

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra informatiky

Vizualizace chaotických atraktorů a jejich vlastností
Visualization of Chaotic Attractors and Their Properties

2015

Matej Sirotiar

Zadání bakalářské práce

Student: **Matej Sirotiar**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 2612R025 Informatika a výpočetní technika

Téma: **Vizualizace chaotických atraktorů a jejich vlastností**
Visualization of Chaotic Attractors and Their Properties

Zásady pro vypracování:

Cílem práce je vytvořit funkční aplikaci s grafickým uživatelským rozhraním, která bude na základě parametrů zadaných uživatelem vykreslovat chaotické atraktory. V aplikaci bude možné mimo jiné zvětšit vybranou část atraktoru pro detailnější pohled na danou oblast. Student bude mít za úkol:

1. Nastudovat problematiku chaosu a chaotických atraktorů.
2. Vytvořit funkční aplikaci s grafickým uživatelským rozhraním, která bude na základě parametrů dosazených uživatelem do rovnic zobrazovat chaotické atraktory zadané vedoucím práce. V aplikaci bude možné zvětšit vybranou část atraktoru pro detailnější pohled na danou oblast. V aplikaci bude možné sledovat periodicitu hodnot v daném atraktoru.
3. Důsledně zdokumentovat vytvořenou aplikaci.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Kathleen T. Alligood, Tim. D. Sauer, James A. Yorke: Chaos - An Introduction to Dynamical systems, Textbooks in Mathematical Sciences, ISBN , -387-94677-2, 1995 Springer-Verlag New York, Inc.
- [2] Jiří Horák, Ladislav Krlín: Deterministický chaos a matematické modely turbulence, ACADEMIA, ISBN 80-200-0416-5, 1996
- [3] Jiří Horák, Ladislav Krlín, Aleš Raidl: Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace, ACADEMIA, ISBN 80-200-0910-8, 2003

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Lenka Skanderová**

Datum zadání: 01.09.2014

Datum odevzdání: 07.05.2015



doc. Dr. Ing. Eduard Sojka
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prehlásenie študenta

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracoval samostatne. Uviedol som všetky literárne pramene a publikácie, z ktorých som čerpal.

V Ostrave dňa: 6. mája 2015

.....Siroňat.....

Pod'akovanie

Rád by som poďakoval vedúcej práce **Ing. Lenke Skanderovej** za odbornú pomoc, pripomienky a návrhy pomocou ktorých som dotváral túto prácu.

Abstrakt

Cieľom tejto práce je vytvoriť funkčnú aplikáciu s grafickým užívateľským rozhraním, ktorá bude vykresľovať chaotické atraktory, pričom výsledný atraktor bude závisieť od parametrov zadaných užívateľom. V aplikácii bude možné zväčšiť vybranú časť pre detailnejší pohľad na danú oblasť. Čo je to atraktor a aké má spojenie s chaosom je náplňou teoretickej časti, ktorá tiež obsahuje stručný popis použitých atraktorov. Na začiatku praktickej časti je popísaná samotná implementácia aplikácie. Následuje grafické znázornenie možností užívateľa a nakoniec stručný prehľad základných metód aplikácie.

Kľúčové slová: chaos, chaotické atraktory, vizualizácia, aplikácia

Abstract

The aim of this thesis is create usable application with graphical user interface, which will be draw a chaotic attractors. Resultant attractor depends on the parameters, which are entered by user. In application will be possible to zoom the selected section for detailed view. What is a attractor and how is connected with chaos is concern of teoretical part. Teoretical part also contains a brief description all attractors, which I use in thesis. At the beginning of practical part is described implementation of application. Followed by graphical representation of user options and finally a brief overview of the basic methods of application.

Keywords: chaos, chaotic attractors, visualization, application

Obsah

Úvod	1
I. TEORETICKÁ ČASŤ	2
1. Historický vývoj	3
1.1 Henri Poincaré	3
1.1.1 Problém troch telies	3
1.2 Edward Norton Lorenz	4
1.2.1 Motýlí efekt	4
1.2.2 Lorenzovo vodné koleso.....	5
1.3 Lord Robert May	5
1.4 James York	6
1.5 Stephen Smale	6
1.5.1 Smaleova podkova	6
2. Charakteristika chaosu	7
2.1 Čo je teória chaosu	7
2.2 Lineárny a nelineárny systém	7
2.3 Dynamický systém	7
2.4 Deterministický systém a jeho výskyt	8
2.5 Disipatívne systémy	8
2.6 Hamiltoniánske systémy	8
2.7 Vizualizácia chaotických atraktorov	9
2.8 Ljapunov exponent	9
3. Zoznam použitých atraktorov	11
3.1 Logistická mapa	11
3.2 Henon	12
3.3 Lozi	13
3.4 Tinkerbell	13
3.5 Ikeda	14
3.6 Burger	15
3.7 Tent	16
3.8 Gingerbreadman	17
3.9 Sinai	17

