

ISSN: 0213-3563

## INTUICIONISMO

### *Intuitionism*

Dick DE JONGH\*

*University of Amsterdam, dickdj@science.uva.nl*

BIBLID [(0213-356)8,2006,53-69]

Fecha de aceptación definitiva: 29 de marzo de 2006

#### RESUMEN

Tras una introducción histórica al intuicionismo como filosofía de las matemáticas, se introduce la lógica intuicionista. Comenzamos desde sus fundamentos según la interpretación BHK, y continuamos con las reglas del cálculo de deducción natural adecuado. Se discuten las diferencias con la lógica clásica estándar que la caracterizan. El tema siguiente lo constituyen los modelos de Kripke para la lógica intuicionista, y tras él se tratan la aritmética y el análisis intuicionista. Finalmente se explican las secuencias de elección libre de Brouwer. Hay una corta discusión del concepto de realizabilidad y del papel de la lógica intuicionista en los sistemas formales intuicionistas. El artículo concluye con una nueva clase de juegos para el cálculo intuicionista proposicional introducido recientemente por Mezhirova.

*Palabras clave:* Intuicionismo, lógica intuicionista, interpretación BHK, modelos de Kripke, secuencias de elección libre, juegos lógicos.

#### ABSTRACT

After a historical introduction to intuitionism as a philosophy of Mathematics intuitionistic logic is introduced. We start with its basis in the BHK-interpretation, and continue with the corresponding natural deduction rules. The characteristic differences with standard classical logic are discussed. The next topic is formed by the Kripke models for intuitionistic logic, after which Intuitionistic arithmetic and

\* Traducción al inglés a cargo de Julio Ostalé y José Tindón, revisado por María Manzano.

analysis are treated. In the latter the role of Brouwer's free choice sequences is explained. A short discussion is given of realizability and of the role of intuitionistic logic in intuitionistic formal systems. The paper concludes with a new kind of games for the intuitionistic propositional calculus recently introduced by Mezhirova.

*Key words:* intuitionism, intuitionistic logic, BHK-interpretation, Kripke-models, free choice sequences, logical games.

El intuicionismo es una de las principales corrientes en la filosofía de las matemáticas, que suele presentarse en oposición tanto al *formalismo* como al *platonismo*. El intuicionismo puede entenderse como un modo particular de incorporar la idea del *constructivismo* en matemáticas, un enfoque que debemos al matemático holandés Brouwer y a su discípulo Heyting. El constructivismo pretende que los objetos matemáticos existen en la medida en que han sido construidos y que la validez de las demostraciones emana de su construcción: en particular, las afirmaciones existenciales deberían apoyarse en la construcción *efectiva* de sus objetos. Las verdades matemáticas se crean, no se descubren. El intuicionismo se enmarca en la filosofía *idealista*: los objetos matemáticos construidos se consideran objetos idealizados creados por un matemático ideal (MI), que a veces toma el nombre de *creador* o de *sujeto creador*. Con frecuencia, atendiendo a su enfoque, el intuicionismo se mueve en las fronteras del *solipsismo*, donde el matemático idealizado y el partidario del intuicionismo se encuentran.

El intuicionismo, mucho más de lo que puedan serlo el formalismo o el platonismo, es en principio normativo. El formalismo y el platonismo proponen un fundamento para las matemáticas ya existentes, bien una reducción a la lógica (o a la teoría de conjuntos) en el caso del platonismo, bien una demostración de consistencia en el caso del formalismo. El intuicionismo, en su variante más rígida, conduce a una reconstrucción de las matemáticas: las matemáticas tal y como las conocemos resultan en gran medida inaceptables desde un punto de vista intuicionista y debería acometerse la tarea de reconstruirlas de acuerdo con principios que sean constructivamente aceptables. No resulta aceptable demostrar  $\exists x, \varphi(x)$  (para alguna  $x$ ,  $\varphi(x)$  se verifica) llegando a una contradicción desde la premisa  $\forall x \neg\varphi(x)$  (para toda  $x$ ,  $\varphi(x)$  no se verifica): *razonamiento por reducción al absurdo*. Una demostración así no crea el objeto que se supone que existe.

De hecho, en la práctica el enfoque intuicionista no ha supuesto una reconstrucción permanente y a gran escala de las matemáticas. Para lo que se ha logrado en este campo véase p. ej. [1]. En realidad, se desarrolla incluso menos investigación de estas características ahora que en el pasado.

Por otro lado, podría decirse que el intuicionismo describe una parte de las matemáticas muy concreta, la constructiva, y que se ha descrito adecuadamente lo que esa parte constructiva supone.

Todo ello está íntimamente relacionado con el hecho incontestable de que el intuicionismo ha sido muy fructífero en el campo de la metamatemática, la

construcción y el estudio de sistemas en los que se formalizan partes de la matemática. Tras Heyting esta línea de investigación fue retomada por Kleene, Kreisel y Troelstra (para un tratamiento amplio de lo aquí expuesto, véase [13]). El artículo de Heyting [7] es una introducción legible, pero nada superficial, a los postulados intuicionistas. En informática teórica muchos de los sistemas formales que son de una fundamental importancia se formulan desde la lógica intuicionista.

L. E. J. Brouwer expuso por primera vez sus ideas constructivistas en su tesis doctoral de 1907 [4]. Tuvo antecesores que mantuvieron posturas constructivistas. Matemáticos como Kronecker, Poincaré, Borel. A Kronecker y a Borel les empujó a ello el carácter más y más abstracto de los conceptos y demostraciones de la matemática de finales del siglo XIX; y Poincaré no podía aceptar las ideas formalistas o Platónicas propuestas por Frege, Russell y Hilbert. En concreto, Poincaré mantuvo frente a las tesis formalistas y platónicas que la inducción matemática (sobre los números naturales) no puede reducirse a un concepto primitivo. Sin embargo, desde el principio Brouwer fue más radical, consistente e integrador que sus predecesores. Las características más propias del intuicionismo son:

1. El empleo de una lógica distintiva: *la lógica intuicionista* (La lógica ordinaria es entonces denominada *lógica clásica*).
2. Su construcción del continuo, la totalidad de los números reales, por medio de *sucesiones de elección*.

La lógica intuicionista la introdujo y la axiomatóizó A. Heyting, el principal continuador de Brouwer. El uso de lógica intuicionista ha sido aceptado en general por otros partidarios de los métodos constructivistas, mientras que la construcción del continuo no ha gozado del mismo predicamento. La construcción del continuo mediante las sucesiones de elección implica principios que contradicen la matemática clásica. Constructivistas de otro pelaje como los de la escuela de Bishop con frecuencia sacian sus ansias constructivas tratando de demostrar teoremas que ya han sido demostrados siguiendo procedimientos clásicos sin dar el último paso, que consistiría en contradecir la matemática ordinaria.

