

# **Věty o minimaxu a jejich použití**

## **Minimax Theorems**

## Zadání bakalářské práce

Student: **Jiřina Guniová**  
Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie  
Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika  
Téma: **Věty o minimaxu a jejich použití**  
**Minimax Theorems**

### Zásady pro vypracování:

Spousta problémů (speciálně řešení řady diferenciálních rovnic) vede k úkolu najít stacionární bod nějakého funkcionálu. Práce bude zaměřena na několik přístupů umožňujících (díky "geometrii" příslušného funkcionálu) dokázat existenci i numericky najít příslušný stacionární bod.

### Předpokládaná osnova práce:

1. Věty o minimaxu.
2. Příklady nalezení stacionárních bodů funkcí dvou reálných proměnných.
3. Nalezení přibližného řešení nelineární diferenciální rovnice.

### Seznam doporučené odborné literatury:

dle pokynů vedoucího práce

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2014

Datum odevzdání: 07.05.2015



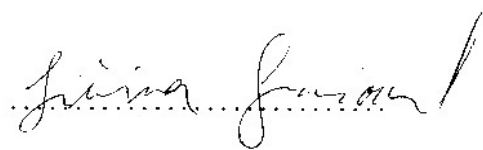
doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.  
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.  
děkan fakulty

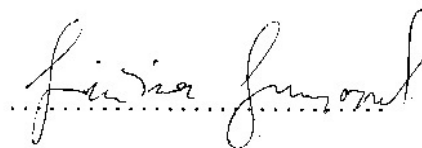
Souhlasím se zveřejněním této bakalářské práce dle požadavků čl. 26, odst. 9 *Studijního a zkušebního řádu pro studium v bakalářských programech VŠB-TU Ostrava*.

V Ostravě 7.5.2015

Handwritten signature of Jitka Fučíková in cursive script, written over a dotted line.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 7.5.2015

Handwritten signature of Jitka Fučíková in cursive script, written over a dotted line.

Na tomto místě bych ráda poděkovala Doc. RNDr. Jiřímu Bouchalovi, Ph.D., pod jehož vedením tato práce vznikla.

## **Abstrakt**

V této bakalářské práci se zabývám hledáním stacionárních bodů funkcí více proměnných pomocí vybraných vět o minimaxu. Na začátku vysvětlím podmínky existence stacionárního bodu a možnosti jeho nalezení. Poté důkladně popíši algoritmus založený na minimaxu, který se k nalezení těchto bodů používá. Uvedu několik řešených příkladů pro lepší pochopení a nakonec vysvětlím, jak se dá tento postup aplikovat při hledání slabých řešení okrajových úloh.

**Klíčová slova:** minimax, stacionární bod, slabé řešení okrajových úloh

## **Abstract**

This bachelor thesis deals with searching for stationary points of multidimensional functions, using the minimax theorems. Firstly, it explains conditions of existence of stationary points and finding them. Secondly, it thoroughly explains the algorithm based on minimax, which solves those problems. Several solved problems are shown for better understanding. And at last, it explains how previously introduced theorems and algorithm can find weak solutions of boundary value problems.

**Keywords:** minimax, stationary point, weak solutions of boundary value problems

## Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Existence stacionárního bodu</b>	<b>5</b>
2.1	Ekelandův variační princip . . . . .	5
2.2	Věta o přechodu hory . . . . .	8
2.3	Věta o sedlovém bodě . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Algoritmus</b>	<b>14</b>
3.1	Počáteční cesta . . . . .	15
3.2	Hledání maxima na křivce . . . . .	15
3.3	Kontrola ukončující podmínky . . . . .	16
3.4	Minimalizace . . . . .	17
3.5	Ošetření nekonečného cyklu . . . . .	18
3.6	Převedení na problematiku $n$ proměnných . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Aplikace na funkce dvou proměnných</b>	<b>19</b>
4.1	První vybraná funkce . . . . .	19
4.2	Druhá vybraná funkce . . . . .	20
4.3	Třetí vybraná funkce . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Okrajová úloha</b>	<b>23</b>
5.1	Stacionární bod funkcionálu . . . . .	23
5.2	Převedení na problém $n$ proměnných . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Aplikace na okrajovou úlohu</b>	<b>27</b>
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>30</b>
<b>8</b>	<b>Reference</b>	<b>31</b>
	<b>Přílohy</b>	<b>31</b>
<b>A</b>	<b>Grafy k aplikacím algoritmu</b>	<b>32</b>
<b>B</b>	<b>Tabulky k aplikacím algoritmu</b>	<b>36</b>

**Seznam tabulek**

1	Konvergence numerického řešení úlohy $f'_1(x, y) = (0, 0)$ . . . . .	37
2	Konvergence numerického řešení úlohy $f'_3(x, y) = (0, 0)$ . . . . .	38
3	Konvergence numerického řešení úlohy $-u''(x) = u^3(x), u(0) = u(\pi) = 0$ .	39

## Seznam obrázků

1	Ekelandův variační princip - příklad . . . . .	6
2	Ekelandův variační princip - protipříklad . . . . .	6
3	Věta o přechodu hory - příklad . . . . .	9
4	Věta o přechodu hory - protipříklad . . . . .	9
5	Věta o sedlovém bodě - příklad . . . . .	11
6	Věta o sedlovém bodě - protipříklad . . . . .	12
7	Algoritmus - umístění hledaného bodu . . . . .	15
8	Algoritmus - půlení intervalu ze směru $C_{m-1}$ . . . . .	16
9	Algoritmus - posun proti gradientu . . . . .	17
10	Algoritmus - přesun bodů . . . . .	18
11	Vybraná funkce $f_2$ - 3D graf . . . . .	20
12	Okrajová úloha - aproximace $\sin(x)$ na 9 uzlech . . . . .	25
13	Okrajová úloha - obecný náčrt $\varphi$ . . . . .	25
14	Okrajová úloha - výchozí funkce $u_i, i = 2$ . . . . .	28
15	Okrajová úloha - řešení . . . . .	29
16	Okrajová úloha - porovnání . . . . .	29
17	Hledání stacionárního bodu - $f_1(x, y) = -(x + \frac{21}{2})^2 + (y - \frac{85}{3})^2$ . . . . .	33
18	Hledání stacionárního bodu - $f_2(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$ . . . . .	34
19	Hledání stacionárního bodu - $f_3(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{1-x^2-y^2} \cdot (2-x)$ . . . . .	35



## 1 Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá hledáním stacionárních bodů funkcí dvou a více proměnných pomocí minimaxu. Na úlohu nalezení stacionárního bodu vede spousta problémů, například řešení řady diferenciálních rovnic.

Má-li funkce stacionární bod (podmínky existence budou vysvětleny v následující kapitole), je možné tento bod najít pomocí algoritmu, založeném na minimaxu. Se správnými vstupními parametry (které závisí na „geometrii“ dané funkce) jsme tak schopni nalézt i stacionární body funkcí, které bychom jinak hledali těžko. Předvedu tři příklady „geometrií“ funkcí a metod postupu, založených na splnění tzv. Palais-Smaleovy podmínky.

Je třeba říci, že minimax v této práci není klasické pojetí z teorie her, kdy jde jen o minimalizování maximálních ztrát, prakticky evaluace na binárním stromě. V této práci minimaxem myslíme algoritmus založený na tom, že kritická hodnota zobrazení je infimum z maxim na křivkách, spojujících dva předem vybrané body.

Podrobněji celý princip a algoritmus vysvětlím na funkci dvou proměnných, neboť tyto úlohy se dobře znázorňují v grafech a čtenář na nich lépe pochopí hlavní myšlenku práce.

Jakmile čtenář pochopí princip a postup na zobrazeních  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , je schopný hledat stacionární body i zobrazení z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}$ .

Čímž se dostáváme k nejzajímavější části této práce - řešení diferenciálních rovnic. Uvědomíme-li si totiž, že slabá řešení okrajových úloh odpovídají stacionárním bodům funkcionálu a zvolíme-li vhodnou diskretizaci, stačí pak aplikovat stejný algoritmus, který byl vytvořen pro zobrazení  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 2 Existence stacionárního bodu

Uvažujme zobrazení

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}).$$

Stacionárními body  $f$  pak rozumíme body

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ pro něž}$$

$$f'(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (0, 0)$$

Pro nalezení postačujících podmínek existence stacionárního bodu budeme uvažovat nad následujícími konkrétními příklady a odvodíme podmínky v závislosti na „geometrii“ daných funkcí.

### 2.1 Ekelandův variační princip

#### 2.1.1 Příklad

Mějme zobrazení

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

jehož graf je znázorněn na obrázku 1.

Zřejmě

$$\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = f(0, 0) = 0$$

a  $(0, 0)$  je stacionárním bodem  $f$ .

