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2+4}\, dx \;//\; N$$

```
0.231824
```

$$\mathrm{NIntegrate}\left[\frac{1}{(x-2)^2+4}, \{x, 1, 2\}\right]$$

```
0.231824
```

Muchas integrales no tienen solución analítica, en unos casos porque no existe primitiva de la función a integrar y en otros pocos casos porque el programa *Mathematica* no sea capaz de resolverlas. En estos casos la integración numérica con el comando NIntegrate que acabamos de ver nos permite dar una aproximación a la integral definida. El comando es:

```
NIntegrate[f, {x, xmin, xmax}]
```

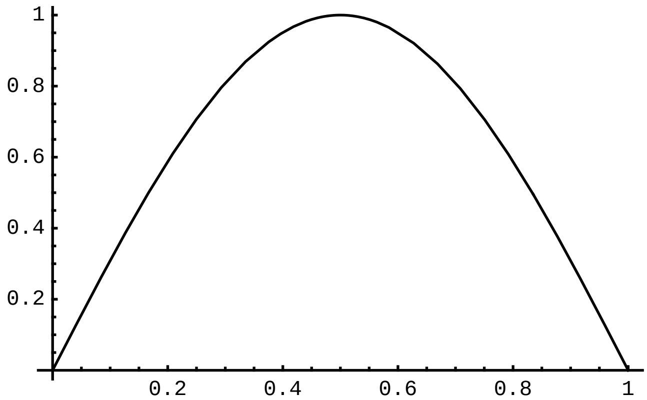
En el siguiente ejemplo compararemos el método del trapecio compuesto (estudiado en las clases teóricas) y el comando de *Mathematica* **`NIntegrate`.**

■ Ejemplo 4:

Calcular de manera aproximada la integral de la función sen πx para $0 \leq x \leq 1$; primero utilizar el método de los trapecios con 4, 7, 25, 50 y 100 puntos equiespaciados y por último con **`NIntegrate`.** Representar en cada caso la función y la línea quebrada que une los distintos puntos.

```
f[x_] := Sin[π x];
```

```
senplot = Plot[f[x], {x, 0, 1}];
```



● $h = \frac{1}{3}$;

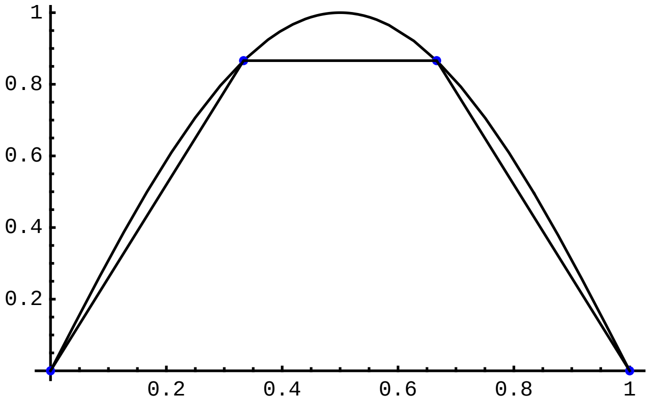
```
puntos = Table[{x, f[x]}, {x, 0, 1, h}]
```

$$\left\{\{0, 0\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}, \{1, 0\}\right\}$$

$$\text{intrapecios}[4] = N\left[\sum_{\substack{x=0\\ \Delta x=h}}^{1-h} \frac{1}{2}\, h\, (f[x] + f[x+h])\right]$$

```
0.57735
```

```
puntosplot = ListPlot[puntos,
   PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], PointSize[.015]}, DisplayFunction → Identity];
lineaplot = Graphics[Line[puntos]];
Show[senplot, puntosplot, lineaplot];
```