En este artículo discutiremos primero la lógica intuicionista, después pasaremos algún tiempo con la teoría intuicionista de números y con el análisis intuicionista. Pasamos entonces a tratar el concepto de realizabilidad para, acto seguido, volver a la lógica intuicionista en relación con algunas teorías formalizadas en ella. Cerraremos con la descripción de un juego que ha sido desarrollado para lógica intuicionista proposicional [9].

#### LÓGICA INTUICIONISTA

Denotaremos el sistema formal de la lógica intuicionista proposicional mediante IPC y la lógica intuicionista de predicados mediante IQC; los sistemas clásicos correspondiente se llamarán CPC y CQC. Formalmente la mejor manera de caracterizar la lógica intuicionista es *mediante un sistema de deducción natural á*

la Gentzen. (Para un tratamiento exhaustivo de la deducción natural y los sistemas de secuentes, véase [14]). De hecho, la deducción natural es más natural si cabe para la lógica intuicionista de lo que lo es para la lógica clásica. Un sistema de deducción natural goza de leyes introductorias y eliminatorias para las conectivas lógicas  $\wedge$  (y),  $\vee$  (o) y  $\rightarrow$  (si..., entonces) y *cuantificadores*  $\forall$  (para todo) y  $\exists$  (para al menos un). Las reglas para  $\wedge$ ,  $\vee$  y  $\rightarrow$  son:

- I  $\wedge$ : De  $\varphi$  y  $\psi$  se concluye  $\varphi \wedge \psi$ ,
- E  $\wedge$ : De  $\varphi \wedge \psi$  se concluye  $\varphi$  y  $\psi$ ,
- E  $\rightarrow$ : De  $\varphi$  y  $\varphi \rightarrow \psi$  se concluye  $\psi$ ,
- I  $\rightarrow$ : Si hay una derivación de  $\psi$  a partir de  $\varphi$ , entonces puede concluirse  $\varphi \rightarrow \psi$  (eliminando al tiempo la premisa  $\varphi$ ),
- I  $\vee$ : De  $\varphi$  se concluye  $\varphi \vee \psi$ , y de  $\psi$  se concluye  $\varphi \vee \psi$ ,
- E  $\vee$ : Si hay una derivación de  $\chi$  a partir de  $\varphi$  y una derivación de  $\chi$  a partir de  $\psi$ , entonces puede concluirse  $\chi$  a partir de la premisa  $\varphi \vee \psi$  (eliminando al tiempo tanto  $\varphi$  como  $\psi$ ),
- I  $\forall$ : Si hay una derivación de  $\varphi(x)$  donde  $x$  no está libre en ninguna premisa, podemos concluir  $\forall x\varphi(x)$ ,
- E  $\forall$ : Si hay una derivación de  $\forall x\varphi(x)$ , podemos concluir  $\varphi(t)$  para cualquier término  $t$ ,
- I  $\exists$ : De  $\varphi(t)$  para cualquier término  $t$  podemos concluir  $\exists x\varphi(x)$ ,
- E  $\exists$ : Si hay una derivación de  $\psi$  a partir de  $\varphi(x)$  donde  $x$  no está libre en  $\psi$  ni en cualquier otra premisa que no sea  $\varphi(x)$ , podemos concluir  $\psi$  a partir de la premisa  $\exists x\varphi(x)$ , eliminando al tiempo la asunción  $\varphi(x)$ .

Frecuentemente se toma la negación  $\neg$  (no) de una fórmula  $\varphi$  como  $\varphi$  implicando una contradicción ( $\perp$ ). Entonces se añade la regla *ex falso sequitur quodlibet*, por la cual:

- cualquier cosa se sigue de  $\perp$ .

Si se desea obtener la lógica proposicional clásico la de predicados, hay que añadir la regla:

- si  $\perp$  se deriva de  $\neg\varphi$ , podemos concluir  $\varphi$ , eliminando al tiempo la premisa  $\neg\varphi$ .

Obsérvese que no se trata de una simple regla de introducción o eliminación como las demás.

Las reglas de deducción natural están íntimamente relacionadas con la interpretación BHK (así llamada en honor a Brouwer, Heyting y Kolmogorov) de los conectores y cuantificadores. Esta interpretación ofrece un fundamento claro para

los principios intuicionistas y hace de la lógica intuicionista una de las pocas lógicas no clásicas en las que el razonamiento es claro, unívoco e inclusivo pero, con todo, muy diferente del razonamiento en lógica clásica.

En lógica clásica el significado de los enunciados compuestos que incluyen conectivas se construye a partir de las condiciones de verdad para enunciados compuestos en las cuales participa el significado informal de las conectivas. Por ejemplo:

- $\varphi \wedge \psi$  es verdadero si y sólo si  $\varphi$  es verdadero y  $\psi$  es verdadero,
- $\varphi \vee \psi$  es verdadero si y sólo si  $\varphi$  es verdadero o  $\psi$  es verdadero,
- $\neg\varphi$  es verdadero iff  $\varphi$  no es verdadero

La interpretación BHK de la lógica intuicionista se basa en la noción de *demonstración* y no en la de verdad. (¡N.B! No una demostración formal, o derivación, como sería lo esperado en sistemas de deducción natural o en sistemas axiomáticos tipo Hilbert, sino una demostración intuitiva e informal, i.e. un argumento matemático convincente). El significado de las conectivas y cuantificadores puede entenderse como en lógica clásica mediante el significado informal de sus homólogos intuitivos:

- Una demostración de  $\varphi \wedge \psi$  consta de una demostración de  $\varphi$  y una de  $\psi$  más la conclusión  $\varphi \wedge \psi$ ,
- Una demostración de  $\varphi \vee \psi$  consta de una demostración de  $\varphi$  o una de  $\psi$  más la conclusión  $\varphi \vee \psi$ ,
- Una demostración de  $\varphi \rightarrow \psi$  consta de un método de conversión de cualquier demostración de  $\varphi$  en una demostración de  $\psi$ ,
- *Ninguna* demostración de  $\perp$  existe,
- Una demostración de  $\exists x\varphi(x)$  consta de un nombre  $d$  de un objeto construido en el dominio pretendido de discurso más una demostración de  $\varphi(d)$  y la conclusión  $\exists x\varphi(x)$ ,
- Una demostración de  $\forall x\varphi(x)$  consta de un método tal que para cualquier objeto  $d$  construido en el dominio pretendido de discurso produzca una demostración  $\varphi(d)$ .