Nabízí se myšlenka, že pro

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \text{ takovou, že}$$

$$\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) \in \mathbb{R}$$

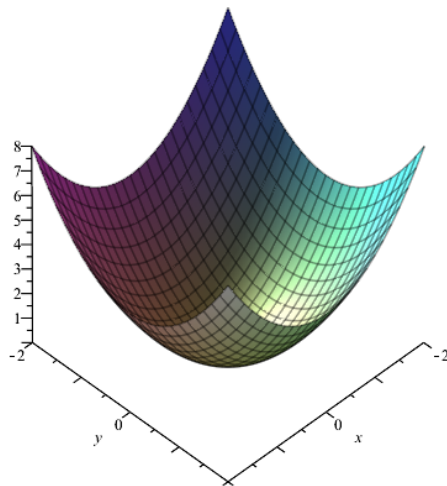
platí:

$$c \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$$

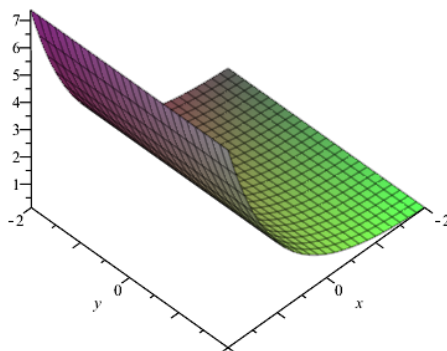
je kritickou hodnotou zobrazení  $f$ , tedy

$$\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c \wedge f'(x, y) = (0, 0)$$

Následující protipříklad však ukazuje, že to nemusí být pravda.



Obrázek 1: Ekelandův variační princip - příklad



Obrázek 2: Ekelandův variační princip - protipříklad

### 2.1.2 Protipříklad

Vezměme si funkci

$$f(x, y) = e^x$$

(viz její graf na obrázku2). Pak

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

$$\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = 0 \in \mathbb{R},$$

ale pro každé  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x > 0,$$

a  $f$  tedy nemá žádný stacionární bod.

### 2.1.3 Dodatek

Dá se dokázat, že pro zobrazení  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  taková, že  $c = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) \in \mathbb{R}$ , existuje taková posloupnost  $(x_n, y_n)$ , že:

$$f(x_n, y_n) \rightarrow c,$$

$$f'(x_n, y_n) \rightarrow 0.$$

Kdybychom věděli, že z takovéto posloupnosti lze vybrat posloupnost konvergentní, bylo by  $c$  kritickou hodnotou na  $f$ .

$$(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow (x, y)$$

$$c \leftarrow f(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow f(x, y)$$

$$0 \leftarrow f'(x_{n_k}, y_{n_k}) \rightarrow f'(x, y)$$

Jelikož jedna posloupnost nemůže mít dvě různé limity, z předchozích tvrzení vyplývá, že:

$$f(x, y) = c$$

$$f'(x, y) = 0$$

Využijeme toho, že na prostoru  $\mathbb{R}^n$  (kde  $n \in \mathbb{N}$ ) se dá z každé **omezené** posloupnosti vybrat posloupnost konvergentní a že každá konvergentní posloupnost je omezená. Dodáme ke „geometrickým“ předpokladům kladeným na  $f$  ještě tzv. Palais-Smaleovu podmínku:

**DEFINICE:**

Řekněme, že  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  splňuje Palais-Smaleovu podmínku, pokud platí implikace:  
Je-li

- $((x_n, y_n))$  je posloupnost v  $\mathbb{R}^2$  taková, že
- $(f(x_n, y_n))$  je omezená posloupnost v  $\mathbb{R}$  a že
- $f'(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$  je omezená.

pak z posloupnosti  $(x_n, y_n)$  lze vybrat posloupnost konvergentní.

Vše shrnuje tzv. Ekelandův variační princip.

**Věta 2.1** *Ekelandův variační princip v  $\mathbb{R}^2$  (Ekeland variational principle in  $\mathbb{R}^2$ ); Ekeland; 1974*  
Nechť

- $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,
- $f$  je na  $\mathbb{R}^2$  omezená zdola,
- $f$  splňuje Palais-Smaleovu podmínku.

Pak existuje

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$$

a

$$c = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$$

je kritickou hodnotou  $f$ .

## 2.2 Věta o přechodu hory

### 2.2.1 Příklad

Nyní si prohlédněme graf funkce na obrázku 3.

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{1-x^2-y^2} \cdot (2 - x)$$

Nabízí se myšlenka, že pokud platí

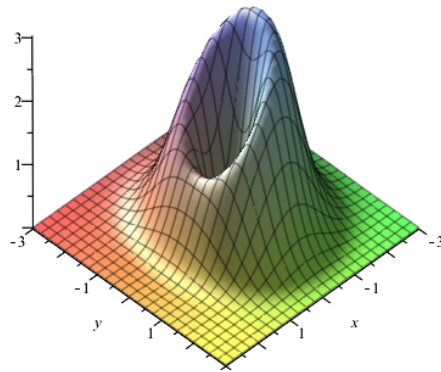
$$f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

$$r \in \mathbb{R}^+,$$

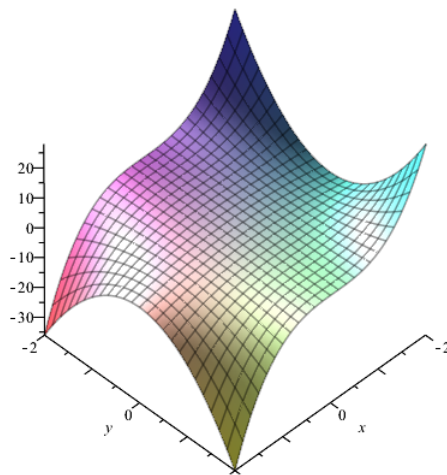
$$e = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2, \|e\|_{\mathbb{R}^2} > r,$$

$$0 \stackrel{\text{ozn.}}{=} (0, 0) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\inf_{\|(x,y)\|_{\mathbb{R}^2}=r} f(x, y) > f(0) \geq f(e),$$



Obrázek 3: Věta o přechodu hory - příklad



Obrázek 4: Věta o přechodu hory - protipříklad

je

$$c \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in (0,1)} f(\gamma(t)),$$

kde

$$\Gamma \stackrel{\text{def.}}{=} \{\gamma \in C((0,1), \mathbb{R}^2) : \gamma(0) = 0 \wedge \gamma(1) = e\}$$

( $\Gamma$  je množina všech křivek  $\gamma$ , jenž v  $\mathbb{R}^2$  spojují body 0 a  $e$ )

kritickou hodnotou  $f$ .

### 2.2.2 Protipříklad

Uvažujme zobrazení z obrázku 4 s předpisem:

$$f(x, y) = x^2 + (1 - x^3) \cdot y^2$$

a zvolme

$$r = \frac{1}{2}, e = (2, 2)$$

Pak platí:

$$f(0) = 0 = f(e)$$

$$\inf_{\|(x,y)\|_{\mathbb{R}^2}=r} f(x,y) = \min_{\|(x,y)\|_{\mathbb{R}^2}=r} f(x,y) > 0.$$

Nicméně snadno si spočítáme, že:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2 \cdot (1 - x^3)y$$

a proto jediným stacionárním bodem  $f$  je 0, přičemž  $f(0) < c \stackrel{def.}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in (0,1)} f(\gamma(t))$ ,  $c$  není kritickou hodnotou  $f$ .

### 2.2.3 Dodatek

Příčinou potíží je toto: volíme-li  $\gamma_n \in \Gamma$  a  $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$  tak, aby

$$\max_{t \in (0,1)} f(\gamma_n(t)) = f(x_n, y_n) \rightarrow c$$

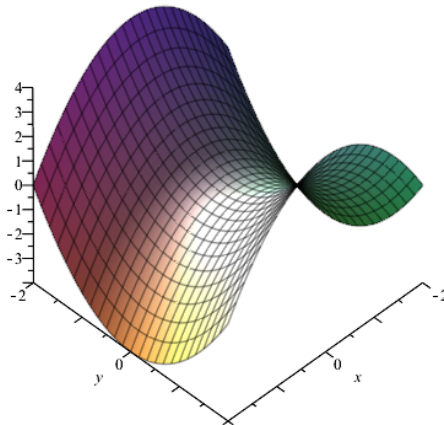
pak  $\|(x_n, y_n)\| \rightarrow \infty$ .

Nicméně dá se dokázat, že i pro funkce splňující výše uvedené předpoklady existuje posloupnost  $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$  taková, že

$$f(x_n, y_n) \rightarrow c \wedge f'(x_n, y_n) \rightarrow 0$$

Tato situace se tedy dá zachránit, přidáme-li k předpokladům funkce z obrázku 3 ještě Palais-Smaleovu podmínku (2.1.3).

