,

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra informatiky

Metody numerické integrace a analýza chyb

Numerical integration methods and error analysis

2017

Dominika Floriánová

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Zadání bakalářské práce

Student:	**Dominika Floriánová**
Studijní program:	B2647 Informační a komunikační technologie
Studijní obor:	1103R031 Výpočetní matematika
Téma:	Metody numerické integrace a analýza chyb Numerical integration methods and error analysis
Jazyk vypracování:	čeština

Zásady pro vypracování:

V praxi se často setkáváme s integrály, které neumíme (nemůžeme) explicitně vypočítat. V takovém případě je nutné sáhnout k numerickým metodám výpočtu. Cílem práce je zvládnutí základních numerických metod výpočtu určitého integrálu funkce jedné reálné proměnné. Kromě toho budou odvozeny i vzorce pro odhady chyb, které vzniknou při použití těchto metod.

Seznam doporučené odborné literatury:

Vojtěch Jarník: Integrální počet I., Academia, Praha, 1974.
Walter Gautschi: Numerical Analysis An Introduction, Birkhauser, Boston, 1997.
Dále dle pokynů vedoucího práce.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Petr Vodstrčil, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2016
Datum odevzdání: 28.04.2017

doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 28. dubna 2017

Floriánová
....

Ráda bych poděkovala vedoucímu bakalářské práce Mgr. Petru Vodstrčilovi, Ph.D., za cenné rady, připomínky, poznatky, trpělivost a čas, který mi věnoval v rámci jednotlivých konzultací.

Abstrakt

Numerická integrace je důležitá pro výpočet integrálů, které neumíme spočítat, ale můžeme nahradit integrovanou funkci jednodušší. V této práci nahrazujeme integrál konstantní, lineární a kvadratickou funkcí. Cílem práce je zvládnutí základních numerických metod výpočtu určitého integrálu funkce jedné reálné proměnné. Dále jsou odvozeny vzorce pro odhady chyb včetně jejich porovnání. Výsledkem této práce je porovnání chyb základních integračních numerických metod.

Klíčová slova: numerické integrační metody, určitý integrál, analýza chyb, funkce, odvození

Abstract

Numerical integration is important for solving integrals that we can not calculate but we can replace integrated with simpler functions. In this thesis, we replace the integral with a constant, linear and quadratic function. The goal of the thesis is achieve the basis numerical methods of calculating a definite integral of the function of one real variable. Next step is inference formulas for error estimates including their comparison. The results of this thesis is the comparison of errors of basic integration numerical methods.

Key Words: numerical integration methods, definite integral, error analysis, function, derivation

Obsah

Seznam použitých zkratek a symbolů

$O(1)$	–	Obdélníkové pravidlo
$O(n)$	–	Složené obdélníkové pravidlo
$o(1)$	–	Chyba obdélníkového pravidla
$o(n)$	–	Chyba složeného obdélníkového pravidla
$L(1)$	–	Lichoběžníkové pravidlo
$L(n)$	–	Složené lichoběžníkové pravidlo
$l(1)$	–	Chyba lichoběžníkového pravidla
$l(n)$	–	Chyba složeného lichoběžníkového pravidla
$S(1)$	–	Simpsonovo pravidlo
$S(n)$	–	Složené Simpsonovo pravidlo
$s(1)$	–	Chyba Simpsonova pravidla
$s(n)$	–	Chyba složeného Simpsonova pravidla
N	–	Množina přirozených čísel
R	–	Množina reálných čísel
$C^k(\langle a, b\rangle)$	–	Množina funkcí, které mají spojitou k-tou derivaci na $\langle a, b\rangle$, kde $k \in N$

Seznam obrázků

1 Úvod

Numerické metody jsou velice důležité a objevují se všude kolem nás. Některé integrály můžeme vypočítat snadno nebo přes jednoduché integrační metody, například substituce nebo per partes. U některých to však nelze, a proto využíváme numerické integrační metody. My se zde zaměříme na 3 nejpoužívanější: obdélníkové, lichoběžníkové a Simpsonovo pravidlo.

Přibližnou hodnotu určujeme hned z několika důvodů:
- výpočet je příliš numericky nebo časově náročný,
- funkce $f(x)$ je zadána tabulkou
- integrál neumíme spočítat analytickými metodami, například:

$$\int_a^b \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$$

nebo

$$\int_a^b e^{(-x^2)}\,\mathrm{d}x$$

nebo

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Numerické metody počítají přibližně hodnotu integrálu

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Předpokládáme, že funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Funkci f, ze které budeme určitý integrál určovat na intervalu $\langle a, b\rangle$, nahradíme Lagrangeovým interpolačním polynomem. Z polynomu následně vypočteme určitý integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$.

2 Přehled metod

Obdélníkové pravidlo

Pokud neumíme spočítat integrál, tak by nás mohlo napadnout nahradit funkci jednodušší funkcí, například konstantní. Nedostaneme nejspíše přesnou hodnotu, ale alespoň přibližnou s nějakou chybou, tzn.

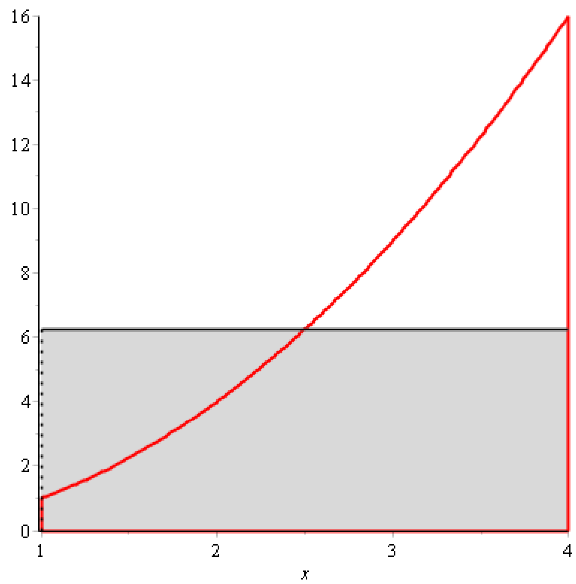
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \underbrace{(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{ozn.\ O(1)}$$

s chybou

$$o(1) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - O(1).$$

Pokud si integrál představíme jako obsah plochy, tak místo, abychom počítali obsah červeného obrazce, tak počítáme obsah šedého obrazce - obdélníku.

Příklad:
Na intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 1, 4\rangle$ jsme našli střed, určili jeho funkční hodnotu a následně funkci proložili přímkou.



Obrázek 1: Obdélníkové pravidlo

Lichoběžníkové pravidlo

Při použití lichoběžníkového pravidla nahrazujeme integrovanou funkci lineární funkcí. Nedostaneme nejspíše přesnou hodnotu, ale přibližnou s chybou, tzn.

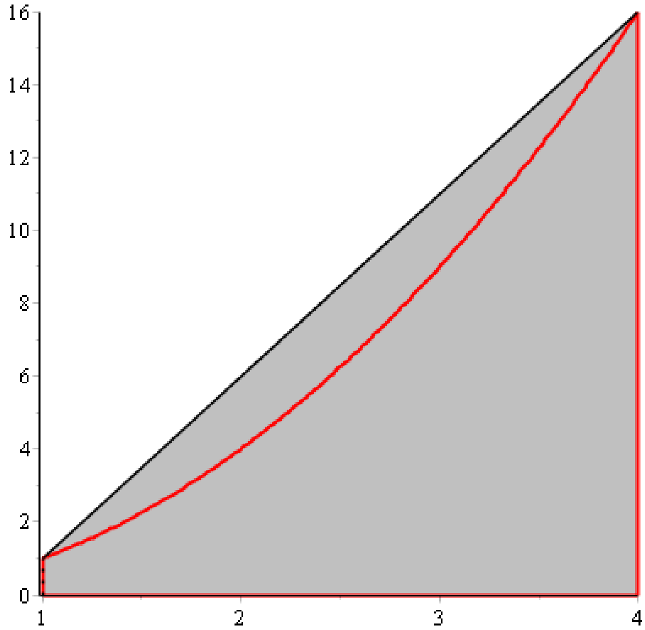
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \underbrace{(b-a)\left[\frac{f(a)}{2}+\frac{f(b)}{2}\right]}_{ozn.\ L(1)}$$

s chybou

$$l(1) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - L(1).$$

Opět si zkusme představit integrál jako obsah plochy, zde je šedý obrazec lichoběžník.

