

VŠB - Technická univerzita Ostrava  
Fakulta stavební  
Katedra stavební mechaniky

Statická analýza vybrané plošné konstrukce  
Static analysis of selected planar construction

Student: Jana Seidlerová  
Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.

Ostrava 2015

## Zadání bakalářské práce

Student: **Jana Seidlerová**  
Studijní program: B3607 Stavební inženýrství  
Studijní obor: 3607R037 Konstrukce staveb  
Téma: **Statická analýza vybrané plošné konstrukce**  
**Static analysis of selected planar construction**

### Zásady pro vypracování:

V rámci bakalářské práce se předpokládá vypracování následujících kapitol:

- zpracování teoretického postupu pro řešení tenkých nosných pravoúhlých desek různými metodami (MKP, metoda sítí, Ritzova metoda, řešení pomocí jednoduchých nekonečných řad).
- aplikace těchto postupů v programovém systému Matlab.
- statická analýza vybrané plošné konstrukce s využitím vytvořené aplikace s uplatněním používaných pevnostních kritérií, provedení srovnání přesnosti řešení jednotlivými metodami.

As part of the thesis involves conducting the following chapters:

- theoretical procedure for processing of thin rectangular plates using various methods (FEM, FDM, Ritz method, using a simple solution of infinite series).
- application of these procedures in MATLAB.
- static analysis of selected planar structure using an application created by applying used strength criteria, making comparisons between the different methods according solution accuracy.

### Seznam doporučené odborné literatury:

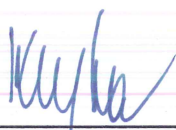
- Matlab. Programový systém pro provádění matematických výpočtů. Komerční software, verze R2014b. [on-line]. <<http://www.mathworks.com>>. The MathWorks, září 2014.
- Teplý, Šmírák: Pružnost a plasticita II. VUT Brno, ISBN 80-214-0498-1, 1993. dotisk CERN, 2000.
- Bittnar, Šejnoha: Numerické metody mechaniky 1. ČVUT Praha, ISBN 80-01-00855-X, 1992.
- Bittnar, Šejnoha: Numerické metody mechaniky 2. ČVUT Praha, ISBN 80-01-00901-7, 1992.
- Dický, Mistríková, Sumec: Pružnost' a plasticita v stavebnictve 2. STU v Bratislavě, ISBN 80-227-2515-3, 2006.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

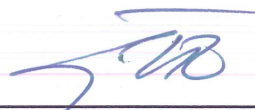
Vedoucí bakalářské práce: **doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.**

Datum zadání: 31.10.2014

Datum odevzdání: 04.05.2015



doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.  
vedoucí katedry



prof. Ing. Radim Čajka, CSc.  
děkan fakulty

### **Prohlášení studenta**

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracovala samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedla jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě .....

.....

podpis studenta

Prohlašuji, že

- byla jsem seznámena s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. - autorský zákon, zejména § 35 - užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školním představení a užití díla školního a § 60 - školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB - TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB - TUO k prezenčnímu nahlédnutí. Souhlasím s tím, že údaje o bakalářské práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB - TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB - TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít své dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užití díla - bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB - TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB - TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb, o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách, ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě .....

.....  
podpis studenta

## **Poděkování**

Toutu cestou bych chtěla poděkovat panu doc. Ing. Martinu Krejsovi, Ph.D., vedoucímu bakalářské práce, za vstřícnost, cenné rady a účinné pedagogické vedení při zpracování mé bakalářské práce a za poskytnutou pomoc se softwarem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, ve kterém byla práce vytvořena.

Osobní poděkování patří mé rodině a přátelům za podporu, zejména mému příteli Martinu Švaňovi za projevenou psychickou oporu.

# ANOTACE

Předmětem bakalářské práce je statická analýza tenkých desek na základě Kirchhoffovy teorie. Součástí práce je shrnutí vztahů platných pro tenké desky včetně odvození deskové rovnice. Diferenciální desková rovnice je řešena metodou sítí, Ritzovou metodou a metodou konečných prvků. Princip každé metody je popsán teoreticky a následně aplikován na řešeném příkladě. Práce je doplněna pravděpodobnostním posudkem tenkých desek simulační metodou SBRA a přímou numerickou metodou POPV.

## **Klíčová slova:**

tenké desky, Kirchhoffovy předpoklady, desková rovnice, metoda sítí, Ritzova metoda, metoda konečných prvků, pravděpodobnostní posudek.

# ANNOTATION

The subject of bachelor thesis is static analysis of thin plates according Kirchhoff's assumptions. The thesis includes summary of relations for thin plates including derivation of differential equation for the deflections. Differential equation for the deflections is solved by The finite difference method, The Ritz method and The finite element method. Principle of each method is described theoretically and then applied to the example. The thesis is supplemented by probabilistic assessment of thin plates by simulation method SBRA and direct numerical method DOProC.

## **Klíčová slova:**

thin plates, Kirchhoff's assumptions, differential equation for the deflections, The finite difference method, The Ritz method, The finite element method, probabilistic assessment.

# OBSAH

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>Předpoklady řešení</b>	<b>15</b>
2.1	Úvod do řešení deskových konstrukcí . . . . .	15
2.2	Kirchhoffova teorie tenkých desek . . . . .	15
2.3	Odvození deskové rovnice . . . . .	16
2.3.1	Geometrické a fyzikální vztahy . . . . .	16
2.3.2	Vnitřní síly . . . . .	18
2.3.3	Základní desková rovnice . . . . .	19
2.4	Okrajové podmínky . . . . .	21
2.4.1	Vetknutý okraj . . . . .	21
2.4.2	Prostě podepřený okraj . . . . .	22
2.4.3	Volný okraj . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Metoda sítí</b>	<b>24</b>
3.1	Převod derivací na difference funkčních hodnot . . . . .	24
3.1.1	Odvození první derivace . . . . .	24
3.1.2	Odvození druhé derivace . . . . .	25
3.1.3	Odvození vyšších derivací . . . . .	26
3.1.4	Parciální derivace . . . . .	27
3.2	Desková rovnice po dosazení diferenčních vztahů . . . . .	29
3.3	Okrajové podmínky s využitím diferenčních vztahů . . . . .	30
3.3.1	Vetknutý okraj . . . . .	31
3.3.2	Prostě podepřený okraj . . . . .	32
3.3.3	Volný okraj . . . . .	32
3.4	Postup při výpočtu nosné desky metodou sítí . . . . .	32
3.5	Řešení příkladu metodou sítí . . . . .	33
3.5.1	Zadání příkladu . . . . .	33
3.5.2	Řešení příkladu . . . . .	33
3.5.3	Porovnání s komerčním softwarem Scia Engineer . . . . .	38



<b>4</b>	<b>Ritzova metoda</b>	<b>42</b>
4.1	Variační úlohy . . . . .	42
4.1.1	Lagrangeův (deformační) princip . . . . .	42
4.2	Ritzovo řešení . . . . .	43
4.2.1	Postup výpočtu Ritzovou metodou . . . . .	44
4.3	Řešení příkladu Ritzovou metodou . . . . .	45
4.3.1	Řešení příkladu s využitím funkce sinus . . . . .	45
4.3.2	Vykreslení průhybu a měrných vnitřních sil . . . . .	49
4.3.3	Porovnání s komerčním softwarem Scia Engineer . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Metoda konečných prvků</b>	<b>56</b>
5.1	Základní vztahy v metodě konečných prvků . . . . .	56
5.2	Postup řešení tenkých desek metodou konečných prvků . . . . .	62
5.3	Řešení příkladu metodou konečných prvků . . . . .	62
5.3.1	Řešení příkladu . . . . .	63
5.3.2	Porovnání s komerčním softwarem Scia Engineer . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Pravděpodobnostní řešení nosných desek</b>	<b>69</b>
6.1	Základní princip pravděpodobnostního posudku spolehlivosti konstrukcí	69
6.2	Metody pravděpodobnostního výpočtu . . . . .	71
6.2.1	Simulační metody . . . . .	71
6.2.2	Přímé (numerické) metody . . . . .	71
6.3	Příklad pravděpodobnostního posudku tenké desky . . . . .	72
6.3.1	Zadání příkladu . . . . .	72
6.3.2	Řešení příkladu . . . . .	75
6.3.3	Řešení příkladu v programu Anthill . . . . .	77
6.3.4	Řešení příkladu v programu ProbCalc . . . . .	78
6.3.5	Porovnání výsledků . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>82</b>
	<b>Literatura</b>	<b>84</b>

# SEZNAM OBRÁZKŮ

2.1	Posun bodu $M$ při deformaci desky . . . . .	17
2.2	Kladné směry vnitřních sil . . . . .	19
2.3	Element desky . . . . .	20
2.4	Typy podepření desky . . . . .	21
	(a) Vetknutý orkaj . . . . .	21
	(b) Prostě podepřený okraj . . . . .	21
	(c) Volný okraj . . . . .	21
3.1	Odvození derivace . . . . .	24
3.2	Odvození druhé derivace . . . . .	25
	(a) Funkce $y = f(x)$ . . . . .	25
	(b) Funkce $y_a^*$ . . . . .	25
	(c) Funkce $y_b^*$ . . . . .	25
	(d) Funkce $y_c^*$ . . . . .	25
3.3	Odvození třetí derivace . . . . .	27
3.4	Odvození parciálních derivací . . . . .	28
3.5	Znázornění označování uzlů sítě . . . . .	29
3.6	Typy podepření desky . . . . .	31
	(a) Vetknutý orkaj . . . . .	31
	(b) Prostě podepřený okraj . . . . .	31
	(c) Volný okraj . . . . .	31
3.7	Statické schéma . . . . .	34
3.8	Vygenerovaná síť na zadané desce . . . . .	35
3.9	Porovnání průhybů získanými metodou sítí a programem Scia Engineer	38
3.10	Označení vybraných uzlů pro porovnání . . . . .	39
	(a) Označení vybraných uzlů pro porovnání průhybů a měrných ohybových momentů . . . . .	39
	(b) Označení vybraných uzlů pro porovnání měrných kroutících mo- mentů . . . . .	39

(c) Označení vybraných uzlů pro porovnání měrných posouvajících sil . . . . .	39
3.11 Procentuální porovnání průhybů získaných metodou sítí a programem Scia Engineer . . . . .	40
3.12 Porovnání měrných ohybových momentů získaných metodou sítí a programem Scia Engineer . . . . .	40
3.13 Porovnání měrných kroutících momentů získaných metodou sítí a programem Scia Engineer . . . . .	41
3.14 Porovnání měrných posouvajících sil získaných metodou sítí a programem Scia Engineer . . . . .	41
4.1 Zvolené body vypočítaných hodnot průhybů . . . . .	47
4.2 Průhyb $w$ . . . . .	50
4.3 Průběh měrných ohybových momentů $m_x$ . . . . .	50
4.4 Průběh měrných ohybových momentů $m_y$ . . . . .	51
4.5 Průběh měrných kroutících momentů $m_{xy}$ . . . . .	51
4.6 Průběh měrných posouvajících sil $q_x$ . . . . .	52
4.7 Průběh měrných posouvajících sil $q_y$ . . . . .	52
4.8 Porovnání průhybů získaných Ritzovou metodou a programem Scia Engineer . . . . .	53
4.9 Procentuální porovnání průhybů získaných Ritzovou metodou a programem Scia Engineer . . . . .	54
4.10 Porovnání měrných ohybových momentů získaných Ritzovou metodou a programem Scia Engineer . . . . .	54
4.11 Porovnání měrných kroutících momentů získaných Ritzovou metodou a programem Scia Engineer . . . . .	55
4.12 Porovnání měrných posouvajících sil získaných Ritzovou metodou a programem Scia Engineer . . . . .	55
5.1 Obdelníkový konečný prvek . . . . .	56
5.2 Vygenerovaná síť . . . . .	63
5.3 Ekvivalentní uzlové zatížení . . . . .	64
5.4 Gaussova metoda numerické integrace . . . . .	64

5.5	Porovnání průhybů získaných metodou konečných prvků v programu Matlab a programem Scia Engineer . . . . .	66
5.6	Procentuální porovnání průhybů získaných metodou konečných prvků v programu Matlab a programem Scia Engineer . . . . .	67
5.7	Porovnání měrných ohybových momentů získaných metodou konečných prvků v programu Matlab a programem Scia Engineer . . . . .	67
5.8	Porovnání měrných krouticích momentů získaných metodou konečných prvků v programu Matlab a programem Scia Engineer . . . . .	68
6.1	Oblast vzniku poruchy . . . . .	70
6.2	Statické schéma železobetonové desky . . . . .	73
6.3	Řez železobetonové desky . . . . .	73
6.4	Parametr variability tloušťky desky $h_{var}$ . . . . .	74
6.5	Křivky trvání zatížení . . . . .	75
	(a) Stálé zatížení . . . . .	75
	(b) Dlouhodobé zatížení . . . . .	75
6.6	Parametry variability materiálových vlastností . . . . .	75
	(a) Histogram pevnosti betonu v tlaku $f_c$ . . . . .	75
	(b) Histogram pevnosti oceli na mezi kluzu $f_s$ . . . . .	75
6.7	Výstupy z programu Anthill . . . . .	80
	(a) Účinek zatížení $S$ . . . . .	80
	(b) Odolnost konstrukce $R$ . . . . .	80
	(c) Funkce spolehlivosti $SF$ . . . . .	80
6.8	Výstupy z programu ProbCalc . . . . .	81
	(a) Účinek zatížení $S$ . . . . .	81
	(b) Odolnost konstrukce $R$ . . . . .	81
	(c) Funkce spolehlivosti $SF$ . . . . .	81

## SEZNAM TABULEK

3.1	Vstupní parametry . . . . .	34
3.2	Hodnoty průhybů . . . . .	36
3.3	Měrný ohybový moment $m_x$ . . . . .	36
3.4	Měrný ohybový moment $m_y$ . . . . .	36
3.5	Měrný kroutící moment $m_{xy}$ . . . . .	37
3.6	Měrné posouvající síly $q_x$ . . . . .	37
3.7	Měrné posouvající síly $q_y$ . . . . .	37
4.1	Hodnoty průhybů . . . . .	48
4.2	Měrný ohybový moment $m_x, m_y$ . . . . .	48
4.3	Měrný kroutící moment $m_{xy}$ . . . . .	49
4.4	Měrný posouvající síly $q_x$ . . . . .	49
4.5	Měrný posouvající síly $q_y$ . . . . .	49
5.1	Hodnoty průhybů . . . . .	65
5.2	Měrný ohybový moment $m_x$ . . . . .	65
5.3	Měrný ohybový moment $m_y$ . . . . .	65
5.4	Měrný kroutící moment $m_{xy}$ . . . . .	65
6.1	Návrhová pravděpodobnost $p_d$ pro mezní stav únosnosti podle normy [5]	70
6.2	Vstupní parametry řešené desky . . . . .	74
6.3	Variabilní proměnné . . . . .	74
6.4	Výsledné hodnoty $p_f$ z programu Anthill . . . . .	77

# 1 ÚVOD

Cílem bakalářské práce je prohloubení znalostí o plošných konstrukcích, které se rozdělují na stěny, desky a skořepiny. Stěny i desky jsou charakterizovány rovinnou střednicovou plochou oproti skořepinám, jejíž střednicová plocha je zaoblená. Rozdíl mezi stěnami a deskami je ve směru zatížení na konstrukci. Nosné stěny jsou zatíženy v rovině střednicové plochy. Práce se zaměřuje na nosné desky, které jsou charakteristické působícím zatížením kolmo na střednicovou rovinu konstrukce. Příkladem deskových konstrukcí ve stavební praxi mohou být nosné systémy stropů nebo plochých střech.

Statickou analýzu nosných desek lze provést různými metodami, které se liší nároky na přesnost, pracnost a potřebu výpočetní techniky. Náplní této práce je statická analýza nosné desky vybranými metodami, jejich aplikace na konkrétních příkladech a následné srovnání s řešením pomocí komerčního softwaru. Práce se zaměřuje na statickou analýzu tenkých desek, jejichž řešení je založeno na Kirchhoffově teorii. Předpoklady pro řešení tenkých desek a odvození deskové rovnice na základě Kirchhoffovy teorie jsou uvedeny v kap. 2.

První vybranou metodou pro analýzu tenkých desek je metoda sítí, která je založena na vytvoření sítě na zadané konstrukci. Desková rovnice se řeší v jednotlivých uzlech sítě. Výpočet spočívá v řešení soustavy lineárních rovnic, kde neznámými jsou průhyby v jednotlivých uzlech. Výsledné hodnoty lze získat pouze v uzlech zadané sítě. Metoda sítí je dále popsána v kap. 3.

Pro statickou analýzu kteréhokoli bodu zadané desky lze využít Ritzovu metodu. Podstatou je nahrazení průhybové plochy známou funkcí, která svým tvarem odpovídá předpokládané deformaci desky a vyhovuje okrajovým podmínkám zadané desky. Na základě vnitřních a vnějších energií konstrukce se předepsaná funkce přepočte tak, aby odpovídala konkrétnímu zatížení desky. Podrobnější popis řešení desek Ritzovou metodou je uveden v kap. 4.

Ritzovo řešení patří mezi starší metody, které ustoupily do pozadí s rozvojem výpočetní techniky. Na využití počítačové podpory je založena metoda konečných prvků, která z Ritzovy metody vychází. Spočívá v rozdělení zadané konstrukce na ko-

nečné prvky. V případě tenké desky se jedná o čtyřuzlové obdelníkové prvky, kde deformace každého prvku je aproximována zvolenou funkcí. Pro dosažení přesného řešení je potřeba konstrukci rozdělit hustou sítí konečných prvků. Při výpočtu se tato metoda opírá o řešení soustavy značného počtu lineárních rovnic, což vyžaduje využití výpočetní techniky. Problematika řešení metodou konečných prvků je zpracována v kap. 5.

Práce zahrnuje také pravděpodobnostní řešení desek, které je založeno na možnosti vyjádřit náhodné vstupní veličiny pravděpodobnostně, například histogramy. Posudek mezního stavu únosnosti a použitelnosti se provádí na úrovni porovnání vypočtené pravděpodobnosti poruchy  $p_f$  s návrhovou pravděpodobností poruchy  $p_d$ , která je obsažena v současně platných normách. K řešení bude využita simulační metoda Monte Carlo a numerická metoda Přímého Optimalizovaného Pravděpodobnostního Výpočtu - POPV. Řešená problematika je popsána v kap. 6.

## 2 PŘEDPOKLADY ŘEŠENÍ

### 2.1 Úvod do řešení deskových konstrukcí

Plošné konstrukce lze specifikovat od prutových a prostorových konstrukcí tak, že jeden jejich rozměr - tloušťka, je řádově menší než zbývající dva rozměry. Nosné desky jsou pak charakteristické působícím zatížením, které je kolmé k střednicové rovině desky, což je rovina tvořená body, které se nacházejí ve stejné vzdálenosti od horního i dolního okraje desky.

Podle [24] se deskové konstrukce rozdělují v závislosti na poměru jejich tloušťky k menšímu délkovému rozměru desky.

- Konstrukce s poměrem  $h/l < 1/50$  se nazývají velmi tenké desky a jejich chování odpovídá membránám.
- Pro tenké desky, které budou dále rozpracovány, platí poměr  $1/50 < h/l < 1/10$ . Řeší se na základě Kirchhoffovy teorie (viz kap. 2.2).
- Deskové konstrukce v rozmezí  $1/10 < h/l < 1/5$  se označují jako tlusté desky. Oproti tenkým deskám u těchto konstrukcí nelze zanedbat vliv smyku na vznik deformací. Pro jejich řešení se využívá Mindlinova teorie, která je zpracována například v [1] nebo [4].
- Konstrukce, které mají poměr  $h/l > 1/5$ , se již řadí mezi prostorová tělesa.

### 2.2 Kirchhoffova teorie tenkých desek

Pro úplnost problematiky řešení tenkých desek je zde uvedeno odvození deskové rovnice. Odvození deskové rovnice a řešení tenkých desek vychází ze zavedených předpokladů a zjednodušení, kterými se zabýval německý fyzik Gustav Robert Kirchhoff (viz [9]). Jeho poznatky ohledně řešení tenkých desek jsou označovány jako Kirchhoffova teorie tenkých desek, která je zpracována například v [13], [23], [24] a [25].

Kirchhoffova teorie předpokládá tenkou desku tvořenou izotropním materiálem. Dalším předpokladem je lineárně pružné chování deskové konstrukce. Po zatížení



desky vzniknou jen malé deformace, které jsou řádově menší v porovnání s tloušťkou desky.