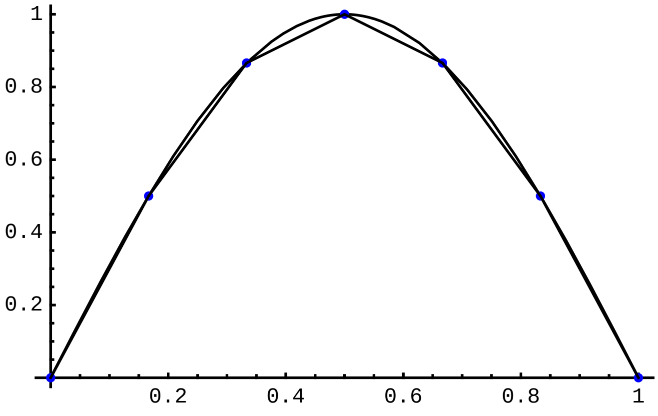
- $h = \frac{1}{6};$

```
puntos = Table[{x, f[x]}, {x, 0, 1, h}];
```

$$\text{intrapecios}[7] = N\left[\sum_{\substack{x=0 \\ \Delta x=h}}^{1-h} \frac{1}{2} h\,(f[x] + f[x+h])\right]$$

```
0.622008
```

```
puntosplot = ListPlot[puntos, PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], PointSize[.015]},
  DisplayFunction → Identity]; lineaplot = Graphics[Line[puntos]];
Show[senplot, puntosplot, lineaplot];
```



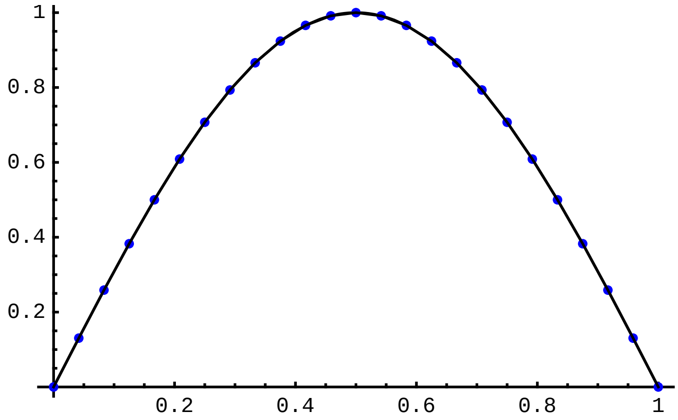
- $h = \frac{1}{24};$

```
puntos = Table[{x, f[x]}, {x, 0, 1, h}];
```

$$\text{intrapecios}[25] = N\left[\sum_{\substack{x=0 \\ \Delta x=h}}^{1-h} \frac{1}{2} h\,(f[x] + f[x+h])\right]$$

```
0.63571
```

```
puntosplot = ListPlot[puntos,
   PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], PointSize[.015]}, DisplayFunction → Identity];
lineaplot = Graphics[Line[puntos]];
Show[senplot, puntosplot, lineaplot];
```



- $h = \frac{1}{49};$

```
puntos = Table[{x, f[x]}, {x, 0, 1, h}];
```

$$\text{intrapecios}[50] = N\left[\sum_{\substack{x=0 \\ \Delta x = h}}^{1-h} \frac{1}{2} h\,(f[x] + f[x+h])\right]$$

```
0.636402
```

- $h = \frac{1}{99};$

```
puntos = Table[{x, f[x]}, {x, 0, 1, h}];
```

$$\text{intrapecios}[100] = N\left[\sum_{\substack{x=0 \\ \Delta x = h}}^{1-h} \frac{1}{2} h\,(f[x] + f[x+h])\right]$$

```
0.636566
```

En definitiva los valores calculados para la integral con cuatro, siete , veinticinco, cincuenta y cien puntos, son:

```
{intrapecios[4], intrapecios[7], intrapecios[25], intrapecios[50], intrapecios[100]}
```

```
{0.57735, 0.622008, 0.63571, 0.636402, 0.636566}
```

Con el comando de *Mathematica* :

```
NIntegrate[Sin[π x], {x, 0, 1}]
```

```
0.63662
```

Ejemplo 5:

Podemos agrupas las instrucciones anteriores en una sola función que aplica la fórmula del trapecio compuesta para hallar una integral definida, e igualmente podemos hacer con la fórmula de Simpson, según se ha visto en clase.