Všechny podmínky shrnuje tzv. věta o přechodu hory:



Obrázek 5: Věta o sedlovém bodě - příklad

**Věta 2.2** *Věta o přechodu hory v  $\mathbb{R}^2$  (Mountain pass theorem in  $\mathbb{R}^2$ ); Ambrosetti, Rabinowitz; 1973*

*Nechť*

- $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,
- $r \in \mathbb{R}^+, e \in \mathbb{R}^2, \|e\| > r$ ,
- $\inf_{\|x\|=r} f(x) > f(0) \geq f(e)$ ,
- $f$  splňuje Palais-Smaleovu podmínku.

*Potom*

$$c \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in (0,1)} f(\gamma(t)),$$

*kde*

$$\Gamma \stackrel{\text{def.}}{=} \{\gamma \in C(\langle 0, 1 \rangle, \mathbb{R}^2) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\},$$

*je kritickou hodnotou funkce  $f$ .*

## 2.3 Věta o sedlovém bodě

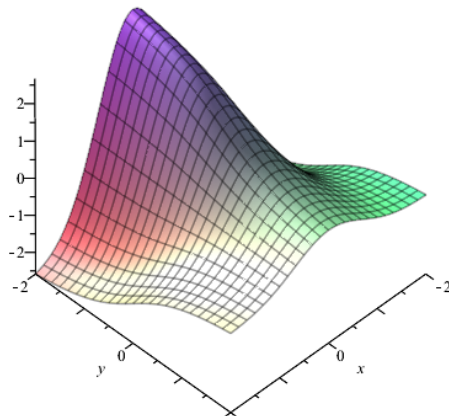
### 2.3.1 Příklad

Zobrazení

$$f(x, y) = -x^2 + y^2$$

z obrázku 5 je jednou z funkcí, pro něž





Obrázek 6: Věta o sedlovém bodě - protipříklad

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

$$\exists \varrho \in \mathbb{R}^+ : \inf_{(x,y) \in \{(0,y): y \in \mathbb{R}\}} f(x,y) > \max_{(x,y) \in \{(-\varrho,0), (\varrho,0)\}} f(x,y).$$

Opět bychom se mohli na základě tohoto příkladu mylně domnívat, že obecně platí:

$$c \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in \langle -\varrho, \varrho \rangle} J(\gamma(t))$$

je kritickou hodnotou  $f$ , když

$$\Gamma = \{\gamma \in C(\langle -\varrho, \varrho \rangle, \mathbb{R}^2) : \gamma(-\varrho) = (-\varrho, 0), \gamma(\varrho) = (\varrho, 0)\}.$$

(Tedy  $\Gamma$  je množina všech cest  $\gamma$ , spojujících v  $\mathbb{R}^2$  body  $(-\varrho, 0)$  a  $(\varrho, 0)$ .)

### 2.3.2 Protipříklad

Zobrazení z obrázku 6 s předpisem:

$$f(x, y) = (2e^{-x^2} - 1) \cdot \operatorname{arccotg}(y)$$

Zvolíme si  $\varrho = 1$ . Pak platí

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} f(0, y) = 0 > \max\{f(-\varrho, 0), f(\varrho, 0)\} = \left(\frac{2-e}{e}\right) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ale protože

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -4xe^{-x^2} \cdot \operatorname{arccotg}(y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -(2e^{-x^2} - 1) \cdot \frac{1}{1+y^2},$$

neexistuje žádný stacionární bod  $f$ . Příčina je stejná, jako u předchozího případu.

### 2.3.3 Dodatek

V tomto případě všechny potřebné podmínky reprezentuje tzv. věta o sedlovém bodě.

**Věta 2.3** *Věta o sedlovém bodě v  $\mathbb{R}^2$  (Saddle point theorem in  $\mathbb{R}^2$ ); Rabinowitz; 1978*

*Nechť*

- $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
- $\exists \varrho \in \mathbb{R}^+ : \inf_{(x,y) \in \{(0,y):y \in \mathbb{R}\}} f(x,y) > \max_{(x,y) \in \{(-\varrho,0),(\varrho,0)\}} f(x,y)$
- $f$  splňuje Palais-Smaleovu podmínku

*Potom*

$$c \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{y \in M} f(\gamma(y)),$$

*kde*

$$\Gamma = \{\gamma \in C(\langle -\varrho, \varrho \rangle, \mathbb{R}^2) : \gamma(-\varrho) = (-\varrho, 0), \gamma(\varrho) = (\varrho, 0)\}$$

*je kritickou hodnotou funkce.*

### 3 Algoritmus

Z předchozí části práce víme, že funkční hodnota hledaného kritického bodu je infimum z množiny maximálních hodnot na všech křivkách, které spojují dva vybrané okrajové body. Situaci máme ilustrovanou na obrázku 7, kde vidíme červeně vyznačenou křivku tvořenou maximy na jednotlivých cestách a žlutě je vyznačen hledaný bod - infimum na červené křivce.

Numerické hledání tohoto bodu pak vypadá následovně:

1. Zvolíme dva okrajové body křivky  $A, B \in \mathbb{R}^2$

2. Křivku aproximujeme lomenou čarou

*Zvolme  $n \in \mathbb{N}$ . Křivky spojující okrajové body  $A, B$  budeme aproximovat lomenými čarami  $\langle A = C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n = B \rangle$ ,  $(C_i \in \mathbb{R}^2)$  skládajícími se z úseček*

*$\langle C_1, C_2 \rangle, \langle C_2, C_3 \rangle, \dots, \langle C_{n-1}, C_n \rangle$  a  $\max_{\gamma} f \approx \max\{f(C_1), \dots, f(C_n)\}$ .*

*Vnitřní body křivky budeme nazývat uzly.*

3. Najdeme uzel s nejvyšší funkční hodnotou

4. Zkontrolujeme funkční hodnoty bodů na úsečkách, jenž končí ve vybraném uzlu

5. Je-li na úsečce bod s vyšší funkční hodnotou (maximum), původně vybraný uzel přesuneme do tohoto maxima

*Jak s pomocí jednoho bodu s vyšší funkční hodnotou získáme maximum na křivce bude podrobně popsáno později.*

6. Spočítáme gradient funkce ve vybraném a případně posunutém uzlu

7. Zkontrolujeme splnění ukončující podmínky, není-li splněná, pokračujeme

8. Vytvoříme pomocný bod posunutím tohoto uzlu proti směru gradientu

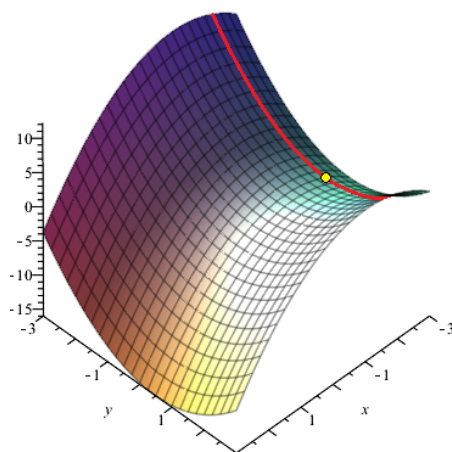
9. Mezi uzlem a pomocným bodem najdeme minimum, uzel do něj přesuneme

10. Zkontrolujeme, jestli jsme uzel posunuli dostatečně daleko

*Byl-li posun příliš malý, zvýšíme hustotu uzlů v okolí vybraného uzlu odebráním nepotřebných uzlů z okrajů křivky.*

11. Kroky 3 až 11 opakujeme, dokud nedojde ke splnění ukončující podmínky, nebo k překročení maximálního povoleného počtu iterací

*Maximální povolený počet iterací zabraňuje vytvoření nekonečného cyklu, pokud jsme zadali například příliš velkou vyžadovanou přesnost.*



Obrázek 7: Algoritmus - umístění hledaného bodu

### 3.1 Počáteční cesta

Na začátku je třeba inicializovat výchozí křivku (úsečku), se kterou budeme pracovat. Dle kritérií dané úlohy určíme dva okrajové (fixované) body, ostatní dopočítáme podle požadovaného počtu uzlů. Tyto vnitřní uzly se budou moci posouvat. Tuto po částech lineární křivku označíme  $\gamma$  a označením  $C_m$  budeme rozumět  $m$ -tý člen z množiny uzlů  $C$  a dvou okrajových bodů.

### 3.2 Hledání maxima na křivce

#### 3.2.1 Bod s nejvyšší funkční hodnotou

Nejprve hledáme bod s nejvyšší funkční hodnotou, tedy takové

$$C_m, m \in \{2, 3, \dots, n-1\}$$

že

$$f(C_m) \geq f(C_l), l \in \{2, 3, \dots, n-1\}$$

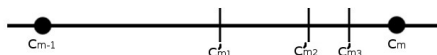
#### 3.2.2 Největší funkční hodnota úsečky $\langle C_{m-1}, C_m \rangle$

Hledáme maximum na křivce  $C$  v blízkosti uzlu  $C_m$ . Zkontrolujeme tedy nejprve úsečku  $(C_{m-1}, C_m)$ .

