View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Repositorio Institucional UNAN-Managua

ANÁLISIS MATEMÁTICO DE LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN COMO MEDIO PARA RELACIONAR LA PRODUCTIVIDAD MEDIA Y MARGINAL DEL CAPITAL Y DEL TRABAJO COMO FACTORES PRODUCTIVOS DETERMINANTES EN LA FUNCION DE PRODUCCIÓN.

Ing. MSc. César Arévalo Cuadra - MSc. Pedro Pablo Mojica Pavón
UNAN Managua - FAREM Carazo

Resumen
Mediante la implementación de derivadas parciales por cada variable (factor), se determina que las derivadas segundas parciales respectivas, son negativas, y por lo tanto denotan concavidad hacia abajo, lo cual quiere decir que estamos en presencia de un punto máximo, y por consiguiente son funciones de producción que pueden presentar comportamiento de economías de escala.

La determinación de las productividades marginales del trabajo y del capital, resultan importantes porque establecen el nivel de aprovechamiento óptimo de los factores de producción, y su remuneración adecuada. Lo que garantiza que la empresa tenga criterios de decisión, para hacer los respectivos ajustes que le permitan mantener su presencia en el mercado por más tiempo.

Palabras Claves
Función de producción, productividad media y marginal del capital, productividad marginal y media del trabajo, rendimientos decrecientes, relación entre variables.

Introducción

El presente escrito desarrolla un análisis de la función de producción matemático, que demuestra por medio de métodos algebraicos la relación entre la productividad marginal del capital y la productividad media del capital así como del trabajo.

Además se analiza de qué manera se refleja la ley de los rendimientos marginales decrecientes en la forma geométrica de la curva de la función de producción.

Suponga una función de producción de la forma:

X = F (K, L)

Donde, **X** es cantidad producida de un bien x, **K** es el factor capital y **L** es el factor trabajo. A partir de allí y utilizando algebra y representaciones gráficas,

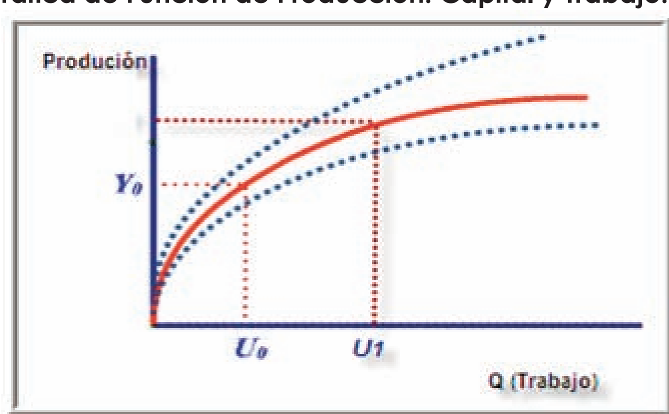
a. ¿Cuál es la relación entre la productividad marginal del capital y la productividad media del capital? Explicando el por qué de dicha relación.

b. ¿Existirá alguna relación similar entre la productividad marginal y la productividad media del trabajo?

c. ¿Cómo se refleja la ley de los rendimientos marginales decrecientes en la forma geométrica de la curva de la función de producción?

Acá se presenta una secuencia de argumentos exquisitamente elaborados y muy bien interpretado que le dan respuesta a todos los incisos del apartado.

Gráfica de Función de Producción: Capital y Trabajo.