Příklad:
Na intervalu $\langle a,b\rangle = \langle 1,4\rangle$ jsme určili funkční hodnoty v krajních bodech intervalu a a b a následně body proložili přímkou.



Obrázek 2: Lichoběžníkové pravidlo

Simpsonovo pravidlo

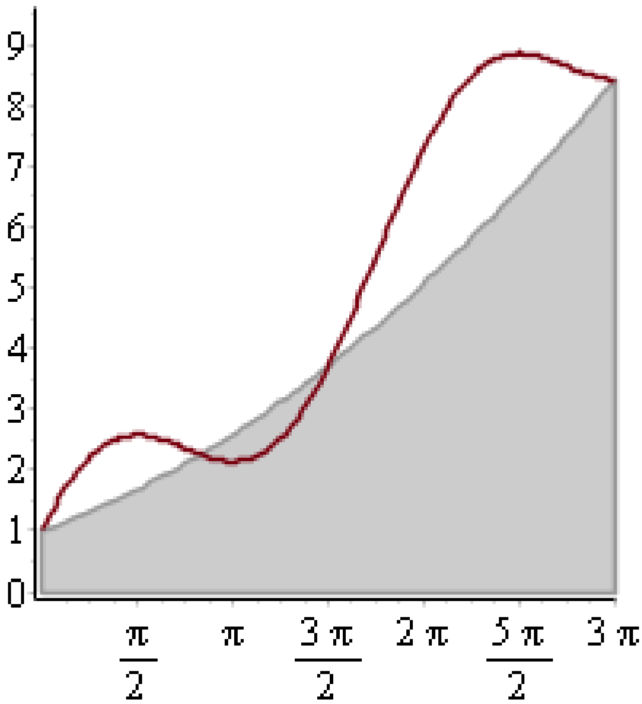
Simpsonovo pravidlo nahrazuje funkci parabolou a to tak, že nejdříve určíme funkční hodnoty v krajních bodech a ve středu intervalu. Opět se můžeme dopouštět chyby, tzn.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \underbrace{\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]}_{ozn.\ S(1)}$$

s chybou

$$s(1) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S(1).$$

Příklad:
Na intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 0, 3\pi\rangle$ jsme určili funkční hodnoty v krajních bodech a a b a ve středu intervalu $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ a následně body proložili parabolou.



Obrázek 3: Simpsonovo pravidlo

Složené metody

V praxi se výše uvedené metody příliš nepoužívají, protože bychom se dopouštěli relativně velkých chyb. Připomeňme, že chyba je rozdíl mezi přesnou hodnotou integrálu a přibližnou hodnotou, kterou dostaneme pomocí numerické metody.
Předpokládejme, že funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a uvažujme pro každé přirozené číslo n ekvidistantní dělení $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ intervalu $\langle a, b\rangle$.

Obrázek 4: Dělení intervalu

Složené pravidlo dostaneme tak, že původní pravidlo aplikujeme na všechny dílky z daného intervalu a následně sečteme dohromady. Tím se dopustíme daleko menší chyby a získáme tím přesnější hodnotu, než kdybychom metodu použili na celém intervalu $\langle a, b\rangle$. Chybu spočítáme odečtením složeného pravidla od přesné hodnoty integrálu.

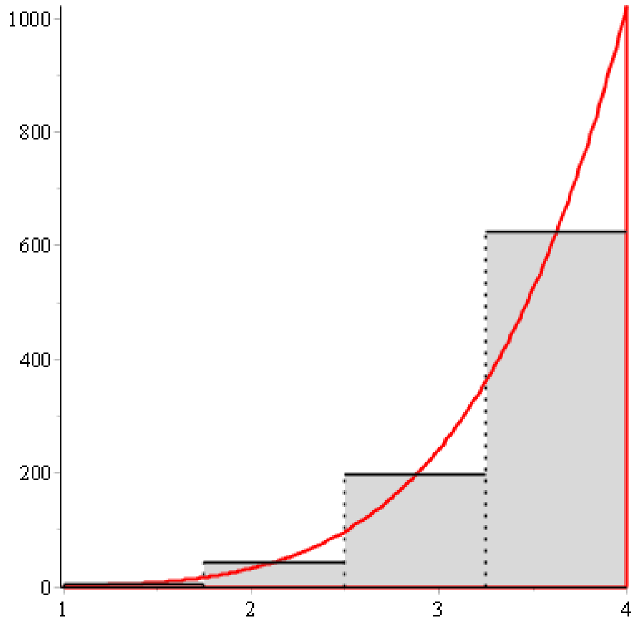
Složené obdélníkové pravidlo

$$O(n) := \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i),\ kde\ c_i := \frac{x_{i-1}+x_i}{2},$$

s chybou

$$o(n) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - O(n).$$

Příklad:
Interval $\langle a, b\rangle = \langle 1, 4\rangle$ jsme rozdělili na 4 dílky. V každém dílku jsme určili střed a jeho funkční hodnotu. Dále jsme funkci proložili přímkou.



Obrázek 5: Složené obdélníkové pravidlo

Odvození vzorce:

$$O(n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \ldots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]. \tag{1}$$

Složené lichoběžníkové pravidlo

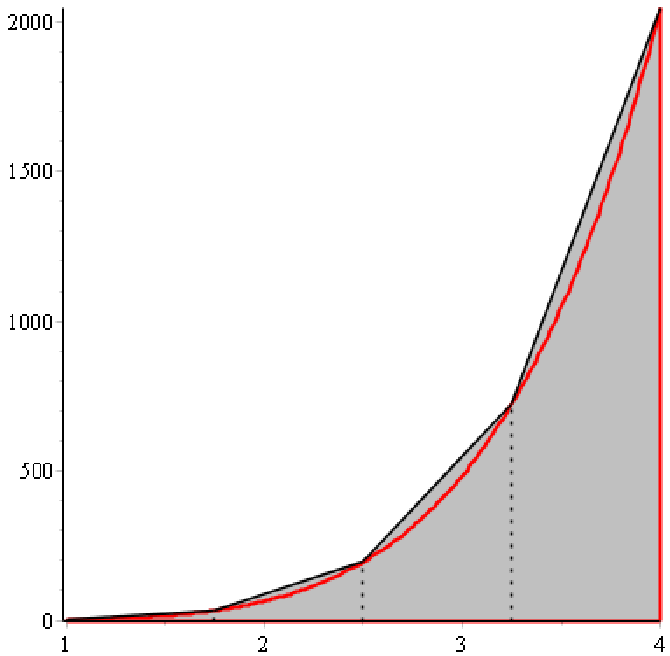
$$L(n) := \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$$

s chybou

$$l(n) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - L(n).$$

Příklad:

Interval $\langle a, b\rangle = \langle 1, 4\rangle$ jsme rozdělili na 4 dílky. V každém dílku jsme určili funkční hodnoty v krajních bodech a proložili je přímkou.



Obrázek 6: Složené lichoběžníkové pravidlo

Odvození vzorce:

$$L(n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} =$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} =$$

$$= \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \right] =$$

$$= \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right]. \tag{2}$$

Složené Simpsonovo pravidlo

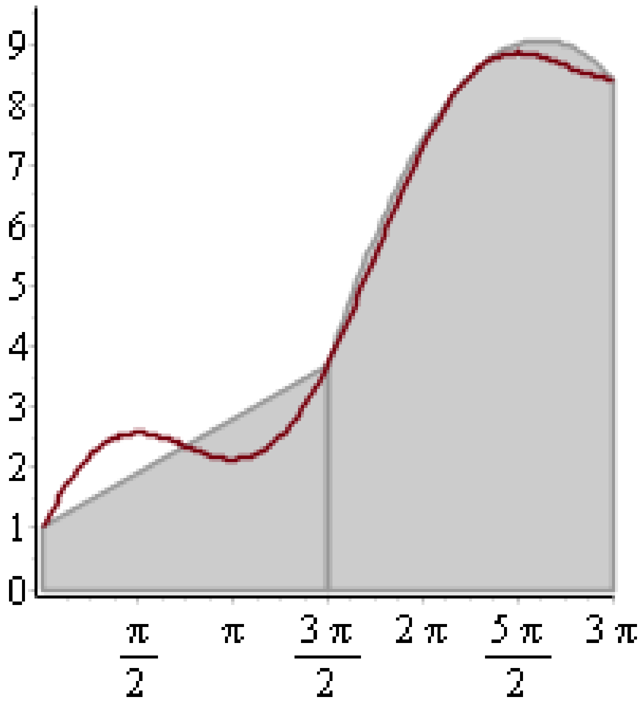
$$S(n) := \frac{b-a}{6n} \left[f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + 4f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) + f(x_n) \right]$$

s chybou

$$s(n) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S(n).$$

Příklad:

Interval od $\langle a, b\rangle = \langle 0, 3\pi\rangle$ jsme rozdělili na 2 dílky. V každém dílku jsme určili funkční hodnoty v krajních bodech a ve středu a proložili je parabolou.