Kirchhoffovy předpoklady a zjednodušení potřebná k řešení lze shrnout do následujících bodů:

- Po zatížení desky dochází k posunu bodů střednicové roviny pouze ve svislém směru. Posun bodů ve směru vodorovném se zanedbává:

$$u(x, y, 0) = 0, \quad v(x, y, 0) = 0, \quad w(x, y, 0) \neq 0. \quad (2.1)$$

- Ve střednicové rovině desky po zatížení nevznikají žádná napětí:

$$\sigma_x(x, y, 0) = 0, \quad \sigma_y(x, y, 0) = 0, \quad \tau_{xy}(x, y, 0) = 0. \quad (2.2)$$

- Po výšce průřezu desky vzniká normálové napětí  $\sigma_z$ , které je však v porovnání s napětími  $\sigma_x$  a  $\sigma_y$  velmi malé, proto je lze zanedbat:

$$\sigma_z(x, y, z) = 0. \quad (2.3)$$

- Body, které leží na normále ke střednicové rovině před zatížením desky, vytvářejí i po přetvoření desky normálu ke zdeformované střednicové ploše. Zatížením desky se vzdálenosti bodů tvořících totožné normály nemění:

$$\epsilon_z = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0. \quad (2.4)$$

## 2.3 Odvození deskové rovnice

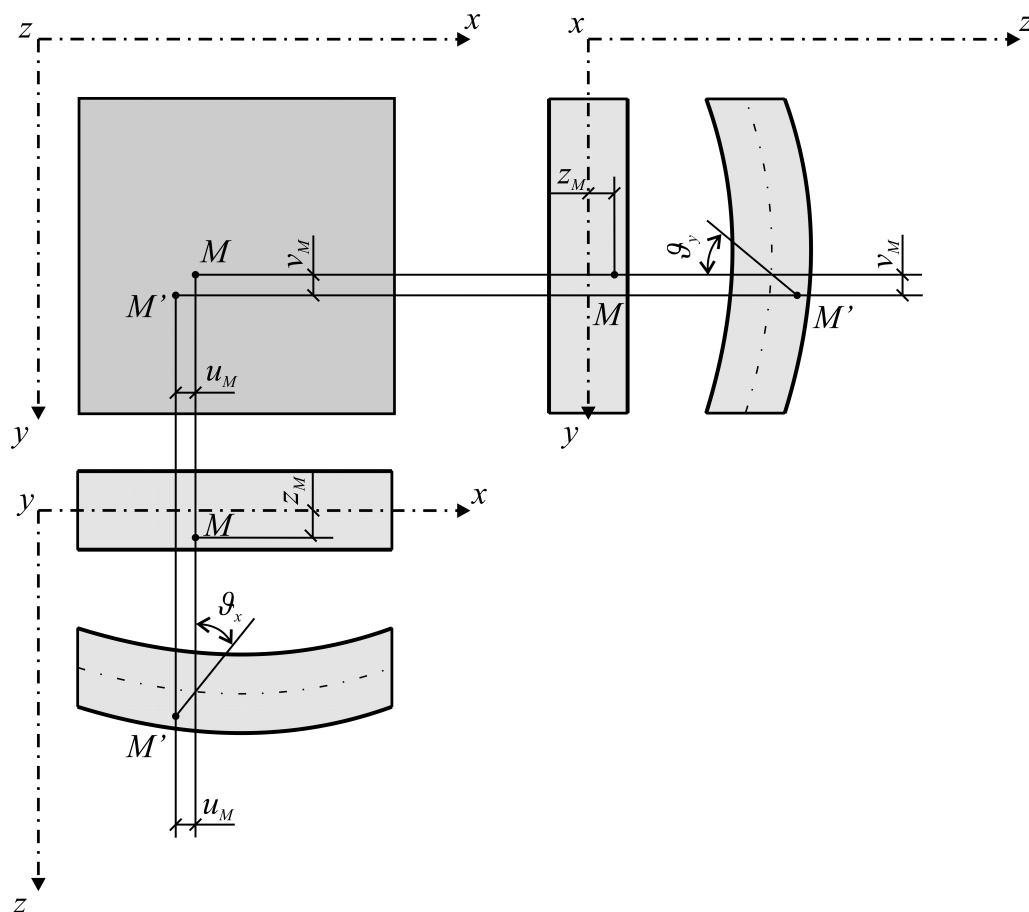
### 2.3.1 Geometrické a fyzikální vztahy

Odvození deskové rovnice vychází z geometrických a fyzikálních vztahů upravených na základě Kirchhoffových předpokladů. Předpoklad o zachování normál ke střednicové rovině (2.4) lze rozepsat do výrazů:

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (2.5)$$

S uvažováním malých deformací je možné zjednodušení, kdy pro malé úhly platí  $\sin \vartheta_x = \vartheta_x$ . Vodorovné posuny  $u, v$  lze vyjádřit podle obr. 2.1 do vztahů:

$$u = -z\vartheta_x = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z\vartheta_y = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.6)$$



Obr. 2.1: Posun bodu  $M$  při deformaci desky

Základní geometrické vztahy je možné upravit pomocí (2.6) do tvarů:

$$\epsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \quad (2.7)$$

Pro odvození deskové rovnice je zapotřebí fyzikální vztahy upravit na základě

Kirchhoffova předpokladu (2.3) a užitím výrazů (2.7) do podoby:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{E_z}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{E_z}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{E_z}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Odvozená napětí mají po tloušťce desky lineární průběh. Smyková napětí  $\tau_{xz}$  a  $\tau_{yz}$ , která vznikají v důsledku ohybu desky, mají průběh parabolický. Vztahy pro výpočet smykových napětí  $\tau_{xz}$  a  $\tau_{yz}$  lze odvodit integrací Cauchyho rovnic v mezích od  $z$  do  $h/2$ :

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \int_z^{h/2} \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dz, \\ \tau_{zy} &= \int_z^{h/2} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dz.\end{aligned}\tag{2.9}$$

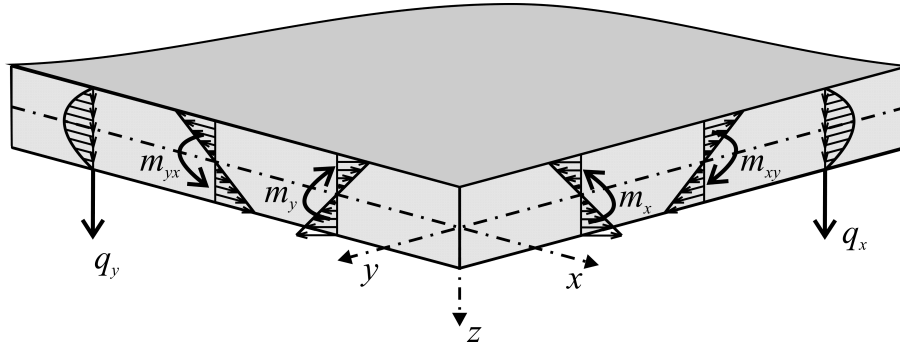
Dosazením vztahů pro napětí (2.8) a úpravou lze smyková napětí  $\tau_{xz}$  a  $\tau_{yz}$  vyjádřit ve tvaru:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right] \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w), \\ \tau_{zy} &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right] \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w).\end{aligned}\tag{2.10}$$

### 2.3.2 Vnitřní síly

Vnitřní síly na desce se vztahují na jednotku šířky příslušného svislého řezu deskou, jsou proto označovány jako měrné vnitřní síly. Fyzikální rozměr měrných ohybových a kroutících momentů je Nm/m a měrných posouvajících sil N/m. Jejich kladný směr je znázorněn na obr. 2.2.

Měrné vnitřní síly jsou definovány integrací po tloušťce desky. Dosazením vztahů



Obr. 2.2: Kladné směry vnitřních sil

(2.8) a (2.10) lze odvodit:

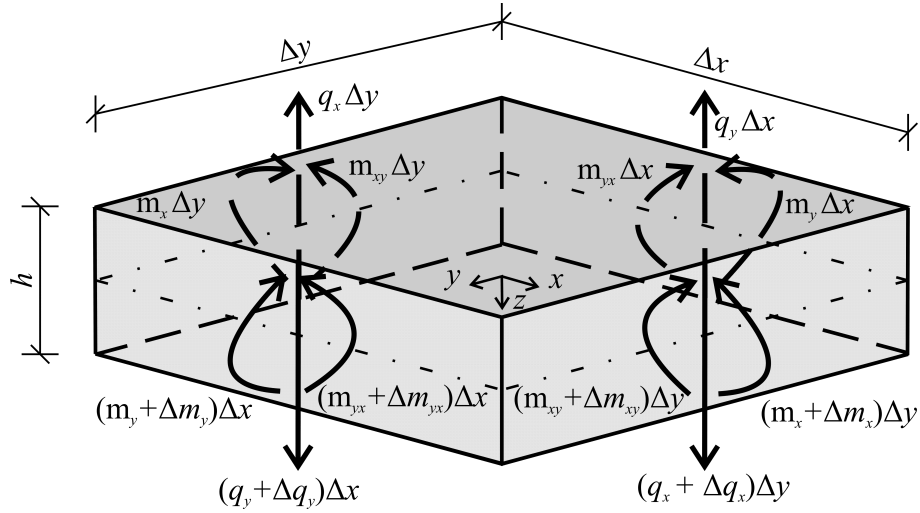
$$\begin{aligned}
 m_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\
 m_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \, dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\
 q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \, dz = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\
 q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \, dz = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right), \\
 m_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z \, dz = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Veličinou  $D$  je označována desková tuhost. Její fyzikální rozměr je Nm. Pro výpočet deskové tuhosti platí:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}. \tag{2.12}$$

### 2.3.3 Základní desková rovnice

Odvození základní deskové rovnice vychází z podmínek rovnováhy sestavených na diferenciálním elementu o rozměrech  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  a tloušťce  $h$ , což je znázorněno na obr. 2.3. Na uvedeném elementu lze sestavit momentové podmínky rovnováhy k osám  $x$  a  $y$  a silovou podmínku rovnováhy ve směru osy  $z$ .



Obr. 2.3: Element desky

$$(m_x - m_x - \Delta m_x) \Delta y + (m_{xy} - m_{xy} - \Delta m_{xy}) \Delta x + (q_x - q_x - \Delta q_x) \frac{\Delta x}{2} \Delta y = 0, \quad (2.13a)$$

$$(m_y - m_y - \Delta m_y) \Delta x + (m_{yx} - m_{yx} - \Delta m_{yx}) \Delta y + (q_y - q_y - \Delta q_y) \frac{\Delta y}{2} \Delta x = 0, \quad (2.13b)$$

$$(-q_x + q_x + \Delta q_x) \Delta y + (-q_y + q_y + \Delta q_y) \Delta x + p \Delta x \Delta y = 0. \quad (2.13c)$$

Úpravou podmínek rovnováhy a zanedbáním členů 3. řádu lze získat vztahy:

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}, \quad (2.14a)$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}, \quad (2.14b)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0. \quad (2.14c)$$

Dosazením vztahů (2.14a) a (2.14b) do odvozeného výrazu (2.14c) lze vytvořit rovnici:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p. \quad (2.15)$$

Základní deskovou rovnicí lze získat dosazením vztahů (2.11) do odvozené rovnice (2.15):

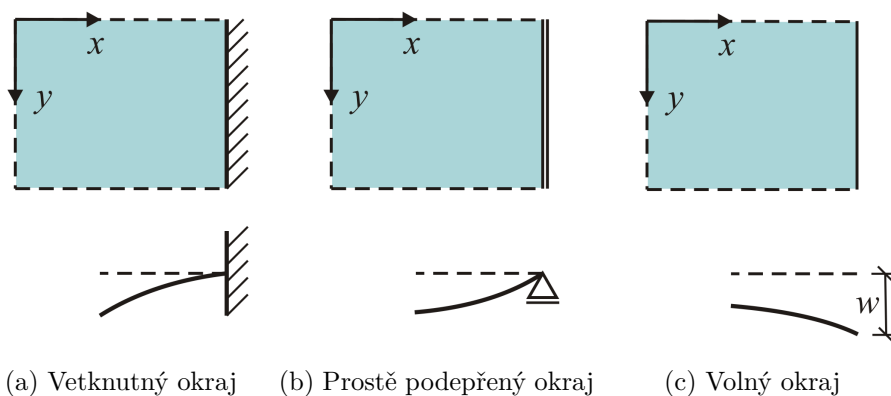
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}. \quad (2.16)$$

Zkrácená desková rovnice pomocí Laplaceova operátoru  $\Delta$  má tvar:

$$\Delta \Delta w(x, y) = \frac{p(x, y)}{D}. \quad (2.17)$$

## 2.4 Okrajové podmínky

Základní rovnice desek je nehomogenní diferenciální rovnice 4. řádu, pro jejíž řešení jsou potřebné okrajové podmínky, které souvisí s podepřením desky. Základní typy podepření okrajů desky jsou znázorněny na obr. 2.4.



Obr. 2.4: Typy podepření desky

### 2.4.1 Vetknutý okraj

Pro okraj vetknuté desky (obr. 2.4a) se definují geometrické okrajové podmínky ve formě nulového průhybu ve vetknutí a nulového pootočení normály střednicové plochy v rovině kolmé k okraji. Pro okraj rovnoběžný s osou  $y$  platí:

$$w = 0, \quad \vartheta_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (2.18)$$

Z první podmínky plyne  $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial w^i}{\partial y^i} = 0$  a spojením s druhou podmínkou lze vyvodit  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$ , což se projeví ve zjednodušení vztahů pro výpočet vnitřních síl. Pro upravené vnitřní síly bude platit:

$$m_{xy} = 0, \quad m_y = -D\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mu m_x. \quad (2.19)$$

## 2.4.2 Prostě podepřený okraj

Na prostě podepřeném okraji (obr. 2.4b) jsou definované dvě smíšené okrajové podmínky, a to geometrická a statická. Geometrická okrajová podmínka zavádí nulový průhyb na prostě podepřeném okraji desky a statická podmínka zavádí nulový měrný ohybový moment na okraji prostě podepřené desky. Pro okraj rovnoběžný s osou  $y$  platí:

$$w = 0, \quad m_x = 0. \quad (2.20)$$

Tyto smíšené podmínky se dají upravit do geometrické podoby, a to ve tvaru:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.21)$$

Vzhledem k uvážení, že na prostě podepřeném okraji desky vznikají pouze svislé síly, musí být také kroutící moment roven nule. Pro splnění této podmínky je potřeba kroutící moment nahradit ekvivalentní dvojicí sil, která vyvodí stejné zatížení. Takto vzniklé svislé síly lze přičíst k původním reakcím. Pro ekvivalentní síly vzniklé z kroutícího momentu platí:

$$\Delta q_x = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{k(x, y + \Delta y) - k(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial k}{\partial y}. \quad (2.22)$$

Upravená posouvající síla pak bude mít tvar:

$$\bar{q}_x = q_x + \frac{\partial k}{\partial y} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]. \quad (2.23)$$

Součet upravených posouvajících sil se však nerovná zatížení působícímu na desce v důsledku přičtení sil z kroutících momentů. V rozích desky se dvojice sil nevyruší,

ale sčítají. Pokud je deska na jednom okraji prostě podepřená a sousední okraj je vetknutý, síly se vyruší. U prostě podepřené desky, která je podepřená po celém obvodě, dochází v důsledku této skutečnosti k nadzvedávání rohů desky.

### 2.4.3 Volný okraj

Pro volný okraj desky (obr. 2.4c) se definují tři statické podmínky. Ohybový moment, posouvající síla i kroutící moment je roven nule:

$$m_x = 0, \quad q_x = 0, \quad k = 0. \quad (2.24)$$

Podmínku pro posouvající sílu a kroutící moment lze shrnout do jedné podmínky obdobně jako je popsáno v kap. 2.4.2. Pro volný okraj pak budou platit dvě statické podmínky. Ohybový moment a dolněná posouvající síla budou rovny nule:

$$m_x = 0, \quad \bar{q}_x = 0. \quad (2.25)$$



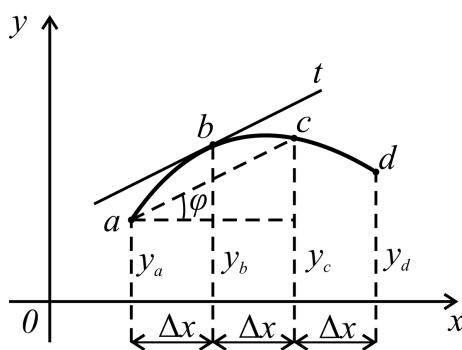
### 3 METODA SÍTÍ

První vybranou metodou pro řešení tenkých desek je metoda sítí. Tato metoda je popsána například v publikacích [8], [13], [21]. Podstatou metody sítí je úprava diferenciální deskové rovnice (2.16) převedením derivací na difference funkčních hodnot (viz kap. 3.1). Upravenou deskovou rovnicí je třeba řešit v každém uzlu předem definované sítě. Řešení vede na soustavu lineárních rovnic, kde neznámými jsou průhyby v uzlech sítě. Na základě vypočtených průhybů lze určit vnitřní síly ve zvolených uzlech sítě. Z podstaty řešení metody sítí vyplývá, že vnitřní síly a průhyby lze vypočítat jen ve zvolených uzlech. Pro určení hodnot vnitřních sil a průhybů mimo uzly sítě je nutné použít lineární nebo nelineární interpolaci.

#### 3.1 Převod derivací na difference funkčních hodnot

##### 3.1.1 Odvození první derivace

Podle [21] je převod derivací na difference funkčních hodnot založen na proložení sousedních uzlů sítě polynomem. Derivaci hledané funkce lze nahradit derivací zvoleného polynomu.



Obr. 3.1: Odvození derivace

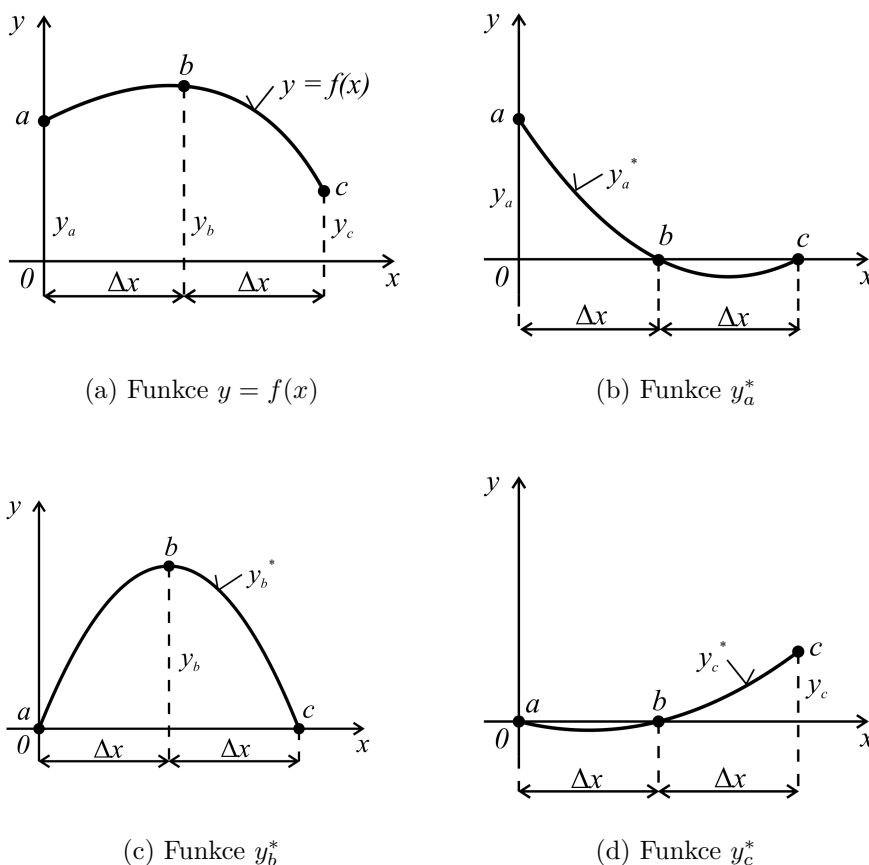
Na obr. 3.1 je znázorněn průběh funkce  $y = f(x)$ , která je dána pořadnicemi  $y_a, y_b, y_c, y_d$ . Uzly  $a, b, c, d$  mají mezi sebou stejné vzdálenosti  $\Delta x$ . Platí-li, že funkce  $y = f(x)$  i její první a druhá derivace je spojitá a vzdálenost  $\Delta x$  mezi uzly

je dostatečně malá, lze neznámou funkci  $y = f(x)$  nahradit kvadratickou parabolou. Pro kvadratickou parabolu obecně platí, že tečna  $t$  v uzlu  $b$  je rovnoběžná s tětivou  $\overline{ac}$ . Na základě uvedených tvrzení lze derivaci  $\frac{dx}{dy}$  v uzlu  $b$  vyjádřit pomocí funkčních hodnot v okolí bodu  $b$ . Pro derivaci  $\frac{dx}{dy}$  platí:

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_b \approx \tan \varphi = \frac{1}{2\Delta x} (y_c - y_a). \quad (3.1)$$

### 3.1.2 Odvození druhé derivace

Odvození pro druhou derivaci vychází opět z proložení bodů  $y_a, y_b, y_c$  funkcí  $y = f(x)$ , znázorněno na obr. 3.2a. Funkci  $y = f(x)$  je potřeba nahradit kvadratickou parabolou  $y^*$ , která prochází body  $y_a, y_b, y_c$ . Rovnice funkce  $y^*$  lze odvodit na základě Lagrangeovy interpolace.



Obr. 3.2: Odvození druhé derivace

Kvadratickou parabolou  $y_a^*$  znázorněnou na obr. 3.2b, která prochází bodem  $a$  a v ostatních bodech má nulové funkční hodnoty, lze vyjádřit ve tvaru:

$$y_a^* = y_a \frac{(x - \Delta x)(x - 2\Delta x)}{(0 - \Delta x)(0 - 2\Delta x)}. \quad (3.2)$$

Pro funkce kvadratických parabol  $y_b^*$  a  $y_c^*$  znázorněné na obr. 3.2c a obr. 3.2d, které mají nenulové funkční hodnoty v bodech  $y_b, y_c$  lze obdobně vyjádřit:

$$y_b^* = y_b \frac{(x - 0)(x - 2\Delta x)}{(\Delta x - 0)(\Delta x - 2\Delta x)}, \quad (3.3)$$

$$y_c^* = y_c \frac{(x - 0)(x - \Delta x)}{(2\Delta x - 0)(2\Delta x - \Delta x)}. \quad (3.4)$$

Kvadratickou parabolou  $y^*$ , která nahrazuje funkci  $y = f(x)$ , lze získat sečtením tří odvozených parabol (3.2),(3.3) a (3.4). Pro funkci  $y^*$  platí:

$$y^* = \frac{1}{2\Delta x^2} \left[ y_a (x^2 - 3\Delta x \cdot x + 2\Delta x^2) - 2y_b (x^2 - 2\Delta x \cdot x) + y_c (x^2 - \Delta x \cdot x) \right]. \quad (3.5)$$

Druhou derivaci funkce  $y = f(x)$  lze přibližně vyjádřit jako druhou derivaci odvozené kvadratické paraboly (3.5). Pro druhou derivaci v bodě  $b$  platí:

$$\left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_b \approx \left( \frac{d^2 y^*}{dx^2} \right)_b = y_a \frac{2}{2\Delta x^2} - y_b \frac{2}{\Delta x^2} + y_c \frac{2}{2\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} (y_a - 2y_b + y_c). \quad (3.6)$$

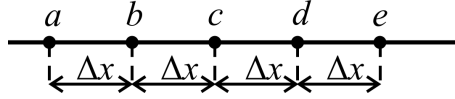
### 3.1.3 Odvození vyšších derivací

Odvození třetí a vyšších derivací lze provést obdobně jako u odvození první (3.1.1) a druhé derivace (3.1.2). Tento způsob je však pro vyšší derivace složitý a je možné je odvodit snáze, například s využitím postupného vyjadřování pomocí již odvozených derivací. Třetí derivaci lze rozepsat jako první derivaci druhé derivace:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right). \quad (3.7)$$

Při substituci  $z$  za druhou derivaci  $\frac{d^2y}{dx^2}$  lze psát:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dz}{dx}. \quad (3.8)$$



Obr. 3.3: Odvození třetí derivace

Při použití odvozeného vztahu (3.1) je možné třetí derivaci v bodě  $c$  znázorněném na obr. 3.3, zapsat ve tvaru:

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_c = \left(\frac{dz}{dx}\right)_c = \frac{1}{2\Delta x} (z_d - z_b). \quad (3.9)$$

Za proměnné  $z_b, z_d$  je nutné dosadit odvozené výrazy pro druhé derivace (3.6). Pro třetí derivaci v bodě  $c$  bude po úpravě platit vztah:

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_c = \frac{1}{2\Delta x^3} (-y_a + 2y_b - 2y_d + y_e). \quad (3.10)$$

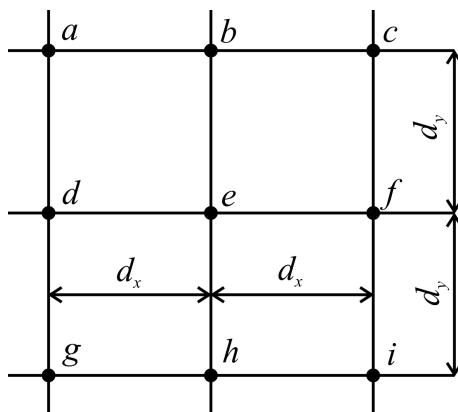
Čtvrtou derivaci lze odvodit jako druhou derivaci druhé derivace. Po úpravě bude pro čtvrtou derivaci v bodě  $c$  platit:

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_c = \frac{1}{\Delta x^4} (y_a - 4y_b + 6y_c - 4y_d + y_e). \quad (3.11)$$

### 3.1.4 Parciální derivace

Pro obyčejné parciální derivace platí podobné vztahy, jen s úpravou označení. Vzdálenost mezi sousedními uzly ve směru osy  $x$  je označována  $d_x$  a ve směru osy  $y$  je označována  $d_y$ . Pro síť znázorněnou na obr. 3.4 platí pro uzel  $e$ :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_e = \frac{1}{2d_x} (w_d - w_f). \quad (3.12)$$