Función de Producción
X = F(K, L)
donde: K= capital, L= Trabajo

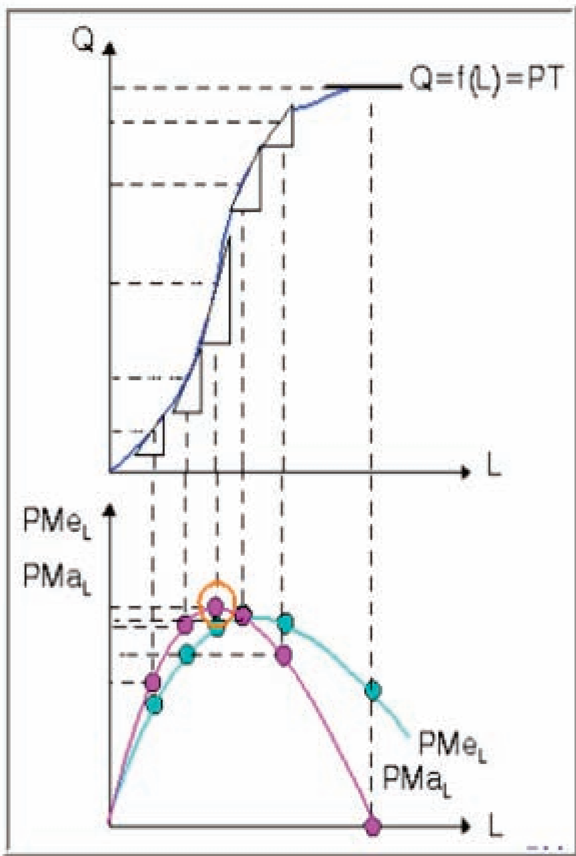


Gráfico: Producto Total, Medio y Marginal

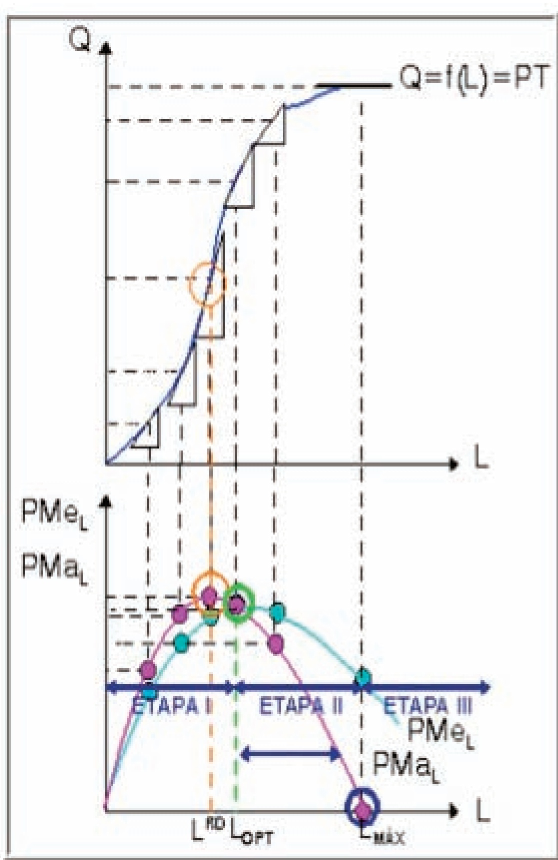


Gráfico: Producto Total, Medio y Marginal

Producto Total, Medio y Marginal

En este análisis se parte de la función de producción a corto plazo, que establece la relación entre la utilización del factor variable y el nivel de producción, a ella también se le denomina **producto total.**

Para calcular el producto medio gráficamente, se procede a trazar radio-vectores a los distintos puntos de la función de producto total, siendo el valor de la pendiente de dichos radio-vectores el producto medio. Posteriormente se considera el valor de la tangente en cada uno de los puntos del producto total con el fin de estimar el producto marginal.

Se destaca en primer lugar, aquel nivel de empleo en donde la productividad marginal es máxima, contratar una unidad adicional de trabajo (hora-hombre) a partir de ella incrementaría la producción a una tasa decreciente (se entraría en la fase de producción en donde tiene lugar la Ley de rendimientos decrecientes).

Otro nivel de empleo a destacar es en el que coincide productividad media y marginal, a él se le conoce como **"óptimo técnico"**, pues a partir de este, cualquier unidad adicional del factor variable genera una productividad marginal inferior a la media.

Finalmente, se destaca el **"máximo técnico"**, que tendría lugar cuando la productividad marginal es nula. Más allá de este, cada unidad adicional de trabajo provocaría un descenso de la producción.

De lo anterior expuesto se deduce que, se puede diferenciar así, tres etapas en el proceso productivo a corto plazo:

> Una primera que abarcaría el nivel de empleo hasta el "óptimo técnico" (en donde cualquier empresario no tiene duda alguna de que debe contratar pues cada unidad de factor contratado hace incrementar la productividad media).
>
> Una tercera etapa que abarcaría desde el máximo técnico en adelante (en donde ningún empresario deseará contratar el factor variable pues ello haría decrecer su producción).
>
> Y una segunda etapa en donde el empresario se planteará el dilema de cuanto trabajo contratar.