La función que aplica la fórmula del trapecio compuesta con un número n de intervalos puede expresarse en la forma:

```
Trapecio[n_, a_, b_] := (h = (b - a) / n; Table[x[j] = a + j * h, {j, 0, n}];
  N[h (f[x[0]] / 2 + Sum[f[x[i]], {i, 1, n - 1}] + f[x[n]] / 2), 16])
```

Y de forma análoga, la función que aplica la fórmula de Simpson compuesta con un número n par de intervalos puede expresarse en la forma:

```
Simpson[n_, a_, b_] := (h = (b - a) / n; Table[x[j] = a + j * h, {j, 0, n}];
  N[h / 3 (f[x[0]] + 4 Sum[f[x[i]], {i, 1, n - 1, 2}] +
      2 Sum[f[x[i]], {i, 2, n - 2, 2}] + f[x[n]]), 16])
```

Veamos la comparación de los dos métodos al aplicarlos para hallar la integral

$$\text{Exacto} = \int_0^{2\,\text{Pi}} x\wedge 3\ \text{Sin}[10\,x]\, dx$$

$$\frac{3\pi}{250} - \frac{4\pi^3}{5}$$

cuyo valor numérico es

```
N[Exacto, 16]
```

```
-24.76732223239678
```

Definimos la función para no tener que teclearla cada vez que queramos usarla:

```
f[x_] := x^3 Sin[10 x]
```

La utilización de la fórmula del trapecio compuesta con n=2000 resulta:

```
nint = 2000; T1 = Trapecio[nint, 0, 2 Pi]
```

```
-24.76528206775830
```

mientras que la aplicación de la fórmula de Simpson compuesta permite obtener

```
S1 = Simpson[nint, 0, 2 Pi]
```

```
-24.76732236603553
```

resultando los errores que siguen que ponen de manifiesto el mejor comportamiento de la fórmula de Simpson

```
{Exacto - T1, Exacto - S1}
```

$$\{-0.00204016463848,\ 1.3363875 \times 10^{-7}\}$$

La función **`NIntegrate`** requiere para su ejecución conocer la función que se quiere integrar. Sin embargo hay muchas situaciones en las cuales todo lo que tenemos es una lista de puntos de la función. Una posibilidad para el cálculo de la integral es repetir los pasos del ejemplo anterior, otra es calcular el polinomio de interpolación que pasa por dichos puntos e integrarlo (existen diversas formas de afrontar este problema, tal y como se ha visto en las clases teóricas).

La opción más efectiva es utilizar la instrucción **`ListIntegrate`**, que no es accesible si no se ha cargado previamente el paquete **NumericalMath`ListIntegrate`** . Para hacerlo:

```
<< "NumericalMath`ListIntegrate` "
```

```
ListIntegrate[{{x1,y1},{x2,y2},...},k]
```

`ListIntegrate` trabaja integrando polinomios de interpolación, donde k-1 especifica el grado de dichos polinomios. De esta forma, k=2, por ejemplo, produce la integración por interpolación lineal, es decir el método de los trapecios. Si no se especifica el valor de k, *Mathematica* toma por defecto el valor 4.

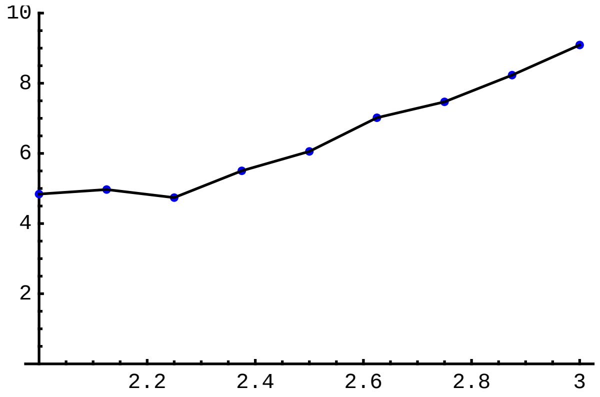
- Ejemplo 5:

Dada la tabla de valores para una función f[x] desconocida:
{{2., 4.841}, {2.125, 4.970}, {2.25, 4.740}, {2.375, 5.504}, {2.5, 6.057}, {2.625, 7.017}, {2.75, 7.470}, {2.875, 8.232},{3., 9.091}}

estimar la integral $\int_2^3 f[x]\, dx$.