En el caso de las negaciones esto implica que una demostración de  $\neg\varphi$  es un método que nos permite convertir cualquier supuesta demostración de  $\varphi$  en una demostración de una contradicción. El hecho de que  $\perp \rightarrow\varphi$  pueda demostrarse para cualquier  $\varphi$  se basa en la contrapartida intuitiva del principio ex falso. Esto puede parecer algo menos natural que el resto de ideas, y de hecho Kolmogorov no lo incluyó entre sus reglas.

Sumado al hecho de que los enunciados que contienen negaciones parecen menos satisfactorios constructivamente, indujo a Griss a considerar la posibilidad de prescindir de la negación. Sin embargo, como con frecuencia es posible demostrar tales enunciados negativos sin poder demostrar sus homólogos positivos, esta opción no resulta muy atractiva. Además, podemos prescindir de la definición

formal de  $\perp$  en sistemas matemáticos naturales, puesto que puede considerarse que un enunciado del tipo  $1 = 0$  satisface las propiedades de  $\perp$  sin necesidad de premisas de tipo *ex falso*. En concreto, no sólo los enunciados para los cuales resulta obvio, como  $3 = 2$ , sino que todos los enunciados en tales teorías intuicionistas pueden derivarse de  $1 = 0$  sin recurrir a reglas que precisen de  $\perp$ . Con todo, si preferimos no hacer uso de la regla *ex falso*, podemos elegir una lógica que se construye sin necesidad de ella, la *lógica minimal*.

El significado intuicionista de una disyunción se parece al clásico tan sólo en la superficie. Para demostrar una disyunción hemos de ser capaces de demostrar uno de sus miembros. Así queda claro que la fórmula  $\varphi \vee \neg \varphi$  no se sostiene de manera general, ya que no existe un modo de garantizar una demostración de  $\varphi$  o una de  $\neg \varphi$ . Sin embargo, muchas de las leyes de la lógica clásica siguen siendo válidas bajo la interpretación BHK. Conocemos varios *métodos de decisión* para IPC, pero con frecuencia es fácil decidir de un modo intuitivo:

- Una disyunción es difícil de demostrar: por ejemplo, de las cuatro direcciones de las dos *leyes de De Morgan* solamente  $\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$  es inválida; más ejemplos de fórmulas inválidas son:
  - $\varphi \vee \neg\varphi$  (la ley del *tercio excluso*)
  - $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\varphi \vee \psi$
  - $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi)$
  - $[(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi] \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
- Una sentencia existencial es difícil de demostrar: por ejemplo, de las cuatro direcciones de las interacciones clásicamente válidas entre negaciones y cuantificadores solamente  $\neg\forall x\varphi \rightarrow \exists x\neg\varphi$  es inválida,
- Sentencias que se apoyan directamente en la bivalencia de valores de verdad son inválidas, por ejemplo  $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$  o bien  $[(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi] \rightarrow \varphi$  (ley de Peirce), y *contraposición* en la forma de  $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ ,
- Por otra parte, muchas leyes básicas siguen siendo verdaderas: la conmutativa y la asociativa de la conjunción y la disyunción, sendas leyes distributivas, y
  - $(\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi)$ ,
  - $(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \leftrightarrow [(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi]$ ,
  - $[\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$ .
  - $(\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \rightarrow \psi)$  (requiere *ex falso!*),
  - $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]$ ,
  - $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$  (la forma *conversa* de contraposición),

- $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ ,
- $\neg\neg\neg\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$  (no se necesitan triples negaciones).

Menos obvio resulta que el *deslizamiento de la doble negación* es válido para  $\wedge$  y  $\rightarrow$  pero no para  $\forall$ , al menos en una dirección. Son válidas:

- $\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$ ,
- $\neg\neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$ ,
- $\neg\neg\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\neg\neg\varphi(x)$  (pero no su conversal).

La interpretación BHK fue descubierta de modo independiente por Kolmogorov y Heyting, estando la formulación de Kolmogorov más centrada en la solución de problemas que en el desarrollo de demostraciones. Naturalmente ambos se inspiraron en el trabajo de Brouwer. En cualquier caso, queda claro que siempre que un esquema axiomático es (formalmente) demostrable en IPC (por deducción natural, por ejemplo), cualquier instancia del esquema axiomático tendrá una demostración informal según la interpretación BHK.

Evidentemente, y en sentido estricto, la lógica intuicionista es más débil que la lógica clásica. Sin embargo, desde un punto de vista distinto puede entenderse que la inversa también es cierta. Por la *traducción negativa* de Gödel la lógica clásica puede traducirse a lógica intuicionista. Para traducir un enunciado en lógica clásica, añadimos  $\neg\neg$  delante de toda fórmula atómica y reemplazamos cada subfórmula de la forma  $\varphi \vee \psi$  por  $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$  y cada subfórmula de la forma  $\exists x\varphi(x)$  por  $\neg\forall x\neg\varphi(x)$  de modo recursivo. La fórmula obtenida es demostrable en lógica intuicionista siempre que la original sea demostrable en lógica clásica. Algunos ejemplos son:

- en la traducción  $p \vee \neg p$  se convierte en la traducción  $\neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg\neg p)$ ,
- $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$  se convierte en  $(\neg\neg\neg q \rightarrow \neg\neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q)$ ,
- $\neg\forall x Ax \rightarrow \exists x\neg Ax$  se convierte en  $\neg\forall x\neg\neg Ax \rightarrow \neg\forall x\neg\neg Ax$

Así, podríamos decir que la lógica intuicionista admite razonamientos de corte clásico, de un determinado tipo y que, por tanto, es expresivamente más rica.

#### MODELOS DE KRIPKE

Una semántica para lógica intuicionista parecida a los conocidos modelos de mundos posibles desarrollados por Kripke para la lógica modal ha resultado ser muy útil para obtener todo tipo de resultados en lógica intuicionista, a pesar de no ser fiel a la interpretación BHK. De hecho, estas semánticas fueron ampliamente desarrolladas por el propio Kripke. Demostró la completud tanto para IPC como para IQC con respecto a sus modelos, así como la propiedad de los modelos finitos y así la decidibilidad para IPC (véase [8]).

Utilizó tableaux semánticos, puesto que las demostraciones de completud de tipo Henkin para lógicas modales aparecerían más tarde.