Budeme se k  $C_m$  přibližovat ze směru  $C_{m-1}$ . Metodou půlení intervalu budeme hledat nové body  $C'_m$ . Pro začátek označme  $C'_m = C_{m-1}$ , následující  $C'_m$  budeme vytvářet podle předpisu:

$$C'_m = \frac{C'_m + C_m}{2}$$

(Viz obrázek 8.)



Obrázek 8: Algoritmus - půlení intervalu ze směru  $C_{m-1}$

dokud:

- (a)  $f(C'_m) > f(C_m)$  nebo
- (b)  $\|C'_m - C_m\| < \delta$

(a) Nalezli jsme bod s větší funkční hodnotou, ten však ještě pořád nemusí mít funkční hodnotu největší. Proto interval  $C_m$  a  $C'_m$  rozpůlíme ještě jednou a získáme bod  $C''_m$ . Pak na bodech  $C'_m$ ,  $C''_m$  a  $C_m$  provedeme kvadratickou interpolaci, čímž získáme kvadratickou funkci procházející těmito třemi body, najdeme její maximum na  $\langle C'_m, C_m \rangle$ , a to prohlásíme za nový bod  $C_m$ .

#### POZNÁMKA:

Problém však pro interpolaci musíme převést na funkci jedné proměnné. Známe vzdálenosti jednotlivých bodů, takže je můžeme "promítnout" na osu  $x$  (při čemž zachováme vzdálenosti). Na těchto třech bodech a jejich funkčních hodnotách provedeme kvadratickou interpolaci, na výsledné funkci najdeme na intervalu  $\langle C'_m, C_m \rangle$  maximum a jeho souřadnici. Tím jsme zjistili vzdálenost hledaného bodu od  $C'_m$  na úsečce  $(C'_m, C_m)$ . Nyní jej stačí převést zpět do roviny.

(b) Půlením intervalu jsme se dostali blíže k původnímu  $C_m$ , než je předepsaná tolerance  $\delta$ .  $C_m$  tedy považujeme za bod s nejvyšší funkční hodnotou na úsečce  $\langle C_{m-1}, C_m \rangle$  a jeho souřadnice ponecháme nezměněny.

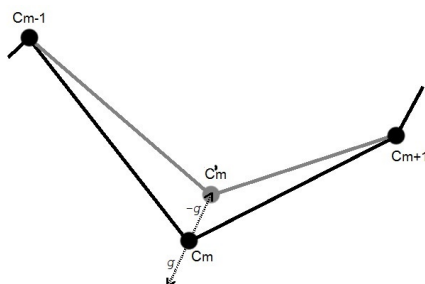
### 3.2.3 Největší funkční hodnota na úsečce $\langle C_m, C_{m+1} \rangle$

Když jsme zkontrolovali úsečku  $\langle C_{m-1}, C_m \rangle$  a případně posunuli uzel  $C_m$ , analogicky stejný postup provedeme i s úsečkou  $\langle C_m, C_{m+1} \rangle$ .

## 3.3 Kontrola ukončující podmínky

$$\|f'(C_m)\| < \delta \Rightarrow c \approx f(C_m)$$

Je-li velikost gradientu v bodě  $C_m$  menší, než předepsaná přesnost  $\delta$ , označíme  $C_m$  za aproximaci stacionárního bodu a  $f(C_m)$  za aproximaci kritické hodnoty.



Obrázek 9: Algoritmus - posun proti gradientu

### 3.4 Minimalizace

Není-li  $C_m$  kritickým bodem, snažíme se jej posunout ve směru největšího spádu, tedy proti směru gradientu (obrázek 9). Vytvoříme si tedy nový bod  $C'_m$  takový, že:

$$C'_m = C_m - h(\|f'(C_m)\|) \cdot f'(C_m)$$

kde funkce  $h(x)$  je definována jako:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in \langle 0, \delta \rangle \\ \delta/x & \text{pokud } x > \delta \end{cases}$$

a  $\delta$  je předepsaná maximální vzdálenost  $C'_m$  od  $C_m$ .

#### POZNÁMKA:

Připomeňme, že v prostoru  $\mathbb{R}^2$  je gradient funkce v bodě roven vektoru prvních partiálních derivací. Tedy:

$$f'(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

Mohlo se ovšem stát, že jsme  $C'_m$  vytvořili moc daleko a  $f(C'_m)$  je vyšší, než  $f(C_m)$ . Proto použijeme podobný proces půlení a interpolace, jako u hledání maxima.

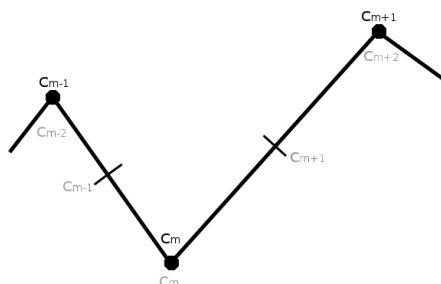
$$C'_m = \frac{C'_m + C_m}{2}$$

dokud:

- (a)  $f(C'_m) < f(C_m)$  nebo
- (b)  $\|C'_m - C_m\| < \delta$

(a) Následuje stejná kvadratická interpolace, jako u maxima, ale za nový bod  $C_m$  označíme minimum na úsečce  $\langle C_m, C'_m \rangle$ .

(b) Souřadnice ponecháme nezměněny.



Obrázek 10: Algoritmus - přesun bodů

### 3.5 Ošetření nekonečného cyklu

Může se stát, že se uzel  $C_m$  posunul o příliš málo. V takovém případě by algoritmus uvízl v dlouhém, nebo nekonečném cyklu. Tento problém se dá vyřešit přidáním uzlů mezi  $C_{m-1}$ ,  $C_m$  a  $C_{m+1}$ . Abychom však zachovali stejný počet uzlů na  $C$ , musíme daný počet bodů jinde odstranit. Nejlépe z okrajových částí cesty, případně z opačné strany, než na které aktuálně pracujeme.

Případ, kdy přidáváme na každou stranu  $C_m$  jen jeden bod, vidíme na obrázku 10.

### 3.6 Převedení na problematiku $n$ proměnných

Pozornější čtenář si asi všiml, že řešení problému nezávisí na dimenzi úlohy (je-li konečná). Vyšší dimenze úlohy (a potažmo více souřadnic bodů, s nimiž pohybujeme) sice činí algoritmus výpočetně náročnějším, ale na řešitelnost úlohy nemá vliv.

Algoritmus se dá proto jednoduše aplikovat při hledání stacionárních bodů funkcí více proměnných. Zobrazení z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}$  berme jen jako speciální případ  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , na němž se problematika lépe vysvětluje a představuje.

## 4 Aplikace na funkce dvou proměnných

Zde předkládám ukázky konvergence algoritmu na vybraných funkcích dvou proměnných.

### 4.1 První vybraná funkce

Pro začátek si ukážeme konvergenci na funkci, jejíž stacionární bod snadno vyčteme ze samotného předpisu.

$$f_1(x, y) = -\left(x + \frac{21}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{85}{3}\right)^2$$

Pro úplnost najdeme stacionární bod analyticky:

$$f_1(x, y) = c, c \in \mathbb{R}$$

$$f_1'(x, y) = (0, 0)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = -2x - 21 = 0 \Rightarrow x = -\frac{21}{2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2y - \frac{170}{3} = 0 \Rightarrow y = \frac{85}{3}$$

Ověříme, že funkce splňuje předpoklady věty o sedlovém bodě (2.3).

- $f_1 \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  - **splněno**

Spojitosť prvních parciálních derivací je patrná už z analytického hledání stacionárního bodu.

- $\exists \varrho \in \mathbb{R}^+ : \inf_{(x,y) \in \{(0,y):y \in \mathbb{R}\}} f(x, y) > \max_{(x,y) \in \{(-\varrho,0),(\varrho,0)\}} f(x, y)$  - **splněno**

Vezměme si  $\varrho = 50$  (okrajové body  $[-50,0]$  a  $[50,0]$ ).

- $f_1$  splňuje Palais-Smaleovu podmínku - **splněno**

$f_1'(x_n, y_n) = (-2x_n - 21, 2y_n - \frac{170}{3}) \rightarrow (0, 0)$ , tedy  $(x_n, y_n)$  je omezená.

#### PARAMETRY:

Okrajové body:  $[-50, 0], [50, 0]$

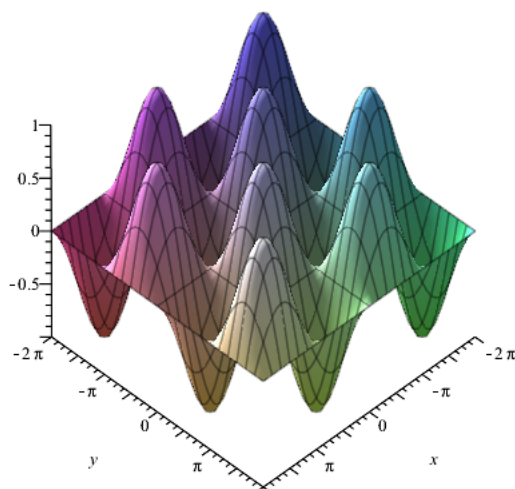
Počet bodů cesty: 100

Přesnost:  $10^{-2}$

Tolerance při půlení úseček:  $10^{-2}$

Tolerance při malém posunutí:  $10^{-2}$





Obrázek 11: Vybraná funkce  $f_2$  - 3D graf

**VÝSTUP:**

Nalezený bod má v dekadickém zápisu souřadnice  $[-10.5, 28.33333332]$ .