Obr. 3.4: Odvození parciálních derivací

Smíšené parciální derivace lze odvodit na základě uvedeného vztahu:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (3.13)$$

Využitím substituce  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = G$  lze výraz (3.13) upravit podle obr. 3.4 na tvar:

$$\left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_e = \left( \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right)_e = \frac{1}{d_x^2} (G_d - 2G_e + G_f). \quad (3.14)$$

Pro proměnné  $G_d$ ,  $G_e$  a  $G_f$  platí následující vztahy vytvořené s odkazem na obr. 3.4:

$$\begin{aligned} G_d &= \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_d = \frac{1}{d_y^2} (w_a - 2w_d + w_g), \\ G_e &= \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_e = \frac{1}{d_y^2} (w_b - 2w_e + w_h), \\ G_f &= \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_f = \frac{1}{d_y^2} (w_c - 2w_f + w_i). \end{aligned} \quad (3.15)$$

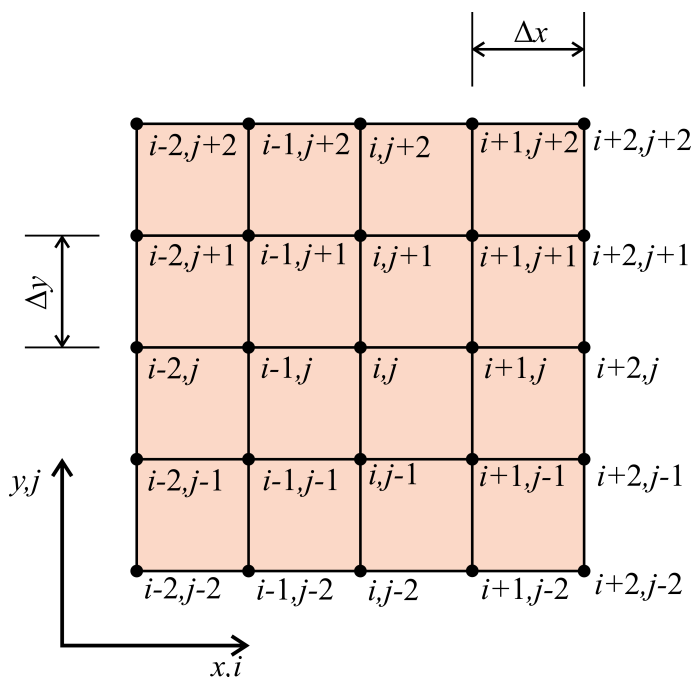
Úpravou lze získat pro smíšenou parciální derivaci vztah:

$$\left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_e = \frac{1}{d_x^2 d_y^2} (w_a - 2w_d + w_g - 2w_b + 4w_e - 2w_h + w_c - 2w_f + w_i). \quad (3.16)$$

## 3.2 Desková rovnice po dosazení diferenčních vztahů

Principem metody je úprava základní deskové rovnice (2.16) pomocí odvozených diferenčních vztahů (3.11) a (3.16). Při obecném vyjádření uzlu sítě označeném  $i, j$  znázorněném na obr. 3.5 a dosazením  $\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = \alpha^2$  a  $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = \beta^2$  lze základní deskovou rovnici upravit do podoby:

$$\begin{aligned}
 & w_{i,j} (8 + 6\alpha^2 + \beta^2) + \\
 & -4 [w_{i+1,j} (1 + \beta^2) + w_{i-1,j} (1 + \beta^2) + w_{i,j+1} (1 + \alpha^2) + w_{i,j-1} (1 + \alpha^2)] + \\
 & + 2 (w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}) + \\
 & + \alpha^2 (w_{i,j+2} + w_{i,j-2}) + \beta^2 (w_{i+2,j} + w_{i-2,j}) = \frac{P_{i,j} \Delta x^2 \Delta y^2}{D}.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$



Obr. 3.5: Znázornění označování uzlů sítě

Pro složky měrných vnitřních sil lze obdobnou úpravou převést vztahy (2.11) do podoby:

$$m_x = -D \left( \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mu \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right), \tag{3.18}$$

$$m_y = -D \left( \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \mu \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right), \quad (3.19)$$

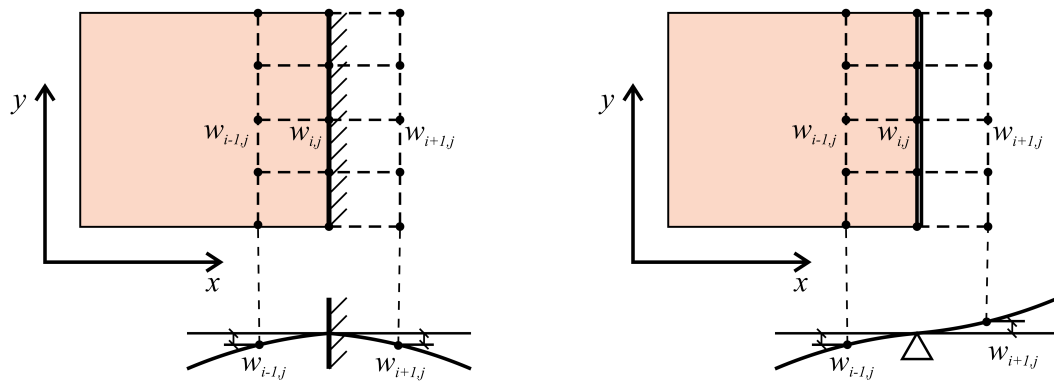
$$m_{xy} = -D (1 - \mu) \left[ \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \right], \quad (3.20)$$

$$q_x = -D \left[ \left( \frac{w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-2,j}}{2\Delta x^3} \right) + \left( \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}}{2\Delta y^2 \Delta x} \right) \right], \quad (3.21)$$

$$q_y = -D \left[ \left( \frac{w_{i,j+2} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} - w_{i,j-2}}{2\Delta y^3} \right) + \left( \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j+1} - w_{i-1,j-1}}{2\Delta x^2 \Delta y} \right) \right]. \quad (3.22)$$

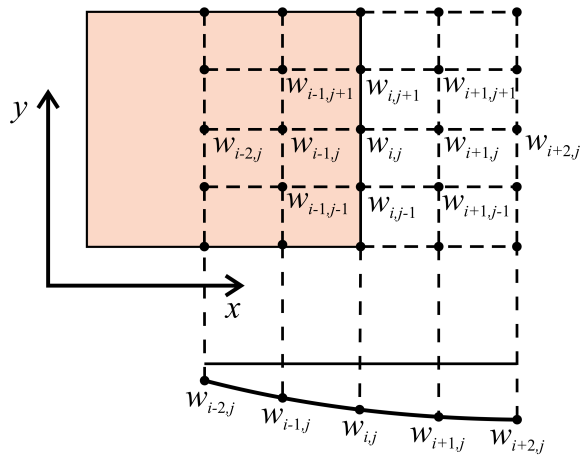
### 3.3 Okrajové podmínky s využitím diferenčních vztahů

Při výpočtu nosných desek metodou sítí je nutné v každém uzlu sítě řešit odvozenou deskovou rovnici (3.17). Při řešení uzlů nacházejících se na krajích desky je potřeba počítat také s uzly ležícími za okrajem desky. Průhyby, které se nacházejí mimo desku, by rozšířily počet neznámých. Pro řešení je nutné sestavení stejného počtu lineárních rovnic jako je počet neznámých průhybů. Průhyby, které se nacházejí mimo desku, lze vyjádřit na základě okrajových podmínek. Pro jednotlivé typy podepření desky (obr. 3.6) platí:



(a) Vetknutý okraj

(b) Prostě podepřený okraj



(c) Volný okraj

Obr. 3.6: Typy podepření desky

### 3.3.1 Vetknutý okraj

Ve vetknutí (obr. 3.6a) je průhyb nulový a dále lze pro vetknutý okraj rovnoběžný s osou  $y$  vyjádřit s odkazem na odvozený vztah (2.19) závislost průhybu  $w_{i+1,j}$  a  $w_{i-1,j}$ :

$$\frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow w_{i+1,j} = w_{i-1,j}, \quad (3.23)$$

$$w_{i,j} = 0. \quad (3.24)$$



### 3.3.2 Prostě podepřený okraj

Průhyb na prostě podepřeném okraji desky (obr. 3.6b) je roven nule. Další okrajovou podmínku lze odvodit na základě nulového měrného ohybového momentu k ose  $x$  ze vztahu (2.21). Pro prostě podepřený okraj platí:

$$w_{i,j} = 0, \quad (3.25)$$

$$\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{2\Delta x^2} = 0 \Rightarrow w_{i+1,j} = -w_{i-1,j}. \quad (3.26)$$

### 3.3.3 Volný okraj

Na volném okraji (obr. 3.6c) je měrný ohybový moment kolem osy  $x$  i doplněna posouvající síla rovna nule. Ze vztahů (2.11) lze odvodit:

$$m_x = -D \left( \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \mu \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right). \quad (3.27)$$

Při rovnosti  $\Delta x = \Delta y$  platí:

$$w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j} + \mu (w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}) = 0. \quad (3.28)$$

Druhou okrajovou podmínku lze odvodit z doplněné posouvající síle rovnající se nule. Pro  $\Delta x = \Delta y$  platí:

$$\begin{aligned} & w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-2,j} + \\ & + (2 - \mu) (w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} + 2w_{i-1,j} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}) = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

## 3.4 Postup při výpočtu nosné desky metodou sítí

Základním krokem při výpočtu nosné desky metodou sítí je vytvoření sítě (obr. 3.5), která musí lícovat s okrajem desky. Uzly sítě představují místa vyšetřovaných hodnot

průhybů, které jsou neznámými. Průhyby se označí indexy. Pro zjednodušení výpočtu lze využít symetrii nebo antisymetrii tvaru, podepření a zatížení desky. Počet neznámých průhybů se zredukuje.

V každém uzlu sítě je řešena diferenční rovnice desek (3.17). Pro výpočet neznámých průhybů je potřeba sestavit stejný počet lineárních rovnic jako je počet neznámých průhybů. Při řešení je nutné využít okrajové podmínky (3.3), aby bylo možné vyjádření průhybů mimo desku, které jsou potřebné pro dosazení do diferenční rovnice desek.

Pravá strana diferenční rovnice představuje zatížení desky. Spojité zatížení desky je nutné převést na zatížení bodové působící v uzlech sítě. Hodnota uzlového břemene je ekvivalentní plošnému zatížení působícímu na ploše obdelníku  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  se středem v daném uzlu. Při převodu spojitého zatížení na silové zatížení do uzlů je nutné zachování rovnosti mezi součtem uzlových břemen a výslednicí celkového zatížení.

Řešením soustavy lineárních rovnic lze získat hodnoty neznámých průhybů. Z průhybů lze určit velikosti vnitřních sil na základě vztahů (3.18), (3.19), (3.20), (3.21) a (3.22).

## 3.5 Řešení příkladu metodou sítí

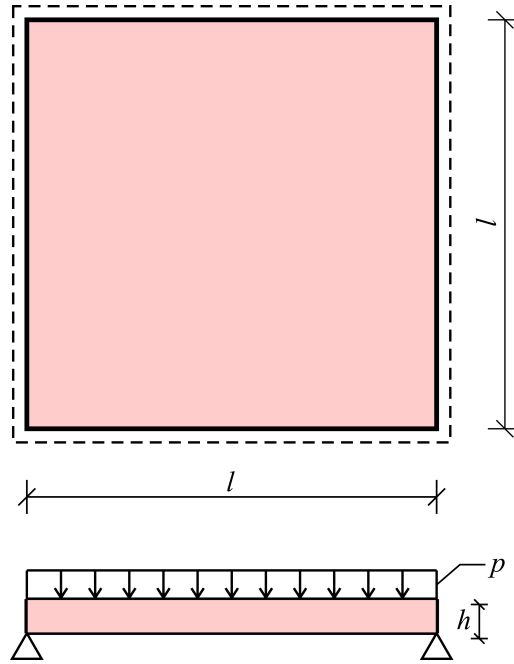
Metoda sítí je zde aplikovaná na konkrétním řešeném příkladu.

### 3.5.1 Zadání příkladu

Řešena bude čtvercová deska o délce  $l$  a tloušťce  $h$ , která je prostě podepřená po celém svém obvodu. Deska je vyrobena z oceli S235 a zatížena spojitým zatížením  $p$  na celé své ploše. Zadání příkladu je znázorněno na obr.3.7. Vstupní parametry desky jsou uvedeny v tab. 3.1.

### 3.5.2 Řešení příkladu

Na desce byla vytvořena síť se vzdáleností sousedních uzlů 1 m ve směru osy  $x$  i ve směru osy  $y$ . Při řešení byla využita symetrie čtvercové desky, včetně diago-



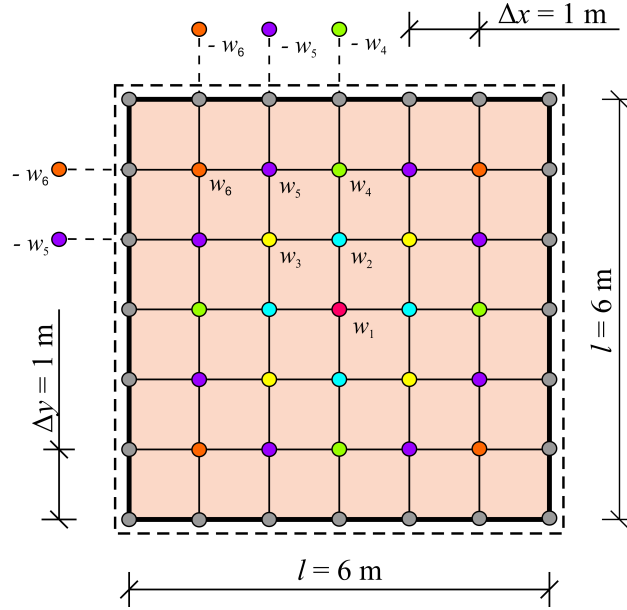
Obr. 3.7: Statické schéma

Název proměnné	Hodnota proměnné
Délka	$l = 6 \text{ m}$
Tloušťka	$h = 0,04 \text{ m}$
Spojité zatížení	$p = 8 \text{ kN/m}^2$
Modul pružnosti	$E = 210000 \text{ MPa}$
Poissonův součinitel příčné koncentrace	$\nu = 0,3$

Tab. 3.1: Vstupní parametry

nální, čímž se počet neznámých průhybů redukoval na 6. Vytvořená síť a označení neznámých průhybů je znázorněno na obr. 3.8.

Na základě vztahu (3.17) byla pro každý uzel sestavena lineární rovnice, kde  $\alpha^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 = 1$  a  $\beta^2 = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 1$ . Při sestavování rovnic pro uzly  $w_2$  a  $w_3$  vstupují do výpočtu průhyby na okraji desky. Jelikož se jedná o prostě podepřenou desku, jsou tyto průhyby rovny nule. Při sestavování rovnic pro uzly  $w_4$ ,  $w_5$  a  $w_6$  je potřeba použít i uzly mimo plochu desky. Pro zjištění hodnot abstraktních průhybů je nutné využít okrajové podmínky. Pro prostě podepřenou desku platí již dříve odvozený vztah (3.26), podle kterého je hodnota abstraktního průhybu za okrajem desky rovna průhybu uzlu v desce, který je ve stejné vzdálenosti od okraje desky jako uzel mimo desku. Aplikace tohoto předpokladu je znázorněna na obr. 3.8. Sestavené



Obr. 3.8: Vygenerovaná síť na zadané desce

lineární rovnice budou mít po úpravě tvar:

$$\begin{aligned}
 w_1 : 20w_1 - 32w_2 + 8w_3 + 4w_4 &= \frac{8}{D}, \\
 w_2 : -8w_1 + 25w_2 - 16w_3 - 8w_4 + 6w_5 &= \frac{8}{D}, \\
 w_3 : 2w_1 - 16w_2 + 22w_3 + 4w_4 - 16w_5 + 2w_6 &= \frac{8}{D}, \\
 w_4 : w_1 - 8w_2 + 4w_3 + 19w_4 - 16w_5 + 2w_6 &= \frac{8}{D}, \\
 w_5 : 3w_2 - 8w_3 - 8w_4 + 22w_5 - 8w_6 &= \frac{8}{D}, \\
 w_6 : 2w_3 + 2w_4 - 16w_5 + 18w_6 &= \frac{8}{D},
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

kde  $D$  je desková tuhost a podle vzorce (2.12) je její hodnota rovna  $D = 1230,77 \text{ kNm}$ .

Řešení úlohy spočívá ve výpočtu soustavy 6 lineárních rovnic o 6 neznámých. Neznámé představují hledané hodnoty průhybů. V tab. 3.2 jsou uvedeny výsledné hodnoty průhybů podle označení na obr. 3.8. Pro znázornění přesnosti metody sítí jsou uvedeny také hodnoty průhybů získané pomocí komerčního softwaru Scia Engineer [19] při zadání stejných vstupních parametrů.

Z vypočítaných hodnot průhybů lze podle vztahů (3.21), (3.22), (3.18), (3.19) a (3.20) vypočítat vnitřní síly na zadané desce. Uvedené vzorce nevystihují hodnoty

měrných posouvajících sil v pravoúhlých rozích, které jsou zde rovny nule. Obdobně je zobrazená hodnota kroutících momentů v pravoúhlých rozích, která je rovna dvojnásobku vypočítané hodnoty podle uvedeného vzorce.

V následujících tabulkách (tab. 3.3 až tab. 3.7) jsou uvedeny výsledné hodnoty měrných vnitřních sil v uzlech vygenerované sítě. Vykreslení průhybu a měrných vnitřních sil je uvedeno v kap. 4.3.2.

Uzel	Metoda sítí	Scia Engineer	Rozdíl
$w_1$	34,103 mm	34,268 mm	0,48 %
$w_2$	29,885 mm	30,002 mm	0,39 %
$w_3$	26,203 mm	26,284 mm	0,31 %
$w_4$	17,779 mm	17,790 mm	0,06 %
$w_5$	15,615 mm	15,617 mm	0,01 %
$w_6$	9,355 mm	9,338 mm	0,18 %

Tab. 3.2: Hodnoty průhybů

Měrný ohybový moment $m_x$ [kNm/m]						
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	4,95	6,90	7,42	6,90	4,95	0,00
0,00	7,70	11,05	11,97	11,05	7,70	0,00
0,00	8,58	12,43	13,50	12,43	8,58	0,00
0,00	7,70	11,05	11,97	11,05	7,70	0,00
0,00	4,95	6,90	7,42	6,90	4,95	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 3.3: Měrný ohybový moment  $m_x$

Měrný ohybový moment $m_y$ [kNm/m]						
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	4,95	7,70	8,58	7,70	4,95	0,00
0,00	6,90	11,05	12,43	11,05	6,90	0,00
0,00	7,42	11,97	13,50	11,97	7,42	0,00
0,00	6,90	11,05	12,43	11,05	6,90	0,00
0,00	4,95	7,70	8,58	7,70	4,95	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 3.4: Měrný ohybový moment  $m_y$

Měrný kroutící moment $m_{xy}$ [kNm/m]						
-8,06	-6,73	-3,63	0,00	3,63	6,73	8,06
-6,73	-5,64	-3,07	0,00	3,07	5,64	6,73
-3,63	-3,07	-1,70	0,00	1,70	3,07	3,63
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3,63	3,07	1,70	0,00	-1,70	-3,07	-3,63
6,73	5,64	3,07	0,00	-3,07	-5,64	-6,73
8,06	6,73	3,63	0,00	-3,63	-6,73	-8,06

Tab. 3.5: Měrný kroutící moment  $m_{xy}$

Měrné posouvající síly $q_x$ [kN/m]						
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7,62	5,62	2,35	0,00	-2,35	-5,62	-7,62
11,23	8,50	3,77	0,00	-3,77	-8,50	-11,23
12,31	9,38	4,23	0,00	-4,23	-9,38	-12,31
11,23	8,50	3,77	0,00	-3,77	-8,50	-11,23
7,62	5,62	2,35	0,00	-2,35	-5,62	-7,62
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 3.6: Měrné posouvající síly  $q_x$

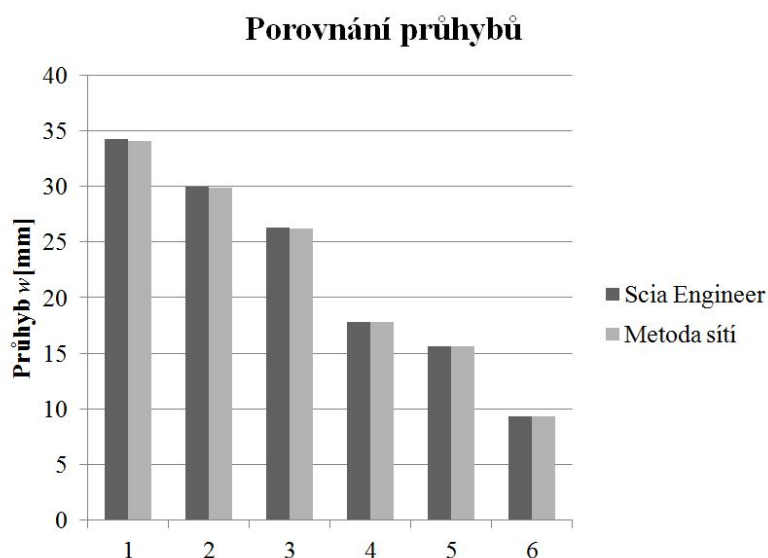
Měrné posouvající síly $q_y$ [kN/m]						
0,00	7,62	11,23	12,31	11,23	7,62	0,00
0,00	5,62	8,50	9,38	8,50	5,62	0,00
0,00	2,35	3,77	4,23	3,77	2,35	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	2,35	3,77	4,23	3,77	2,35	0,00
0,00	5,62	8,50	9,38	8,50	5,62	0,00
0,00	-7,62	-11,23	-12,31	-11,23	-7,62	0,00

Tab. 3.7: Měrné posouvající síly  $q_y$

Nepřesnosti metody sítí jsou dány nahrazením derivací diferencemi. A také prodloužením desky za její okraj a využitím antisymetrických abstraktních hodnot průhybů. Při odvozování byla předpokládána spojitost derivované funkce i jejích derivací, čehož není dosaženo, jelikož při využití antisymetrie za okrajem desky hodnota zatížení mění skokem znaménko.