Obrázek 7: Složené Simpsonovo pravidlo

Odvození vzorce:

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{6} \left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i) \right] =$$

$$= \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i) \right] =$$

$$= \frac{b-a}{6n} \left[f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f(x_1) + f(x_1) + 4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + 4f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) + f(x_n) \right] =$$

$$= \frac{b-a}{6n} \left[f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + 4f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) + f(x_n) \right]. \quad (3)$$

3 Vzorce pro chyby

Při použití výše uvedených metod nemusíme dostat přesný výsledek, tzn. dopustíme se určité chyby. My si tady ukážeme, jak je daná chyba velká.

3.1 Chyba obdélníkového pravidla

Lemma 1. Nechť $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$, pak existuje bod $\xi \in \langle a, b\rangle$ takový, že

$$o(1) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi). \tag{4}$$

Důkaz:
Definujme speciální funkci F předpisem

$$F(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)\,\mathrm{d}t - 2xf(c),\ kde\ c = \frac{a+b}{2}. \tag{5}$$

Všimněme si, že $F\left(\frac{b-a}{2}\right)$ je přesně to, co nás zajímá (tzn. $o(1)$).

Dále si můžeme všimnout, že $F(0) = 0$. Dále platí

$$F'(x) = f(c+x) + f(c-x) - 2f(c),$$

$$F'(0) = 0,$$

$$F''(x) = f'(c+x) - f'(c-x).$$

Díky Lagrangeově větě o střední hodnotě ke každému $x \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right\rangle$ existuje číslo $\xi_x \in (c- x, c+ x)$ takové, že

$$F''(x) = f''(\xi_x)2x. \tag{6}$$

Položme

$$m = \min_{t\in\langle a,b\rangle} f''(t), \quad M = \max_{t\in\langle a,b\rangle} f''(t).$$

Odtud a z (6) získáme, že pro každé $x \in \left\langle 0, \frac{b-a}{2}\right\rangle$ je

$$2mx \leq F''(x) \leq 2Mx.$$

Následně získané odhady 2x zintegrujeme.

Integrace od 0 *do* t*:*

$$\int_0^t 2mx \,\mathrm{d}x \leq \int_0^t F''(x) \,\mathrm{d}x \leq \int_0^t 2Mx \,\mathrm{d}x$$

$$mt^2 \leq F'(t) \leq Mt^2$$

Integrace od 0 *do* $\frac{b-a}{2}$*:*

$$\int_0^{\frac{b-a}{2}} mt^2 \,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{b-a}{2}} F'(t) \,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{b-a}{2}} Mt^2 \,\mathrm{d}t$$

$$\frac{m\left(\frac{b-a}{2}\right)^3}{3} \leq F\left(\frac{b-a}{2}\right) \leq \frac{M\left(\frac{b-a}{2}\right)^3}{3}$$

$$\frac{m(b-a)^3}{24} \leq F\left(\frac{b-a}{2}\right) \leq \frac{M(b-a)^3}{24}$$

Získali jsme nerovnost

$$m \leq \frac{F\left(\frac{b-a}{2}\right)}{\frac{(b-a)^3}{24}} \leq M.$$

Díky spojitosti funkce f'' na intervalu $\langle a, b\rangle$ plyne existence čísla $\xi \in \langle a, b\rangle$ splňujícího vztah

$$f''(\xi) = \frac{F\left(\frac{b-a}{2}\right)}{\frac{(b-a)^3}{24}}.$$

Odtud

$$o(1) = F\left(\frac{b-a}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi). \tag{7}$$

Není těžké odvodit chybu složeného pravidla.

Chyba složeného obdélníkového pravidla

Odvození:

$$o(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{24} f''(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^3}{24} f''(\xi_i) = \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i), \tag{8}$$

kde $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

Důsledek 1. Nechť $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$ a $n \in N$. Pak platí

$$|o(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)|. \tag{9}$$

Podle vztahu (8) máme

$$|o(n)| = \left| \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{i=1}^{n} |f''(\xi_i)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^3} \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)| =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{24n^3} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)| \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)|.$$

Příklad:

Počítejme integrál $\int_0^\pi \sin x \, dx$ složeným obdélníkovým pravidlem. Určete, na kolik dílků máme rozdělit interval $\langle 0, \pi \rangle$, aby složené obdélníkové pravidlo dávalo chybu $\leq 10^{-2}$?

Řešení:

Povšimněme si, že k výpočtu potřebujeme druhou derivaci a její maximum.

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$\max_{x \in \langle 0,\pi \rangle} |f''(x)| = 1$$

Dále dosadíme do vzorce (9) a dopočítáme n.

$$|o(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} 1 \leq 10^{-2}$$

$$(b-a)^3 \leq 24n^2 10^{-2}$$

$$\frac{\pi^3 10^2}{24} \leq n^2$$

$$\sqrt{\frac{\pi^3 10^2}{24}} \leq n$$

$$n \geq 12$$

Jestli interval $\langle 0, \pi \rangle$ rozdělíme na 12 dílků, máme zaručeno, že chyba bude nejvýše 10^{-2}.

3.2 Chyba lichoběžníkového pravidla

Lemma 2. Nechť $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$, pak existuje bod $\xi \in \langle a, b\rangle$ takový, že

$$l(1) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi). \tag{10}$$

Důkaz:
Definujme funkci F předpisem

$$F(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)\,\mathrm{d}t - x(f(c+x) + f(c-x)),\ kde\ c = \frac{a+b}{2}. \tag{11}$$

Všimněme si, že $F\left(\frac{b-a}{2}\right)$ je přesně to, co nás zajímá (tzn. $l(1)$).

Také si můžeme všimnout, že $F(0) = 0$. Dále platí

$$F'(x) = -x\left[f'(c+x) - f(c-x)\right],$$

$$F'(0) = 0,$$

$$F''(x) = -x(f''(c+x) + f''(c-x)) - \left(f'(c+x) + f'(c-x)\right).$$

Díky Lagrangeově větě o střední hodnotě ke každému $x \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right\rangle$ existuje číslo $\xi_x \in (c-x, c+x)$ takové, že

$$-F''(x) = 2xf''(\xi_x) + x(f''(c+x) + f''(c-x)).$$

Položme

$$m = \min_{t\in\langle a,b\rangle} f''(t), \quad M = \max_{t\in\langle a,b\rangle} f''(t).$$

Odtud získáme, že pro každé $x \in \left\langle 0, \frac{b-a}{2}\right\rangle$ je

$$4mx \leq -F''(x) \leq 4Mx.$$

Následně získané odhady 2x zintegrujeme.