Grafy nalezneme v dodatku A (obrázek 17).

Numerickou konvergenci můžeme sledovat v dodatku B (tabulka 1).

**POZNÁMKA:**

Pro zajímavost si v grafu můžeme všimnout, že v posledních iteracích došlo k přesunu bodů z okrajových částí cesty, o kterém byla řeč v kapitole 3.5.

## 4.2 Druhá vybraná funkce

Pro zajímavost předvedu konvergenci algoritmu i na funkci, jenž nesplňuje Palais-Smaleovu podmínku, ale přesto algoritmus konverguje k řešení. Vezměme si

$$f_2(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y).$$

3D graf funkce  $f_2$  pro lepší ilustraci najdeme na obrázku 11.

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(y)$$

Je na první pohled vidět, že stacionárních bodů má  $f_2$  nekonečně mnoho. V takovémto případě se může stát, že algoritmus bude mít tendenci konvergovat k více bodům současně. K jednomu z bodů však dojde nejrychleji a právě tento bod označí za řešení úlohy.

Který z bodů to bude ovlivňují zadané parametry hledání.

**PARAMETRY:**

Okrajové body:  $[-6, 1], [6, 1]$   
 Počet bodů cesty: 22  
 Přesnost:  $10^{-2}$   
 Tolerance při půlení úseček:  $10^{-2}$   
 Tolerance při malém posunutí:  $10^{-2}$

**VÝSTUP:**

Nalezený bod má souřadnice  $[-3.144706890, 0.009488328113]$ .  
 Viz v dodatku A (obrázek 18).

**POZNÁMKA:**

Všimněme si, jak algoritmus konverguje ke dvěma stacionárním bodům. Na posledních dvou obrázcích vidíme, že došlo k úbytku bodů na pravé straně. K tomu opět došlo v důsledku toho, že bylo potřeba zjemnit cestu okolo bodu, jenž byl nejbližší řešení úlohy.

### 4.3 Třetí vybraná funkce

Vezměme si funkci z obrázku 3 danou předpisem

$$f_3(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{1-x^2-y^2} \cdot (2-x)$$

Stacionární bod nalezený analyticky:

$$f'_3(x, y) = (0, 0)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = e^{1-x^2-y^2} \cdot ((2x(2-x)) \cdot (1 - (x^2 + y^2)) - (x^2 - y^2))$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) &= \left(2ye^{1-x^2-y^2} \cdot (2-x)\right) - \left(2(x^2 + y^2)ye^{1-x^2-y^2} \cdot (2-x)\right) = \\ &= \left(2ye^{1-x^2-y^2} \cdot (2-x)\right) \cdot (1 - (x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

Existují tři řešení soustavy rovnic  $\frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y)$ , tedy také tři stacionární body. Jejich zaokrouhlené dekadické souřadnice jsou:  $T_1 = [-1.126, 0]$ ,  $T_2 = [0, 0]$  a  $T_3 = [0.81153, 0]$ . Body  $T_1$  a  $T_2$  jsou lokální extrémů, k nimž algoritmus při této „geometrii“ funkce konvergovat nebude. Hledaný stacionární bod je tedy  $T_3$ .

Podmínky dané větou o přechodu hory (2.2):

- $f_3 \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  - **splněno**

Spojitosť prvních parciálních derivací je patrná už z analytického hledání stacionárního bodu.

- $r \in \mathbb{R}^+, e \in \mathbb{R}^2, \|e\| > r$  - **splněno**

Zvolíme počátečním bodem cesty bod  $0=[0,0]$ ,  $r < 2$  a koncový bod cesty  $e = (-1, 3)$ .

- $\inf_{\|x\|=r} f_3(x) > f_3(0) \geq f_3(e)$  - **splněno**

Vezměme si libovolné nenulové

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}.$$

Potom pro  $t \rightarrow +\infty$  platí:

$$f_3(tx, ty) = ((tx)^2 + (ty)^2) \cdot e^{1-(tx)^2-(ty)^2} \cdot (2 - tx) \rightarrow -\infty$$

musí tedy existovat  $e = (tx, ty) \in \mathbb{R}^2$ , pro něž platí

$$\|e\| > r, f(e) \leq 0 = f(0)$$

- $f_3$  splňuje Palais-Smaleovu podmínku - **nesplněno, ale ošetřeno**

Posloupnost nesplňuje Palais-Smaleovu podmínku. Víme-li ale z analytického řešení, že hledaný bod je přibližně  $T_3$  a že  $f_3(T_3) \approx 1$ , nemůže se stát, že by  $(x_n, y_n) \rightarrow \infty$  (v takovém případě  $f_3(x_n, y_n) \rightarrow 0$ ).

#### PARAMETRY:

Okrajové body:  $[0,0]$ ,  $[-1,3]$

Počet bodů cesty: 22

Přesnost:  $10^{-1}$

Tolerance při půlení úseček:  $10^{-1}$

Tolerance při malém posunutí:  $10^{-2}$

#### VÝSTUP:

Nalezený bod má souřadnice  $[0.8141801564, 0.04571450816]$ .

Grafy průběžných výsledků jsou v dodatku A, obrázek 19.

Numerická tabulka průběžných výsledků je v příloze B, tabulka 2.

## 5 Okrajová úloha

Vezměme si okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} -u''(x) &= u^3(x). \\ u(0) &= u(\pi) = 0 \end{aligned}$$

Než přistoupíme k jejímu řešení, zdefinujme si potřebné pojmy a promysleme několik důležitých tvrzení.

Budeme potřebovat funkcionál  $u(x)$ , ten si zdefinujme předpisem

$$J(u) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi (u'(x))^2 dx - \frac{1}{4} \cdot \int_0^\pi (u(x))^4 dx.$$

Je známo (ačkoli důkaz tvrzení je nad rámec této práce), že

$$J \in C^1(W_0^{1,2}(0, \pi), \mathbb{R}),$$

kde  $W_0^{1,2}(0, \pi)$  je Sobolevův prostor s normou

$$\|u\| \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{\int_0^\pi (u'(x))^2 dx},$$

a že

$$\langle J'(u), \varphi \rangle = \int_0^\pi u'(x)\varphi'(x) dx - \int_0^\pi (u(x))^3 \varphi(x) dx.$$

### 5.1 Stacionární bod funkcionálu

Celá tato metoda pro řešení okrajových úloh je postavena na faktu, že slabá řešení zadané úlohy odpovídají stacionárním bodům funkcionálu. Ze všeho nejdřív tedy musíme ověřit, že  $J(u)$  má potřebnou „geometrii“.

Zdefinujme si tedy Palais-Smaleovu podmínku a Větu o přechodu hory pro nekonečnou dimenzi.

#### DEFINICE:

Řekněme, že  $J \in C^1(X, \mathbb{R})$  splňuje Palais-Smaleovu podmínku, pokud platí implikace:

Je-li

- $(u_n)$  je posloupnost v  $X$  taková, že
- $(J(u_n))$  je omezená posloupnost v  $\mathbb{R}$  a že
- $J'(u_n) \rightarrow 0$  v  $X^*$ ,

pak z posloupnosti  $(u_n)$  lze vybrat posloupnost konvergentní v  $X$ .

**Věta 5.1** *Věta o přechodu hory (Mountain pass theorem); Ambrosetti, Rabinowitz; 1973*  
Nechť

- $X$  je Banachův prostor
- $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ ,
- $r \in \mathbb{R}^+, e \in X, \|e\|_X > r$ ,
- $\inf_{\|u\|_X=r} J(u) > J(0) \geq J(e)$ ,
- $J$  splňuje Palais-Smaleovu podmínku.

Potom

$$c \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in (0,1)} J(\gamma(t)),$$

kde

$$\Gamma \stackrel{\text{def.}}{=} \{\gamma \in C(\langle 0, 1 \rangle, X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\},$$

je kritickou hodnotou  $J$ .