Siguiendo este análisis, al considerar la Función de Producción dada por; q=K+2L. Al determinarse la cantidad de output máxima que se puede obtener con las siguientes combinaciones (K, L): (10,0), (0,5), (4,3), (8,1) 10 unidades; obviamente con otras combinaciones, (100,2): 100+2x2=104.

La Productividad del Capital y del Trabajo, respecto a La Producción media y Producción marginal, al analizar cada factor de producción por separado en el corto plazo, poseen un comportamiento similar; al ocasionarse una variación en la producción total, ocasionado por la variación de uno u otro Factor, (Capital, Trabajo).

La productividad marginal del capital se calcula mediante la siguiente expresión:

PMg K = Variación de Q / Variación de K
K= Capital, Q= Cantidad producida.

La **productividad media del Capital**, se define como el cociente entre el volumen de producción y la cantidad de capital invertido con el fin de obtener ese nivel de producción, suponiendo como dada la cantidad de otros factores productivos:
PmeK = Q / K

La productividad media del Capital representa la contribución que cada unidad invertida de este factor realiza al total producido (ignorando el resto de los factores).

Bajo la condición de estudio, antes expresada; el caso del análisis de la Producción Media y Productividad Marginal del Trabajo, es similar al anterior análisis del factor Capital.

La **productividad marginal del trabajo** se calcula mediante la siguiente expresión:

PMgL = Variación de Q / Variación de L
L= Trabajo, Q= Cantidad producida.

La **productividad media del trabajo** se define como el cociente entre el volumen de producción y la cantidad de trabajadores (u horas de trabajo) utilizadas para obtener ese nivel de producción, suponiendo como dada la cantidad de otros factores productivos:
PmeL = Q / L

E igualmente la productividad media del trabajo representa la contribución que cada unidad de ese factor realiza al total producido (ignorando el resto de los factores).

La Relación entre el Producto Medio y el Producto Marginal.

Dado que el Producto Medio del trabajo, se ha definido como la razón entre el Producto Total y la Cantidad del Trabajo **(PMeL = Q/L)**, en términos geométricos equivale a la pendiente del Radio Vector Trazado desde el Origen de Coordenadas a cada uno de los puntos de la curva de Producto Total. Está pendiente es una Primera fase, aumenta hasta un nivel de aplicación de factor trabajo **Lo.** Donde alcanza un máximo y, Posteriormente disminuye.

Por otro lado, el Producto marginal de Trabajo definido como el aumento en el Producto Provocado por el incremento en una medida de factor variable, trabajo: **PMaL = AQ/AL.**

Más concretamente el producto marginal mide la tasa de Variación del Producto Total cuando experimenta una variación infinitesimal la cantidad del Factor Variable. En términos geométricos el PMaL se corresponde tangente a cada uno de los Puntos de la Curva del Producto Total. El PMaL crece hasta que la curva de producto total llega al punto de inflexión, lo que corresponde con el nivel L, de empleo. Ulteriormente el PMaL disminuye, coincidiendo con el PMeL cuando esta alcanza el máximo. Cuando el producto total alcanza el máximo técnico, el PMaL es igual a Cero **(Gráfica 4).**

La Ley de los Rendimientos Marginales Decrecientes.

La justificación del comportamiento observado en la figura descansa en la llamada Ley de los Rendimientos Marginales Decrecientes, que se refiere a la cantidad de producto adicional que se obtiene cuando se añaden sucesivamente unidades adicionales iguales de un factor variable a una cantidad fija de uno o varios factores.

Según esta ley, a partir de cierto nivel de empleo, se obtienen cantidades de producto sucesivamente menores al añadir dosis iguales de un factor variable, a una cantidad fija de un factor (Gráfica 4).

En consideración de Trabajo y del Capital, al ser el capital (K), el capital fijo, y Trabajo (L), factor Variable, En el Corto Plazo. Matemáticamente se representa una función **X= f(L)**, dado que el valor de **K = K*** que es Constante.