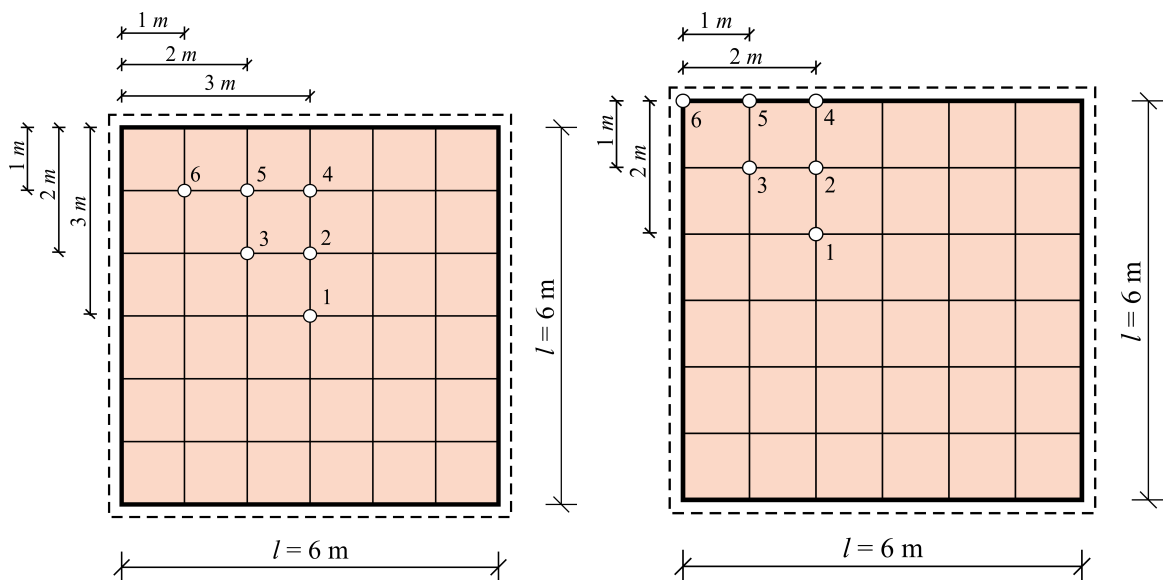
### 3.5.3 Porovnání s komerčním softwarem Scia Engineer

Hodnoty získané řešenou metodou jsou zde porovnány s hodnotami, které lze získat na základě komerčního softwaru Scia Engineer. Základním kritériem pro srovnání jsou uváženy hodnoty průhybu. Získané hodnoty průhybů metodou sítí a softwarem Scia Engineer se liší minimálně, jak je znázorněno na obr. 3.9. Označení vybraných uzlů desky pro porovnání je znázorněno na obr. 3.10. Pro výstižnější znázornění rozdílů je uveden graf vyjadřující procentuální rozdíl výsledných hodnot průhybů (obr. 3.11).

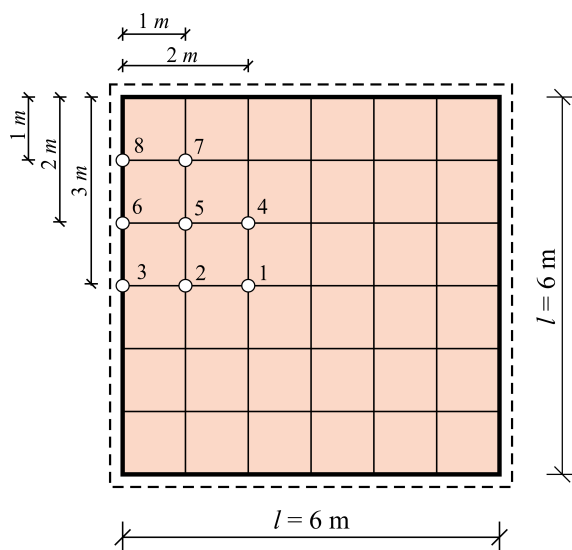


Obr. 3.9: Porovnání průhybů získanými metodou sítí a programem Scia Engineer

Hodnoty vnitřních sil se oproti hodnotám průhybů liší v porovnání se softwarem Scia Engineer výrazněji. Srovnání výsledků je uvedeno v grafech uvedených na obr. 3.12 až obr. 3.14.



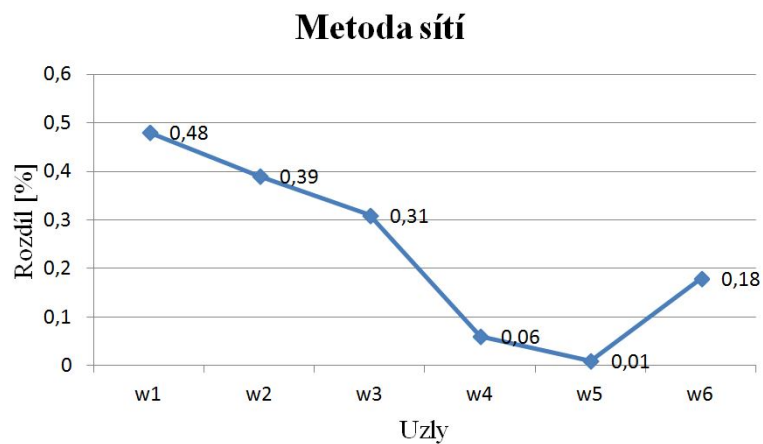
(a) Označení vybraných uzlů pro porovnání průhybů a ohybových momentů (b) Označení vybraných uzlů pro porovnání měrných kroutících momentů



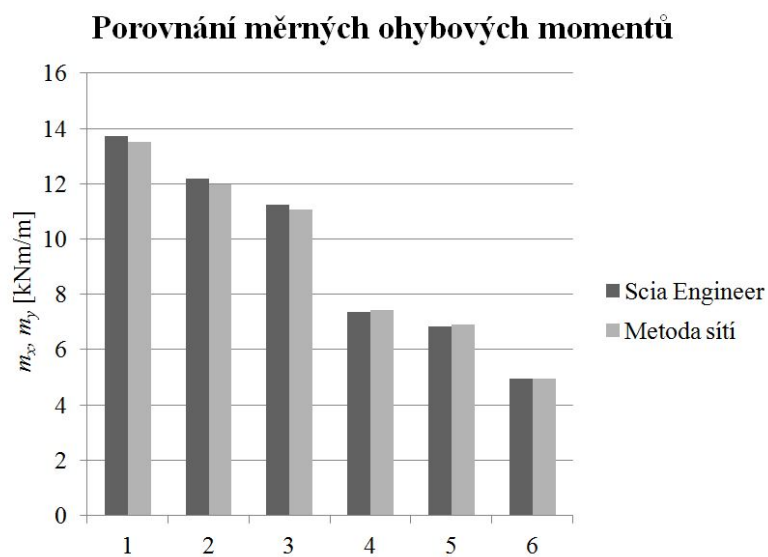
(c) Označení vybraných uzlů pro porovnání měrných posouvajících sil

Obr. 3.10: Označení vybraných uzlů pro porovnání

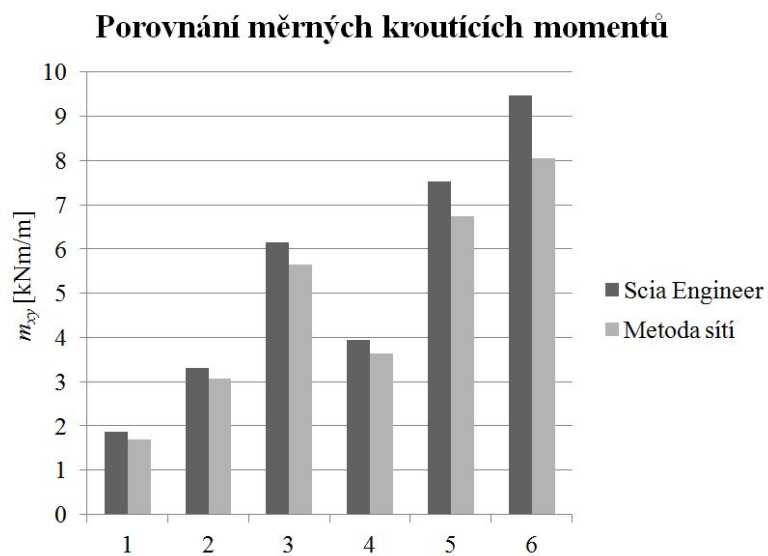




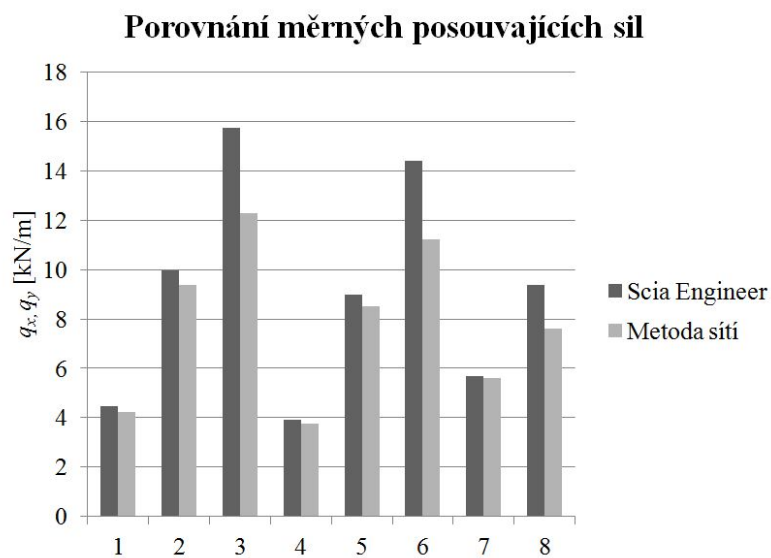
Obr. 3.11: Procentuální porovnání průhybů získaných metodou sítí a programem Scia Engineer



Obr. 3.12: Porovnání měrných ohybových momentů získaných metodou sítí a programem Scia Engineer



Obr. 3.13: Porovnání měrných kroučících momentů získaných metodou sítí a programem Scia Engineer



Obr. 3.14: Porovnání měrných posouvajících sil získaných metodou sítí a programem Scia Engineer

## 4 RITZOVA METODA

### 4.1 Variační úlohy

Ritzovo řešení tenkých desek patří mezi variační úlohy, které jsou podrobněji rozepsány v publikaci [15]. Principem řešení variačních úloh je využití variační funkce, která nabývá tvar:

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i f_i(x), \quad (4.1)$$

kde  $f_i(x)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) jsou funkce, které musí být spojité v hodnotách i ve svých derivacích v celém intervalu  $x \in \langle a, b \rangle$  a  $a_i$  jsou konstanty. Funkce  $f_{(i)}$  musí vyhovovat okrajovým podmínkám při jakýchkoliv hodnotách konstant  $a_i$ .

Za variací funkce se označují nekonečně malé změny průběhu funkce, ke kterým dojde při nekonečně malých změnách konstant  $a_i$ . Variací funkce  $f = f(x)$  i jejích derivací  $f', f'', \dots$  dojde ke změně hodnoty funkcionálu, což je označováno jako variace funkcionálu. Funkcionál představuje funkci funkcí  $\Pi = \int_a^b F(f, f', f'', \dots) dx$ .

Principem variačních úloh je nalezení průběhu funkce  $f = f(x)$  a jejích derivací  $f', f'', \dots$ , při kterém bude mít funkcionál extrémní hodnotu. Extrémní hodnoty nabývá funkcionál v případě, že všechny parciální derivace  $\Pi$  podle všech proměnných  $a_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) jsou rovny nule:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0. \quad (4.2)$$

#### 4.1.1 Lagrangeův (deformační) princip

K řešení nosných desek se využívá deformační variační princip označovaný Lagrangeův. Základem Lagrangeova principu je nalezení minima funkcionálu:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e, \quad (4.3)$$

kde  $\Pi_i$  je potenciální energie vnitřních sil a  $\Pi_e$  je potenciální energie vnějších sil nosné tenké desky. Odvození Lagrangeova principu zapsaného vztahem (4.3) je uvedeno

například v publikaci [13].

## 4.2 Ritzovo řešení

Ritzova metoda je zpracována v publikacích [3], [4], [13], [23], [24] nebo [25]. Základem metody je práce s vnitřní a vnější potenciální energií tenké desky. Podle [13] lze potenciální energii tělesa vyjádřit pomocí práce konané vnějšími silami na povrchu tělesa:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{yz} \tau_{yz} + \gamma_{zx} \tau_{zx}) . \quad (4.4)$$

Po úpravě podle Kirchhoffových předpokladů řešení tenkých desek (viz kap 2.2) lze výraz pro tělesa (4.4) upravit dosazením  $\epsilon_z = 0$ ,  $\gamma_{yz} = 0$ ,  $\gamma_{xy} = 0$  do následujícího tvaru:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int \int \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}) \, dx \, dy \, dz . \quad (4.5)$$

Pro Ritzovo řešení je potřeba potenciální energii (4.5) upravit dosazením vztahů pro napětí vyjádřená pomocí derivací průhybové plochy (2.7). Podle [24] pro desky po celém svém obvodu prostě podepřené nebo vetknuté platí následující zjednodušený tvar pro potenciální energii vnitřních sil:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} D \int \int_S \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \, dx \, dy , \quad (4.6)$$

kde  $S$  je plošný obsah střednice desky.

Při odvození potenciální energie vnějších sil tělesa podle [13] je potřeba uvážit vliv objemových sil, které jsou určeny funkcemi  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Objemové síly zahrnují vlastní tíhu tělesa a další síly, které jsou závislé na objemu tělesa. Mezi další vnější síly tělesa patří zatížení  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  působící na povrchu tělesa, který je určen hranicí  $U$ . Pro potenciální energii objemových sil platí:

$$\Pi_0 = \int \int \int_V (Xu + Yv + Zw) \, dx \, dy \, dz , \quad (4.7)$$

kde  $u$ ,  $v$ ,  $w$  jsou složky posunutí.

Pro potenciální energii vnějších sil působících na hranici  $U$  tělesa platí:

$$\Pi_u = \int \int_U (p_x u + p_y v + p_z w) \, dU, \quad (4.8)$$

kde  $u, v, w$  jsou složky posunutí.

Celková potenciální energie vnějších sil tělesa  $\Pi_e$  je rovna součtu potenciální energie objemových sil (4.7) a potenciální energii vnějších sil (4.8). Pro řešení tenkých desek Ritzovou metodou je potřeba upravit celkovou potenciální energii vnějších sil tělesa na potenciální energii vnějších sil desek. Protože u desek platí předpoklad působícího zatížení pouze ve směru kolmém ke střednicové rovině, výraz pro potenciální energii vnějších sil, působících na desku, lze upravit do tvaru:

$$\Pi_e = \int \int_S p_z w \, dx \, dy + \Pi_0, \quad (4.9)$$

kde  $\Pi_0$  představuje osamělé a liniové zatížení působící na okraji desky nebo reakce poddajných podpor při pružném uložení desky. V následném řešení je uvažováno s  $\Pi_0 = 0$ .

Podle [23] předpokládá Ritzovo řešení funkci průhybu  $w$  ve tvaru variační funkce (4.1):

$$w(x, y) = w_0(x, y) + \sum_n^{i=1} w_i \varphi_i(x, y). \quad (4.10)$$

Při řešení lze zvolit takovou funkci  $w(x, y)$ , která musí být v souladu s okrajovými podmínkami úlohy. Funkce  $w_0$  musí odpovídat nehomogenním okrajovým podmínkám a lineárně nezávislé funkce  $\varphi_i(x, y)$  musí splňovat homogenní okrajové podmínky.

### 4.2.1 Postup výpočtu Ritzovou metodou

Prvním krokem při řešení tenkých desek Ritzovou metodou je volba aproximační funkce, která musí splňovat okrajové podmínky a pro dosažení co nejpřesnějšího řešení je potřeba, aby zvolená funkce svým tvarem odpovídala předpokládané deformaci tenké desky. Pomocí zvolené funkce ve tvaru (4.10) lze vyjádřit potenciální

energii vnitřních (4.6) a vnějších sil (4.9).

Podle Lagrangeova principu (4.3) lze získat funkcionál součtem vnitřní a vnější potenciální energie. Řešení Ritzovy metody spočívá v nalezení neznámých parametrů průhyby  $\varphi_i$ . Variační úlohy jsou založeny na faktu, že soustava se vždy snaží transformovat do polohy, ve které bude nabývat minimální energii. Minimum funkcionálu (4.3) je možné najít na základě derivace, která je rovna nule:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i} = 0. \quad (4.11)$$

Derivací funkcionálu podle parametrů průhybu  $\varphi_i$  (4.11) lze sestavit soustavu lineárních rovnic, jejichž řešením jsou neznámé parametry průhybů  $\varphi_i$ . Dosazením zjištěných parametrů do aproximační funkce lze vyjádřit funkci popisující průhyb tenké desky ve tvaru (4.10). Vnitřní síly lze následně vypočítat podle vztahů (2.11) na základě vypočtené funkce průhybu.

## 4.3 Řešení příkladu Ritzovou metodou

Pro znázornění řešení tenké desky Ritzovou metodou bude řešen stejný příklad jako v kap. 3. Zadání příkladu je znázorněno na obr. 3.7. Vstupní parametry desky jsou uvedeny v tab. 3.1.

### 4.3.1 Řešení příkladu s využitím funkce sinus

Při řešení příkladu byla zvolena goniometrická aproximační funkce. V úloze se vyskytují pouze homogenní okrajové podmínky, proto je člen  $w_0(x, y)$  roven nule. Zvolená aproximační funkce vyhovuje homogenním okrajovým podmínkám prostě podepřené desky. Aproximační funkce je zvolena ve tvaru:

$$w(x, y) = \varphi \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right). \quad (4.12)$$

Základem Ritzovy metody je práce s vnitřní a vnější potenciální energií systému. Při řešení je potřeba vyjádřit tyto energie určené vztahy (4.6) a (4.9) pomocí zvolené aproximační funkce (4.12).

Pro určení vnitřní potenciální energie je potřeba vyjádřit derivace zvolené aproximační funkce (4.12). Protože se jedná o čtvercovou desku, vychází  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ . Derivace aproximační funkce (4.12) jsou rovny:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\varphi \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l}. \quad (4.13)$$

Vnitřní potenciální energie desky (4.6) bude rovna:

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} D \int_l^0 \int_l^0 \left( -\varphi \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l} - \varphi \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l} \right)^2 dx dy = \\ &= \frac{1}{2} D \varphi^2 \left( \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 \int_l^0 \int_l^0 \sin^2 \frac{\pi x}{l} \sin^2 \frac{\pi y}{l} dx dy = \\ &= \frac{1}{2} D \varphi^2 \left( 2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 \frac{l^2}{4} = \frac{1}{2} D \varphi^2 \frac{\pi^4}{l^2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Vnější potenciální energie desky se upraví na základě vztahu (4.9) dosazením zvolené aproximační funkce (4.12) do tvaru:

$$\begin{aligned} \Pi_e &= -\varphi p \int_l^0 \int_l^0 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l} dx dy = \\ &= -\varphi p \left( \left[ \left( -\cos \frac{\pi x}{l} \right) \frac{l}{\pi} \right]_0^l \left[ \left( -\cos \frac{\pi y}{l} \right) \frac{l}{\pi} \right]_0^l \right) = \\ &= -\varphi p \frac{2l}{\pi} \frac{2l}{\pi} = -\varphi p \frac{4l^2}{\pi^2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Podle Lagrangeova principu (4.3) je celková potenciální energie systému rovna součtu vnitřní (4.14) a vnější potenciální energie (4.15), který lze vyjádřit:

$$\Pi = \frac{1}{2} D \varphi^2 \frac{\pi^4}{l^2} - \varphi p \frac{4l^2}{\pi^2}. \quad (4.16)$$

Dalším krokem řešení je najít minimum celkové potenciální energie (4.16) pomocí derivace podle  $\varphi$  rovné nule:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = D \varphi \frac{\pi^4}{l^2} - p \frac{4l^2}{\pi^2} = 0. \quad (4.17)$$

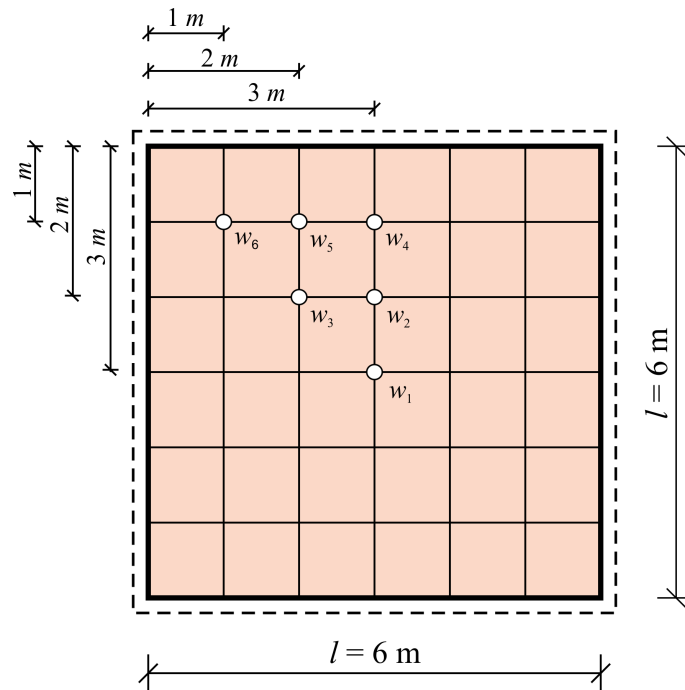
Z rovnice (4.17) lze vyjádřit neznámou  $\varphi$ , která bude rovna:

$$\varphi = \frac{4pl^4}{\pi^6 D}. \quad (4.18)$$

Dosazením vyjádřené hodnoty  $\varphi$  do zvolené aproximační funkce (4.12) lze získat rovnici průhybu nosné desky, která bude ve tvaru:

$$w(x, y) = \frac{4pl^4}{\pi^6 D} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right). \quad (4.19)$$

Po dosazení vstupních hodnot uvedených v tab. 3.1 do vyjádřené funkce průhybu (4.19) lze získat funkci popisující průhyb zadané nosné desky. Hodnoty průhybů ve zvolených bodech podle obr. 4.1 jsou uvedeny v tab. 4.1. Pro srovnání přesnosti dané metody jsou uvedené také hodnoty průhybu získané komerčním softwarem Scia Engineer.



Obr. 4.1: Zvolené body vypočítaných hodnot průhybů

Hodnoty vnitřních sil zadané nosné desky je možné určit na základě vypočítané průhybové funkce (4.19) podle vztahu (2.11). Při vyjádření vnitřních sil dojde k vykrácení deskové tuhosti  $D$ . Funkce pro měrný ohybový moment  $m_x$  bude mít stejný



Uzel	Ritzova metoda	Scia Engineer	Rozdíl
$w_1$	35,049 mm	34,268 mm	2,28 %
$w_2$	30,354 mm	30,002 mm	1,17 %
$w_3$	26,287 mm	26,284 mm	0,01 %
$w_4$	17,525 mm	17,790 mm	1,45 %
$w_5$	15,177 mm	15,617 mm	2,82 %
$w_6$	8,762 mm	9,338 mm	6,17 %

Tab. 4.1: Hodnoty průhybů

tvar jako funkce pro ohybový moment  $m_y$  a bude rovna:

$$m_x = m_y = \frac{4pl^2}{\pi^4} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l} (1 + \mu) . \quad (4.20)$$

Měrné kroutící momenty lze vyjádřit pomocí funkce:

$$m_{xy} = \frac{4pl^2}{\pi^4} \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} (1 - \mu) . \quad (4.21)$$

Funkce popisující průběh měrných posouvajících sil  $q_x$  bude rovna:

$$q_x = \frac{8pl}{\pi^3} \cos \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l} . \quad (4.22)$$

Pro funkci měrných posouvajících sil  $q_y$  lze odvodit vztah:

$$q_y = \frac{8pl}{\pi^3} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{l} . \quad (4.23)$$

Hodnoty vnitřních sil v místech znázorněných na obr. 4.1 jsou uvedeny v následujících tabulkách.