Representemos gráficamente la aproximación lineal:

```
puntos = {{2., 4.841}, {2.125, 4.970}, {2.25, 4.740}, {2.375, 5.504},
    {2.5, 6.057}, {2.625, 7.017}, {2.75, 7.470}, {2.875, 8.232}, {3., 9.091}};
puntosplot = ListPlot[puntos, PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], PointSize[.015]},
    DisplayFunction → Identity];
lineaplot = Graphics[Line[puntos]];
Show[puntosplot, lineaplot, AxesOrigin → {2, 0},
   PlotRange → {0, 10}, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```




```
ListIntegrate[puntos, 2]
```

```
6.3695
```

```
ListIntegrate[puntos]
```

```
6.37141
```

El resultado obtenido será posiblemente más adecuado en el segundo caso, donde se utilizan polinomios de interpolación de grado tres en lugar de la aproximación lineal del primero.

Ejercicios.

- Ejercicio 1:

Calcular las siguientes integrales: $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$, $\int_{-1}^1 x^3 \sqrt{1 - x^2}\, dx$, $\int_{-2}^2 (e^x + e^{-x})\, dx$

- Ejercicio 2:

Representar las siguientes funciones, y utilizar dichas representaciones para calcular las integrales que se indican a continuación (interpretar los resultados) :

f[x]= x(x-1)(x-2) para 0 ≤ x ≤ 2. Calcular $\int_0^2 x(x-1)(x-2)\,dx$

f[x]= Sin[x] para 0 ≤ x ≤ 2π. Calcular $\int_0^{2\pi} \text{sen}[x]\,dx$

f[x]= Cos[x] para 0 ≤ x ≤ 2π. Calcular $\int_0^{2\pi} \cos[x]\,dx$

f[x]= Sin$[x]^2$ y g[x]= Cos$[x]^2$ en los mismos ejes para 0 ≤ x ≤ π. Calcular $\int_0^{\pi} \text{sen}[x]^2\,dx$ y $\int_0^{\pi} \cos[x]^2\,dx$

- Ejercicio 3:

Representar y calcular el área entre las curvas y=x^2 e y=x^4 . De igual manera entre las curvas y= $e^x - 9$ e y=Log [x] (Nota: Para calcular los límites de integración utilizar **`FindRoot.`**)

- Ejercicio 4:

Representar y calcular el área entre las curvas $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ y $(x-4)^2 + y^2 = 9$.

- Ejercicio 5:

Utilizando **`NIntegrate`** y las fórmulas del Trapecio y de Simpson estimar el valor de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

- Ejercicio 6:

Representar gráficamente la función senπx^4 entre 0 y 1. Calcular el área que encierra con el eje OX.

- Ejercicio 7:

Dada la tabla de valores para una función f[x] desconocida:
{{1., 0.001}, {1.083, 0.813}, {1.165, 1.570}, {1.253, 2.221}, {1.337, 2.720}, {1.416, 3.034}, {1.518, 3.141}, {1.583, 3.034}, {1.671, 2.720}, {1.752, 2.221}, {1.829, 1.570}, {1.918, 0.813}, {2., 0.002}}

estimar la integral $\int_1^2 f(x)\,dx$

- Ejercicio 8:

Calcular la longitud de la curva catenaria y = $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ entre x = -4 y x = 4.

Ejercicio 9:

Calcular las integrales siguientes utilizando **NIntegrate** y compare con la aplicación de las fórmulas del Trapecio y de Simpson integrando en un intervalo grande [0,100000]:

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx \qquad\qquad \int_1^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1+\text{sen}^2 x}}\, dx$$