3.10	Lorenzov atraktor	18
3.11	Rössler	19
3.12	Arnold cat map.....	20
II. PRAKTICKÁ ČASŤ		21
4.	Charakteristika programu	22
4.1	Prehľad vybraných systémov pre disipatívny systém	24
4.2	Prehľad vybraných systémov pre konzervatívny systém.....	25
4.3	Možnosti systému	26
4.3.1	Vizualizácia v 2D	26
4.3.2	Vizualizácia v 3D	27
4.4	Vstupy a obmedzenia	28
4.5	Implementácia	28
4.5.1	Ukladanie súradníc atraktora	28
4.5.2	Prispôsobenie atraktora vzhľadom na veľkosť okna	29
4.6	Možnosti prepínania medzi oknami.....	30
Záver		31
Použitá literatúra.....		32
Internetové zdroje		34
Zoznam príloh.....		35
A	Obsah CD.....	35

Zoznam obrázkov

Obrázok 1 Henri Poincaré	3
Obrázok 2 Edward Norton Lorenz	4
Obrázok 3 Motýlí efekt v Lorenzovom atraktore.....	4
Obrázok 4 Lorenzovo vodné koleso.....	5
Obrázok 5 Lord Robert May	5
Obrázok 6 James York	6
Obrázok 7 Stephen Smale	6
Obrázok 8 Príklady atraktorov	9
Obrázok 9 Trajektórie s rôznymi hodnotami Ljapunovho exponentu.....	10
Obrázok 10 Logistická mapa.....	11
Obrázok 11 Henon.....	12
Obrázok 12 Lozi.....	13
Obrázok 13 Tinkerbell.....	13
Obrázok 14 Burger	15
Obrázok 15 Tent.....	16
Obrázok 16 Gingerbreadman	17
Obrázok 17 Sinai.....	17
Obrázok 18 Lorenzov atraktor	18
Obrázok 19 Rössler	19
Obrázok 20 Arnold cat map	20
Obrázok 21 Prezentácia Cat mapy	20
Obrázok 22 Menu.....	22
Obrázok 23 Ukážka grafického rozhrania pre disipatívny systém.....	22

Obrázok 24 Ukážka grafického rozhrania pre konzervatívny systém.....	23
Obrázok 25 Ukážka rozhrania pre 2D.....	26
Obrázok 26 Ukážka rozhrania pre 3D.....	27
Obrázok 27 Chyba vstupu.....	28
Obrázok 28 Referencie.....	30

Zoznam tabuliek

Tabuľka 4-1 Disipatívny systém	24
Tabuľka 4-2 Konzervatívny systém	25

Úvod

V dnešnej dobe sa na pojem chaos môžeme pozerat' z viacerých uhlov. Ako prvé sa nám určite vybaví chaos, ako stav neusporiadanosti, zmätku, neprítomnosti poriadku. Čiže ide o niečo nepríjemné alebo nežiadúce.

V tejto práci sa nebudeme venovat' chaosu ako takému, ale budeme sa hlavne zaoberat' deterministickým chaosom. Jedná sa o proces samoorganizácie zložitých systémov, kde vznikajú sústavy koherentných štruktúr. Z hľadiska jednej určitej štruktúry má vývoj systému náhodné prvky, no systém ako celok sa vyvíja zákonite a teda deterministicky. Tento jav môžeme stretnúť v prírodných systémoch všetkých možných foriem či už fyzických, chemických, ekonomických ako aj biologických. Uplatnenie chaotických systémov v praxi je takmer všade. Jednou z prvých aplikácií riadených chaosom sa stali multimódové lasery používané v obore fyzika. Napríklad v biológii sa tieto systémy používajú pre simuláciu procesov ako je správanie živočíšnych druhov v ich prostredí. Či už ide o oblasť lekárstva, chémie, informatiky a veľa ďalších, využitie chaotických systémov je v modernej dobe veľmi rozšírené [1].