Měrný ohybový moment $m_x, m_y$ [kNm/m]						
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	3,84	6,66	7,69	6,66	3,84	0,00
0,00	6,66	11,53	13,31	11,53	6,66	0,00
0,00	7,69	13,31	15,37	13,31	7,69	0,00
0,00	6,66	11,53	13,31	11,53	6,66	0,00
0,00	3,84	6,66	7,69	6,66	3,84	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tab. 4.2: Měrný ohybový moment  $m_x, m_y$

Měrný kroutící moment $m_{xy}$ [kNm/m]						
-8,28	-7,17	-4,14	0,00	4,14	7,17	8,28
-7,17	-6,21	-3,58	0,00	3,58	6,21	7,17
-4,14	-3,58	-2,07	0,00	2,07	3,58	4,14
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4,14	3,58	2,07	0,00	-2,07	-3,58	-4,14
7,17	6,21	3,58	0,00	-3,58	-6,21	-7,17
8,28	7,17	4,14	0	-4,14	-7,17	-8,28

Tab. 4.3: Měrný kroutící moment  $m_{xy}$

Měrné posouvající síly $q_x$ [kN/m]						
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6,19	5,36	3,10	0,00	-3,10	-5,35	-6,17
10,73	9,29	5,36	0,00	-5,36	-9,27	-10,69
12,38	10,73	6,20	0,00	-6,20	-10,71	-12,35
10,73	9,29	5,36	0,00	-5,36	-9,27	-10,69
6,19	5,36	3,10	0,00	-3,10	-5,35	-6,17
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

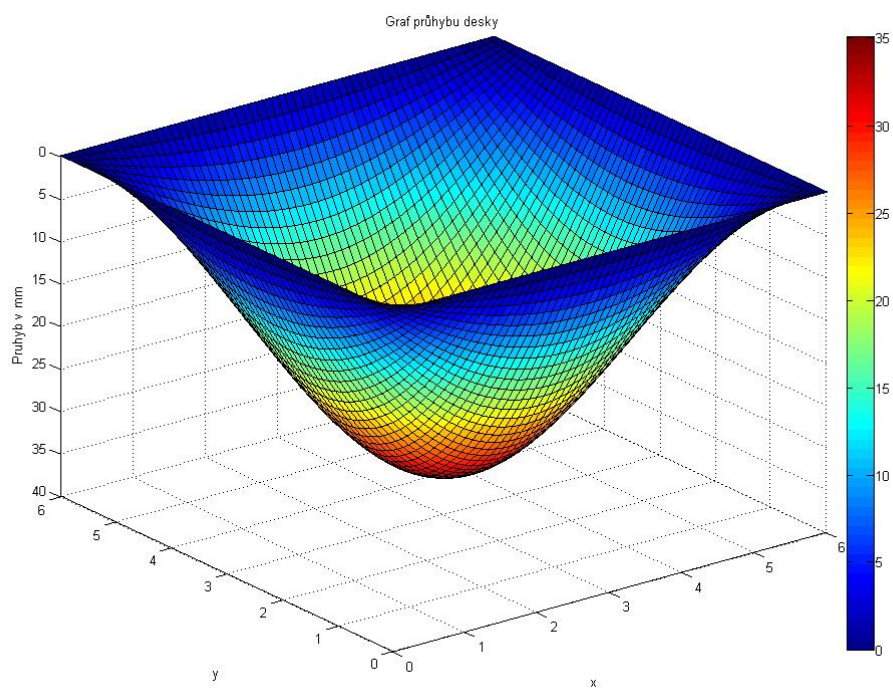
Tab. 4.4: Měrný posouvající síly  $q_x$

Měrné posouvající síly $q_y$ [kN/m]						
0,00	6,19	10,73	12,38	10,73	6,19	0,00
0,00	5,36	9,29	10,73	9,29	5,36	0,00
0,00	3,10	5,36	6,20	5,36	3,10	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,00	-3,10	-5,37	-6,20	-5,36	-3,10	0,00
0,00	-5,35	-9,27	-10,71	-9,27	-5,35	0,00
0,00	-6,17	-10,70	-12,35	-10,70	-6,17	0,00

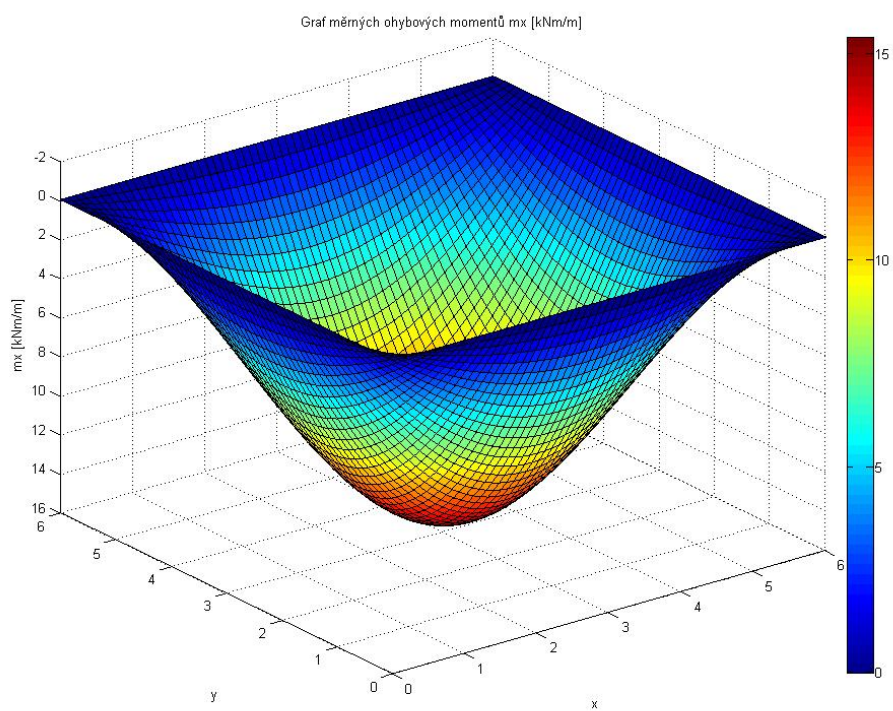
Tab. 4.5: Měrný posouvající síly  $q_y$

### 4.3.2 Vykreslení průhybu a měrných vnitřních sil

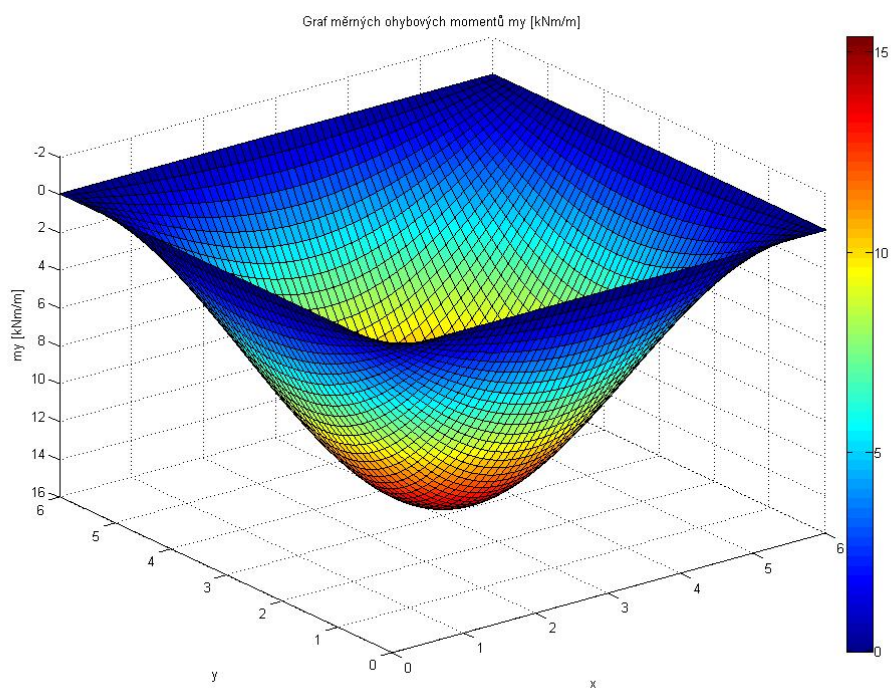
Vykreslený průhyb a měrné vnitřní síly na řešené desce jsou znázorněny na obr. 4.2 až obr. 4.7.



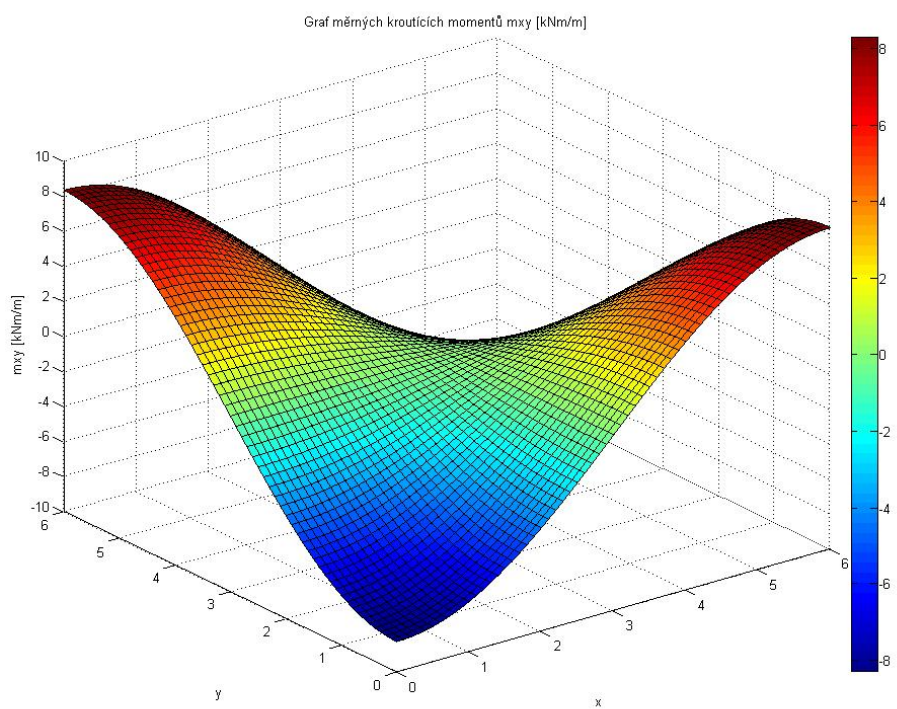
Obr. 4.2: Průhyb  $w$



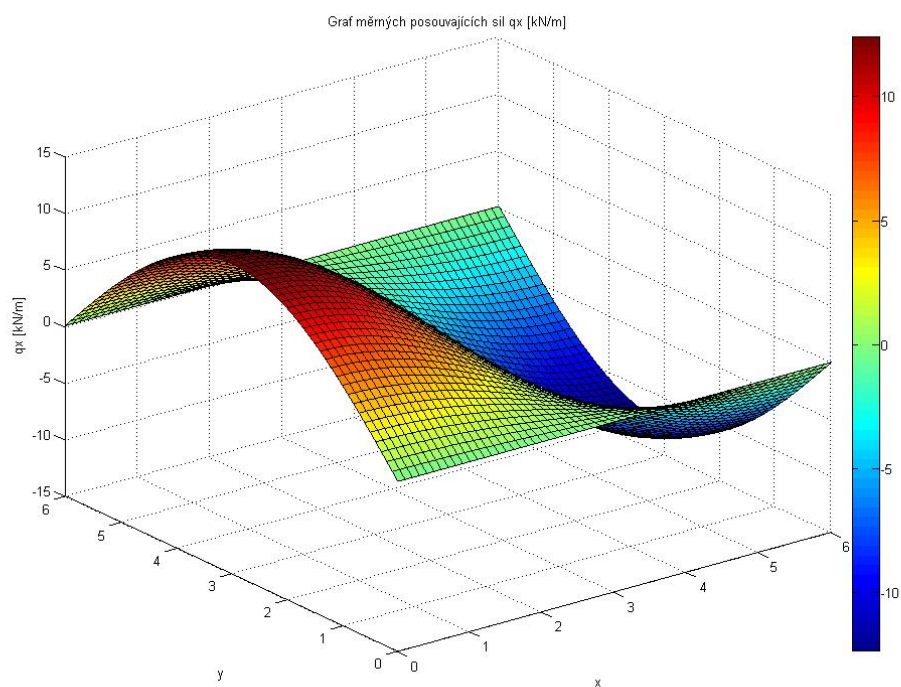
Obr. 4.3: Průběh měrných ohybových momentů  $m_x$



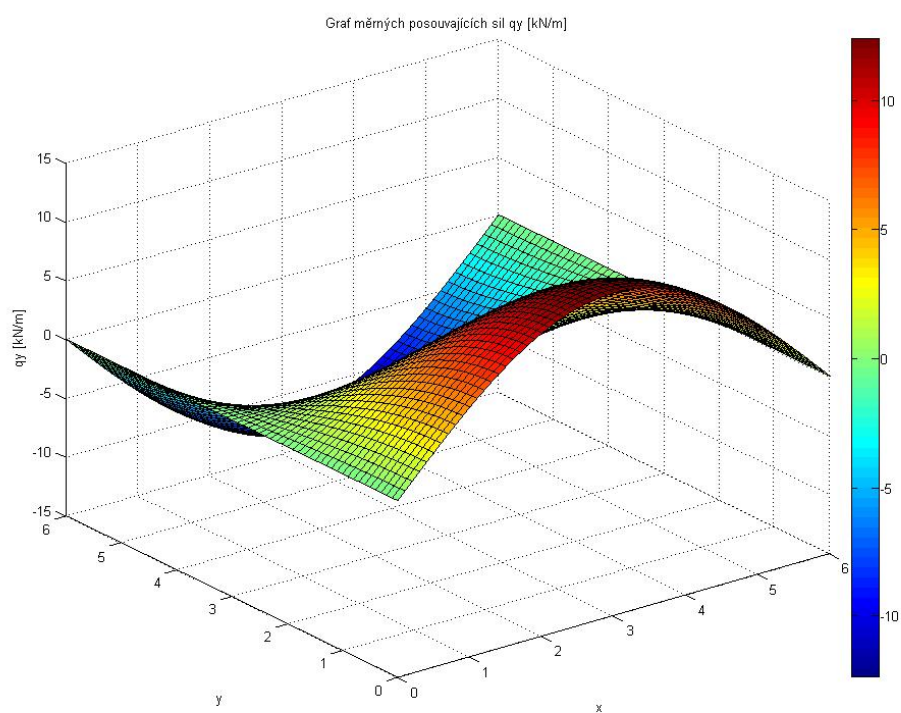
Obr. 4.4: Průběh měrných ohybových momentů  $m_y$



Obr. 4.5: Průběh měrných kroutících momentů  $m_{xy}$



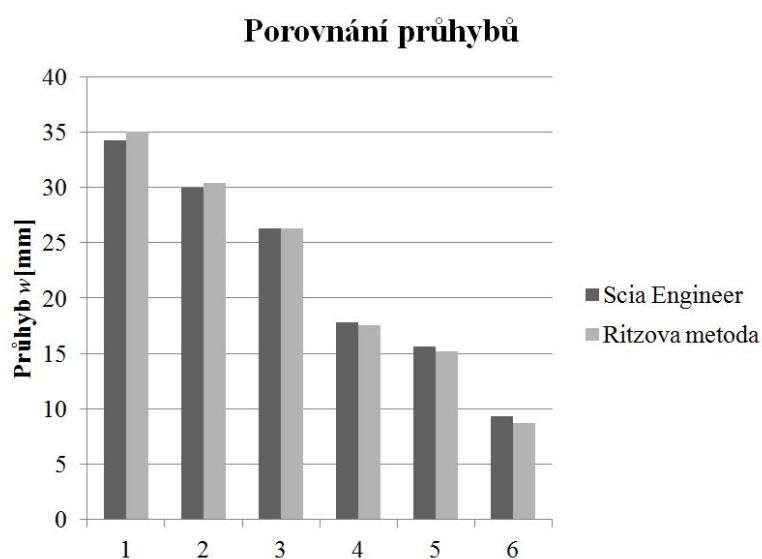
Obr. 4.6: Průběh měrných posouvajících sil  $q_x$



Obr. 4.7: Průběh měrných posouvajících sil  $q_y$

### 4.3.3 Porovnání s komerčním softwarem Scia Engineer

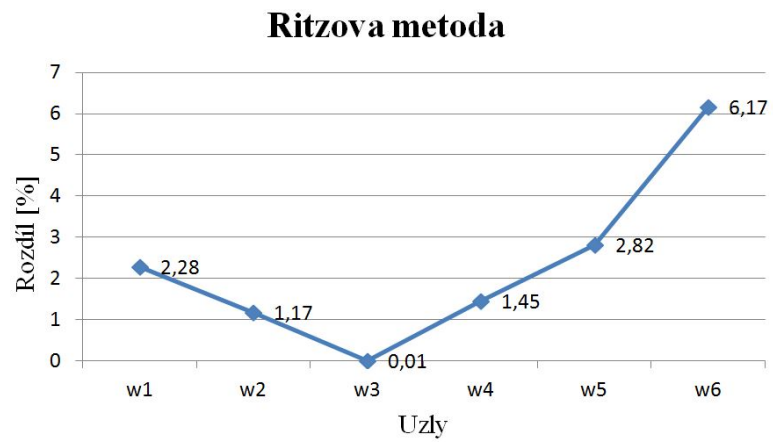
Hodnoty získané řešenou metodou jsou zde porovnány s hodnotami, které lze získat na základě komerčního softwaru Scia Engineer. Základním kritériem pro srovnání jsou uváženy hodnoty průhybu. Rozdíl mezi získanými hodnotami průhybů Ritzovou metodou a softwarem Scia Engineer není výrazný, což je znázorněno na obr. 4.8. Označení vybraných bodů pro porovnání je uvedeno na obr. 3.10. Pro výstižnější znázornění rozdílů je uveden graf vyjadřující procentuální rozdíl výsledných hodnot průhybů (obr. 4.9).



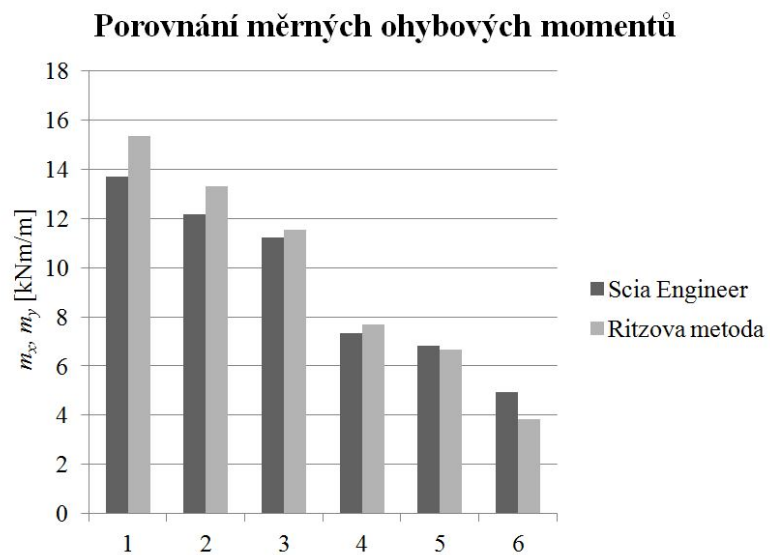
Obr. 4.8: Porovnání průhybů získaných Ritzovou metodou a programem Scia Engineer

Hodnoty vnitřních sil se oproti hodnotám průhybů liší v porovnání se softwarem Scia Engineer výrazněji. Srovnání výsledků je uvedeno v grafech na obr. 4.10 až obr. 4.12.

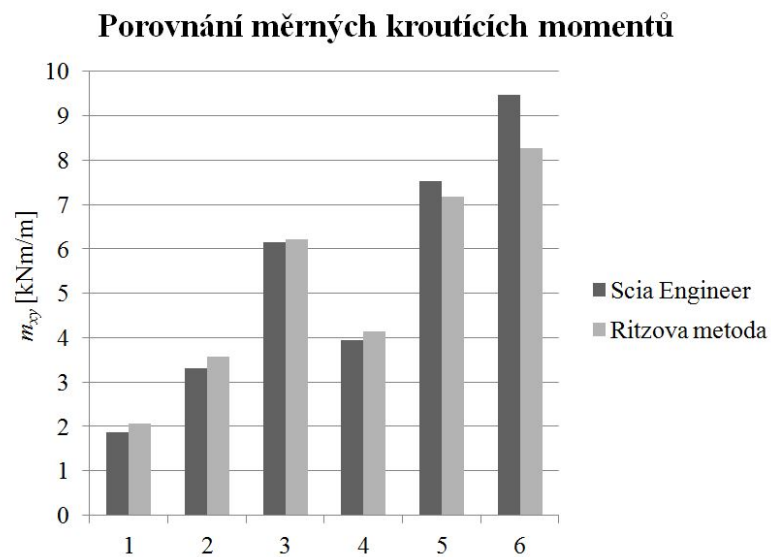




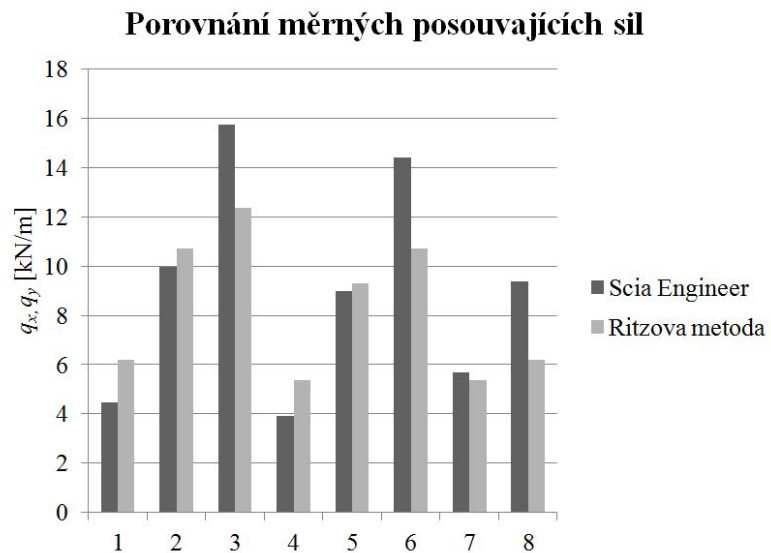
Obr. 4.9: Procentuální porovnání průhybů získaných Ritzovou metodou a programem Scia Engineer



Obr. 4.10: Porovnání měrných ohybových momentů získaných Ritzovou metodou a programem Scia Engineer



Obr. 4.11: Porovnání měrných kroučících momentů získaných Ritzovou metodou a programem Scia Engineer



Obr. 4.12: Porovnání měrných posouvajících sil získaných Ritzovou metodou a programem Scia Engineer



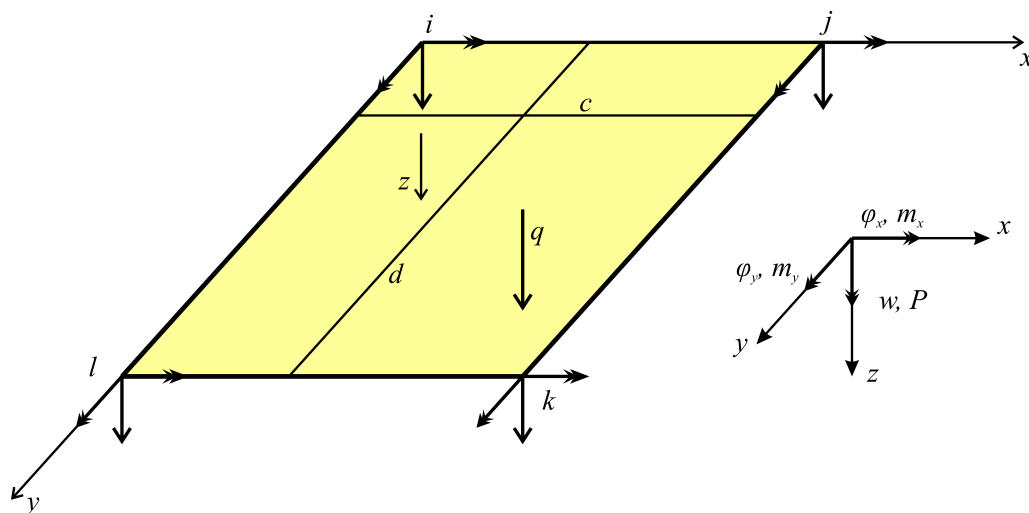
## 5 METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

Metoda konečných prvků patří mezi variační metody, její základ vychází z Ritzovy metody, která je zpracována v kap. 4. U Ritzovy metody je problematická volba aproximační funkce u složitějších konstrukcí. Tento nedostatek odstraňuje metody konečných prvků tak, že konstrukci rozdělí na konečný počet prvků, které vyplňují celou konstrukci. Průhyb každého prvku je vyjádřen pomocí zvolené aproximační funkce. Podstatou výpočtu je Lagrangeův variační princip, který je popsán v podkapitole 4.1.1. Jedná se o základní princip, kdy celková potenciální energie  $\Pi$  zaujímá minimální hodnotu, lze jej zapsat ve tvaru:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e = \min. \quad (5.1)$$

### 5.1 Základní vztahy v metodě konečných prvků

Řešením tenkých desek metodou konečných prvků se zabývají například publikace [1], [3], [24] a [25]. Tenké desky se rozdělují na konečný počet obdelníkových prvků o rozměru  $c$  a  $d$ . Pozice každého konečného prvku je dána čtyřmi uzly  $i$ ,  $j$ ,  $k$  a  $l$ . Označený čtyřuzlový prvek je znázorněn na obr. 5.1.