Como es habitual contamos con un conjunto de mundos más una evaluación sobre ellos. Interpretemos  $uRv$  entre los mundos  $u$  y  $v$  de la siguiente manera,  $v$  representaría un estado de conocimiento posterior visto desde  $u$ . Resulta natural, pues, al contrario que en los modelos habituales para lógica modal, que una vez una fórmula es verdadera lo sigue siendo; si  $\phi$  es verdadera en  $u$  y  $uRv$ , entonces  $\phi$  es verdadera en  $v$  (a esto se le denomina *persistencia*). Las reglas para la satisfacción de fórmulas son:

1.  $w \models \phi \wedge \psi$  syss  $w \models \phi$  y  $w \models \psi$ ,
2.  $w \models \phi \vee \psi$  syss  $w \models \phi$  o  $w \models \psi$ ,
3.  $w \models \phi \rightarrow \psi$  syss, para todo  $w'$  tal que  $wRw'$ , si  $w' \models \phi$ , entonces  $w' \models \psi$ ,
4.  $w \not\models \perp$ .

Resulta útil recordar que  $w \models \neg\neg\phi$  syss, para cada  $w'$  tal que  $wRw'$ , existe un  $w''$  con  $w'Rw''$  y  $w'' \models \phi$ . Para modelos finitos tenemos que  $w \models \neg\neg\phi$  syss para todo nodo maximal  $w'$  sobre  $w$ ,  $w' \models \phi$ .

Habitualmente, los modelos de Kripke son también modelos *con raíz*, tienen un nodo minimal (generalmente  $w_0$ ), una *raíz*. Para el cálculo de predicados cada nodo  $w$  de un modelo cuenta con un dominio  $D_w$  de modo que, si  $wRw'$ , entonces  $D_w \subseteq D_{w'}$ . La persistencia en este caso se reduce al hecho que  $D_w$  es un submodelo de  $D_{w'}$  en el sentido normal de la palabra. Las cláusulas para los cuantificadores son (añadiendo nombres para los elementos del dominio al lenguaje):

1.  $w \models \exists x\phi(x)$  syss, para algún  $d \in D_w$ ,  $w \models \phi(d)$ .
2.  $w \models \forall x\phi(x)$  syss, para todo  $w'$  con  $wRw'$  y todo  $d \in D_{w'}$ ,  $w' \models \phi(d)$ .

Uno de los primeros teoremas demostrados sobre la lógica intuicionista es el teorema de Glivenko, que afirma que  $\vdash \phi$  CPC  $\phi$  syss  $\vdash$  IPC  $\neg\neg\phi$ . El lector atento podrá demostrarlo por sí mismo mediante los modelos finitos de Kripke, o también por inducción sobre la longitud de una demostración en deducción natural o en otro sistema de demostración. Este resultado implica, por ejemplo, que  $\vdash_{\text{IPC}} \neg\neg(p \vee \neg p)$ . Esto no se hace extensivo al cálculo de predicados o a la aritmética. Como veremos,  $\not\vdash_{\text{IPC}} \neg\neg \forall x(Ax \vee \neg Ax)$ .

Los siguientes modelos invalidan respectivamente  $p \vee \neg p$ ,  $\neg\neg p \rightarrow p$  (ambos en la Figura 1a),  $(\neg\neg p \rightarrow p) \rightarrow (p \vee \neg p)$  (Figura 1d),  $(p \rightarrow q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$  (Figura 1b),  $(\neg p \rightarrow q \vee r) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$  (Figura 1c),  $\neg\neg \forall x(Ax \vee \neg Ax)$ .

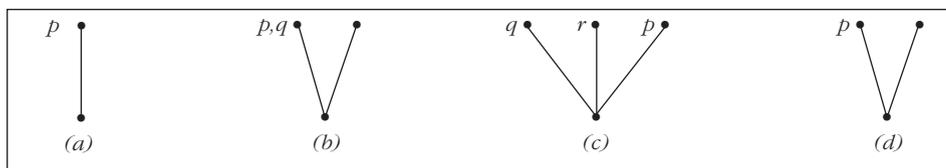


Figura 1: Contramodelos para las fórmulas.

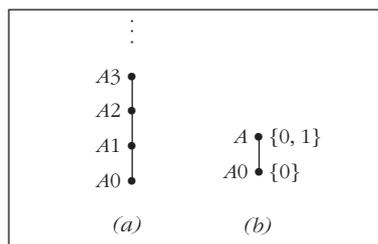


Figura 2: Contramodelos para las fórmulas de predicados.

(Figura 2a, dominio constante  $\mathbb{N}$ ),  $\forall x (A \vee Bx) \rightarrow (A \vee \forall x Bx)$  (Figura 2b).

#### ARITMÉTICA

La aritmética clásica sobre números naturales se formaliza en PA mediante los llamados axiomas de Peano (cuya idea se remonta a Dedekind). Estos axiomas:

- $x + 1 \neq 0$ ,
- $x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y$ ,
- $x + 0 = x$ ,
- $x + (y + 1) = (x + y) + 1$ ,
- $x \cdot 0 = 0$ ,
- $x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x$ ,

y el esquema de inducción:

- Para todo  $\varphi(x)$ ,  $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x + 1)) \rightarrow \forall x\varphi(x)$ .

junto con el uso de lógica intuicionista en vez de lógica clásica, puede usarse para axiomatizar la versión intuicionista HA de la teoría de números naturales, aritmética de Heyting. Por supuesto, un intuicionista no se limita a aceptar ciegamente estos axiomas, sino que comprueba su demostrabilidad intuitiva partiendo de la idea fundamental de lo que supone un número natural (Brouwer en su discurso inaugural: «... Esta intuición dualidad-unidad, intuición fundacional de las matemáticas, crea no sólo los números uno y dos, sino también todo número ordinal

finito, en la medida en que cada elemento del par pueda ser entendido como una nueva relación de dos a uno, proceso que puede ser repetido indefinidamente...»).

Merece la pena recordar que el esquema:

- Para cada  $\varphi(x)$ ,  $\exists x \varphi(x) \rightarrow \exists x[\varphi(x) \wedge \forall y < x \neg \varphi(y)]$

es clásica pero no intuicionísticamente equivalente al esquema de inducción. (Aquí  $y < x$  se define como  $\exists z[y + (z + 1) = x]$ ).

La traducción negativa de Gödel es aplicable a HA/PA. Desde luego que también el teorema de incompletud de Gödel es válido para HA: existe un  $\varphi$  tal que ni  $\vdash_{\text{HA}} \varphi$ , ni  $\vdash_{\text{HA}} \neg \varphi$ , y este  $\varphi$  puede ser de la forma  $\forall x \psi(x)$  para algún  $\psi(x)$  tal que, para cada  $n$ ,  $\vdash_{\text{HA}} \psi(\bar{n})$ . (Aquí  $\bar{n}$  denota  $1 + \dots + 1$  con  $n$  unos, un término con el valor  $n$ ).