Integrace od 0 *do* t*:*

$$\int_0^t 4mx\,\mathrm{d}x \leq -\int_0^t F''(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^t 4mx\,\mathrm{d}x$$

$$2mt^2 \leq -F'(t) \leq 2Mt^2$$

Integrace od 0 *do* $\frac{b-a}{2}$*:*

$$\int_0^{\frac{b-a}{2}} 2mt^2\,\mathrm{d}t \leq -\int_0^{\frac{b-a}{2}} F'(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{b-a}{2}} 2Mt^2\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{2m\left(\frac{b-a}{2}\right)^3}{3} \leq -F\left(\frac{b-a}{2}\right) \leq \frac{2M\left(\frac{b-a}{2}\right)^3}{3}$$

$$\frac{m(b-a)^3}{12} \leq -F\left(\frac{b-a}{2}\right) \leq \frac{M(b-a)^3}{12}$$

Získali jsme nerovnost

$$m \leq -\frac{F\left(\frac{b-a}{2}\right)}{\frac{(b-a)^3}{12}} \leq M.$$

Ze spojitosti funkce f'' na intervalu $\langle a, b\rangle$ plyne existence čísla $\xi \in \langle a, b\rangle$ takového, že

$$f''(\xi) = -\frac{F\left(\frac{b-a}{2}\right)}{\frac{(b-a)^3}{12}}.$$

Odtud

$$l(1) = F\left(\frac{b-a}{2}\right) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi). \tag{12}$$

Chyba složeného lichoběžníkového pravidla

Odvození:

$$l(n) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{(x_i - x_{i-1})^3}{12}f''(\xi_i) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^3}{12}f''(\xi_i) = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i), \tag{13}$$

kde $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

Důsledek 2. Nechť $f \in C^2(\langle a, b \rangle)$ a $n \in N$. Pak platí

$$|l(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)|. \tag{14}$$

Podle vztahu (13) máme

$$|l(n)| = \left| -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} |f''(\xi_i)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)| =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12n^3} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)| \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)|.$$

Příklad:

Počítejme integrál $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$ složeným lichoběžníkovým pravidlem. Určete, na kolik dílků máme rozdělit interval $\langle 0, \pi \rangle$, aby složené lichoběžníkové pravidlo dávalo chybu $\leq 10^{-2}$?

Řešení:

Povšimněme si, že k výpočtu potřebujeme druhou derivaci a její maximum.

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$\max_{x \in \langle 0,\pi \rangle} |f''(x)| = 1$$

Dále dosadíme do vzorce (14) a dopočítáme n.

$$|l(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} 1 \leq 10^{-2}$$

$$(b-a)^3 \leq 12n^2 10^{-2}$$

$$\frac{\pi^3 10^2}{12} \leq n^2$$

$$\sqrt{\frac{\pi^3 10^2}{12}} \leq n$$

$$n \geq 17$$

Jestli interval $\langle 0, \pi \rangle$ rozdělíme na 17 dílků, máme zaručeno, že chyba bude nejvýše 10^{-2}.

3.3 Chyba Simpsonova pravidla

Lemma 3. Nechť $f \in C^4(\langle a,b\rangle)$, pak existuje bod $\xi \in \langle a,b\rangle$ takový, že

$$s(1) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi). \tag{15}$$

Důkaz:
Zaveďme si funkci F předpisem:

$$F(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{3}(f(c-x) + 4f(c) + f(c+x)), \text{ kde } c = \frac{a+b}{2}. \tag{16}$$

Všimněme si, že $s(1) = F\left(\frac{b-a}{2}\right)$.

Také si můžeme všimnout, že $F(0) = 0$. Dále platí

$$F'(x) = f(c+x) + f(c-x) - \frac{1}{3}(f(c-x) + 4f(c) + f(c+x)) - \frac{x}{3}(f'(c+x) - f'(c-x)),$$

$$F'(0) = 0,$$

$$F''(x) = \frac{1}{3}(f'(c+x) - f'(c-x)) - \frac{x}{3}(f''(c+x) + f''(c-x)),$$

$$F''(0) = 0,$$

$$F'''(x) = -\frac{x}{3}(f'''(c+x) - f'''(c-x)).$$

Díky Lagrangeově větě o střední hodnotě ke každému $x \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right\rangle$ existuje číslo $\xi_x \in (c-x, c+x)$ takové, že

$$F'''(x) = -\frac{x}{3} 2x f^{(4)}(\xi_x) = -\frac{2}{3}x^2 f^{(4)}(\xi_x).$$

Položíme-li

$$m = \min_{t\in\langle a,b\rangle} f^{(4)}(t), \quad M = \max_{t\in\langle a,b\rangle} f^{(4)}(t),$$

získáme (pro každé $x \in \left\langle 0, \frac{b-a}{2}\right\rangle$) vztah

$$\frac{2mx^2}{3} \leq -F'''(x) \leq \frac{2Mx^2}{3}.$$

Integrace od 0 *do* t*:*

$$\int_0^t \frac{2mx^2}{3}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^t -F'''(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^t \frac{2Mx^2}{3}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{2mt^3}{9} \leq -F''(t) \leq \frac{2Mt^3}{9}$$

Integrace od 0 *do* s*:*

$$\int_0^s \frac{2mt^3}{9}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^s -F''(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^s \frac{2Mt^3}{9}\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{ms^4}{18} \leq -F'(s) \leq \frac{Ms^4}{18}$$

Integrace od 0 *do* $\frac{b-a}{2}$*:*

$$\int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{ms^4}{18}\,\mathrm{d}s \leq \int_0^{\frac{b-a}{2}} -F'(s)\,\mathrm{d}s \leq \int_0^{\frac{b-a}{2}} \frac{Ms^4}{18}\,\mathrm{d}s$$

$$\frac{m\left(\frac{b-a}{2}\right)^5}{90} \leq -F\left(\frac{b-a}{2}\right) \leq \frac{M\left(\frac{b-a}{2}\right)^5}{90}$$

$$\frac{m(b-a)^5}{2880} \leq -F\left(\frac{b-a}{2}\right) \leq \frac{M(b-a)^5}{2880}$$

Získali jsme nerovnost

$$m \leq \frac{-F\left(\frac{b-a}{2}\right)}{\frac{(b-a)^5}{2880}} \leq M.$$

Ze spojitosti funkce $f^{(4)}$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ plyne existence čísla $\xi \in \langle a, b\rangle$ splňujícího vztah

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{-F\left(\frac{b-a}{2}\right)}{\frac{(b-a)^5}{2880}}.$$

Odtud

$$s(1) = F\left(\frac{b-a}{2}\right) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi). \tag{17}$$

Chyba složeného Simpsonova pravidla

Odvození:

$$s(n) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{(x_i - x_{i-1})^5}{2880} f^{(4)}(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(-\frac{b-a}{n}\right)^5}{2880} f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^5} \sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\xi_i), \tag{18}$$

kde $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$.

Důsledek 3. Nechť $f \in C^2(\langle a, b \rangle)$ a $n \in N$. Pak platí

$$|s(n)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f^4(x)|. \tag{19}$$

Podle vztahu (18) máme

$$|s(n)| = \left| -\frac{(b-a)^5}{2880n^5} \sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\xi_i) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^5} \sum_{i=1}^{n} |f^{(4)}(\xi_i)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^5} \sum_{i=1}^{n} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f^{(4)}(x)| =$$

$$= \frac{(b-a)^5}{2880n^5} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f^{(4)}(x)| \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{(b-a)^5}{2880n^5} \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f^{(4)}(x)|.$$

Příklad:

Počítejme integrál $\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x$ složeným Simpsonovým pravidlem. Určete, na kolik dílků máme rozdělit interval $\langle 0, \pi \rangle$, aby složené Simpsonovo pravidlo dávalo chybu $\leq 10^{-2}$?

Řešení:

Povšimněme si, že k výpočtu potřebujeme čtvrtou derivaci a její maximum.

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$\max_{x \in \langle 0,\pi \rangle} |f^{(4)}(x)| = 1$$

Dále dosadíme do vzorce (19) a dopočítáme n.

$$|s(n)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} 1 \leq 10^{-2}$$

$$(b-a)^5 \leq 2880n^4 10^{-2}$$

$$\frac{\pi^5 10^2}{2880} \leq n^4$$

$$\sqrt[4]{\frac{\pi^5 10^2}{2880}} \leq n$$

$$n \geq 2$$

Jestli interval $\langle 0, \pi \rangle$ rozdělíme na 2 dílky, máme zaručeno, že chyba bude nejvýše 10^{-2}.

4 Porovnání metod

V porovnání vycházíme z článku [1], kde je ukázáno srovnání mezi obdélníkovým a lichoběžníkovým pravidlem. Díky tomu se tady budeme věnovat spíše porovnáním těchto dvou pravidel se Simpsonovým pravidlem.

Nejdříve si uvedeme důležité Lemma.