Obr. 5.1: Obdelníkový konečný prvek

V každém uzlu mohou nastat tři deformace, a to průhyb  $w$ , pootočení  $\varphi_x$  a

pootočení  $\varphi_y$ . Pootočení lze vyjádřit derivací průhybu ve tvaru:

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (5.2)$$

Každý uzel konečného prvku je charakterizován třemi stupni volnosti. Obdelníkový konečný prvek má celkem 4 uzly, proto je nutné za aproximační funkci průhybu zvolit polynom o 12 parametrech. Podle [3] je zvolena aproximační funkce ve tvaru:

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \quad (5.3)$$

Následující vztahy jsou uvedeny podle [3] a [25]. Aproximační funkci průhybu (5.3) pro konečný prvek  $e$  lze zapsat v maticovém tvaru:

$$w_e = [N] \{ \alpha \}, \quad (5.4)$$

kde  $[N] = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2 y, xy^2, y^3, x^3 y, xy^3]$  a  $\{ \alpha \} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}]^T$ .

Využitím vztahu (5.2) lze vyjádřit pootočení  $\varphi_x$  a  $\varphi_y$  prostřednictvím aproximační funkce (5.3) ve tvaru:

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3, \\ \varphi_y &= \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + 3\alpha_{12} xy^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Matice  $\{ \delta \}_e$  představuje deformaci konečného čtyřuzlového prvku znázorněného na obr. 5.1:

$$\{ \delta \}_e = [\delta_i, \delta_j, \delta_k, \delta_l]^T, \quad (5.6)$$

kde  $\{ \delta_i \} = [w_i, (\varphi_x)_i, (\varphi_y)_i]^T$ , pro další uzly  $j, k, l$  platí obdobné vztahy  $\delta_j, \delta_k$  a  $\delta_l$ .

Při vyjádření koeficientů  $\alpha_m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots, 12$ ) a deformací uzlů konečného prvku  $w_p, \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_p$  a  $\left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_p$  ( $p = i, j, k, l$ ) lze napsat vztah pro matici vyjádřující de-

formaci konečného prvku (5.6):

$$\{\delta\}_e = [S] \{\alpha\} , \quad (5.7)$$

kde  $[S]$  je matice souřadnic o rozměru 12 x 12 a pro obdelníkový prvek je rovna:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & y_1^3 & x_1^3y_1 & x_1y_1^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_1 & y_1 & 0 & 3x_1^2 & 2x_1y_1 & y_1^2 & 0 & 3x_1^2y_1 & y_1^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2^3 & x_2^2y_2 & x_2y_2^2 & y_2^3 & x_2^3y_2 & x_2y_2^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_2 & y_2 & 0 & 3x_2^2 & 2x_2y_2 & y_2^2 & 0 & 3x_2^2y_2 & y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & 0 & x_2^2 & 2x_2y_2 & 3y_2^2 & x_2^3 & 3x_2y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3^2y_3 & x_3y_3^2 & y_3^3 & x_3^3y_3 & x_3y_3^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_3 & y_3 & 0 & 3x_3^2 & 2x_3y_3 & y_3^2 & 0 & 3x_3^2y_3 & y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & x_3^2 & 2x_3y_3 & 3y_3^2 & x_3^3 & 3x_3y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2y_4 & x_4y_4^2 & y_4^3 & x_4^3y_4 & x_4y_4^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_4 & y_4 & 0 & 3x_4^2 & 2x_4y_4 & y_4^2 & 0 & 3x_4^2y_4 & y_4^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4y_4^2 \end{bmatrix} . \quad (5.8)$$

Neznámé parametry  $\{\alpha\}$  lze vyjádřit na základě vztahu:

$$\{\alpha\} = [S]^{-1} \{\delta\}_e . \quad (5.9)$$

Dosazením parametrů  $\{\alpha\}$  do aproximační funkce (5.4) lze aproximační funkci průhybu vyjádřit ve tvaru:

$$w_e = [L] \{\delta\}_e , \quad (5.10)$$

kde  $[L] = [N] [S]^{-1}$ .

Při odvozování vztahů platných v metodě konečných prvků je potřeba využít geometrické rovnice (2.7), které lze zapsat v maticové podobě:

$$\{\epsilon\}_e = w_e \{\chi\}_e , \quad (5.11)$$

kde  $\{\epsilon\}_e = [\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}]^T$  a  $\{\chi\}_e = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]^T$ .

Kombinací vztahů (5.11) a (5.4) lze získat:

$$\{\epsilon\}_e = [B] \{\alpha\}, \quad (5.12)$$

kde  $[B] = \{\chi\}_e [N]$ . Ze vztahu je potřeba vyloučit neznámé konstanty  $\{\alpha\}$  pomocí výrazu (5.9). Pro poměrné deformace konečného prvku  $\{\epsilon\}_e$  platí vztah:

$$\{\epsilon\}_e = [B] [S]^{-1} \{\delta\}_e. \quad (5.13)$$

Dále je nutné využít fyzikální rovnice pro lineárně pružný a izotropní materiál, které lze symbolicky zapsat  $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$ :

$$\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (5.14)$$

Pro potenciální energii vnitřních sil  $\Pi_i$  platí vztah:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int \int_{A_e} [\epsilon]_e^T \{\sigma\}_e \, dA_e. \quad (5.15)$$

Dosazením (5.14) v symbolickém zápise  $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$  a vztahu (5.13) lze upravit potenciální energii (5.15) do podoby:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int \int_{A_e} \{\delta\}_e^T [B]^T [D] [B] \{\delta\}_e \, dA_e = \{\delta\}_e^T \left\langle \frac{1}{2} \int \int_{A_e} [B]^T [D] [B] \, dA_e \right\rangle \{\delta\}_e. \quad (5.16)$$

Potenciální energii vnitřních sil lze zapsat stručněji v podobě:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [k]_e \{\delta\}_e, \quad (5.17)$$

kde  $[k]_e$  je matice tuhosti prvku a platí pro ni  $[k]_e = \int \int_{A_e} [B]^T [D] [B] \, dA_e$ .  $A_e$  je obdelníková plocha o rozměrech  $c$  a  $d$  konečného prvku, který je znázorněn na obr. 5.1.

Pro potenciální energii vnějších sil  $\Pi_e$  platí:

$$\Pi_e = -\{\delta\}_e^T \{R\}_e - \int \int_{A_e} p w \, dA_e, \quad (5.18)$$

kde  $\{R\}_e$  představuje uzlové síly  $\{R\}_e = [R_i, R_j, R_k, R_l]^T$  a  $\{R_t\} = [P_t, m_{xt}, m_{yt}]^T$  pro  $t = i, j, k, l$ . Spojité zatížení působící na konstrukci je vyjádřeno veličinou  $p(x, y)$ .

Substitucí  $w$  podle vztahu (5.10) a využitím toho, že potenciál vnějších sil je skalární veličina, takže lze transponovat bez změny hodnoty, je možné vztah pro potenciální energii vnějších sil upravit do podoby:

$$\Pi_e = -\{\delta\}_e^T \left\langle \{R\}_e + \int \int_{A_e} p [L]^T \, dA_e \right\rangle. \quad (5.19)$$

Stručněji lze výraz (5.19) napsat ve formě:

$$\Pi_e = -\{\delta\}_e^T \{Q\}_e, \quad (5.20)$$

kde  $\{Q\}_e = \{R\}_e + \int \int_{A_e} p [L]^T \, dA_e$ .

Celková potenciální energie soustavy je rovna součtu energie vnitřní (5.17) a vnější (5.20):

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e = \frac{1}{2} \{\delta\}_e^T [k]_e \{\delta\}_e - \{\delta\}_e^T \{Q\}_e. \quad (5.21)$$

Využitím Lagrangeova principu o minimu celkové potenciální energie (5.1), lze psát:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta\}_e} = 0. \quad (5.22)$$

Na základě vztahu (5.22) lze získat následující výraz, který se vztahuje k uzlovým deformacím odpovídajícím uzlovému zatížení na konečném prvku  $e$ :

$$[k]_e \{\delta\}_e = \{Q\}_e. \quad (5.23)$$

Nosná deska je rozdělena na konečný počet prvků, proto celková potenciální

energie tenké desky je rovna:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E \left\langle \frac{1}{2} \{\delta\}_e^t [k]_e \{\delta\}_e - \{\delta\}_e^T \{Q\}_e \right\rangle, \quad (5.24)$$

kde  $E$  je celkový počet konečných prvků. Výraz obsahuje  $12E$  neznámých. Protože hodnota  $\{\delta\}_e$  musí být pro dva sousední prvky, které sdílejí společný uzlový bod stejná, je vektor posunutí redukován a lze ho zapsat jako:

$$\{\Delta\} = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_M]^T, \quad (5.25)$$

kde  $M = 3N$  a  $N$  je celkový počet uzlových bodů v síti.

Zavedením vektoru posunutí  $\{\Delta\}$  lze celkovou potenciální energii desky (5.24) vyjádřit ve tvaru:

$$\Pi = \frac{1}{2} \{\Delta\}^T [K] \{\Delta\} - \{\Delta\}^T \{Q\}, \quad (5.26)$$

kde  $[K]$  je globální matice tuhosti o rozměru  $M \times M$  a  $\{Q\}$  je globální vektor zatížení.

Využitím Lagrangeova principu o minimu potenciální energie (5.1) na vztahu (5.26) v podobě:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\Delta_i\}} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (5.27)$$

lze získat základní rovnici metody konečných prvků:

$$[K] \{\Delta\} = \{Q\}. \quad (5.28)$$

Globální matice tuhosti  $[K]$  a globální vektor zatížení  $\{Q\}$  lze sestavit z matic tuhosti konečných prvků  $[k]_e$  o rozměrech  $12 \times 12$  a vektorů zatížení prvků  $\{Q\}_e$ . Tento proces je realizován s využitím výpočetní techniky. Odvozená matice tuhosti  $[K]$  je singulární. Singularitu je potřeba vyřešit dosazením okrajových podmínek, které jsou popsány v kap. 2.4.

## 5.2 Postup řešení tenkých desek metodou konečných prvků

Základem metody je rozdělení řešené konstrukce na konečný počet čtyřuzlových prvků. Pro dosažení požadované přesnosti je nutné zvolit dělení na dostatečný počet konečných prvků. Výpočet spočívá ve vytvoření matic tuhosti prvků a zatěžovacích vektorů prvků, souhrnně označované jako analýza prvku. Dále následuje analýza konstrukce. Z matic tuhosti prvků se sestaví matice tuhosti konstrukce prostřednictvím kódových čísel. Vytvořená matice tuhosti je symetrická podle hlavní diagonály a ideálně také pásová, pokud bylo dodrženo vhodné číslování uzlů. Těchto vlastností se využívá při řešení soustavy rovnic.

Další vlastností vytvořené matice tuhosti konstrukce je její singularita, kterou je potřeba odstranit dosazením okrajových podmínek podle podepření zadané úlohy. U homogenních okrajových podmínek lze dosadit na příslušné místo matice tuhosti na hlavní diagonálu 1 a na ostatní pozice 0. Pro zachování symetrie matice podle hlavní diagonály, je potřeba dosadit nulové hodnoty také do příslušného sloupce matice. U nehomogenních okrajových podmínek je postup obdobný. Nehomogenní okrajová podmínka se projeví tak, že na pravou stranu rovnic je potřeba zadat předepsanou hodnotu deformace uzlu.

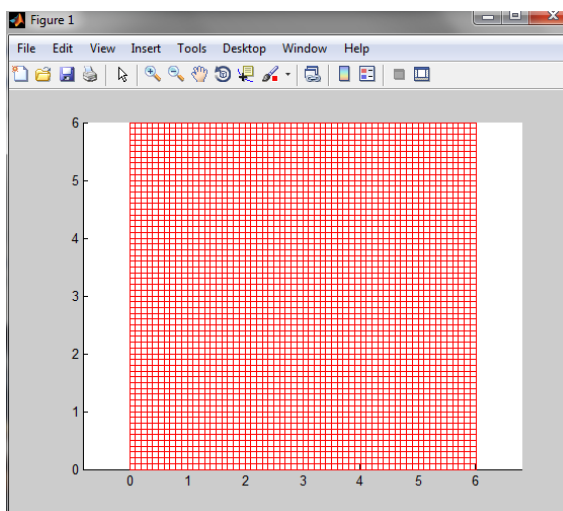
Zatížení lze do úlohy zadat jako uzlová. Při analýze konstrukce je potřeba vytvořit globální zatěžovací vektor prostřednictvím kódových čísel. Řešení úlohy vede na výpočet soustavy rovnic (5.28), jejíž řešením jsou neznámé uzlové deformace. Dalším krokem je dokončení analýzy prvků, která spočívá ve výpočtu vnitřních sil na konečných prvcích konstrukce.

## 5.3 Řešení příkladu metodou konečných prvků

Pro znázornění řešení tenkých desek metodou konečných prvků bude řešen stejný příklad, jaký byl vyřešen metodou sítí (kap. 3.5) a Ritzovou metodou (kap. 4.3). Zadání příkladu je uvedeno v kap. 3.5.1 a znázorněno na obr. 3.7. Vstupní parametry jsou uvedeny v tab. 3.1.

### 5.3.1 Řešení příkladu

Metoda konečných prvků je podmíněna využitím počítačové techniky. Pro řešení zadaného příkladu byl využit program Matlab [17]. Deska byla rozdělena na čtyřuzlové prvky o velikosti  $0,1\text{ m} \times 0,1\text{ m}$ . Vykreslené dělení konstrukce programem Matlab je znázorněno na obr. 5.2.



Obr. 5.2: Vygenerovaná síť

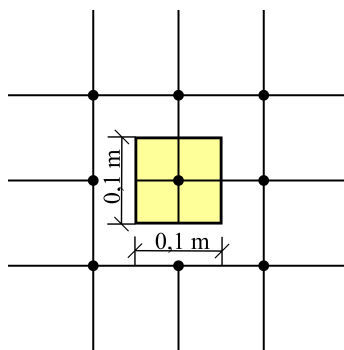
Pro výpočet je nutné zadat souřadnice konečných prvků a uzlů, které vzniknou při rozdělení konstrukce na konečný počet prvků. Prostě podepřené okraje řešené desky jsou do výpočtu zadány přiřazením nulové svislé deformace uzlům, které tvoří okraj desky. Zatížení lze do výpočtu zadat jako uzlové, proto je nutné přepočítat spojité zatížení na ekvivalentní silové zatížení působící v uzlu konstrukce. Hodnota síly působící v uzlu je ekvivalentní spojitému zatížení působícímu na ploše  $0,1\text{ m} \times 0,1\text{ m}$ , přičemž uzel je ve středu této plochy (obr. 5.3). V zadané konstrukci je hodnota uzlového zatížení rovna  $80\text{ kN}$ .

Pro výpočet v algoritmu byla každému prvku přiřazena kódová čísla, která představují všechny tři možné deformace uzlu. Výpočet spočívá v sestavení matic tuhosti konečných prvků na základě vztahu:

$$k_e = \int_A S^{-1T} B^T D B S^{-1} dA. \quad (5.29)$$

Matice  $B$  obsahuje proměnné  $x, y$ , proto je nutné použít numerickou integraci. Pro





Obr. 5.3: Ekvivalentní uzlové zatížení

výpočet byla použita dvoubodová Gaussova integrační metoda [20]. Funkce pro výpočet Gaussovy integrace v programu Matlab je znázorněn na obr. 5.4.

```
function s=gauss_int(f,b,a,d,c)

x(1)=-sqrt(1/3);
x(2)=sqrt(1/3);
y(1)=-sqrt(1/3);
y(2)=sqrt(1/3);

s=0;
for i=1:2
    for j=1:2
        s=s+f(0.5*(x(i)*(b-a)+b+a),0.5*(y(j)*(d-c)+d+c))*(d-c)*(b-a)/4;
    end
end
end
```

Obr. 5.4: Gaussova metoda numerické integrace

Z matic tuhosti konečných prvků lze lokalizovat na základě kódových čísel globální matici tuhosti  $K$ . Z uzlových zatížení lze sestavit zatěžovací vektor  $Q$  a výpočet neznámých uzlových deformací lze provést využitím vztahu (5.28).

Výpočet vnitřních sil je možné provést na základě vektoru deformací  $\Delta$ . Z globálního vektoru deformací  $\Delta$  lze vytvořit lokální vektory deformací  $\delta_e$  pro každý konečný prvek. Pro každý prvek je nutné stanovit poměrné deformace podle vztahu (5.13). Výpočet měrných vnitřních sil lze provést na základě vztahu (5.14). Měrné vnitřní síly byly počítány v těžištích jednotlivých prvků.

Vypočtené hodnoty průhybu a měrných vnitřních sil jsou uvedeny v tabulkách: tab. 5.1 až tab. 5.4. Výkreslení průhybu a měrných vnitřních sil je uvedeno v kap. 4.3.2.

Uzel	MKP	Scia Engineer	Rozdíl
$w_1$	34,217 mm	34,268 mm	0,15 %
$w_2$	29,950 mm	30,002 mm	0,17 %
$w_3$	26,233 mm	26,284 mm	0,31 %
$w_4$	17,744 mm	17,790 mm	0,19 %
$w_5$	15,570 mm	15,617 mm	0,30 %
$w_6$	9,295 mm	9,338 mm	0,46 %

Tab. 5.1: Hodnoty průhybů

Měrný ohybový moment $m_x$ [kNm/m]						
0,03	0,30	0,41	0,44	0,41	0,30	0,03
0,37	4,76	6,69	7,23	6,69	4,76	0,37
0,54	7,55	11,05	12,05	11,05	7,55	0,54
0,59	8,49	12,59	13,78	12,59	8,49	0,59
0,54	7,55	11,05	12,05	11,05	7,55	0,54
0,37	4,76	6,69	7,23	6,69	4,76	0,37
0,03	0,30	0,41	0,44	0,41	0,30	0,03

Tab. 5.2: Měrný ohybový moment  $m_x$

Měrný ohybový moment $m_y$ [kNm/m]						
0,03	0,37	0,54	0,59	0,54	0,37	0,03
0,30	4,76	7,55	8,49	7,55	4,76	0,30
0,41	6,69	11,05	12,59	11,05	6,69	0,41
0,44	7,23	12,05	13,78	12,05	7,23	0,44
0,41	6,69	11,05	12,59	11,05	6,69	0,41
0,30	4,76	7,55	8,49	7,55	4,76	0,30
0,03	0,37	0,54	0,59	0,54	0,37	0,03

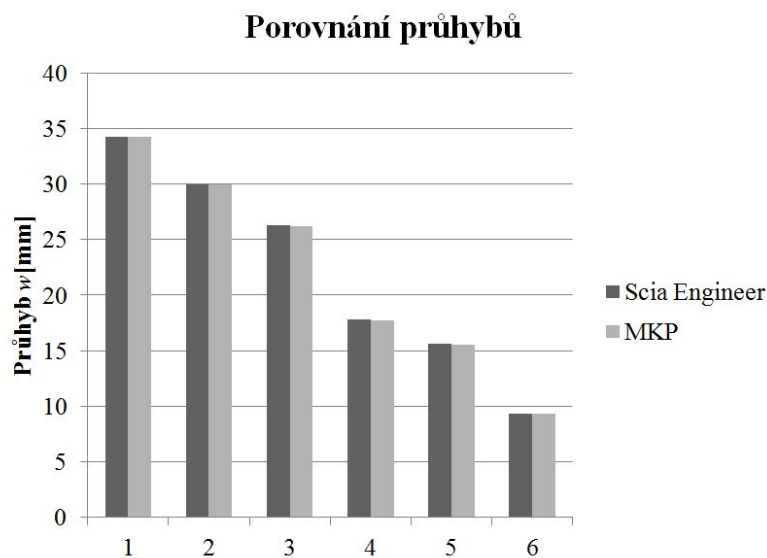
Tab. 5.3: Měrný ohybový moment  $m_y$

Měrný ohybový moment $m_{xy}$ [kNm/m]						
9,33	7,25	4,11	0,20	-3,73	-7,25	-9,33
7,55	6,13	3,21	0,17	-3,21	-6,13	-7,55
4,11	3,42	1,84	0,09	-1,84	-3,42	-4,11
0,20	0,17	0,09	0,00	0,09	0,17	0,20
-4,11	-3,42	-1,84	-0,09	1,84	3,42	4,11
-7,55	-6,13	-3,21	-0,17	3,21	6,13	7,55
-9,33	-7,25	-4,11	-0,20	4,11	7,25	9,33

Tab. 5.4: Měrný kroutící moment  $m_{xy}$

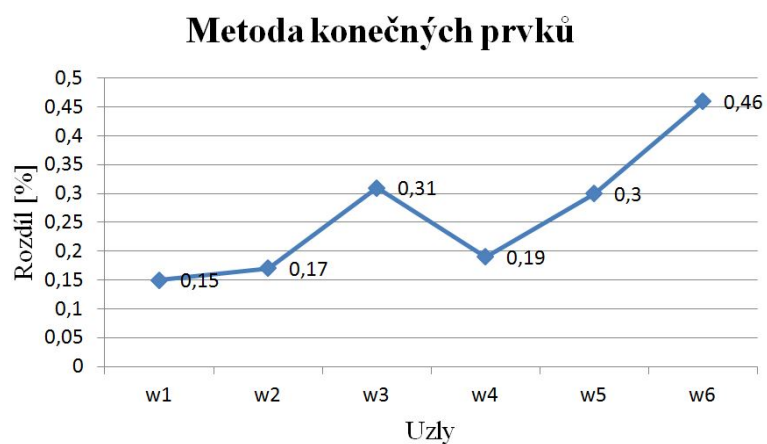
### 5.3.2 Porovnání s komerčním softwarem Scia Engineer

Hodnoty získané řešenou metodou jsou zde porovnány s hodnotami, které lze získat na základě komerčního softwaru Scia Engineer. Základním kritériem pro srovnání jsou uváženy hodnoty průhybu získané vytvořeným algoritmem v programu Matlab a softwarem Scia Engineer, který je založený také na metodě konečných prvků. Získané hodnoty jsou téměř totožné, což dokazuje správné sestavení algoritmu v programu Matlab. Porovnání výsledných průhybu je znázorněno na obr. 5.5. Označení vybraných uzlů pro porovnání je zobrazeno na obr. 3.10. Pro výstižnější znázornění rozdílů je uveden graf vyjadřující procentuální rozdíl výsledných hodnot průhybů (obr. 5.6).