- Ejercicio 10:

Calcule la siguiente integral utilizando el procedimiento que considere más adecuado: $\int_0^4 e^{-x^2}\, dx$

EJEMPLO DE PRÁCTICA REALIZADA CON EL PROCESADOR LATEX

Índice

Índice de cuadros

Índice de figuras

1. Modos matemáticos

- Ejemplo 1
  $x^2 + y^2 = 1$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$x^2 + y^2 = 1$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$x^2 + y^2 = 1$

$$x^2 + y^2 = 1$$

- Ejemplo 2
  $\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2}{2xy}}$

$$\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2}{2xy}}$$

$\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2}{2xy}}$

$$\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2}{2xy}}$$

$\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2}{2xy}}$

$$\sqrt[3]{\frac{x^2+y^2}{2xy}}$$

2. Símbolos y operadores matemáticos

- Ejemplo 1
  $E = \overline{E} \oplus \overline{E}^{\perp}$
  $$E = \overline{E} \oplus \overline{E}^{\perp}$$
  $E = \overline{E} \oplus \overline{E}^{\perp}$
  $$E = \overline{E} \oplus \overline{E}^{\perp}$$
  $E = \overline{E} \bigoplus \overline{E}^{\perp}$
  $$E = \overline{E} \bigoplus \overline{E}^{\perp}$$
- Ejemplo 2
  $|$
  $$|||$$

3. Fórmulas matemáticas

$$|x| = \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$

4. Paréntesis, corchete y llaves

$$\{\sum_{i=1}^{3} \sigma^i\}\{\prod_{i=1}^{3} \sigma^{i+1}\}$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{3} \sigma^i\right\}\left\{\prod_{i=1}^{3} \sigma^{i+1}\right\}$$

$$\{\frac{x}{x^3-1}\}$$

$$\{\frac{x}{x^3-1}\}$$

$$(\big(\Big(\bigg(\Bigg($$

$$[\big[\Big[\bigg[\Bigg[$$

5. Tamaños de los caracteres matemáticos

- Ejemplo 1: modo displaystyle
  $\displaystyle \int_0^\pi \frac{1}{1+x^2}\,dx$
- Ejemplo 2: modo textstyle
  $\textstyle \int_0^\pi \frac{1}{1+x^2}\,dx$
- Ejemplo 3: modo scriptstyle
  $\scriptstyle \int_0^\pi \frac{1}{1+x^2}\,dx$
- Ejemplo 4: modo scriptscriptstyle
  $\scriptscriptstyle \int_0^\pi \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$$\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-p^{-1}}$$

$$\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-p^{-1}}$$

6. Numeración y posición de las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2y}{dt^2} - 2g\frac{dy}{dt} + (g^2+w^2)y = f(t,y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = \dot{y}_0, \end{array} \right. \tag{1}$$

Con el comando cases también se puede obtener un resultado parecido:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} - 2g\frac{dy}{dt} + (g^2+w^2)y = f(t,y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = \dot{y}_0, \end{cases} \tag{2}$$

También podremos ponerlo con la llave en la parte derecha