#### SUCESIONES DE ELECCIÓN LIBRE

El continuo supone un gran impedimento a la hora de diseñar versiones constructivas de las matemáticas. No resulta difícil pensar los números reales uno a uno en términos de *sucesiones de Cauchy*, pero así se pierde la intuición de la totalidad de los números reales, que sí parece una intuición primaria. Brouwer basó el continuo en las sucesiones de elección libre. Por ejemplo, una sucesión de elección libre  $\alpha$  de números naturales puede entenderse como un proceso infinito inacabable de elección de números naturales  $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \dots$  por parte de un matemático ideal MI. En cualquier estadio de la actividad del MI, solamente un número finito de valores ha sido determinado, junto con restricciones sobre posteriores elecciones. Esto conduce trivialmente a la idea de que una función  $f$  que da valores a toda sucesión de elección puede hacerlo exclusivamente asignando el valor  $f(\alpha)$  para cualquier sucesión de elección  $\alpha$  caracterizada por una cadena inicial finita  $\alpha(0), \dots, \alpha(m)$  de la sucesión de elección dada, en el sentido de que toda sucesión de elección  $\beta$  que tenga como cadena inicial finita  $\alpha(0), \dots, \alpha(m)$  debe tomar el mismo valor bajo la función:  $f(\beta) = f(\alpha)$ . Esta idea nos lleva hasta el teorema de Brouwer, que afirma que toda función real sobre un intervalo cerrado es uniformemente continua. Por supuesto, esto entra en contradicción con la matemática clásica.

Antes de entrar en el caso paradigmático de una distinción menos severa que existe entre la matemática intuicionista y la clásica, el *teorema del valor intermedio*, pasemos a discutir el hecho de que los contraejemplos que puedan citarse para teoremas clásicos de la lógica o las matemáticas pueden ser de dos tipos: *débiles* y *fuertes*. Un contraejemplo débil de un enunciado se limita a demostrar que éste no puede ser demostrado, un contraejemplo fuerte permite derivar una contradicción a partir de una aplicación general del enunciado. Por ejemplo, para dar un contraejemplo débil de  $p \vee \neg p$  bastará con dar un enunciado  $\varphi$  que no haya sido ni demostrado ni refutado, especialmente un tipo de enunciado que sea reproducible en el caso de que el problema original sea resuelto. Un contraejemplo fuerte

para  $\varphi \vee \neg\varphi$  no puede consistir en demostrar  $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$  para un  $\varphi$  concreto, ya que  $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$  es contradictorio incluso en la lógica intuicionista (es directamente equivalente a  $\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$ ). Pero se puede encontrar un predicado  $\varphi(x)$  en análisis intuicionista tal que  $\neg\forall x[\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)]$  pueda demostrarse, lo cual puede considerarse a todas luces un contraejemplo fuerte.

Para contraejemplos débiles Brouwer recurría con frecuencia a la expansión decimal de  $\pi$ . Por ejemplo considera el número  $a = 0, a_0 a_1 a_2 \dots$  donde la expansión decimal<sup>1</sup> se define como sigue:

En la medida en que ninguna sucesión 1234567890 ha tenido lugar en la expansión decimal de  $\pi$ ,  $a_n$  se define como 3. Si una sucesión 1234567890 se ha dado en la expansión decimal de  $\pi$  empezando en  $m$  con  $m \leq n$ , entonces, si el primer  $m$  que cumpla la condición es par entonces  $a_n$  es 0 para todo  $n \geq m$ , si es impar entonces  $a_m = 4$  y  $a_n = 0$  para todo  $n > m$ . Mientras el problema de si existe o no tal sucesión se resuelva, no sabemos si  $a < 1/3$  ó  $a = 1/3$  ó  $a > 1/3$ . Que esto depende del tiempo lo demuestra el hecho de que si este problema ha sido resuelto,  $m$  existe y es par, con lo que  $a \leq 1/3$  [2]. Pero eso no importa, tales problemas abundan y (aunque no nos molestemos en cambiar el ejemplo) esto demuestra que es inútil intentar demostrar que, para cualquier  $a$ ,  $a < 1/3 \vee a = 1/3 \vee a > 1/3$ . Nótese que tampoco puede demostrarse que  $a$  sea racional, porque para hacerlo necesitamos un  $p$  y un  $q$  tales que  $a = p/q$ , cosa que evidentemente no puede hacerse sin antes resolver el problema. Por otra parte, resulta obvio que  $\neg\neg(a < 1/3 \vee a = 1/3 \vee a > 1/3)$  se verifica,  $a$  no es racional. En cualquier caso, los contraejemplos débiles no son teoremas matemáticos, pero sí nos indican qué enunciados deberíamos intentar demostrar y cuáles no. Más adelante, Brouwer empleó problemas sin resolver como contraejemplos débiles y fuertes en un sentido más fuerte, haciendo que la expansión decimal de  $a$  dependiese de la intuición del sujeto, sobre el hecho de si había resuelto el problema en el momento de la construcción del decimal en cuestión. Intentos de formalización de estos denominados argumentos del sujeto creador han sido muy polémicos y han tenido consecuencias paradójicas. Para una reconstrucción más próxima a las ideas de Brouwer que evite estas consecuencias indeseables, véase [10].

Pasemos a usar un contraejemplo débil para demostrar que no podemos aspirar a demostrar el denominado teorema del valor medio. Una función continua  $f$  con valor  $-1$  en el  $0$  y valor  $1$  en  $1$  toma el valor  $0$  para algún valor entre  $0$  y  $1$  según la matemática clásica. Esto no se sostiene en el caso constructivo: una función  $f$  que sea lineal entre el valor  $-1$  en el  $0$  al valor  $a - 1/3$  en  $1/3$ , permanece en el valor  $a - 1/3$  hasta  $2/3$  y después sigue siendo lineal hasta el valor  $1$  no alcanza

<sup>1</sup> Para plantear argumentos que sean fáciles de seguir, discutimos estos problemas relativos a números reales con argumentos que dependen de sus expansiones decimales. Esta no era la costumbre de Brouwer, quien llegó a mostrar con un contraejemplo débil que no todos los reales tienen expansión decimal (¿cómo iniciar la expansión decimal de  $a$  si no sabemos siquiera si es mayor, igual o menor que  $0$ ?).

el valor 0 en un lugar determinado si no sabemos si  $a > 1/3$ ,  $a = 1/3$  o  $a < 1/3$ . Ya que no existe un método para determinar este problema en general, no podemos determinar un valor de  $x$  para  $f(x) = 0$ . (Véase 3).