Gráficamente la Función de Producción presenta 3 etapas:

- La Primera etapa donde la Producción media es decreciente.
- La segunda etapa donde la Producción media es decreciente.
- La tercera etapa donde el Producto marginal en negativo, (Gráfica 5).

Sean, la función de producción de una firma:
$$X = 5{,}6\, K^{0{,}5}\, L^{0{,}7}$$
los precios de los factores K y L, respectivamente:
r = 1; w = 3
y el precio de venta del producto, igual a 2.

¿Cuál es el nivel de producción que maximiza el beneficio del empresario?. Verifique el cumplimiento del Teorema de Euler sobre distribución del ingreso, suponiendo que se remunera a los factores según sus productividades marginales.

Respuesta:
Es apropiado describir brevemente la secuencia de respuesta. Primero se inicia con una pequeña introducción general del teorema de Euler, posteriormente se ejecutan tres procedimientos matemáticos, debajo de cada uno, se hace un análisis de la utilidad práctica de estos resultados. Y finalmente se hace una conclusión.

Teorema de Euler

En teoría de números el teorema de Euler, también conocido como teorema de Euler-Fermat, es una generalización del pequeño teorema de Fermat, y como tal afirma una proposición sobre la divisibilidad de los números enteros. El teorema establece que:

> "Si **a** y **n** son enteros primos relativos, entonces **n** divide al entero $\mathbf{a^{\varphi(n)} - 1}$". **Leonhard Euler (1736)**

sin embargo, es más común encontrarlo con notación moderna en la siguiente forma:

> "Si **a** y **n** son enteros primos relativos, entonces $\mathbf{a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)}$.". **Leonhard Euler (1736)**

donde **φ(n)** es la **Función φ de Euler.**

$$X = F(K,L) = 5.6\,K^{0.5}\,L^{0.7}$$

$$\frac{\partial X}{\partial K} = 2.8\,K^{-0.5}L^{0.7} \qquad \frac{\partial X}{\partial L} = 3.92\,K^{0.5}L^{-0.3}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial K^2} = -1.4\,K^{-1.5}L^{0.7} \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial L^2} = -1.17K^{0.5}\,L^{-1.3}$$

Procedimiento 1

Mediante el ejercicio se busca como transformar la función de producción para que tenga un modelo Cobb Douglas, el cual permite encontrar un punto máximo de producción, con el respectivo mayor nivel de aprovechamiento de los factores. En su nivel de relación de producción o de combinación de un factor con otro.

La función de producción del ejercicio no es homogénea como se puede ver por qué no tiene elevados las variables (factores) a un mismo exponente.

Lo que se desarrollara entonces es un proceso para homogenizar la función y tener una potencia común en las variables (factores).

Previo a la implementación del procedimiento matemático para convertir a la función en homogénea, se realizo un par de derivadas parciales respecto a cada **variable (factor)**, es decir un par de derivadas parciales respecto a **K (capital)** y otro par respecto a **L (trabajo)**.

En ambos casos, las derivadas segundas parciales resultaron ser negativas; indicando que estamos en presencia de concavidades hacia abajo, por lo tanto que se está en presencia de puntos máximos. Lo que quiere decir que al homogenizar la función estaremos en presencia de una función de producción con rendimientos de escala, y por lo tanto una función que garantiza a la empresa un nivel adecuado de retribución de los factores.

Descubrir esos punto permite a la empresa mantenerse en operación, dentro de niveles seguros, de manera que le confiera duración en el tiempo y por ende garantizar la razón de ser de toda empresa, mantenerse operando de forma ininterrumpida en el tiempo con utilidades.