Hlavným cieľom práce je vytvorit' aplikáciu, ktorá bude na základe zadaných počiatočných podmienok vykresľovat' konečný stav daného systému (atraktor). Na začiatku tejto práce sa budem zaoberat' teóriou chasu a vysvetlením základných pojmov, ktoré s ňou súvisia. Náplňou praktickej časti je detailný popis samotnej aplikácie.

I. TEORETICKÁ ČASŤ

1. Historický vývoj

Na počiatku 20. storočia sa zrodila nová veda, teórie chaosu. Ako prvý pozoroval chaotický pohyb francúzsky vedec Henry Poincaré. Po ňom sa štúdiom dynamických systémov zaoberalo niekoľko ďalších vedcov. Trvalo však dlhšiu dobu, než vedci prestali svet skúmať len pomocou lineárnych systémov, ktoré majú ustálený priebeh. Rovnako tak trvalo veľa rokov, než vedci prestali náš svet chápať len pomocou Euklidovskej geometrie. Tá dokáže definovať priamky, kružnice či obdĺžniky, ale v prírode nenájdeme také pravidelné obrazce. Iba pomocou fraktálnej geometrie môžeme napodobiť prírodu. Hlavným katalyzátorom vývoja teórie chaosu bol elektrický počítač. Väčšina matematických teórií chaosu zahŕňa jednoduché opakované iterácie, ale ich vývoj je nepraktické skúšať ručne. Počítače tento výskum veľmi zjednodušili [1].

1.1 Henri Poincaré

Tento francúzsky matematik, fyzik, astronóm a filozof Henri Poincaré (1854 - 1912) sa narodil do veľmi vplyvnej rodiny. Väčšina intelektuálov ho považuje za jedného z najväčších géniov všetkých čias. Svoj prvý matematický objav urobil keď mal len 12. Svojimi prácami zasiahol do veľa odvetí matematiky a fyziky. Vyštudoval École Polytechnique v Paríži. Po získaní doktorátu prijal miesto na Parížskej univerzite, kde po zbytok svojho života prednášal mechaniku, fyziku, matematiku a astronómiu. Spolu s Albertom Einsteinom položili základy „špeciálnej teórie relativity“, ktorá bola publikovaná v článku „On the electrodynamics of moving bodies“ [2] roku 1905. Krátky čas pôsobil ako profesor matematiky na univerzite v Sobronne. Poincaré bol prvý, kto pochopil možnosť existencie chaosu [26].



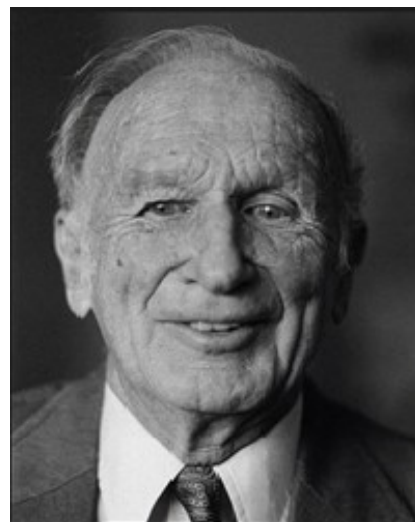
Obrázok 1 Henri Poincaré

1.1.1 Problém troch telies

Pri štúdiu problému troch telies došiel Henri Poincaré k záveru, že tento problém je často neriešiteľný. Problém dvoch telies popísal už Newton pomocou newtonových zákonov. Môžeme si predstaviť napríklad Slnko a Zem. Zem sa pohybuje okolo Slnka v dokonalej elipse a je možné jej polohu kedykoľvek spočítať. Pokiaľ do tohto systému pridáme tretie teleso, to začne svojou gravitáciou pôsobiť na predchádzajúce telesá a všetko sa skomplikuje. Pohybové rovnice pre tri a viac telies sa nedajú riešiť analyticky. Pri štúdiu pohybu troch telies sa ukázalo, že sa telesá pohybujú po čiastočne chaotických dráhach a sú priťahované k určitým bodom na svojej dráhe – atraktorom. Poincaré konštatoval, že chovanie troch telies z dlhodobého hľadiska nemožno predpovedať. Sú to skryté modely poriadku v chaose [1].