Již bylo řečeno, že důkaz spojitosti první derivace je nad rámec této práce. Stejně tak i důkaz Palais-Smaleovy podmínky. Dokažme si ale aspoň, že funkcionál splňuje potřebnou „geometrii“. Existuje  $c \in \mathbb{R}^+$  takové, že pro každé  $u \in W_0^{1,2}(0, \pi)$  platí:

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{c}{4} \|u\|^4,$$

z čehož plyne, že existuje  $r \in \mathbb{R}^+$  takové, že:

$$\inf_{\|u\|=r} J(u) > J(0) = 0.$$

Vezměme libovolné, avšak nenulové

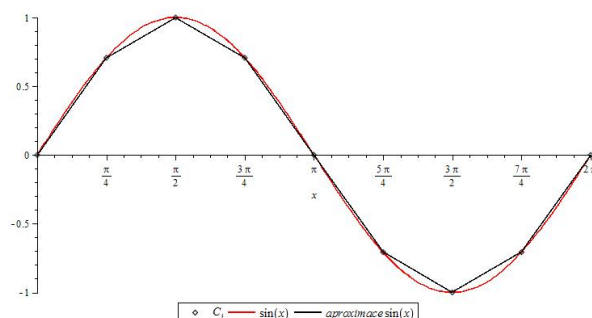
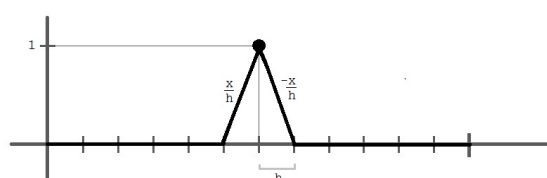
$$u \in W_0^{1,2}(0, \pi) \text{ a } t \in \mathbb{R}.$$

Potom pro  $t \rightarrow +\infty$  platí:

$$J(tu) = \frac{t^2}{2} \cdot \int_0^\pi (u'(x))^2 dx - \frac{t^4}{4} \cdot \int_0^\pi (u(x))^4 dx \rightarrow -\infty$$

a proto existuje  $e = tu \in W_0^{1,2}(0, \pi)$  takové, že

$$\|e\| > r, J(e) \leq 0 = J(0)$$

Obrázek 12: Okrajová úloha - aproximace  $\sin(x)$  na 9 uzlechObrázek 13: Okrajová úloha - obecný náčrt  $\varphi$ 

## 5.2 Převedení na problém $n$ proměnných

Zamysleme se nyní, jak je možné daným algoritmem nalézt stacionární bod funkcionálu a tedy i slabé řešení zadané úlohy.

Z definice funkcionálu vidíme, že jeho hodnota závisí na hodnotě funkce  $u$  v každém z bodů  $x \in (0, \pi)$ . Každý z  $x$  tedy můžeme považovat za samostatnou proměnnou. Jelikož  $x$  je nekonečně mnoho, přímá aplikace algoritmu nepřipadá v úvahu (již dříve bylo řečeno, že algoritmus funguje jen pro úlohy konečného počtu proměnných). Kdybychom ale počet  $x$  omezili na  $n \in \mathbb{N}$ , mohli bychom aplikovat stejný algoritmus, jako při hledání stacionárních bodů úloh z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}$ . Můžeme tedy funkci  $u(x)$  aproximovat po částech lineární funkcí  $\hat{u}(x)$ , která by měla  $n$  uzlů (dva okrajové, fixované počáteční a koncovou podmínkou), jejichž funkční hodnoty bychom považovali za hodnotu dané proměnné. Pro názornou ilustraci viz obrázek 12.

Uvědomil-li si čtenář, jak a proč jsme došli k tomuto závěru, má za sebou nejtěžší část celého procesu. Poslední větší krok je uvědomit si, jak tuto po částech lineární funkci zapsat. Máme-li vektor funkčních hodnot v jednotlivých uzlech, potřebujeme každou z hodnot vynásobit funkcí, jenž je na celém intervalu  $(0, \pi)$  nulová, jen na intervalech končících v daném uzlu lineárně stoupá/klesá a v uzlu samotném má hodnotu 1. Tyto funkce nazveme  $\varphi$  a  $\varphi_i$  rozumíme funkci, jenž má hodnotu 1 v  $i$ -tém uzlu (pro ilustraci obrázek č. 13). a matematickém zápise se tedy

$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot \varphi_i(x)$$

a je jasné, že

$$\hat{u}'(x) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot \varphi_i'(x).$$

Nyní jsme schopni vypočítat  $J(\hat{u})$  a  $\langle J'(\hat{u}), \varphi \rangle$  jen se znalostí funkčních hodnot v uzlech (vektor  $C$ ).

Když známe hodnoty funkcionalů, jsme schopni nalézt funkci s tím největším/nejmenším a díky derivaci (gradientu) funkcionalu víme, jak ji posunout, aby se její funkcional snížil. Řešíme tedy úlohu  $n$  proměnných, která závisí čistě na funkčních hodnotách v uzlech po částech lineární funkce a použijeme analogicky stejný postup, jako u předchozích úloh z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}$ .

## 6 Aplikace na okrajovou úlohu

Řešme tedy úlohu

$$-u''(x) = u^3(x)$$

$$u(0) = u(\pi) = 0$$

s funkciónálem daným předpisem

$$J(u) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi (u'(x))^2 dx - \frac{1}{4} \cdot \int_0^\pi (u(x))^4 dx$$

a derivací funkciónálu podle vektoru funkcí  $\varphi$

$$\langle J'(u), \varphi \rangle = \int_0^\pi u'(x)\varphi'(x) dx - \int_0^\pi (u(x))^3 \varphi(x) dx$$

### POZNÁMKA:

Ve skutečnosti pro výpočet  $\langle J'(u), \varphi \rangle$  používám předpis odvozený v [1]:

$$\langle J'(u), \varphi \rangle = C_i - K^{-1} \cdot f(C_i)$$

kde pro tuto úlohu platí:

- $C_i$  je vektor funkčních hodnot
- $K$  je tridiagonální matice tuhosti, jenž má na hlavní diagonále hodnoty  $\frac{2}{h}$  a na vedlejších hodnoty  $-\frac{1}{h}$  (kde  $h$  je vzdálenost uzlů na ose  $x$ )
- $f(C_i)$  je vektor s předpisem

$$(f(C_i))_j = \sum_k \int_{k-1}^k u^3 \cdot \varphi_j dx$$

Podle věty o přechodu hory zvolíme jako první okrajovou funkci funkci nulovou (s nulovým funkciónálem) a jako druhou okrajovou funkci funkci s funkciónálem  $J(u_i) \leq 0$ .

### PARAMETRY:

Počet funkcí (index  $i$ ): 50

Počet uzlů funkce (dimenze úlohy  $n$ ): 22

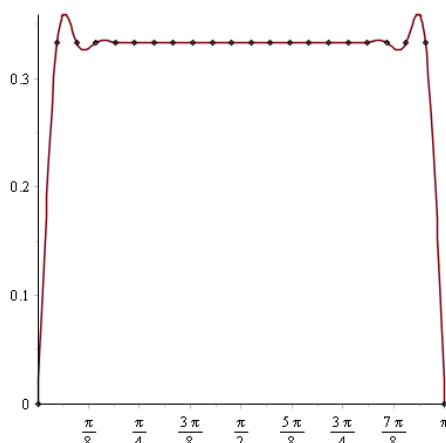
Výchozí funkce: konstantní,  $u_i := \frac{i-1}{3}$ , viz obrázek 14 (body proložené spline funkcí)

Přesnost:  $10^{-3}$

Tolerance při půlení „úseček“:  $10^{-2}$

Tolerance při malém posunutí:  $10^{-1}$





Obrázek 14: Okrajová úloha - výchozí funkce  $u_i, i = 2$

**VÝSTUP:**

Na obrázku 15 vidíme nalezené hodnoty funkce sroložené spline funkcí.

Na obrázku 16 můžeme porovnat tuto funkci jako řešení zadané okrajové úlohy (opět vyhlazené spline funkcí).

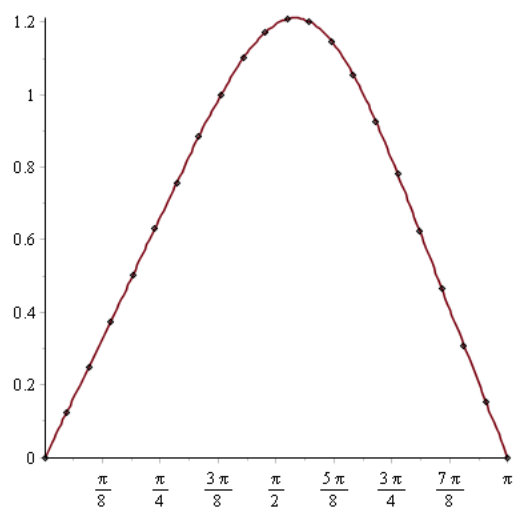
V příloze B, tabulce 3 může čtenář pozorovat numerickou konvergenci algoritmu k řešení.