Procedimiento 2
Aplicando el Teorema De Euler:

$$K\frac{\partial X}{\partial K} + L\frac{\partial X}{\partial L}\; K\left(2.8\,K^{-0.5}L^{0.7}\right) + L\left(3.9K^{0.5}L^{-0.3}\right)$$

$$= 2.8K^{0.5}L^{0.7} + 3.92K^{0.5}L^{0.7} = 6.72K^{0.5}L^{0.7}$$

$$X = f(K,L)$$

$$\eta f(X,Y) = X\frac{\partial Z}{\partial X} + Y\frac{\partial Z}{\partial Y}$$

$$X = 5.6K^{0.5}L^{0.7}$$

$$f(\lambda K, \lambda L) = 5.6\lambda^{1.2}K^{0.5}L^{0.7}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = 6.72\lambda^{1.2}K^{0.5}L^{0.7}$$

El teorema de Euler, permite adicionar el producto de la variable K y L. Respectivamente con las primeras derivadas parciales de la función con respecto a la misma variable, para formar una sola función, que contemple en una sola expresión en este caso $\mathbf{6.72\,K^{0.5}\,L^{0.7}}$ la composición de los factores a los que es elevado, este resultado se podrá probar al compararla con el resultado de la función una vez que se le agrega el lagraniano.

El objetivo de introducir a la función el lagraniano corresponde precisamente a la necesidad de elevar las variables (factores) a un mismo índice de potencia para lograr así homogenizar la función y tener comportamientos escalares.

Lo cual se comprueba con la última función expresada en los procedimientos antecedentes, donde esta introducida la variable lagraniana y existe completa correspondencia de los valores de esta con la función donde se juntaron las variables y sus primeras derivadas de la primera parte de expresiones.

Procedimiento 3

Como en efecto ocurre,

$$pmg_K = \frac{1}{2} \quad pmg_L = \frac{3}{2}$$

$$pmg_K = \frac{\partial f}{\partial K} \qquad pmg_L = \frac{\partial f}{\partial L}$$

$$\frac{1}{2} = 2.8K^{0.5}L^{0.7} \quad y \quad \frac{3}{2} = 3.92K^{0.5}L^{0.7}$$

$$f(K,L) = k\left(\frac{1}{2}\right) + L\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}K + \frac{3}{2}L = \frac{1}{2}(K+3L)$$

$$\therefore \quad 2f(K,L) = (K+3L)$$

En la tercera y última secuencia procedimental se establece la relación del producto marginal del capital k y la relación del producto marginal del trabajo L. Para ello lo que se hace es calcular el cociente del precio del producto entre el precio de cada factor. Así se determina el valor marginal y por tanto el nivel de uso con eficiencia de cada factor.

Este resultado se iguala a la primera derivada correspondiente y luego mediante algebra convencional se corren las funciones hasta que se destaca el último resultado donde se comprueba la relación precio de
X = 2, **r = 1** (precio del factor capital) y **w = 3** (precio del factor mano de obra).

Conclusión

1. La función **X = 5,6 $K^{0,5}$ $L^{0,7}$,** los precios de los factores **K y L,** respectivamente **r = 1, w = 3;** y el precio de venta de **X = 2** no es homogénea de grado **k**.

2. Mediante la implementación de derivadas parciales por cada variable (factor), se determina que las derivadas segundas parciales respectivas, son negativas, y por lo tanto denotan concavidad hacia abajo, lo cual quiere decir que estamos en presencia de un punto máximo, y por consiguiente son funciones de producción que pueden presentar comportamiento de economías de escala

3. Al implementar el teorema de Euler se consigue, homogenizar la función de producción lo que consiste en elevar a una potencia común las variables.

4. El procedimiento anterior permite encontrar las relaciones de uso de las proporciones de las variables (factores), por medio de su equivalencia con los precios tanto del producto, como de los factores es decir
X = 2, r = 1, w = 3.

5. La Determinación de las productividades marginales del trabajo y del capital, resultan importantes porque establecen el nivel de aprovechamiento óptimo de los factores de producción, y su remuneración adecuada.

Lo que garantiza que la empresa tenga criterios de decisión, para hacer los respectivos ajustes que le permitan mantener su presencia en el mercado por más tiempo.

Bibliografía

- Salvatore, D. (1993). Microeconomía . México: Mc Graw Hill.
- Samuelson, P, Nordhaus, W (2002). Microeconomia. México: Mc, Graw Hill.
- Larson, E (1999). Cálculo . Madrid: Mc Graw Hill
- Abreu, J, y Olivero, M (1988). Calculo con Geometría Analítica. México : Iberoamérica, S. A.