Los constructivistas de la escuela rusa no aceptaban la construcción intuicionista del continuo, pero tampoco les asustaba contradecir abiertamente la matemática clásica. Sin embargo, llegaban a tales resultados de modo diferente, asumiendo que las construcciones efectivas son construcciones recursivas y, en particular, cuando uno restringe las funciones a las funciones efectivas, que toda función es una función recursiva. Así, en marcada posición con la matemática clásica, aceptar la denominada *tesis Church-Turing*, por la cual toda función efectiva sea recursiva, influye la validez de los resultados matemáticos de modo directo. Subrayemos finalmente que, independientemente del punto de vista escogido, el análisis intuicionista que resulta se relaciona con el análisis clásico de una manera más compleja a como se relacionan HA y PA. Y la traducción negativa ya no es aplicable.

#### REALIZABILIDAD

Kleene usó las funciones recursivas de una manera diferente que los constructivistas rusos. Desde 1940 intentó dar una interpretación fiel de la lógica intuicionista y de la matemática (formalizada) mediante funciones recursivas. Para comprender esto es preciso recordar dos cosas. La primera, que existe un modo recursivo de codificar parejas de números naturales mediante uno solo,  $j$  es una biyección de  $\mathbb{N}^2$  hasta  $\mathbb{N}$ :  $j(m, n)$  codifica el par  $(m, n)$  como un número natural único. La decodificación se hace a partir de las funciones  $(\ )_0$  y  $(\ )_1$ : si  $j(m, n) = p$ , entonces  $(p)_0 = m$  y  $(p)_1 = n$ . La segunda intuición consiste en que toda función recursiva, o mejor, toda máquina de Turing que las calcula puede ser codificada también mediante un número natural. Si  $e$  codifica a una máquina de Turing, entonces  $\{e\}$  es la función calculada por ella, p. ej. para cada número natural  $n$ ,  $\{e\}(n)$  tiene un valor determinado si al dar  $n$  como input, la máquina de Turing codificada por  $e$  nos devuelve ese valor. Ahora Kleene define cómo un número natural realiza un enunciado aritmético (en el lenguaje de HA):

- Un  $n \in \mathbb{N}$  realiza una sentencia atómica  $\text{syss}$  el enunciado es verdadero,
- $n$  realiza  $\varphi \wedge \psi$   $\text{syss}$   $(n)_0$  realiza  $\varphi$  y  $(n)_1$  realiza  $\psi$ ,
- $n$  realiza  $\varphi \vee \psi$   $\text{syss}$   $(n)_0 = 0$  y  $(n)_1$  realiza  $\varphi$ , o  $(n)_0 = 1$  y  $(n)_1$  realiza  $\psi$ ,
- $n$  realiza  $\varphi \rightarrow \psi$   $\text{syss}$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$  que realiza  $\varphi$ ,  $\{n\}(m)$  tiene un valor que realiza  $\psi$ ,
- $n$  realiza  $\forall x \varphi(x)$   $\text{syss}$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\{n\}(m)$  tiene un valor que realiza  $\varphi(\bar{m})$ ,
- $n$  realiza  $\exists x \varphi(x)$   $\text{syss}$ ,  $(n)_1$  realiza  $\overline{\varphi(\bar{n})}_0$

No podemos afirmar que la realizabilidad sea una interpretación fiel del intuicionismo, como Kleene bien constató más tarde. Por ejemplo, resulta que, al menos desde un punto de vista clásico, existen en IPC fórmulas indemostrables cuyas contrapartidas aritméticas son todas realizables. Sin embargo, la realizabilidad ha sido un concepto con enorme éxito que ha conocido innumerables variantes. A través de la realizabilidad, Kleene fue capaz de demostrar que, si desde HA se prueba un enunciado de la forma  $\forall x \exists y \varphi(x,y)$ , entonces  $\varphi$  es satisfacible mediante una función recursiva  $\{e\}$ , e incluso para cada  $n \in \mathbb{N}$ , HA demuestra  $\varphi(\bar{n}, \overline{\{e\}(n)})$ .

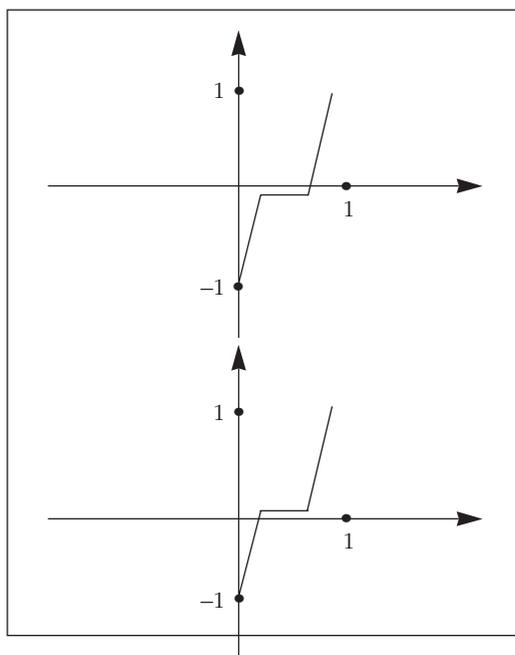


Figura 3: Contraejemplo al teorema del valor intermedio.

LA LÓGICA INTUICIONISTA EN SISTEMAS FORMALES INTUICIONISTAS

La lógica intuicionista, ya sea proposicional o de predicados, satisface la denominada *propiedad de la disyunción*: si  $\varphi \vee \psi$  es derivable, entonces o  $\varphi$  ó  $\psi$  son derivables. Esto es muy característico de la lógica intuicionista: para la lógica clásica  $p \vee \neg p$  es un contraejemplo evidente. Esta propiedad puede trasladarse a los sistemas formales usuales de la aritmética y el análisis. Evidentemente, en consonancia con la filosofía intuicionista. Si  $\varphi \vee \psi$  es demostrable formalmente, entonces, si las cosas van bien, es demostrable informalmente también. Pero entonces, de acuerdo con la interpretación BHK,  $\varphi$  o  $\psi$  deberían ser demostrables

informalmente también. Sería maravilloso si el sistema formal fuese lo suficientemente completo como para aportar semejante demostración formal, y habitualmente es el caso. Para enunciados existenciales se verifica algo parecido, una *propiedad existencial*, si  $\exists x\varphi(x)$  es derivable en la aritmética de Heyting, entonces  $\varphi(\bar{n})$  es derivable para alguna  $(\bar{n})$ . Enunciados de la forma  $\forall y\exists x\varphi(y,x)$  expresan la existencia de las funciones  $y$ , por ejemplo, para la aritmética de Heyting la propiedad de existencia se transforma en: si tal enunciado es derivable, entonces alguna instancia suya (bajo la forma defunción recursiva) también lo es, como mencionamos anteriormente. En la aritmética clásica de Peano tales propiedades sólo se verifican para casos sencillos en los que  $\varphi$  carece de cuantificadores. De hecho, en lo que se refiere a las últimas afirmaciones, la aritmética intuicionista y clásica presentan la misma fuerza.