**POZNÁMKA:**

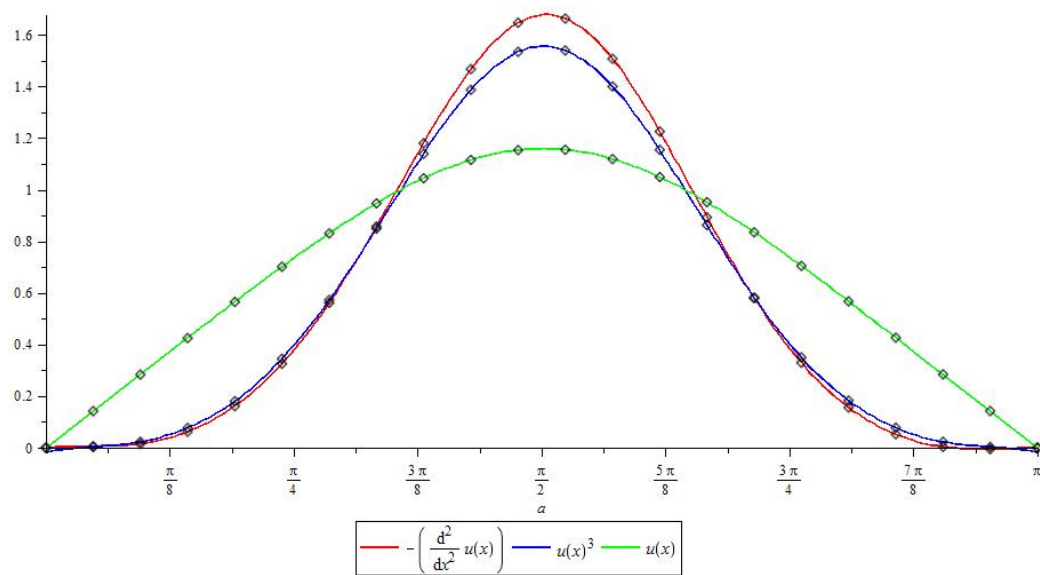
Pro aproximaci druhé derivace této po částech lineární funkce byla použit předpis

$$u''(C_i) \approx \frac{u(C_{i-1}) - 2u(C_i) + u(C_{i+1}))}{h^2}$$

kde  $h$  je vzdálenost mezi dvěma sousedními uzly  $C$ .



Obrázek 15: Okrajová úloha - řešení



Obrázek 16: Okrajová úloha - porovnání

## 7 Závěr

Tato práce měla za cíl vysvětlit konkrétní věty o minimaxu a jejich aplikaci při hledání stacionárních bodů funkcí. Základní myšlenku, dané věty a princip algoritmu jsem vysvětlila na funkcích dvou proměnných, aby si čtenář co nejlépe představil danou situaci. Uvedla jsem několik řešených příkladů, jako ukázkou správné konvergence algoritmu k hledanému řešení.

Nakonec jsem našla i slabé řešení konkrétní okrajové úlohy převedením problému nekonečné dimenze na aproximaci řešením s dimenzí konečnou.

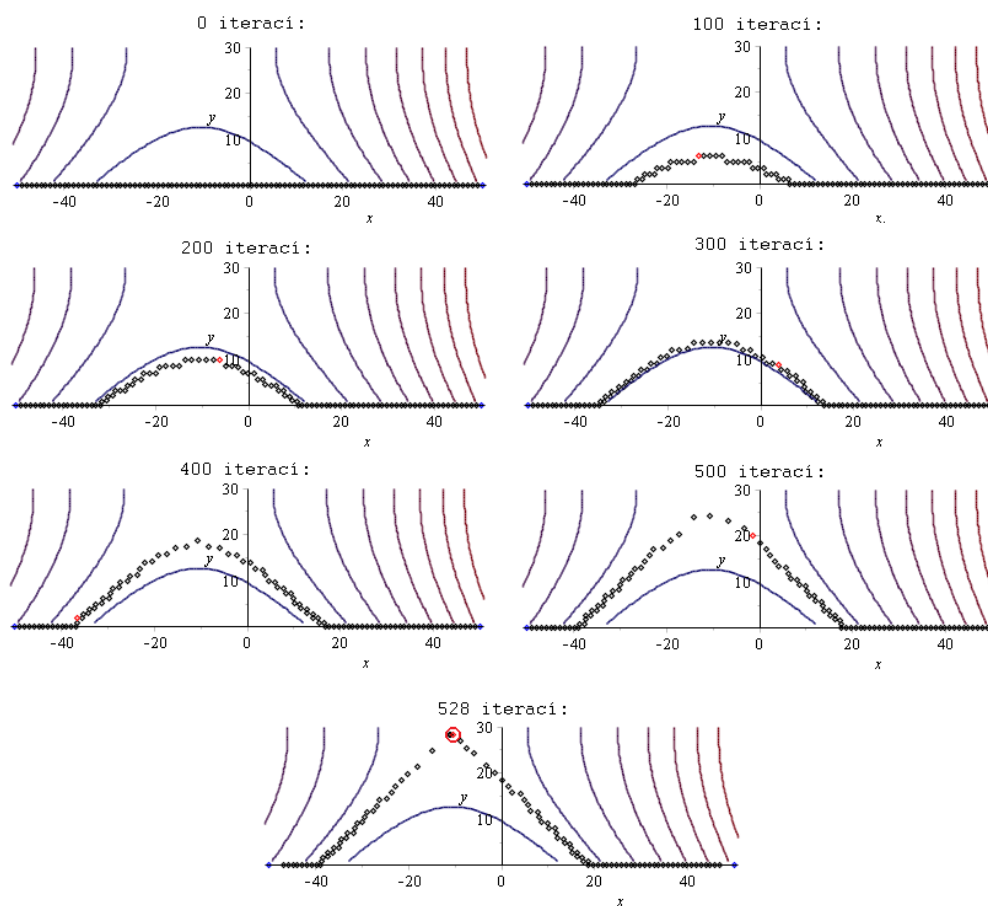
Tím jsem zpracovala veškeré zadané úkoly této práce.

## 8 Reference

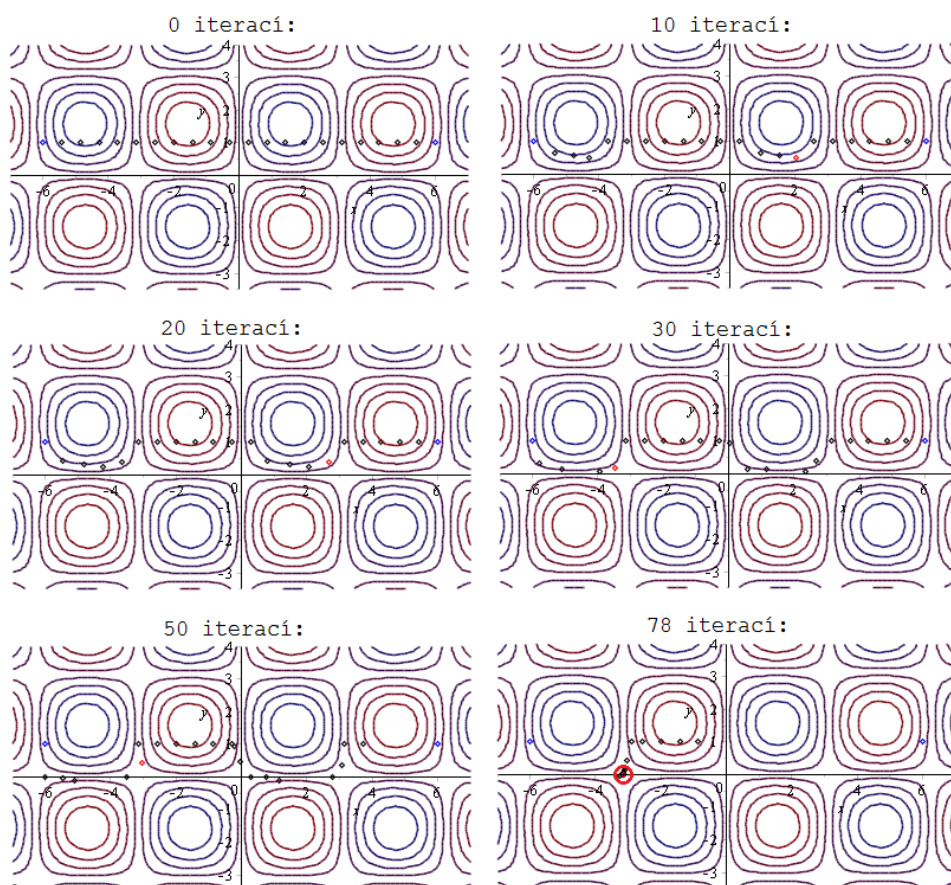
- [1] HORÁK, Jiří. *Mountain Pass and its Applications in Analytics and Numerics*. Pilsen, 2012. ISBN 978-80-261-0209-0. Proceedings of Seminar in Differential Equations. University of West Bohemia.
- [2] BOUCHALA, Jiří. *Přechodem hory k řešení okrajové úlohy*. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. 2001, roč. 46, č. 1, s. 43-51. Dostupné z: [http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/141062/PokrokyMFA\\_46-2001-1\\_5.pdf](http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/141062/PokrokyMFA_46-2001-1_5.pdf)