Lemma 4. Nechť $n \in N$. Pak platí

$$S(n) = \frac{2}{3}O(n) + \frac{1}{3}L(n) \tag{20}$$

a

$$s(n) = \frac{2}{3}o(n) + \frac{1}{3}l(n). \tag{21}$$

Důkaz:

Identita (20) plyne přímo ze vztahů (1),(2) a (3). K důkazu (21) využijeme indentitu (20) a definici chyby. Položíme-li $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, platí

$$o(n) = I - O(n),$$

$$l(n) = I - L(n),$$

$$s(n) = I - S(n).$$

Přímým výpočtem pak dostaneme

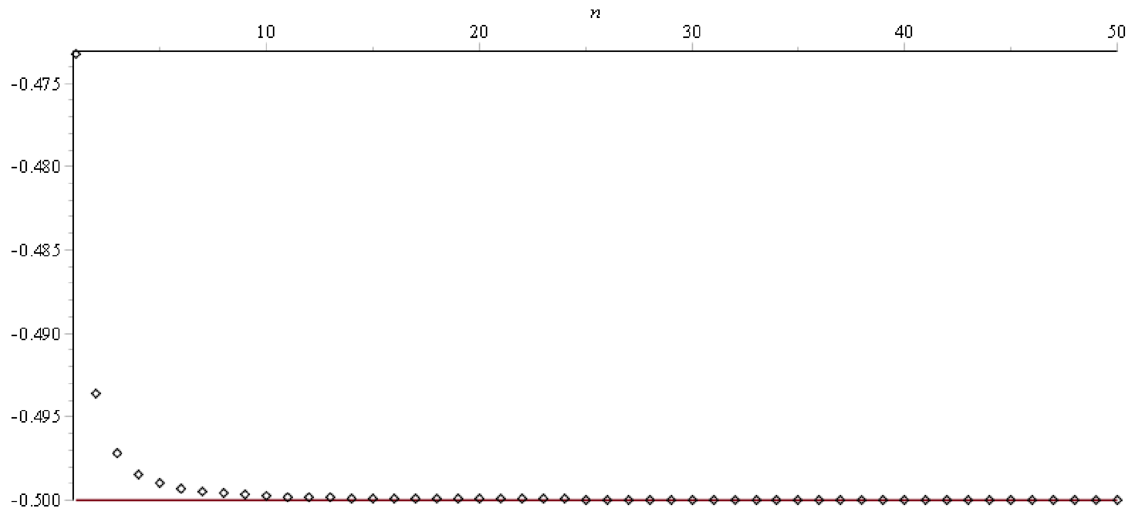
$$\frac{1}{3}l(n) + \frac{2}{3}o(n) = \frac{1}{3}(I - L(n) + \frac{2}{3}(I - O(n)) = \frac{1}{3}I - \frac{1}{3}L(n) + \frac{2}{3}I - \frac{2}{3}O(n) =$$

$$= I - (\frac{1}{3}L(n) + \frac{2}{3}O(n)) = I - S(n) = s(n).$$

Ještě než se pustíme do porovnání se Simpsonovým pravidlem, připomeňme si 2 důležité věty z článku [1], na které se později budeme odkazovat.

Věta 1. Nechť $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$ a nechť $f'(a) \neq f'(b)$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o(n)}{l(n)} = -\frac{1}{2}. \tag{22}$$



Obrázek 8: Ilustrace vztahu (22)

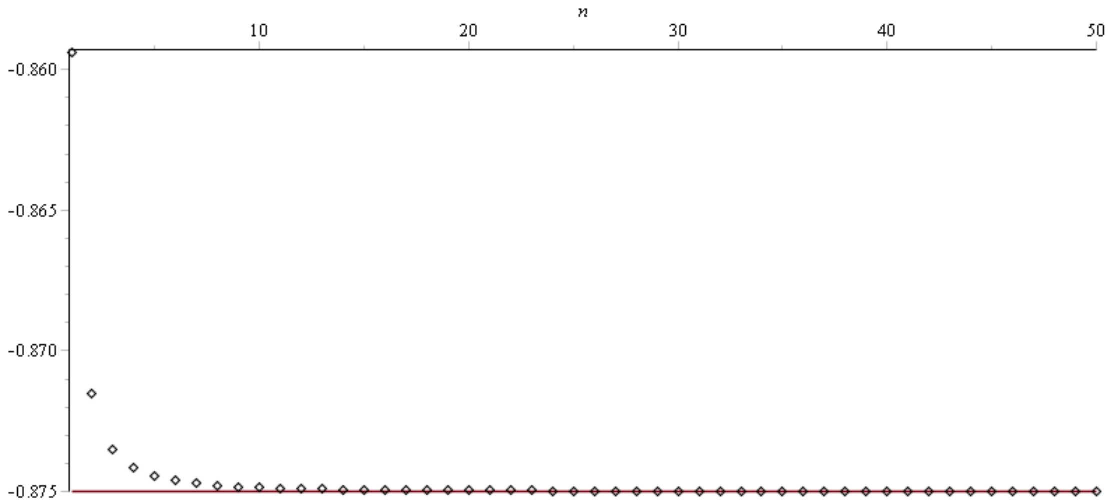
Příklad:
Porovnejte chybu obdélníkového a lichoběžníkového pravidla na intervalu od 0 do 1 funkce $f(x) := x^5 + 4x^3 - x^2 + x + 2$ aplikované na 50 dílcích. (Pro usnadnění výpočtu jsme použili program Maple.)

$$\frac{o(50)}{l(50)} = -0,4999899997$$

Můžeme vidět, že podíl se přibližně rovná $-\frac{1}{2}$.

Věta 2. Nechť $f \in C^4(\langle a, b\rangle)$ a nechť $f'(a) = f'(b)$ a nechť $f'''(a) \neq f'''(b)$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o(n)}{l(n)} = -\frac{7}{8}. \tag{23}$$



Obrázek 9: Ilustrace vztahu (23)

Příklad:
Porovnejte chybu obdélníkového a lichoběžníkového pravidla na intervalu od 0 do 1 funkce $f(x) := x^6 - 3x^2 + x + 2$ aplikované na 50 dílcích. (Pro usnadnění výpočtu jsme použili program Maple.)

$$\frac{o(50)}{l(50)} = -0,8749946426$$

Můžeme vidět, že podíl se přibližně rovná $-\frac{7}{8}$.

Věta 3. Nechť $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$ a nechť $f'(a) \neq f'(b)$.
Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{o(n)} = 0 \tag{24}$$

a

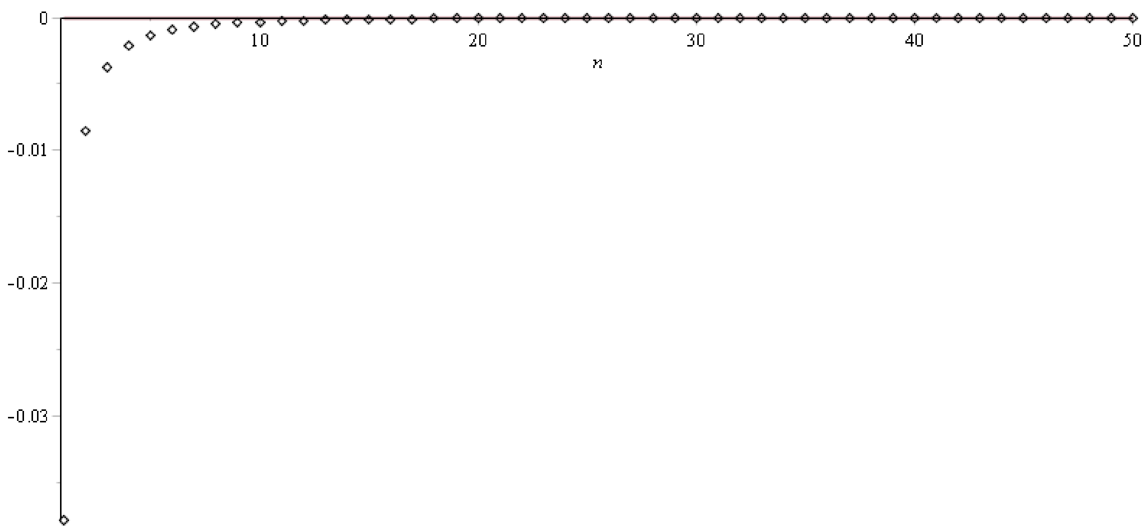
$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{l(n)} = 0. \tag{25}$$

Důkaz:
Z lemmatu 4. a z věty 1. plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{o(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{3}o(n) + \frac{1}{3}l(n)}{o(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{l(n)}{o(n)}\right) = 0$$

a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{l(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}o(n)+\frac{1}{3}l(n)}{l(n)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\frac{o(n)}{l(n)}+\frac{1}{3}\right) = 0.$$