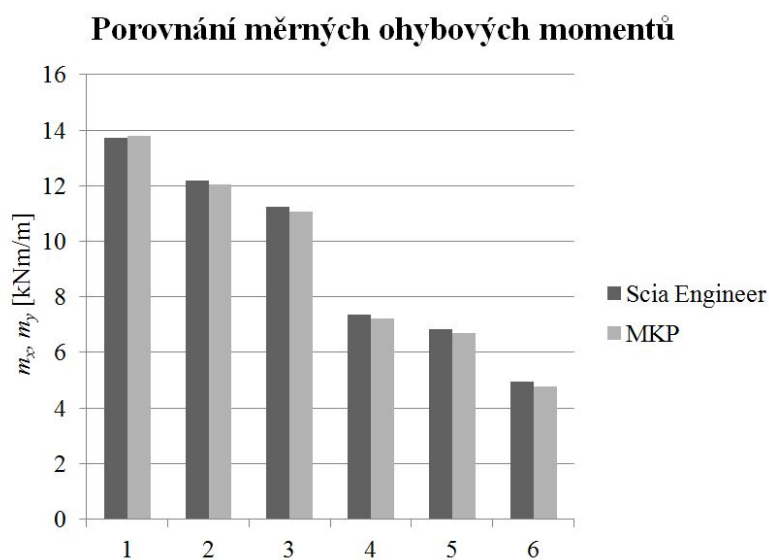


Obr. 5.5: Porovnání průhybů získaných metodou konečných prvků v programu Matlab a programem Scia Engineer

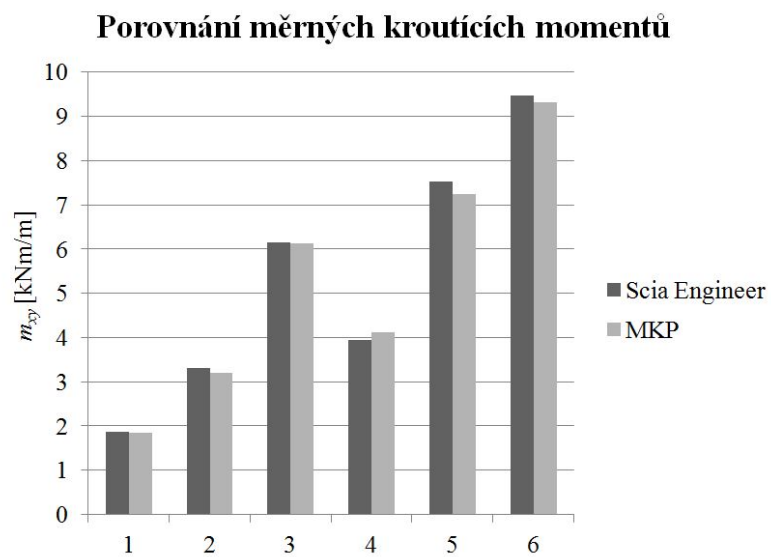
Srovnání vypočtených měrných ohybových a kroučících momentů je uvedeno v následujících grafech (obr. 5.7, obr. 5.8).



Obr. 5.6: Procentuální porovnání průhybů získaných metodou konečných prvků v programu Matlab a programem Scia Engineer



Obr. 5.7: Porovnání měrných ohybových momentů získaných metodou konečných prvků v programu Matlab a programem Scia Engineer



Obr. 5.8: Porovnání měrných kroučících momentů získaných metodou konečných prvků v programu Matlab a programem Scia Engineer

## 6 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ ŘEŠENÍ NOSNÝCH DESEK

Navrhování a posuzování konstrukcí je v současné době prováděno podle normových postupů [5], ve kterých vystupují deterministicky určené veličiny. Veličiny, které vstupují do výpočtu spolehlivosti konstrukce, jsou zatíženy řadou nahodilostí. Pravděpodobnostní řešení desek umožňuje vyjádření vstupních hodnot stochasticky, například formou histogramů. Problematika pravděpodobnostního posudku spolehlivosti konstrukcí je popsána například v publikacích [16] a [18].

### 6.1 Základní princip pravděpodobnostního posudku spolehlivosti konstrukcí

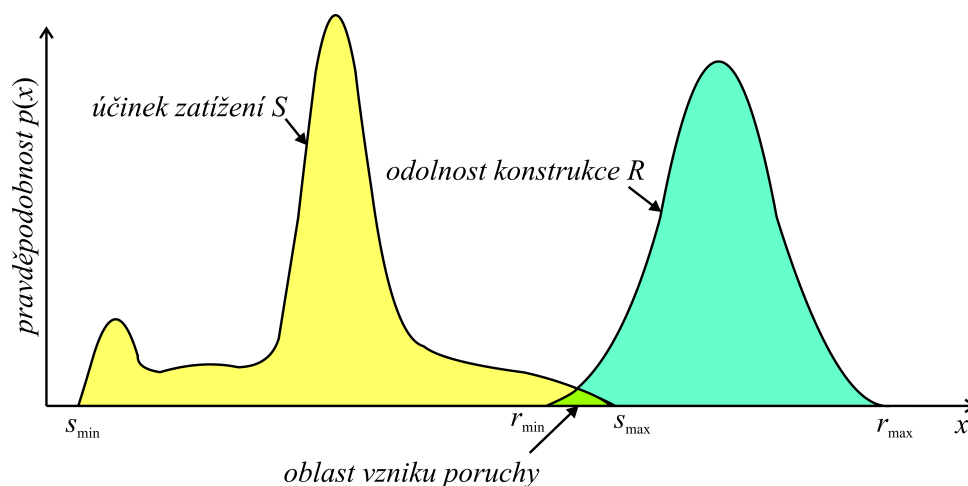
Základem pravděpodobnostního posudku spolehlivosti konstrukce je určení účinku zatížení a odolnosti konstrukce. Účinek zatížení  $S$  je ve své podstatě náhodnou veličinou při uvážení náhodné proměnlivosti v čase a prostoru. Odolnost konstrukce  $R$  je určena materiálovými a geometrickými charakteristikami konstrukce, které lze vyjádřit také pravděpodobnostně.

Funkce, která porovnává účinek zatížení a odolnost konstrukce, je označována funkcí spolehlivosti. Základním principem při pravděpodobnostním posudku spolehlivosti je podmínka spolehlivosti, která může být dána například tvarem:

$$RF = R - S \geq 0, \quad (6.1)$$

kde  $RF$  je funkce spolehlivosti,  $R$  odolnost konstrukce a  $S$  účinek zatížení. Podmínka spolehlivosti zajišťuje, že odolnost konstrukce je vyšší nebo minimálně rovna účinku zatížení.

V případě, že maximální účinek zatížení je větší než minimální odolnost konstrukce, vzniká oblast poruchy, která je dána překrývajícími se histogramy účinku zatížení a odolnosti konstrukce jak je znázorněno na obr. 6.1. Oblast vzniku poruchy



Obr. 6.1: Oblast vzniku poruchy

lze stanovit na základě pravděpodobnosti poruchy  $p_f$ , pro kterou platí:

$$p_f = P(R - S < 0) . \quad (6.2)$$

Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti konstrukce je realizován na základě porovnání pravděpodobnosti poruchy  $p_f$  s návrhovou pravděpodobností poruchy  $p_d$ . Pravděpodobnost poruchy  $p_f$  lze získat pravděpodobnostním výpočtem, návrhová pravděpodobnost poruchy  $p_d$  je dána normou [5]. Hodnoty návrhových pravděpodobností poruch  $p_d$  jsou uvedeny v tab. 6.1.

Třída (úroveň spolehlivosti)	$p_d$
RC3 (velké důsledky)	$8,1 \cdot 10^{-6}$
RC2 (střední důsledky)	$7,2 \cdot 10^{-5}$
RC1 (malé důsledky)	$4,8 \cdot 10^{-4}$

Tab. 6.1: Návrhová pravděpodobnost  $p_d$  pro mezní stav únosnosti podle normy [5]

V tab. 6.1 jsou uvedeny hodnoty návrhových pravděpodobností poruch  $p_d$  v závislosti na třídách spolehlivosti, které souvisí s třídami následků CC1, CC2 a CC3, jež jsou definované v normě [5]. Konstrukce vyhoví v dané třídě spolehlivosti v případě, že splňuje podmínku:

$$p_f < p_d . \quad (6.3)$$

## 6.2 Metody pravděpodobnostního výpočtu

Mezi používané metody pro pravděpodobnostní výpočet patří simulační metody, aproximační metody a numerické metody. V současné době je k dispozici řada softwarů, které jsou založeny na jedné z uvedených metod. Podrobnější popis jednotlivých metod a jejich aplikací na konkrétních softwarech je uveden např. v publikaci [16]. Práce se zaměřuje na simulační a číste numerické metody, které jsou využity v programech Anthill [10] a ProbCalc [12]. Pomocí uvedených programů bude proveden pravděpodobnostní posudek nosné desky.

### 6.2.1 Simulační metody

Simulační metody jsou opřeny o numerickou integraci Monte Carlo. Monte Carlo využívá generátor pseudonáhodných čísel, na jehož základě dochází k opakovaným výpočtům funkce spolehlivosti (6.1). Výsledná pravděpodobnost poruchy  $p_f$  je stanovena pomocí výsledků funkcí spolehlivosti všech simulací podle vztahu:

$$p_f = \frac{N_f}{N}, \quad (6.4)$$

kde  $N_f$  je počet simulací, kdy nastala porucha, a  $N$  je počet všech simulací.

Na simulaci Monte Carlo je založena pravděpodobnostní metoda SBRA (Simulation Based Reliability Assessment), která je využita v programu Anthill. Náhodné vstupní parametry jsou zadány pomocí histogramů. Proměnná zatížení jsou zadávána extrémní hodnotou a křivkou trvání zatížení (např. křivka trvání dlouhodobého zatížení obr. 6.5b). Pravděpodobnostní posudek na úrovni mezního stavu únosnosti a použitelnosti je stanoven na základě porovnání vypočtené pravděpodobnosti poruchy  $p_f$  a návrhové pravděpodobnosti poruchy  $p_d$  podle (6.3).

### 6.2.2 Přímé (numerické) metody

Mezi přímé (numerické) metody se řadí metoda POPV (Přímého Optimalizovaného Pravděpodobnostního Výpočtu). Vstupní náhodně proměnné veličiny jsou zadávány pomocí histogramů s neparametrickým nebo parametrickým rozdělením. Základem



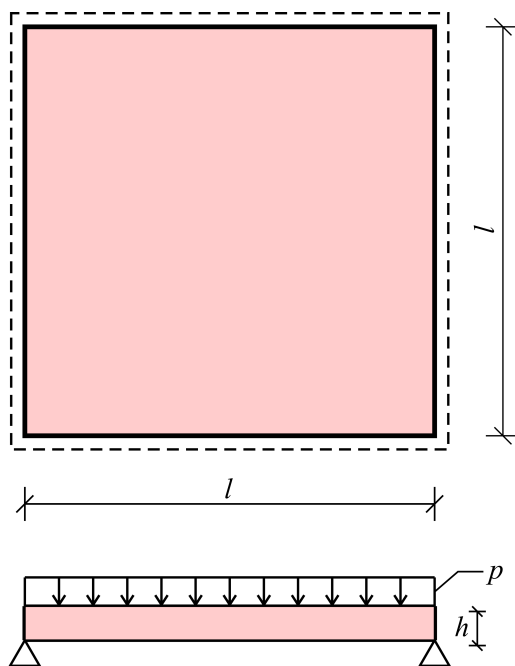
metody POPV jsou základní vztahy z teorie pravděpodobnosti aplikované na práci s histogramy. Na metodě POPV je vystaven programový systém ProbCalc, který se skládá z programů HistAn, HistOp a ProbCalc. HistAn je vytvořen k analýze vstupních histogramů. HistOp umožňuje provádět základní aritmetické operace s histogramy a ProbCalc provádí samotný pravděpodobnostní výpočet podle nadefinovaného výpočtového modelu. Pravděpodobnostní posudek mezního stavu únosnosti i použitelnosti lze provést analýzou výsledného histogramu funkce spolehlivosti.

Program ProbCalc disponuje řadou optimalizačních technik, díky nimž dochází ke snížení počtu výpočetních kroků, čímž se sníží časová náročnost výpočtu. Mezi optimalizace implementované v programu ProbCalc patří intervalová, zónová a trendová optimalizace. Další možnosti, které ProbCalc nabízí, ke snížení časové náročnosti výpočtu je použití dynamické knihovny nebo paralelizace, kdy lze výpočet rozdělit na jednotlivé procesory, kterými počítač disponuje. Další možností, které zefektivní výpočet vzhledem k časové náročnosti, je využití grupování vstupních náhodně proměnných veličin. Jedná se o vytvoření společného histogramu náhodně proměnných vstupních veličin, které do výpočtu vstupují společně. Ve výpočetním modelu se pracuje s vytvořeným společným histogramem. Podrobnější popis programu ProbCalc a všech způsobů, jak snížit časovou náročnost výpočtu, je uveden např. v publikaci [16].

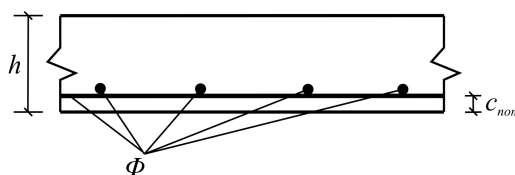
## 6.3 Příklad pravděpodobnostního posudku tenké desky

### 6.3.1 Zadání příkladu

Cílem pravděpodobnostního výpočtu je pravděpodobnostní posudek železobetonové nosné desky na mezní stav únosnosti. Řešena je železobetonová deska po celém svém obvodu prostě podepřena znázorněna na obr. 6.3. Deska je vyrobena z betonu C25/30 s výztuží z oceli B500. Vstupní parametry zadané desky jsou uvedeny v tab. 6.2. Do pravděpodobnostního výpočtu vstupuje 5 variabilních proměnných uvedených v tab. 6.3.



Obr. 6.2: Statické schéma železobetonové desky



Obr. 6.3: Řez železobetonové desky

Železobetonová deska je zatížena rovnoměrným spojitým zatížením, které se skládá ze stálého zatížení  $g$  a užitečného zatížení  $q$ . Do výpočtu se zadávají nominální hodnoty zatížení společně s křivkou trvání zatížení (obr. 6.5), které jsou převzaty ze zdroje [11]. Stálé zatížení je dáno vlastní tíhou železobetonové desky:

$$g = g_{nom} \cdot h_{var} \cdot g_{var} , \tag{6.5}$$

$$g_{nom} = h \cdot \rho = 0,23 \cdot 25 = 5,75 \text{ kNm}^{-2} ,$$

kde  $h_{var}$  je parametr variability tloušťky desky zadaný histogramem znázorněným na obr. 6.4. Histogram  $h_{var}$  je vytvořen pomocí programu HistAn jako tzv. useknutý histogram s normálním rozdělením pravděpodobnosti. Je uvažováno až s 5% odchýlením od zadané tloušťky desky  $h$ . Křivka trvání stálého zatížení  $g_{var}$  je znázorněna na obr. 6.5a.

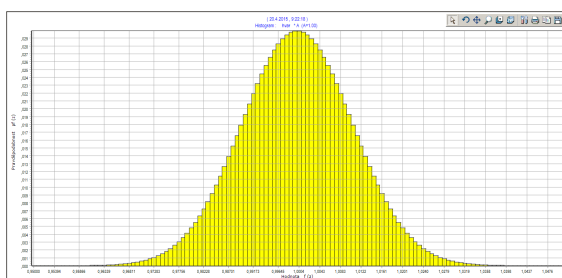
název proměnné	hodnota proměnné
šířka desky	$l = 6 \text{ m}$
tloušťka desky	$h = 0,23 \text{ m}$
Poissonův součinitel pro beton	$\mu = 0,2$
průměr výztuže	$\Phi = 8 \text{ mm}$
počet kusů výztuže na 1 m	$n = 4 \text{ ks}$
krytí výztuže	$c_{nom} = 35 \text{ mm}$

Tab. 6.2: Vstupní parametry řešené desky

název proměnné	typ proměnné	histogram	min	max	počet tříd
parametr variability tloušťky desky $h_{var}$	normální rozdělení	Hvar.dis	0,95	1,05	128
histogram napětí na mezi kluzu $f_s$	normální rozdělení	Fs.dis	518	649	98
histogram pevnosti betonu v tlaku $f_c$	normální rozdělení	Fc.dis	35,2	44,5	71
křivka trvání stálého zatížení $DL$	neparametrické diskrétní rozdělení	Dead1.dis	0,818	1	256
křivka trvání dlouhodobého náhodného zatížení $LL$	neparametrické diskrétní rozdělení	Long1.dis	0	1	256

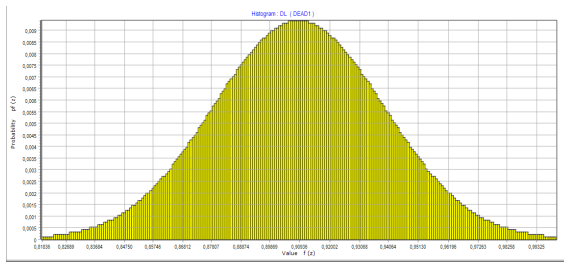
Tab. 6.3: Variabilní proměnné

Užitné zatížení  $q$  je dáno nominální hodnotou  $q_{nom} = 5 \text{ kNm}^{-2}$ . Do výpočtu se zadává nominální hodnota společně s křivkou trvání dlouhodobého zatížení  $q_{var}$ , která je znázorněna na obr. 6.5b.

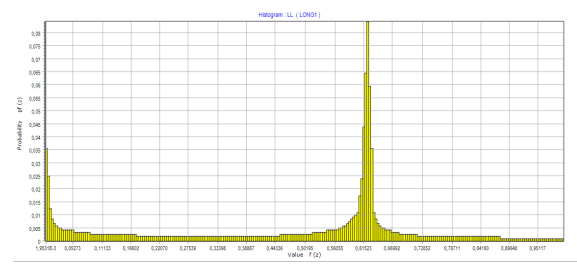


Obr. 6.4: Parametr variability tloušťky desky  $h_{var}$

Železobetonová deska je vyrobena z betonu C25/30 a výztuž z oceli B500. Histogram pevnosti betonu v tlaku je znázorněn na obr. 6.6a a histogram napětí oceli



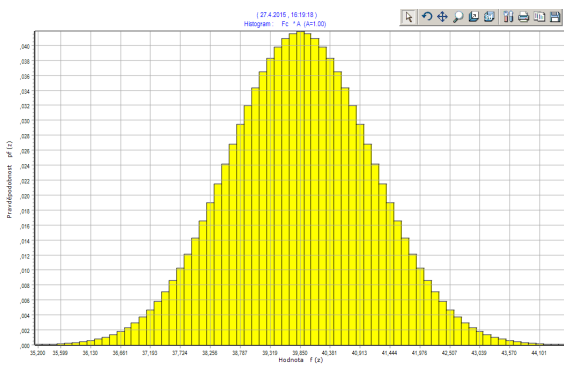
(a) Stálé zatížení



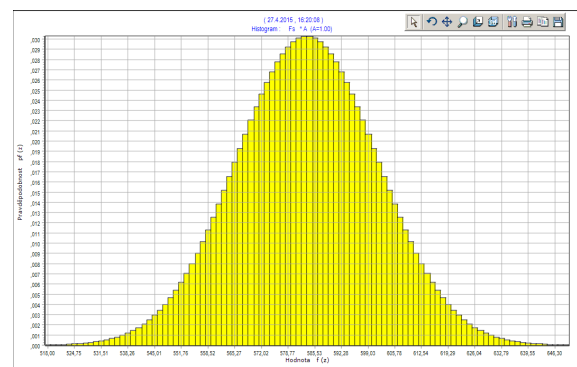
(b) Dlouhodobé zatížení

Obr. 6.5: Křivky trvání zatížení

na mezi kluzu na obr. 6.6b. Histogramy (obr. 6.6) jsou vytvořeny pomocí programu HistAn jako normální rozdělení o zadaných parametrech podle [22].



(a) Histogram pevnosti betonu v tlaku  $f_c$



(b) Histogram pevnosti oceli na mezi kluzu  $f_s$

Obr. 6.6: Parametry variability materiálových vlastností

### 6.3.2 Řešení příkladu

Pro pravděpodobnostní řešení bude využita Ritzova metoda, která je podrobněji zpracována v kap. 4. Na základě Ritzovy metody byla vypočtena funkce, která popisuje průhyb zadané desky. Funkce průhybu je rovna:

$$w(x, y) = \frac{4pl^4}{\pi^6 D} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right), \quad (6.6)$$

kde  $q$  je spojité zatížení,  $l$  je délka čtvercové desky a  $D$  je desková tuhost. Odvození funkce průhybu je provedeno v kap. 4.3.1.

Posudek je nutno provést na úrovni ohybových momentů, proto je potřeba funkci průhybu (6.6) upravit pomocí vztahu (2.11) na funkci popisující průběh ohybových momentů. Vzhledem k tomu, že zadaná železobetonová deska je čtvercového tvaru a zatížena je rovnoměrným spojitým zatížením, měrný ohybový moment  $m_x$  a  $m_y$  si budou rovný. Následující výpočet bude proveden na základě měrného ohybového momentu  $m_x$ , jehož průběh je dán funkcí:

$$m(x, y) = \frac{4pl^2}{\pi^4} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right) (\mu + 1) . \quad (6.7)$$

Základem pravděpodobnostního výpočtu je stanovení účinku zatížení  $S$  a odolnosti konstrukce  $R$ . V zadaném příkladu bude účinek zatížení  $S$  vyjádřen pomocí odvozené funkce ohybového momentu  $m_x$ . Maximální ohybový moment  $m_x$  při rovnoměrném spojitým zatížení se bude vyskytovat ve středu čtvercové desky. Pro účinek zatížení  $S$  bude platit vztah:

$$S = m_{x,y} \left( x = \frac{l}{2}, y = \frac{l}{2} \right) . \quad (6.8)$$

Odolnost železobetonové desky je dána únosností (6.10) na základě vztahů z normy [6]:

$$\begin{aligned} d &= h - c_{nom} - \Phi - \frac{\Phi}{2} , \\ A &= n \cdot \pi \cdot \frac{\pi^2}{4} , \\ F_s &= A \cdot f_y , \\ x &= \frac{F_s}{0,8 \cdot b \cdot f_c} , \\ M_{rd} &= F_s \cdot (d - 0,4x) , \end{aligned} \quad (6.9)$$

kde  $d$  je účinná výška průřezu,  $h$  je tloušťka desky,  $c_{nom}$  je krytí výztuže,  $\pi$  je průměr výztuže,  $n$  označuje počet výtuže na 1 m desky,  $A$  je plocha výztuže,  $x$  je výška tlačené oblasti betonu,  $F_s$  označuje sílu ve výztuži,  $f_y$  a  $f_c$  jsou pevnosti oceli a betonu. Šířka posuzované konstrukce je označena  $b$ , v případě posuzování desek je rovna 1 m.  $M_{rd}$  označuje moment únosnosti železobetonové desky.