## A Grafy k aplikacím algoritmu

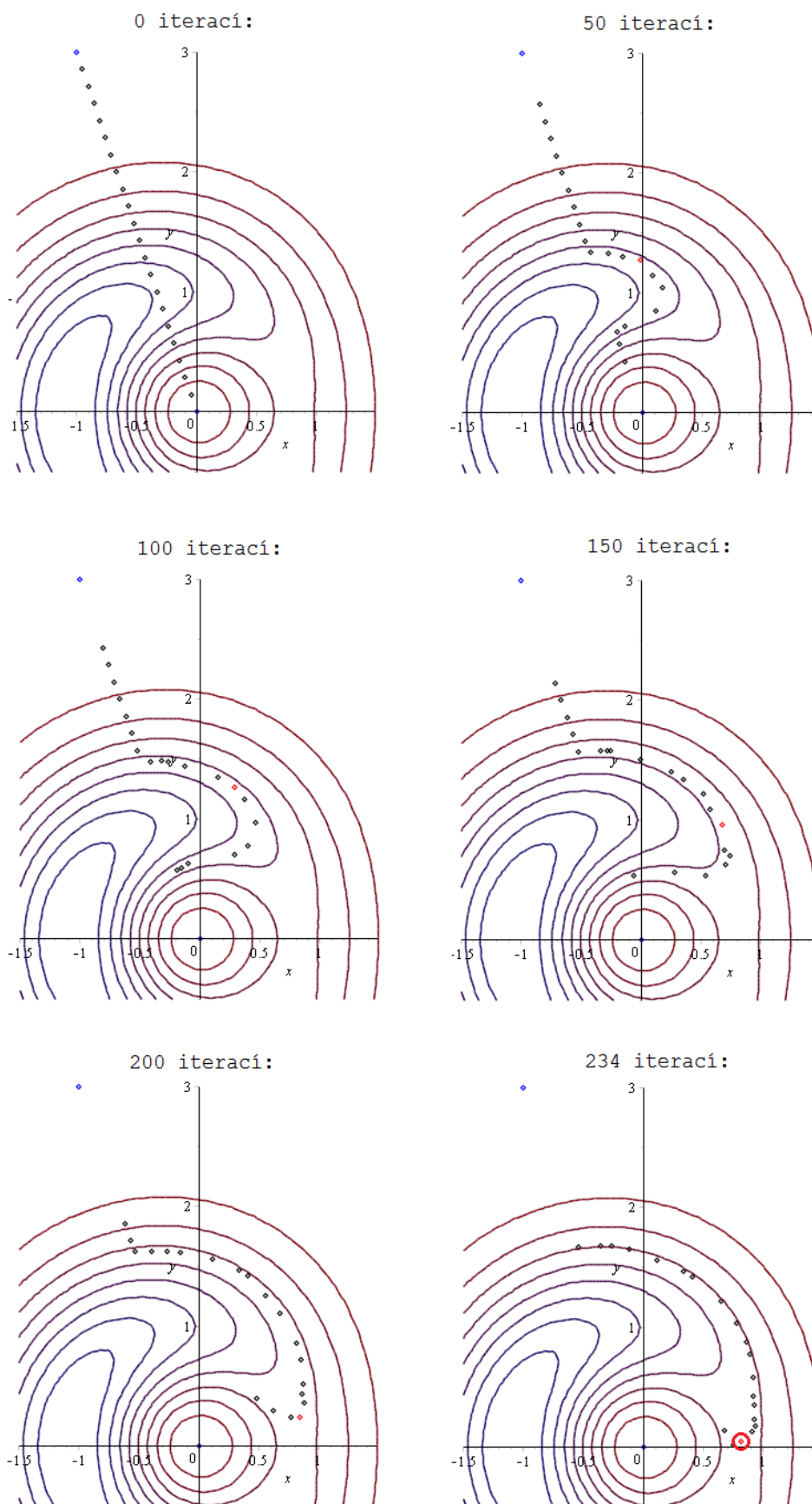
V této příloze předkládám výstupní grafy z průběhu řešení úloh nalezení stacionárního bodu funkcí  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Počty iterací, po kterých jsem grafy vykreslila, jsou vybrány tak, aby grafy vypovídaly co nejvíce o průběhu algoritmu.



Obrázek 17: Hledání stacionárního bodu -  $f_1(x, y) = -(x + \frac{21}{2})^2 + (y - \frac{85}{3})^2$



Obrázek 18: Hledání stacionárního bodu -  $f_2(x, y) = \sin(x) \cdot \sin(y)$



Obrázek 19: Hledání stacionárního bodu -  $f_3(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{1-x^2-y^2} \cdot (2 - x)$



## B Tabulky k aplikacím algoritmu

V této příloze uvádím numerické výsledky z průběhu výpočtů.

Čtenář si u aplikace na funkci  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  může všimnout, že u rozdílu funkční hodnoty v aktuálním uzlu a ve stacionárním bodě občas dochází k malému nárůstu. Tato skutečnost se může jevit jako chyba (cílem algoritmu je funkční hodnoty na křivce snižovat), nicméně pečlivější čtenář si mohl uvědomit, že k nárůstu funkčních hodnot může dojít ve chvíli, kdy algoritmus provede přesunutí uzlů z okrajů křivky a zvýší hustotu uzlů v místě, kde se uzly pohybují pomalu.

U aplikace na okrajovou úlohu  $-u''(x) = u^3(x)$ ,  $u(0) = u(\pi) = 0$  dochází v posledním kroku ke stejnému navýšení hodnoty funkcionálu ze stejných důvodů.

U ostatních hodnot je jistá kolísavost hodnot v pořádku (důvody si čtenář rozmyslí sám).

počet iterací	$\ (x, y) - (x_n, y_n)\ $	$\ c - f(x_n, y_n)\ $	$\ f'(x_n, y_n)\ $
0	28.33	802.76	56.66
25	28.71	649.01	57.42
50	25.03	586.21	50.06
75	26.45	526.18	52.90
100	22.27	481.57	44.54
125	20.83	434.01	41.66
150	29.73	369.76	59.47
175	20.60	356.14	41.20
200	18.96	321.01	37.92
225	17.16	290.21	34.32
250	30.70	222.39	61.40
275	25.41	198.63	50.83
300	24.12	169.09	48.24
325	20.29	148.48	40.59
350	21.36	118.78	42.72
375	11.11	113.84	22.23
400	37.10	23.92	74.21
425	28.00	19.23	56.00
450	37.57	19.86	75.74
475	10.50	14.40	21.00
500	12.34	12.16	24.68
528	$1.33 \cdot 10^{-8}$	$10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-8}$

Tabulka 1: Konvergence numerického řešení úlohy  $f_1^l(x, y) = (0, 0)$

počet iterací	$\ (x, y) - (x_n, y_n)\ $	$\ c - f(x_n, y_n)\ $	$\ f'(x_n, y_n)\ $
0	1.52	1.21	0.95
10	1.41	1.08	0.98
20	1.31	1.01	1.35
30	1.24	0.90	1.22
40	1.18	0.82	1.33
50	1.35	0.73	1.44
60	1.17	0.66	1.11
70	1.03	0.61	1.02
80	1.01	0.56	0.93
90	1.68	0.50	2.25
100	0.87	0.44	0.96
110	1.72	0.39	2.30
120	1.08	0.35	1.48
130	1.06	0.28	3.24
140	1.89	0.23	2.41
150	0.75	0.20	1.06
160	0.96	0.14	1.55
170	1.90	0.11	2.34
180	0.75	0.08	1.33
190	1.44	0.05	2.01
200	0.24	0.03	0.28
210	0.86	0.01	1.55
220	0.25	0.003	0.59
234	0.04	0.001	0.05

Tabulka 2: Konvergence numerického řešení úlohy  $f'_3(x, y) = (0, 0)$

počet iterací	m	$J(u_m)$	$\sqrt{\sum_i   -u_m''(x_i) - u_m^3(x_i)  ^2}$	$\max_i   -u_m''(x_i) - u_m^3(x_i)  $	$\ J'(u)\ $
0	7	11.538	119.969	81.365	26.825
10	5	8.720	90.310	62.756	13.827
20	7	7.035	99.163	67.369	24.774
30	7	5.907	99.248	66.878	27.673
40	2	4.714	63.213	44.419	8.849
50	4	3.771	79.452	53.898	21.856
60	2	2.385	53.313	36.926	11.996
70	9	1.903	100.923	65.652	37.698
80	9	1.277	94.577	61.479	35.822
90	2	0.934	17.046	12.350	0.550
100	3	0.522	12.521	8.750	2.813
110	3	0.483	0.580	0.406	0.262
126	3	0.484	0.238	0.123	0.0008

Tabulka 3: Konvergence numerického řešení úlohy  $-u''(x) = u^3(x)$ ,  $u(0) = u(\pi) = 0$