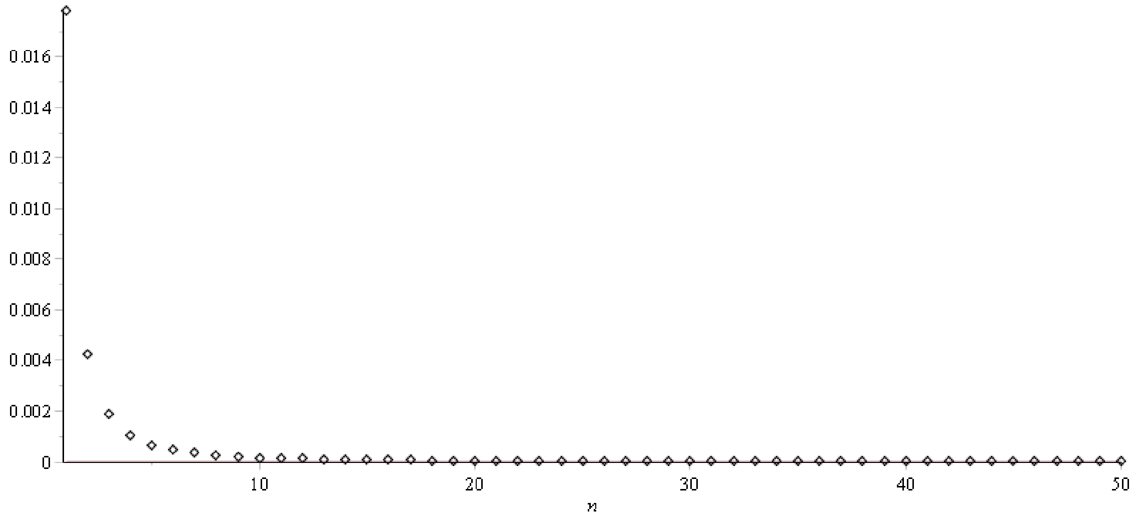


Obrázek 10: Ilustrace vztahu (24)

Příklad:
Porovnejte chybu Simpsonova a obdélníkového pravidla na intervalu od 0 do 1 funkce $f(x) := x^5 + 4x^3 - x^2 + x + 2$ aplikované na 50 dílcích. (Pro usnadnění výpočtu jsme použili program Maple.)

$$\frac{s(50)}{o(50)} = -0,00001333395558$$

Můžeme vidět, že podíl se přibližně rovná 0.



Obrázek 11: Ilustrace vztahu (25)

Příklad:
Porovnejte chybu Simpsonova a lichoběžníkového pravidla na intervalu od 0 do 1 funkce $f(x) := x^5 + 4x^3 - x^2 + x + 2$ aplikované na 50 dílcích. (Pro usnadnění výpočtu jsme použili program Maple.)

$$\frac{s(50)}{l(50)} = 0,000006666844449$$

Můžeme vidět, že podíl se přibližně rovná 0.

Ve větě 3. se předpokládá, že $f'(a) \neq f'(b)$. Může nás zajímat, co se stane, když jsou derivace stejné. V takovém případě platí následující věta.

Věta 4. Nechť $f \in C^4(\langle a, b \rangle)$ a nechť $f'(a) = f'(b)$ a nechť $f'''(a) \neq f'''(b)$.
Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{o(n)} = \frac{2}{7} \tag{26}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{l(n)} = -\frac{1}{4}. \tag{27}$$

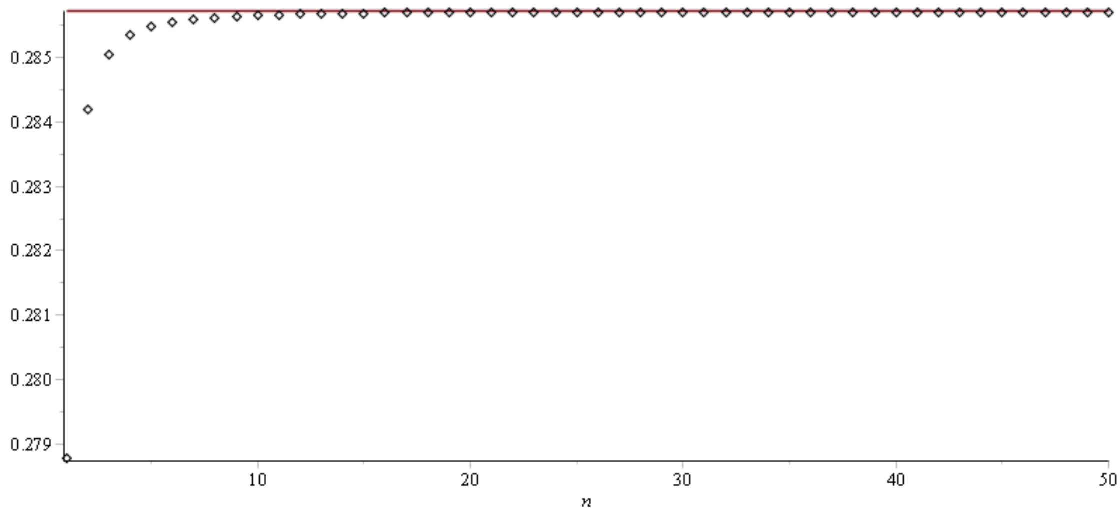
Důkaz:

Z lemmatu 4. a věty 2. plyne, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{o(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}o(n)+\frac{1}{3}l(n)}{o(n)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\frac{l(n)}{o(n)}\right) = \frac{2}{7}$$

a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{l(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}o(n)+\frac{1}{3}l(n)}{l(n)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\frac{o(n)}{l(n)}+\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{4}.$$



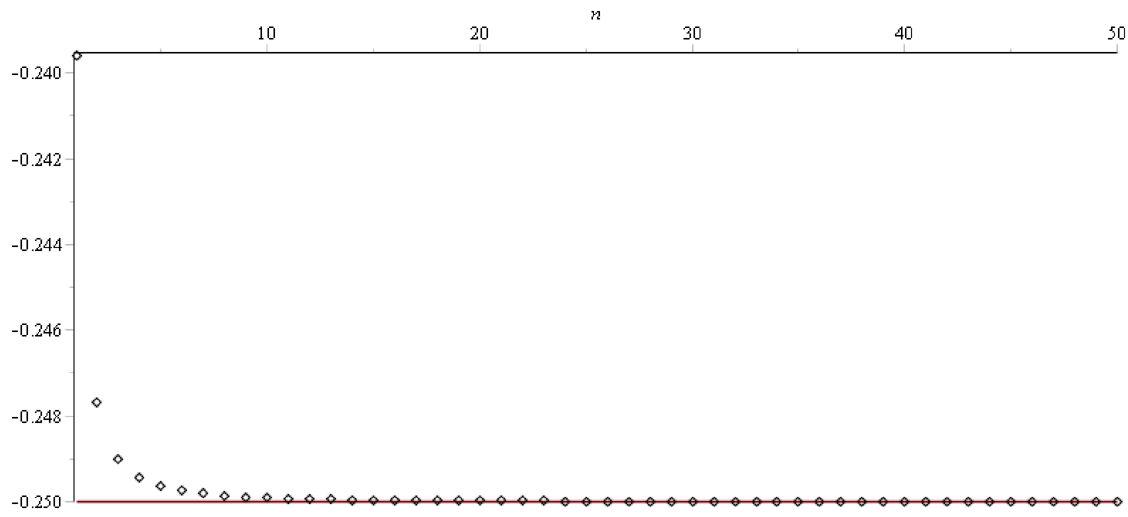
Obrázek 12: Ilustrace vztahu (26)

Příklad:

Porovnejte chybu Simpsonova a obdélníkového pravidla na intervalu od 0 do 1 funkce $f(x) := x^6 - 3x^2 + x + 2$ aplikované na 50 dílcích. (Pro usnadnění výpočtu jsme použili program Maple.)

$$\frac{s(50)}{o(50)} = 0,2857119532$$

Můžeme vidět, že podíl se přibližuje k $\frac{2}{7}$.



Obrázek 13: Ilustrace vztahu (27)

Příklad:
Porovnejte chybu Simpsonova a lichoběžníkového pravidla na intervalu od 0 do 1 funkce $f(x) := x^6 - 3x^2 + x + 2$ aplikované na 50 dílcích. (Pro usnadnění výpočtu jsme použili program Maple.)

$$\frac{s(50)}{l(50)} = -0,2499964284$$

Můžeme vidět, že podíl se přibližuje $-\frac{1}{4}$.