$$\left. \begin{array}{r} \frac{d^2y}{dt^2} - 2g\frac{dy}{dt} + (g^2+w^2)y = f(t,y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = \dot{y}_0 \end{array} \right\} = A \tag{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} x^2 - y^3 & > 2 \\ 2x & < 1 - y \end{array} \right. \tag{4}$$

$$\begin{array}{rl} x^2 - y^3 & > 2 \\ 2x & < 1 - y \end{array} \tag{5}$$

$$\begin{align} x^2 - y^3 &> 2 \tag{6} \\ 2x &< 1 - y \tag{7} \end{align}$$

$$\begin{eqnarray} x^2 - y^3 &>& 2 \tag{8} \\ 2x &<& 1 - y \tag{9} \end{eqnarray}$$

$$\begin{gather} x^2 - y^3 > 2 \tag{10} \\ 2x < 1 - y \tag{11} \end{gather}$$

$$\begin{split} (x+y)^5 &= (x+y)^2(x+y)^3 \\ &= (x^2+y^2+2xy)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) \\ &= x^5+5yx^4+10y^2x^3+10y^3x^2+5y^4x+y^5 \end{split} \tag{12}$$

$$\begin{align} (x+y)^5 &= (x+y)^2(x+y)^3 \tag{13} \\ (x+y)^5 &= (x^2+y^2+2xy)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) \tag{14} \\ (x+y)^5 &= x^5+5yx^4+10y^2x^3+10y^3x^2+5y^4x+y^5 \tag{15} \end{align}$$

$$\begin{split} y(t) = y_H + y_p = A\, e^{gt}\cos(wt) + B\, e^{gt}\mathrm{sen}(wt) \\ + \left(-\frac{1}{w}\int_{t_0}^{t} e^{-gs} f(s)\mathrm{sen}(ws)ds\right) e^{gt}\cos(wt) \\ + \left(\frac{1}{w}\int_{t_0}^{t} e^{-gs} f(s)\cos(ws)ds\right) e^{gt}\mathrm{sen}(wt) \\ = A\, e^{gt}\cos(wt) + B\, e^{gt}\mathrm{sen}(wt) + \frac{1}{w}\int_{t_0}^{t} e^{g(t-s)} f(s)\mathrm{sen}(wt - ws)ds \end{split} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_H + y_p \\
&= A\, e^{gt} \cos{(wt)} + B\, e^{gt} \mathrm{sen}(wt) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{w} \int_{t_0}^{t} e^{-gs} f(s) \mathrm{sen}(ws) ds \right) e^{gt} \cos{(wt)} \\
&\quad + \left(\frac{1}{w} \int_{t_0}^{t} e^{-gs} f(s) \cos{(ws)} ds \right) e^{gt} \mathrm{sen}(wt) \\
&= A\, e^{gt} \cos{(wt)} + B\, e^{gt} \mathrm{sen}(wt) + \frac{1}{w} \int_{t_0}^{t} e^{g(t-s)} f(s) \mathrm{sen}(wt - ws) ds\,.
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
A'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{gt}\, \mathrm{sen}(wt) \\ f(t) & e^{gt}\, (w \cos{(wt)} + g\, \mathrm{sen}(wt)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{gt} \cos{(wt)} & e^{gt}\, \mathrm{sen}(wt) \\ e^{gt}\, (g \cos{(wt)} - w\, \mathrm{sen}(wt)) & e^{gt}\, (g\, \mathrm{sen}(wt) + w \cos{(wt)}) \end{vmatrix}} \\
&= \frac{-f(t) \mathrm{sen}(wt)}{w e^{gt}}\,,
\end{aligned}$$

7. Matrices

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

EJEMPLOS DEL PROCEDIMIENTO TUTORIAL ON-LINE

Carpeta actual: **ENTRADA**

Desconectarse

Redactar Direcciones Carpetas Opciones Buscar Ayuda Transferir

SquirrelMail

Lista de mensajes | Borrar Anterior | Siguiente Reenviar | Reenviar como adjunto | Responder | Responder a todos

Asunto: Re: trabajo de calculo Fernando Prieto Acera
De: u96630@usal.es
Fecha: Jue, 14 de Mayo de 2009, 5:02 pm
Para: higra@usal.es
Prioridad: Normal
Crear filtro: Auntomáticamente | De | Para | Asunto
Opciones: Ver encabezado completo | Vista preliminar | Bajar este mensaje como un archivo| Agregar al Listín | Marcar como Spam