Algunos sistemas formales pueden ser decidibles (p. ej. algunas teorías del orden) y contaremos con una lógica clásica en la mayor parte de los casos. Sin embargo, en la aritmética de Heyting tenemos el *teorema de completud de la aritmética de De Jongh*, que afirma que su lógica es precisamente la intuicionista: si una fórmula no es derivable en lógica intuicionista puede hallarse una instancia aritmética de sustitución que no sea derivable en la aritmética de Heyting (véase p. ej. [6], [11]). En el caso particular de  $p \vee \neg p$  es fácil de ver, pues se sigue del teorema de incompletud de Gödel y de la propiedad de la disyunción: por Gödel existe un enunciado  $\varphi$  que HA no puede ni demostrar ni refutar, por la propiedad de la disyunción HA tampoco podrá probar  $\varphi \vee \neg \varphi$ .

#### EL JUEGO DE MEZHIROV PARA IPC

Nos gustaría finalizar con algo que ha sido desarrollado recientemente: un juego que es consistente y completo con respecto de la lógica intuicionista proposicional, anunciado en [9]. En esta última sección daremos además los detalles de las demostraciones matemáticas.

Los juegos son  $\varphi$ -juegos donde  $\varphi$  es una fórmula del cálculo proposicional. El juego tiene dos jugadores  $P$  (*proponente*) y  $O$  (*oponente*). El campo de juego es el conjunto de las subfórmulas de  $\varphi$ . Un *movimiento* consiste en marcar una fórmula que no haya sido marcada antes. Sólo  $O$  tiene derecho a marcar átomos. El primer movimiento lo hace  $P$ , y consiste en marcar  $\varphi$ . Los jugadores no mueven por turnos; a quién le toca cada vez depende del *estado del juego*. Aquel jugador que se ve obligado a mover y no puede, *pierde*. El estado del juego viene determinado por las marcas y por una evaluación clásica  $V$  *al* que se desarrolla de modo paralelo. Las reglas para tal evaluación son, en cada estado,

- para átomos que  $V \text{ al}(p) = 1$  si  $p$  está marcado,
- para fórmulas complejas  $\psi \circ \chi$  que, si  $\psi \circ \chi$  está sin marcar,  $V \text{ al}(\psi \circ \chi) = 0$ , y si  $\psi \circ \chi$  está marcado,  $Val(\psi \circ \chi) = Val(\psi) \circ_B Val(\chi)$  donde  $\circ_B$  es la función Booleana asociada con  $\circ$ .

Si un jugador ha marcado una fórmula que es evaluada con 0, entonces se considera que es un *fallo* de ese jugador. Si  $P$  tiene un fallo y  $O$  no, entonces mueve  $P$ ; en todos los demás casos (es decir, si  $O$  tiene un fallo y  $P$  lo tiene o no, o si ningún jugador ha fallado)  $O$  mueve. El teorema de completud se formula como sigue:

*Teorema 1.*  $\vdash_{IPC} \varphi$  syss  $P$  tiene una estrategia ganadora en el  $\varphi$ -juego.

Primero demostraremos:

*Teorema 2.* Si  $\not\vdash_{IPC} \varphi$ , entonces  $O$  tiene una estrategia ganadora en el  $\varphi$ -juego.

### *Demostración*

Denotaremos las sucesiones de fórmulas marcadas por  $O$  y  $P$  respectivamente como  $\mathbf{O}$  y  $\mathbf{P}$ .  $O$  piensa en un contramodelo *minimal* para  $\varphi$ , p. ej., en la raíz  $w_0$ ,  $\varphi$  no se satisface, pero en todos los nodos restantes sí. La estrategia de  $O$  es la siguiente. Siempre que  $P$  no escoja fórmulas falsas en nodos superiores del modelo,  $O$  se limita a escoger fórmulas que sean verdaderas en  $w_0$ . En cuanto  $P$  escoja una fórmula  $\psi$  que se falsifique en nodos superiores del modelo,  $O$  piensa en el submodelo generado por un nodo maximal  $w$  que falsifica  $\psi$ .  $O$  repite la misma táctica respecto al nodo al que se ha llegado durante el juego. Basta con demostrar lo siguiente:

### *Proposición*

Si no quedan fórmulas para que escoja  $O$  tras aplicar su estrategia, p. ej. todas las fórmulas que son verdaderas en el  $w$  que está en la mente de  $O$  han sido marcadas, entonces le toca a  $P$ .

Esto es suficiente porque significa que que en tal situación  $P$  solamente puede moverse hacia delante en el modelo, o en el caso de que  $w$  es un nodo maximal  $P$  pierde.

### *Demostración-Proposición*

Escribimos  $|\theta|_w$  para el valor de verdad de  $\theta$  en  $w$ . Como veremos, basta con demostrar que, si se ha llegado al estado del juego enunciado en la proposición, entonces  $|\theta|_w = Val(\theta)$  para todo  $\theta$ . Demostraremos por inducción sobre  $\theta$ , que  $|\theta|_w = 1 \Leftrightarrow Val(\theta) = 1$ .

- Si  $\theta$  es atómica, entonces  $O$  ha marcado todos y sólo los átomos que son forzados en  $w$ , así que aquéllos y no otros se hacen verdaderos.
- Paso inductivo  $\Leftarrow$ : Asume  $|\theta \circ \psi|_w = 1$ . Entonces  $\theta \circ \psi$  está marcado porque de otro modo  $O$  podría hacerlo, contrariamente a la suposición. Tenemos  $|\theta|_w \circ_B |\psi|_w = 1$ . Por la HI,  $Val(\theta) \circ_B Val(\psi) = 1$ , luego  $Val(\theta \circ \psi) = 1$ .