Ve větách 3. a 4. jsme srovnávali $s(n)$ a $o(n)$ (popř. $l(n)$). Uvědomme si, že při výpočtu $S(n)$ však potřebujeme dvakrát více funkčních hodnot než při výpočtu $O(n)$ (popř. $L(n)$). Z tohoto důvodu by bylo správnější porovnávat $s(n)$ a $o(2n)$ (popř. $l(2n)$). To bude obsahem následujících vět.

Nejdříve si ale musíme uvést důležité lemma.
Lemma 5. Nechť $n \in N$. Pak platí

$$L(2n) = \frac{1}{2}L(n) + \frac{1}{2}O(n) \tag{28}$$

a

$$l(2n) = \frac{1}{2}l(n) + \frac{1}{2}o(n). \tag{29}$$

Důkaz:
Identita (28) plyne přímo ze vztahů (1),(2). $L(2n)$ je lineární kombinací $O(n)$ a $L(n)$.
K důkazu (29) využijeme identitu (28) a definici chyby. Položíme-li $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, dostaneme

$$o(n) = I - O(n),$$

$$l(n) = I - L(n),$$

$$s(n) = I - S(n).$$

Přímým výpočtem pak dostaneme

$$\frac{1}{2}l(n) + \frac{1}{2}o(n) = \frac{1}{2}(I - L(n) + \frac{1}{2}(I - O(n)) = \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}L(n) + \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}O(n) =$$

$$= I - (\frac{1}{2}L(n) + \frac{1}{2}O(n)) = I - L(2n) = l(2n).$$

Věta 5. Nechť $f \in C^2(\langle a,b\rangle)$ a nechť $f'(a) \neq f'(b)$.
Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{l(2n)} = 0 \tag{30}$$

a

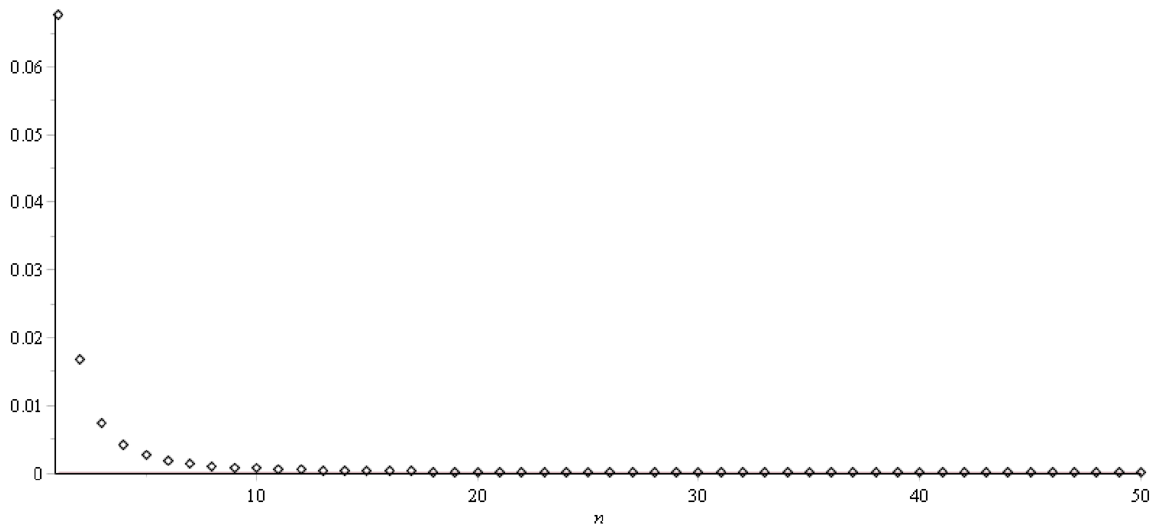
$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{o(2n)} = 0. \tag{31}$$

Důkaz:
Vzhledem k lemmatům 4., 5. a větě 1. platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{l(2n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{3}o(n) + \frac{1}{3}l(n)}{\frac{1}{2}o(n) + \frac{1}{2}l(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{l(n)\left(\frac{2}{3}\frac{o(n)}{l(n)} + \frac{1}{3}\right)}{l(n)\left(\frac{1}{2}\frac{o(n)}{l(n)} + \frac{1}{2}\right)} = 0. \tag{32}$$

Vztah (31) dokážeme na základě vztahu (30), věty 1. a věty o limitě vybrané posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{o(2n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{l(2n)}\frac{l(2n)}{o(2n)} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{l(2n)}}_{=0} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{l(2n)}{o(2n)}}_{=-2} = 0.$$



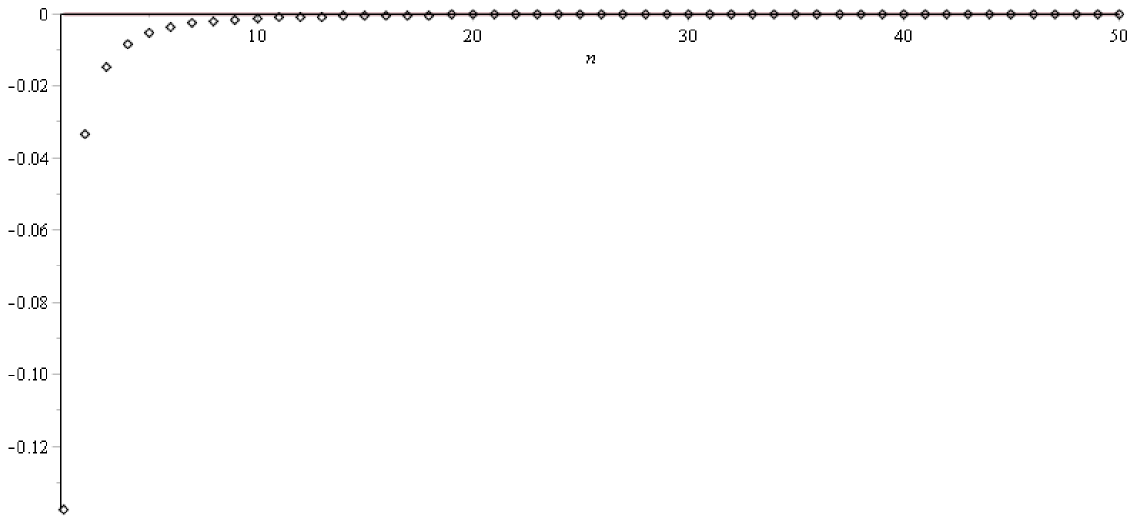
Obrázek 14: Ilustrace vztahu (30)

Příklad:
Porovnejte chybu Simpsonova a lichoběžníkového pravidla na intervalu od 0 do 1 funkce $f(x) := x^5 + 4x^3 - x^2 + x + 2$ při $n = 50$. (Pro usnadnění výpočtu jsme použili program Maple.)

$$\frac{s(50)}{l(100)} = 0,00002666684445$$

Můžeme vidět, že podíl se přibližně rovná 0.

.



Obrázek 15: Ilustrace vztahu (31)

Příklad:
Porovnejte chybu Simpsonova a obdélníkového pravidla na intervalu od 0 do 1 funkce $f(x) := x^5 + 4x^3 - x^2 + x + 2$ při $n = 50$. (Pro usnadnění výpočtu jsme použili program Maple.)

$$\frac{s(50)}{o(100)} = -0,00005333395556$$

Můžeme vidět, že podíl se přibližně rovná 0.

Podobně si ukážeme následující větu.