```
Hola,

tampoco se como poner el subindice a los limites, por ejemplo, limite de
... cuando x tiende a 0, el "cuando x tiende a 0" no se como hacer que
encage debajo del lim.

un saludo,

Fernando



>> Hola, te envio mi trabajo de calculo, faltan los ejercicios resueltos,
>> digame si falta algo mas y si tengo que corregir algun detalle.
>>
>> Por otra parte, no se como hacer subpuntos por ejemplo:
>>
>> 1) ...
>>      a)
>>      b)
>> 2) ...
>>
>> Etc, asi como no se dejar espacios entre unos parrafos y otros, para
>> ello
>> he utilizado \[ \], pero no se si eso sera lo correcto.
>>
>> un saludo,
>>
>> Fernando Prieto Acera
>
> Las inclusiones de listas dentro de listas se hacen con
> \begin{enumerate}
> \item ...
>   \begin{enumerate}
>      \item ...
>      \item ...
> \item ...
> \end{enumerate}
>
> \end{enumerate}
>
> Los espacios entre unos párrafos y otros se consiguen con \vskip0.5cm o la
> distancia que se quiera.
>
> No puedo mirarlo ahora con detalle. Cuando tengas los ejemplos me lo
> mandas.
>
> Higinio
>
>
>
>
```

Tomar dirección

Carpeta actual: **Enviados**

Desconectarse

Redactar Direcciones Carpetas Opciones Buscar Ayuda Transferir

SquirrelMail

Lista de mensajes | Borrar | Editar como nuevo mensaje Anterior | Siguiente Reenviar | Reenviar como adjunto | Responder | Responder a todos

Asunto: Re: Dudas y consultas Trabajo Calculo
De: higra@usal.es
Fecha: Lun, 25 de Mayo de 2009, 12:09 pm
Para: braulio@usal.es
Prioridad: Alta
Crear filtro: Auntomáticamente | De | Para | Asunto
Opciones: Ver encabezado completo | Vista preliminar | Bajar este mensaje como un archivo| Agregar al Listín

```
> Hola muy buenos días, le enviamos este correo, en busca de información,
> necesitamos saber como se insertan imágenes en un documento latex; es
> decir, que librerías hay que cargara y que código hay que insertar en el
> texto;

La manera de insertar figuras es con
\begin{figure}[h]
\begin{center}
\vskip0.5cm  \scalebox{0.7}{\includegraphics{dibujo.eps}}
\end{center}
\caption{Dibujo de ....}\label{fig2}
\end{figure}

donde dibujo.eps hace referencia al fichero que contiene la gráfica. Si es
otro formato, jpeg, pdf, etc, el que sea, se pone.



y centrándonos en el tema trabajo; en el apartado de KRONROD solo
> encontramos que este método utiliza la fórmula de Gauss pero con más
> puntos, o sea, si gauss coge n-1 puntos, creemos que Kronrod usa 3n+1
> puntos, pero en otro documento hemos encontrado que coge 2n+1, de modo que
> tenemos dudas, y tampoco encontramos ejercicios resueltos, ni ningún otro
> tipo de información que nos pueda sacar de dudas, nos podría echar una
> mano?


Si Gauus toma n puntos, las de Gauss-Kronrod cogen n+1 más, hasta un total
de 2n+1. Las fórmulas que resultan son de orden 3n+1, es decir, son
exactas para polinomio de grado menor o igual que 3n+1.


> Gracias por su atención un cordial saludo de sus alumnos:
>
> Susana Pérez Díaz 12339235-B
> Carlos Lobato Calabozo 71025700-K
>
>
```

Tomar dirección

Carpeta actual: **Enviados**

Desconectarse

Redactar Direcciones Carpetas Opciones Buscar Ayuda Transferir

SquirrelMail

Lista de mensajes | Borrar | Editar como nuevo mensaje   Anterior | Siguiente   Reenviar | Reenviar como adjunto | Responder | Responder a todos

Asunto: Re: duda
De: higra@usal.es
Fecha: Lun, 11 de Mayo de 2009, 8:59 pm
Para: santi_fernandez@usal.es
Prioridad: Normal
Crear filtro: Auntomáticamente | De | Para | Asunto
Opciones: Ver encabezado completo | Vista preliminar | Bajar este mensaje como un archivo| Agregar al Listín

```
> buenas tardes,
> le adjunto estos dos programas para preguntarle porque los valores finales
> son distintos si le introducimos los valores manualmente(factor integrante
> 1) o automaticamente,cuando deberian de ser iguales.
> muchas gracias
> spero su respuesta
>

Porque los valores que se generan son distintos, en un caso la listap
tiene 10 elementos y en el otro 24. De todas formas sí que se obtiene la
misma solución que es coc tt == -1, es decir, el término que hay que
integrar con respecto a t es -1/t, con lo que el factor integrante es
Exp[Integrate[-1/t,t]].