- Paso inductivo  $\Leftarrow$ :
- $Val(\theta \wedge \psi) = 1 \Rightarrow Val(\theta) = 1$  y  $Val(\psi) = 1 \Rightarrow IH$   
 $|\theta|_w = 1$  y  $|\psi|_w = 1 \Rightarrow |\theta \wedge \psi|_w = 1$ .
- $\vee$  es lo mismo que en  $\wedge$ .
- $Val(\theta \rightarrow \psi) = 1 \Rightarrow Val(\theta) = 0$  o  $Val(\psi) = 1$ , y así por la HI,  $|\theta|_w = 0$  o  $|\psi|_w = 1$ . Luego,  $\theta \rightarrow \psi$  está marcado, por tanto en  $\mathbf{O}$  o en  $\mathbf{P}$ . En el primer caso  $|\theta \rightarrow \psi|_w = 1$  inmediatamente, en el segundo,  $|\theta \rightarrow \psi|_s = 1$  para todo  $s > w$  ( $P$  no ha marcado fórmulas falsas más arriba, de otro modo  $O$  hubiera movido su atención hacia otro nodo) y así  $|\theta|_s = 0$  or  $|\psi|_s = 1$  para todo  $s > w$ . Es más,  $|\theta \rightarrow \psi|_w = 1$ .

Nos enfrentamos ahora con el hecho que  $O$  sólo ha escogido fórmulas que son verdaderas en la mente de  $O$ , y ellas siguen siendo verdaderas en el modelo. Así pues,  $Val(\theta) = 1$  para todo  $\theta \in \mathbf{O}$ . Por otro lado,  $P$  cuenta al menos un fallo en su haber, la fórmula  $\xi$  escogida por  $P$  que hizo que el juego se parase en  $w$ :  $Val(\xi) = 0$ . En efecto, le toca a  $P$ .

Volvamos a la otra mitad:

*Teorema 3.* Si  $\vdash_{IPC} \phi$ , entonces  $P$  tiene una estrategia ganadora en el  $\phi$ -juego.

La estrategia de  $P$  consiste en elegir solamente fórmulas que son demostrables en  $\mathbf{O}$ . Notemos que el primer movimiento forzado  $\phi$  de  $P$  se corresponde con esta estrategia. Para este caso basta con probar la proposición siguiente.

### Proposición

Si todas las fórmulas demostrables a partir de  $\mathbf{O}$  están marcadas, entonces le toca mover a  $O$ .

Esto es suficiente porque que implica que en tal situación  $O$  sólo puede marcar una fórmula completamente nueva, y pierde cuando no quedan tales fórmulas.

### Demostración de la proposición

Creemos un modelo de la manera siguiente. Asumimos que  $\chi_1, \dots, \chi_k$  son las fórmulas que no se pueden probar desde  $O$  y así las que están sin marcar. Por la completud de **IPC** existen  $k$  modelos que hacen  $O$  verdadero y falsean  $\chi_1, \dots, \chi_k$  en sus respectivas raíces. Añadamos a estos modelos una nueva raíz  $r$  que verifica exactamente los  $\mathbf{O}$ -átomos (lo cual se sigue de la persistencia). Como en la otra dirección, probaremos:  $|\theta|_r = Val(\theta)$  para todo  $\theta$ , o equivalentemente,  $|\theta|_r = 1 \Leftrightarrow Val(\theta) = 1$ .

- Los átomos son forzados en  $r$  syss están marcados por  $O$  y entonces  $Val\ 1$ , de otro modo  $0$ .
- Paso inductivo  $\rightarrow$ : Asume  $|\theta \circ \psi|_r = 1$ . Entonces  $\theta \circ \psi$  está marcado porque de no estarlo sería uno de los  $\chi_i$ , contradiciendo persistencia. Podemos seguir razonando como en la otra dirección.
- Paso inductivo  $\Leftarrow$ :
- $\vee$  y  $\wedge$  como en la otra dirección.
- $Val(\theta \rightarrow \psi) = 1 \rightarrow Val(\theta) = 0$  or  $Val(\psi) = 1$ , y así por la HI,  $|\theta|_r = 0$  o  $|\psi|_r = 1$ . Luego,  $\theta \rightarrow \psi$  está marcado, así que está en  $\mathbf{O}$  o  $\mathbf{P}$ , por lo tanto,  $|\theta \rightarrow \psi|_s = 1$  y así  $|\theta|_s = 0$  o  $|\psi|_s = 1$  para todo  $s > r$ . De hecho,  $|\theta \rightarrow \psi|_r = 1$ .

Nos enfrentamos ahora con el hecho de que  $P$  solamente ha marcado fórmulas demostrables desde  $\mathbf{O}$  y seguirán siendo demostrables desde  $\mathbf{O}$ . Así es que,  $Val(\theta) = 1$  para todo  $\theta \in \mathbf{P}$ . Luego  $P$  no comete faltas. Por las reglas del juego, le toca mover a  $O$ .

#### BIBLIOGRAFÍA

- [1] BISHOP, E.: *Foundations of Constructive Analysis*, New York, McGraw-Hill, 1967.
- [2] Jonathan M. BORWEIN, Brouwer-Heyting sequences converge, *The Mathematical Intelligencer*, 20:14-15, 1998.
- [3] BROUWER, L. E. J.: Consciousness, Philosophy and Mathematics, in: [5].
- [4] BROUWER, L. E. J.: Over de Grondslagen van de Wiskunde, Dissertation, 1907, in: [5].
- [5] BROUWER, L. E. J.: *Collected Works*, Vol. 1, ed. A. HEYTING, Amsterdam, North-Holland 1975.
- [6] DE JONGH, D. H. J.: Formulas of one variable in Intuitionistic Arithmetic, in: *Troelstra and van Dalen* (eds.), *The L. E. J. Brouwer Centenary Symposium*, Amsterdam, North-Holland, 1982.
- [7] HEYTING, A.: *Intuitionism an Introduction*, 3<sup>rd</sup> rev. ed. (1971), Amsterdam, North-Holland, 1956.
- [8] KRIPKE, S. A.: Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I, in: J. N. CROSSLEY and M. A. E. DUMMETT (eds.), *Formal Systems and Recursive Functions*, Amsterdam, North-Holland, 1965.
- [9] MEZHIROV, I.: A game semantics for intuitionistic propositional logic (abstract), *International Conference on Computer science applications of modal logic*, Moscow, September 5-9, 2005.
- [10] NIEKUS, J.: *Brouwer's incomplete objects*, PP-2005-27, ILLC, Universiteit van Amsterdam, 2005.
- [11] SMORYŃSKI, C. A.: Applications of Kripke models, in: [12], 324-391, 1973.
- [12] TROELSTRA, A. S.: *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*, Springer lecture Notes 344, Berlin, 1973.
- [13] TROELSTRA A. S. and VAN DALEN, D.: *Constructivism in Mathematics, an Introduction*, two volumes, Amsterdam, North-Holland, 1988.
- [14] TROELSTRA A. S. and SCHWICHTENBERG, H.: *Basic Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge U.K. 1996, Second, revised edition 2000.