Do výpočtu se zavádí za únosnost konstrukce  $R$  moment únosnosti železobeto-

nové desky  $M_{rd}$ :

$$R = M_{rd}. \quad (6.10)$$

### 6.3.3 Řešení příkladu v programu Anthill

Program Anthill je založen na pravděpodobnostní metodě SBRA, která spadá mezi simulační metody 6.2.1. Základem pravděpodobnostního výpočtu je určení funkce spolehlivosti (6.1). Účinek zatížení  $S$  je zadán pomocí ohybového momentu (6.8) vyjádřeného na základě Ritzovy metody. Odolnost konstrukce  $R$  je zadána pomocí vztahů (6.9). Výpočet v programu Anthill byl nastaven na 10 000 000 simulací a proběhl 10 krát. Výsledné grafy účinku zatížení  $S$ , odolnosti konstrukce  $R$  a funkce spolehlivosti  $SF$  jednoho výpočtu jsou znázorněny na obr. 6.7.

Program Anthill je založený na generátoru pseudonáhodných čísel, proto byl výpočet proveden 10 krát, aby výsledná pravděpodobnost poruchy mohlo být porovnána s výpočtem pomocí programu ProbCalc, který je založený na přímé numerické metodě POPV. Pravděpodobnostní posudek je proveden podle vztahu (6.3). Konstrukce vyhovuje na třídu spolehlivosti RC3 podle mezního stavu únosnosti:

$$p_f = 2,28 \cdot 10^{-7} < p_d = 8,4 \cdot 10^{-6}. \quad (6.11)$$

simulace	$p_f$
1.	$2,0 \cdot 10^{-7}$
2.	$1,0 \cdot 10^{-7}$
3.	$1,8 \cdot 10^{-7}$
4.	$3,7 \cdot 10^{-7}$
5.	$3,0 \cdot 10^{-7}$
6.	$0,0 \cdot 10^{-7}$
7.	$4,8 \cdot 10^{-7}$
8.	$1,5 \cdot 10^{-7}$
9.	$1,0 \cdot 10^{-7}$
10.	$4,0 \cdot 10^{-7}$

Tab. 6.4: Výsledné hodnoty  $p_f$  z programu Anthill

### 6.3.4 Řešení příkladu v programu ProbCalc

Program ProbCalc využívá metodu POPV, která je uvedena v kap. 6.2.2. Pravděpodobnostní posudek je založen na funkci spolehlivosti (6.1). Účinek zatížení  $S$  je vyjádřen pomocí Ritzovy metody ve vztahu (6.8) a odolnost konstrukce  $R$  je určena pomocí vztahů (6.9).

Program ProbCalc nabízí řadu možností, jak snížit časovou náročnost výpočtu. Jednou z nich je vytvoření grup, které v řešeném příkladu není možné použít, protože ve výpočtu se vyskytují statisticky závislé veličiny. Časovou náročnost zadaného příkladu lze snížit použitím optimalizací. Při řešení byla použita intervalová optimalizace, která je založena na snížení počtu intervalů u vstupních veličin, které nemají vliv na snížení přesnosti výsledku. Další použitou optimalizací v řešeném příkladu byla zónová optimalizace, která spočívá ve vyřazení intervalů histogramů, které nemají vliv na vznik pravděpodobnosti poruchy  $p_f$ . Použitím zónové optimalizace je možné zobrazení pouze zkráceného grafu funkce spolehlivosti  $SF$ . Ve výpočtu byla použita také trendová optimalizace, která je závislá na zónové optimalizaci. Principem je sledování vývoje hodnot funkce spolehlivosti  $SF$ . Jestliže s měnící se hodnotou vstupní proměnné dosahuje funkce spolehlivosti  $SF$  vyšších kladných hodnot, pak tato vstupní proměnná nemá vliv na vznik pravděpodobnosti poruchy  $p_f$ .

Výsledné grafy účinku zatížení  $S$ , odolnosti konstrukce  $R$  a detailu záporné části funkce spolehlivosti  $SF$  pravděpodobnostního výpočtu jsou znázorněny na obr. 6.8.

Výsledná pravděpodobnost poruchy  $p_f$  je rovna:

$$p_f = 3,52 \cdot 10^{-8} < p_d = 8,4 \cdot 10^{-6}, \quad (6.12)$$

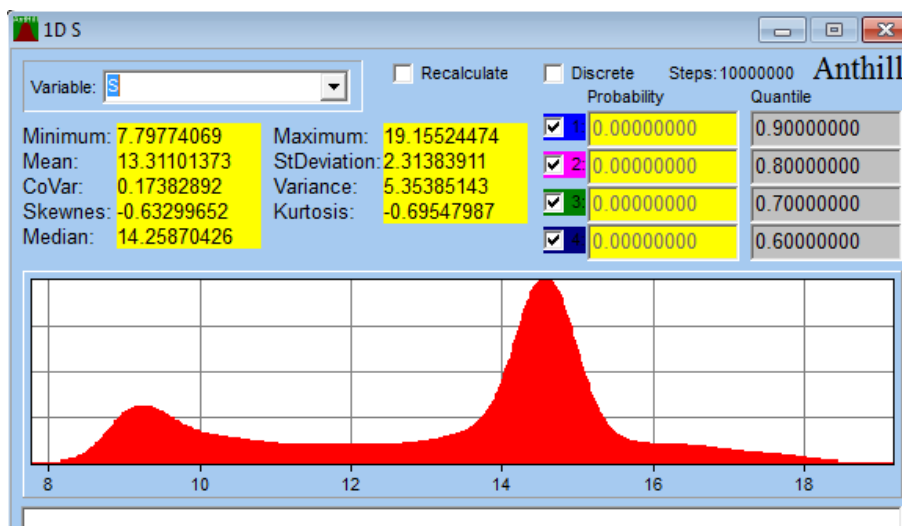
podle pravděpodobnostního posudku (6.3) konstrukce vyhoví na třídu spolehlivosti RC3 na mezní stav únosnosti.

### 6.3.5 Porovnání výsledků

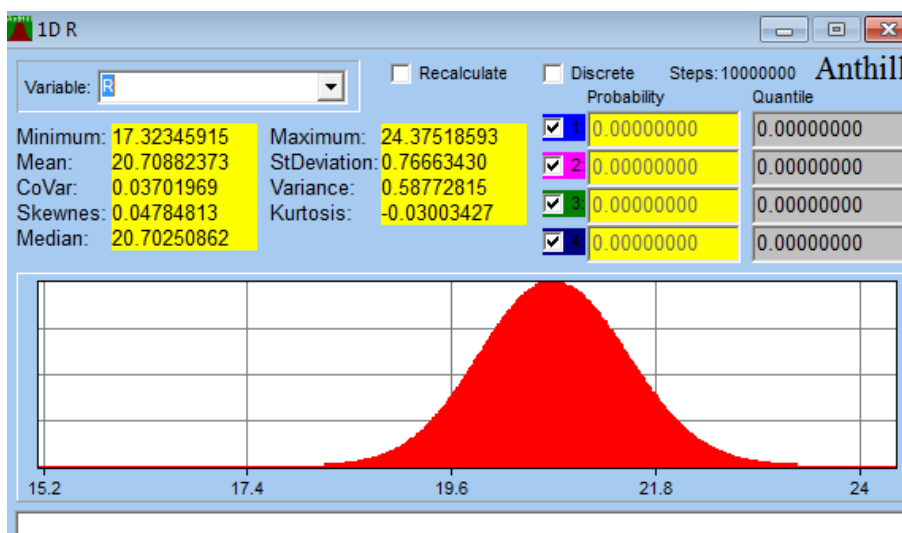
Výpočet byl proveden v programu Anthill a programu ProbCalc. V obou případech zadaná železobetonová deska vyhověla na posuzovaný mezní stav únosnosti v nejvyšší třídě spolehlivosti RC3. Pravděpodobnost poruchy získaná programem Anthill

vychází  $p_f = 2,28 \cdot 10^{-7}$  a pravděpodobnost poruchy vypočtena programem ProbCalc  
 $p_f = 3,52 \cdot 10^{-8}$ .

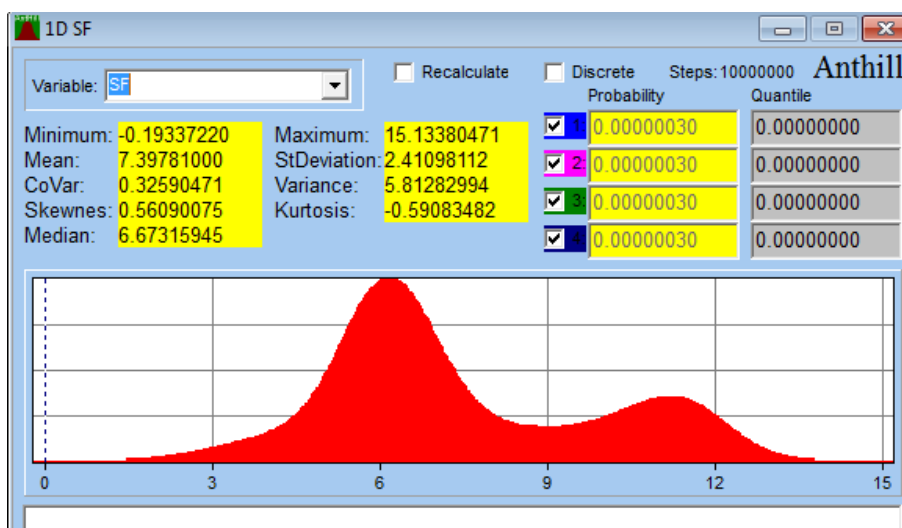




(a) Účinek zatížení  $S$

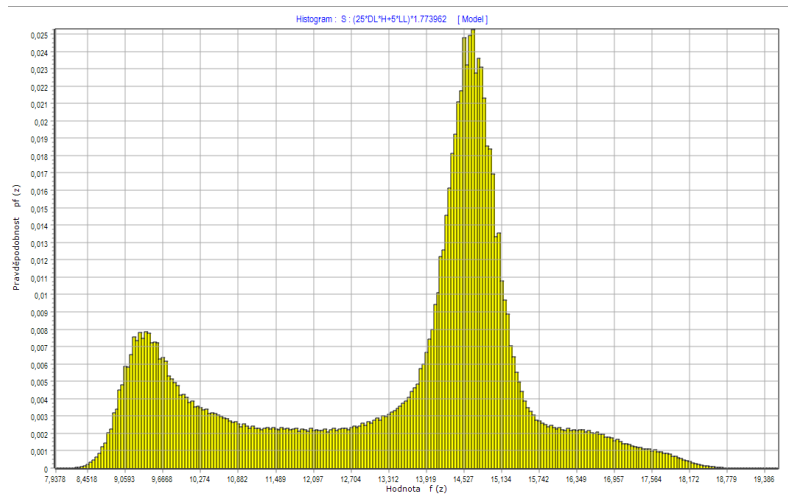


(b) Odolnost konstrukce  $R$

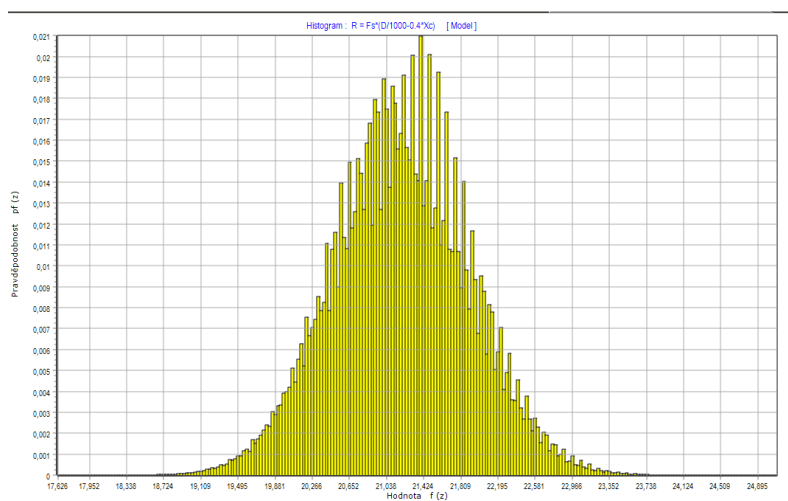


(c) Funkce spolehlivosti  $SF$

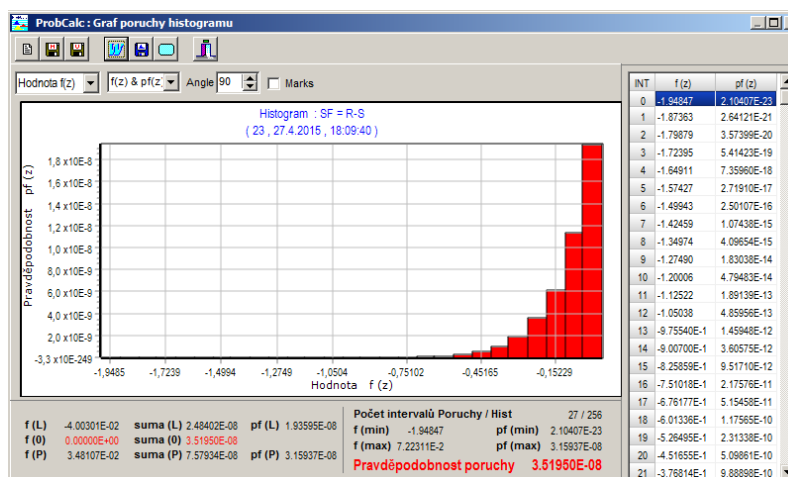
Obr. 6.7: Výstupy z programu Anthill



(a) Účinek zatížení  $S$



(b) Odolnost konstrukce  $R$



(c) Detail záporné části funkce spolehlivosti  $SF$

Obr. 6.8: Výstupy z programu ProbCalc

## 7 ZÁVĚR

Cílem bakalářské práce bylo prohloubení znalostí o deskových konstrukcích. Práce je zaměřena na statickou analýzu tenkých desek, které jsou řešeny na základě Kirchhoffovy teorie. Statická analýza tenké desky je založena na řešení deskové rovnice, jejíž odvození je zpracováno v kap 2.3. Tuto diferenciální rovnici IV. řádu lze řešit několika způsoby. Pro tuto práci byla vybrána metoda sítí, Ritzova metoda a metoda konečných prvků. U každé z uvedených metod byla popsána jejich teoretická podstata a následně provedena statická analýza konkrétního příkladu.

Při řešení konkrétní tenké desky metodou sítí bylo využito programu Excel pro snadný výpočet soustavy lineárních rovnic. Řešena byla čtvercová deska zatížena rovnoměrným spojitým zatížením, což umožňovalo využít symetrii zvolené sítě. Počet neznámých průhybů se výrazně zredukoval. Přestože byla konstrukce rozdělena sítí se vzdálenosti sousedních uzlů 1 m, bylo dosaženo srovnatelných výsledků jako výpočtem metodou konečných prvků s velikostí konečného prvku  $0,1\text{ m} \times 0,1\text{ m}$ .

Metoda konečných prvků byla řešena vytvořením algoritmu v programu Matlab. K řešení tenké desky byl zvolen čtyřuzlový obdelníkový prvek o velikosti  $0,1\text{ m} \times 0,1\text{ m}$ . Ve výpočtu bylo nutné použít numerickou integraci v podobě Gaussovy integrace. Vytvořeným algoritmem bylo dosaženo téměř shodných výsledků v porovnání s komerčním softwarem Scia Engineer, jenž je založen také na metodě konečných prvků.

Největších rozdílů v porovnání s metodou sítí a metodou konečných prvků dosahovala Ritzova metoda se zvolenou aproximační goniometrickou funkcí. Výpočet Ritzovou metodou spočíval v odvození funkce průhybu pomocí derivací a integrací. Ritzova metoda je omezena tvarem řešené konstrukce, jelikož její výpočet spočívá v nalezení aproximační funkce, která popisuje předpokládaný průhyb a musí vyhovovat okrajovým podmínkám. Výhodou Ritzovy metody je řešení ve formě funkce průhybu zadané konstrukce. Tato odvozená průhybová funkce byla využita pro efektivní pravděpodobnostní výpočet.

Pravděpodobnostní posudek tenké desky byl proveden v programu Anthill, jehož podstatou je simulační metoda SBRA, a v programu ProbCalc, který je založen na přímé numerické metodě POPV. Při pravděpodobnostním řešení vstupují do výpo-

čtu variabilní proměnné veličiny, které mohou být zadány např. formou histogramů. Jejich zavedením do výpočtu lze vystihnout nahodilosti, které ovlivňují spolehlivost konstrukce.

Hlavním přínosem bakalářské práce je shrnutí tří odlišných metod, které lze využít pro statickou analýzu tenké desky. Práce je také doplněna o pravděpodobnostní posudek tenké desky. Bakalářskou práci by bylo možné rozšířit o další metody, kterými lze řešit deskovou rovnici (například Galerkinova metoda nebo metoda hraničních prvků), případně o řešení tlustých desek Mindlinovou teorií. V rámci navazující diplomové práce lze také pokračovat ve studiu Ritzovy metody v aplikaci na spojitě desky s příslušným pravděpodobnostním posouzením.

## LITERATURA

- [1] BITTNAR, Zdeněk a Jiří ŠEJNOHA. *Numerické metody mechaniky 1*. 1. vyd. Praha: ČVUT, 1992, 309 s. ISBN 80-010-0855-X.
- [2] BITTNAR, Zdeněk a Jiří ŠEJNOHA. *Numerické metody mechaniky 2*. 1. vyd. Praha: ČVUT, 1992, 261 s. ISBN 80-010-0901-7.
- [3] BROŽOVSKÝ, Jiří a Alois MATERNA. *Metoda konečných prvků ve stavební mechanice: Pomůcka pro stavební inženýry* [online]. 2012 [cit. 2015-02-13]. Dostupné z: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda\\_konecnnych\\_prvku\\_stavebni\\_mechanika.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/metoda_konecnnych_prvku_stavebni_mechanika.pdf)
- [4] BROŽOVSKÝ, Jiří a Alois MATERNA. *Základy matematické teorie pružnosti* [online]. 2012 [cit. 2015-03-29]. Dostupné z: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/mat\\_teorie\\_pruznosti.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/mat_teorie_pruznosti.pdf)
- [5] ČSN EN 1991. *Eurokód: Zásady navrhování konstrukcí*. Český normalizační institut, Praha, 2004.
- [6] ČSN EN 1992-1-1. *Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí – část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*. Český normalizační institut, 2006.
- [7] DICKÝ, Jozef, Zora MISTRÍKOVÁ a Jozef SUMEC. *Pružnost a plasticita v stavebnictví 2*. Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2006. ISBN 80-227-2515-3.
- [8] DOBIÁŠOVÁ, Vladimíra a Věra VARAĎOVÁ. *Pružnost a plasticita II: Pomůcka do cvičení*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, s.r.o.
- [9] Famous scientists: The art of genius. [online]. 2015 [cit. 2015-03-07]. Dostupné z: <http://www.famousscientists.org/gustav-kirchoff/>
- [10] GUŠTÁR, Milan a Pavel MAREK. *Výpočetní program Anthill: Komerční software pro simulaci Monte Carlo, verze 2.6* [online]. ARTech, Nad Vinicí 7, 143 00

- Praha 4, 1989-2007 [cit. 2015-04-18]. Dostupné z: <http://www.sbra-anthill.com/>
- [11] GUŠTÁR, Milan a Pavel MAREK. *Simulation Based Reliability Assessment* [online]. [cit. 2015-04-23]. Dostupné z: <http://www.sbra-anthill.com/>
- [12] JANAS, Petr, Martin KREJSA a Vlastimil KREJSA. *ProbCalc software a publikace věnované metodě POPV* [online]. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, 2004-2010 [cit. 2015-04-18]. Dostupné z: <http://www.fast.vsb.cz/228/cs/popv>
- [13] KOLÁŘ, Vladimír, Jiří BENEŠ a Zdeněk SOBOTKA. *Nosné stěny a desky*. Vydání první. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1961.
- [14] KONVALINKA, Petr. *Analýza stavebních konstrukcí: příklady*. České vysoké učení technické v Praze, 2009.
- [15] KREJSA, Martin a Lenka LAUSOVÁ. *Variační metody ve stavební mechanice* [online]. 2010 [cit. 2015-02-13]. Dostupné z: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/variacni\\_metody\\_tisk.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/variacni_metody_tisk.pdf)
- [16] KREJSA, Martin a Petr KONEČNÝ. *Spolehlivost a bezpečnost staveb* [online]. 2011-2012 [cit. 2015-02-13]. Dostupné z: [http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/spolehlivost\\_tisk.pdf](http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/spolehlivost_tisk.pdf)
- [17] *MATLAB: Komerční software* [online]. The MathWorks, Inc., Massachusetts, USA [cit. 2015-04-18]. Dostupné z: <http://www.mathworks.com/products/matlab/>
- [18] MELCHERS, Robert E. *Structural reliability analysis and prediction*. 2nd ed. Chichester: Wiley, 2001, 437 s. ISBN 04-719-8771-9.
- [19] NEMETSCHKEK AG. *Scia Engineer* [online]. 2015 [cit. 2015-04-03]. Dostupné z: <http://nemetschek-scia.com/cs/software/product-selection/scia-engineer>

- [20] SAUER, Timothy. *Numerical analysis*. Boston: Pearson/Addison-Wesley, c2006, 669 s. ISBN 03-212-6898-9.
- [21] SERVIT, Radim, Zbyněk DRAHOŇOVSKÝ a Jiří ŠEJNOHA. *Teorie pružnosti a plasticity, 2. díl*. Vydání třetí. Olomouc: České učení technické v Praze, 1982.
- [22] SLÁNSKÝ, Bohuslav. *Spolehlivost konstrukcí: Histogramy materiálových charakteristik pro pravděpodobnostní posuzování mostů*. Praha, 2007. ISBN 978-80-86246-33-8. Dostupné z: <http://fast10.vsb.cz/konecny/files/sp&b/SLANSKY.pdf>
- [23] ŠEJNOHA, Jiří a Jitka BITTNAROVÁ. *Pružnost a pevnost 20*. Vydavatelství ČVUT, 1998.
- [24] TEPLÝ, Břetislav a Svatopluk ŠMIRÁK. *Pružnost a plasticita II*. 2. vyd. Brno: CERM, 2000, 199 s. ISBN 80-214-1622-X.
- [25] VENTSEL, Eduard a Theodor KRAUTHAMMER. *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Application*. New York: Eastern Hemisphere Distribution, 2001. ISBN 0-8247-0575-0.