El resultado final no es c.

Higinio.
```

Tomar dirección

Carpeta actual: **Enviados**

Desconectarse

Redactar Direcciones Carpetas Opciones Buscar Ayuda Transferir

SquirrelMail

Lista de mensajes | Borrar | Editar como nuevo mensaje   Anterior | Siguiente   Reenviar | Reenviar como adjunto | Responder | Responder a todos

Asunto: Re: Problemas con Latex
De: higra@usal.es
Fecha: Lun, 4 de Mayo de 2009, 8:30 pm
Para: "Mike Martin" <thealienlovesecrets@hotmail.com>
Prioridad: Normal
Crear filtro: Auntomáticamente | De | Para | Asunto
Opciones: Ver encabezado completo | Vista preliminar | Bajar este mensaje como un archivo| Agregar al Listín

```
>
> Hola:
>
> Estoy terminando de pasar el trabajo a Latex y tengo algun que otro
> problemilla aqui le mando una copia del trabaja (casi finalizado) para que
> se ubique en las dudas q son las siguientes :
>
> - necesito introducir imagenes en el documento y conozco el comando ni
> como aplicarlo (donde pone falta, hay va un gráfico)
```

```
La forma de introducir gráficos es:
\begin{figure}[h]
\begin{center}
\vskip1cm  \scalebox{.7}{\includegraphics{dib2.eps}}
\end{center}
\caption{Gráfica de ...}\label{fig2}
\end{figure}
```

```
donde dib2.eps puede sustituirse por otro nombre con el formato que
corresponda (.jpg, .bmp, ...), aunque a veces el procesamiento da
problemas según el tipo de imágenes.
```

```
> - He tratado de realizar tablas pero me quedan mal (ejemplo pagina 41).
```

```
 Te adjunto un modelo de tabla:
\begin{table}[htb]
\caption{\label{table1}  \it{Maximum absolute error
$E_{\varepsilon}^{N}$ and the rate of convergence $p_{
\varepsilon}^N$ for Example \ref{exa1} by NSA on uniform mesh.}}
\vspace{0.3cm} {\centering
\begin{tabular}{||c| c c c c c ||} \hline \multicolumn 1 {||c|}
{$\varepsilon$} & \multicolumn 5 {c||} {Number of mesh points
$N$}\\\hline  & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 \\ \hline $10^{-2}$  &
$5.2857\times 10^{+0}$ & $5.6647 \times 10^{-1}$  & $5.4868\times
10^{-2}$ &
$6.0390\times 10^{-3}$ & $6.1588\times 10^{-4}$ \\
   & $3.22$  & $3.36$ & $3.18$ & $3.29$ & \\
$10^{-3}$  & $31.7568$ & $39.9892$  & $0.89061$ & $1.19691$ &
$1.75462$ \\
$10^{-4}$  & $7.56361$ & $17.8442$  & $80.8351$  & $2.71873$  &
$2.79452$  \\
$10^{-5}$  & $2.29767$ & $8.60822$ & $28.5018$ & $5.37233$ &
$5.2274$ \\
$10^{-6}$  & $15.3381$ & $13.9091$ & $15.5304$ & $9.33243$ &
$1.08316$ \\
\hline \hline
\end{tabular}
\par}
\end{table}
```

la copias y pegas en tu fichero y ves cómo queda e incluyes las
variaciones que procedan.

La segunda tabla es demasiado larga, quizás convendría ponerla al revés.

> Mañana, día 5 de Mayo estaré en zamora, me gustaría saber si estará y si
> el miércoles podría pasarme por una tutoria para acabar el trabajo.

El martes tengo una reunión en Salamanca, así que será difícil que pueda
estar. El miércoles a partir de las 11h.30m. estaré en el despacho.

Higinio.

Tomar dirección