Věta 6. Nechť $f \in C^4(\langle a, b\rangle)$ a nechť $f'(a) = f'(b)$ a nechť $f'''(a) \neq f'''(b)$.
Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{l(2n)} = -4 \tag{33}$$

a

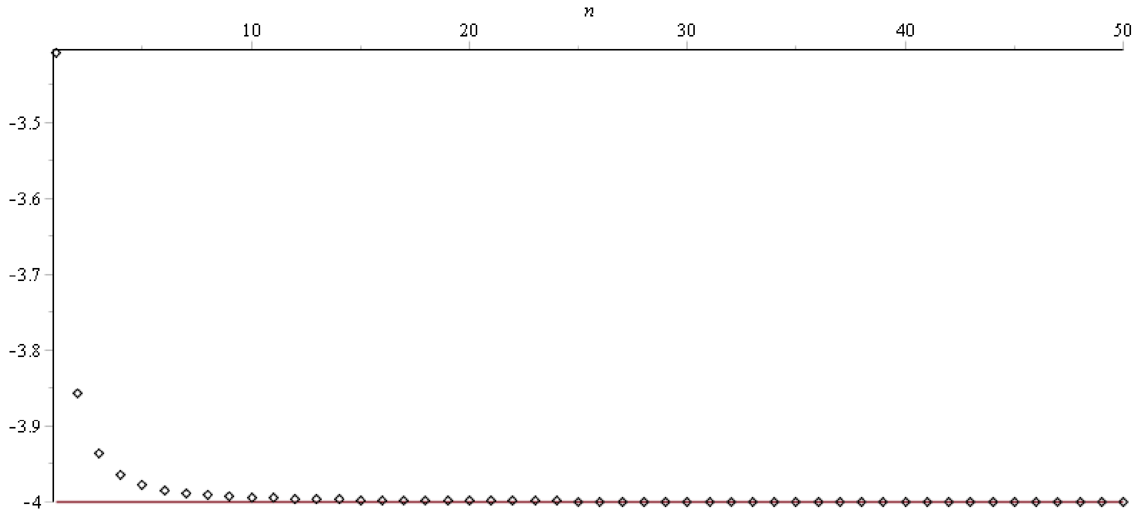
$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{o(2n)} = \frac{32}{7}. \tag{34}$$

Důkaz:
Z lemma 5. a věty 2. plyne, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{l(2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}o(n)+\frac{1}{3}l(n)}{\frac{1}{2}o(n)+\frac{1}{2}l(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{l(n)\left[\frac{2}{3}\frac{o(n)}{l(n)}+\frac{1}{3}\right]}{l(n)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{o(n)}{l(n)}\right]}=-4.$$

Vztah (34) dokážeme na základě vztahu (33), věty 2. a věty o limitě vybrané posloupnosti.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{o(2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{l(2n)}\frac{l(2n)}{o(2n)}=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{l(2n)}}_{=-4}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{l(2n)}{o(2n)}}_{=-\frac{8}{7}}=\frac{32}{7}.$$



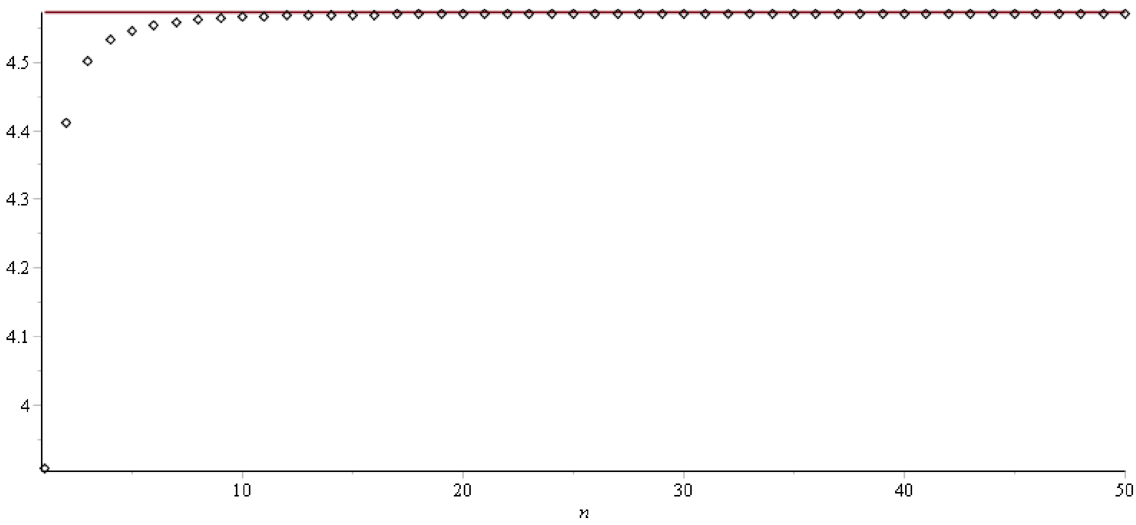
Obrázek 16: Ilustrace vztahu (33)

Příklad:

Porovnejte chybu Simpsonova a lichoběžníkového pravidla na intervalu od 0 do 1 funkce $f(x) := x^6 - 3x^2 + x + 2$ při $n = 50$. (Pro usnadnění výpočtu jsme použili program Maple.)

$$\frac{s(50)}{l(100)} = -3,999771425$$

Můžeme vidět, že podíl se přibližuje -4.



Obrázek 17: Ilustrace vztahu (34)

Příklad:
Porovnejte chybu Simpsonova a obdélníkového pravidla na intervalu od 0 do 1 funkce $f(x) := x^6 - 3x^2 + x + 2$ při $n = 50$. (Pro usnadnění výpočtu jsme použili program Maple.)

$$\frac{s(50)}{o(100)} = 4,571174340$$

Můžeme vidět, že podíl se přibližuje k $\frac{32}{7}$.

5 Závěr

V této práci jsme odvodili vzorce pro chyby, které vzniknou při použití vybraných metod numerické integrace. Dále jsme porovnávali metody mezi sebou a dospěli k následujícím výsledkům.

Při porovnání Simpsonova pravidla s obdélníkovým pravidlem jsme zjistili, že za předpokladů $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$ a $f'(a) \neq f'(b)$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{o(n)} = 0.$$

Z toho vyplývá, že limitně pro velký počet dílků se Simpsonovo pravidlo chová řádově lépe než obdélníkové pravidlo.

Za stejných předpokladů jsme porovnávali i Simpsonovo pravidlo s lichoběžníkovým pravidlem a dostali vztah

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{l(n)} = 0.$$

Z toho opět vyplývá, že se Simpsonovo pravidlo chová mnohem lépe než lichoběžníkové.

Při porovnání Simpsonova pravidla s obdélníkovým pravidlem jsme zjistili, že za předpokladů $f \in C^4(\langle a, b\rangle)$, $f'(a) = f'(b)$ a $f'''(a) \neq f'''(b)$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{o(n)} = \frac{2}{7}.$$

Z toho vyplývá, že za těchto předpokladů je (limitně) přesnější Simpsonova metoda.

Za stejných předpokladů jsme porovnávali i Simpsonovo pravidlo s lichoběžníkovým pravidlem. Dostali jsme vztah

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{l(n)} = -\frac{1}{4}.$$

Z toho opět vyplývá, že za těchto předpokladů je (limitně) přesnější Simpsonova metoda.

Dále jsme udělali tzv. "spravedlivější"porovnání a to s dvojnásobným počtem dílků u obdélníkového a lichoběžníkového pravidla.

Za předpokladů $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$ a $f'(a) \neq f'(b)$ jsme porovnali Simpsonovo pravidlo a obdélníkové pravidlo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{o(2n)} = 0$$

Z toho vyplývá, že je opět Simpsonovo pravidlo řádově lepší.

Za stejných předpokladů jsme porovnali Simpsonovo pravidlo s lichoběžníkovým pravidlem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{l(2n)} = 0.$$

Opět zjišťujeme, že za těchto předpokladů, je Simpsonovo pravidlo (limitně) mnohem lepší.

Za předpokladů $f \in C^4(\langle a, b\rangle)$ a $f'(a) = f'(b)$ a $f'''(a) \neq f'''(b)$ jsme porovnali Simpsonovo pravidlo s obdélníkovým pravidlem a dostali velmi zajímavý výsledek

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{o(2n)} = \frac{32}{7}.$$

Zde zjišťujeme, že obdélníkové pravidlo je lepší než Simpsonovo pravidlo.

Za stejných předpokladů jsme porovnali Simpsonovo a lichoběžníkové pravidlo a opět dostali překvapující výsledek

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s(n)}{l(2n)} = -4$$

Odtud plyne, že lichoběžníkové pravidlo je (limitně) 4x lepší než pravidlo Simpsonovo.

Literatura

[1] Petr Vodstrčil, Jiří Bouchala: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 55 (2010), č.4, Drobná překvapení spojená s numerickou integrací.

[2] Jiří Bouchala, Marie Sadowská: Mathematical analysis I, Ostrava, 2007

[3] Vít Vondrák, Lukáš Pospíšil: Numerické metody I, Ostrava, 2011

[4] Vojtěch Jarník: Integrální počet I., Academia Praha, 1974