1.2 Edward Norton Lorenz

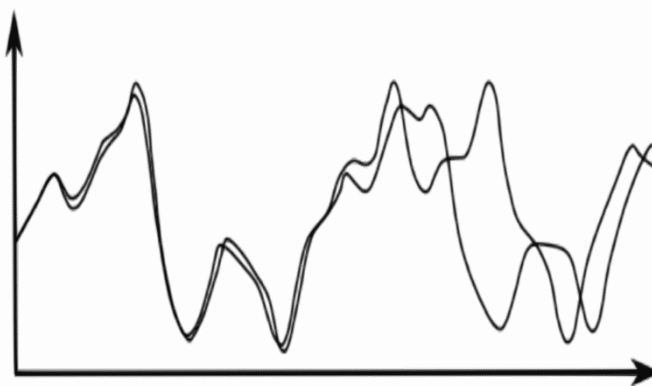
Edward Norton Lorenz (1917 - 2008) bol americký matematik a meteorológ, ktorý sa zaoberal teóriou chaosu.. Narodil sa 23. Mája 1917 v štáte Connecticut. Študoval matematiku na strednej škole v New Hampshuru a neskôr na Harwarde v Cambridge. Počas druhej svetovej vojny pôsobil ako meteorológ pre vojenské letectvo. Po vojne sa rozhodol venovať meteorológii. Zaviedol pojem „podivný atraktor“. Jeden z jeho objavov ktorý sa stal základným kameňom teórie chaosu je takzvaný „motýli efekt“. Jeho atraktor spolu s Lyapunovým exponentom je symbolom chaosu. Všetky svoje výpočty vykonával na svojom počítači BLGP-30, ktorý dokázal previesť „neuveriteľných“ 17 operácií za sekundu [27].



Obrázok 2 Edward Norton Lorenz

1.2.1 Motýlí efekt

Na prelome päťdesiatych a šesťdesiatych rokov sa veľa vedcov venovalo predpovediam počasia. Lorenz síce ešte nebol meteorológ ale počasie ho veľmi zaujímalo. Bol jeden z mála vedcov, ktorý mali k svojej práci počítač. V tej dobe boli i výpočty jednoduchých rovníc pomalé preto sa jedného dňa sa Lorenz rozhodol skrátiť čas výpočtom iba polovice grafu. Chcel preskúmať detailnejšiu časť grafu tak zadal počítačové hodnoty, ktoré už predtým počítač spracoval. Keď bol graf hotový zistil že grafy sa podobajú len na začiatku

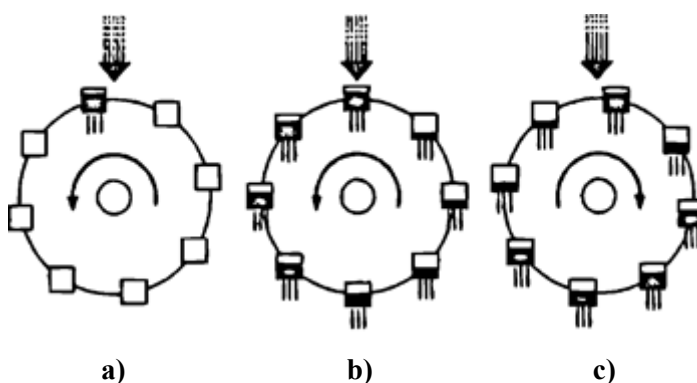


Obrázok 3 Motýlí efekt v Lorenzovom atraktore

ale od určitého bodu sa chovajú chaoticky (Obrázok 3). Spočiatku si myslel, že ide o chybu počítača ale i po opätovnom výpočte bol výsledok rovnaký. Po nejakej dobe zistil že zadával hodnotu do počítača s tromi desatinnými miestami, zatiaľ čo počítač počítal so šiestimi. Vďaka tomuto pochopil, že dlhodobá predpoveď počasia je úplne nemožná. Týmto spôsobom vznikol pojem Motýlí efekt. V počasí sa tento proces premieta do toho, čo je napoly vážne a napoly žartom-pojem vyjadrujúci to že ak dnes motýľ zvrú vzduch v Pekingu, budúci mesiac to môže zmeniť systém búrok v New Yorku. Mávnutie krídel motýľa tu predstavuje malú zmenu v počítačových podmienkach systému, ktorá spôsobí reťazec udalostí vedúcu k rozsiahlym javom ako je búrka či tornádo [1].

1.2.2 Lorenzovo vodné koleso

Patrí medzi prvý chaotický systém, ktorý odpovedá mechanickému zariadeniu (vodnému kolesu). Je príkladom jednoduchého zariadenia, ktoré vykazuje veľmi zložitú chovanie. Vodné koleso je vybavené nádobami s priepustom dnom. Z hora rovnomerne steká voda. Pokiaľ je prúd vody pomalý, horná nádoba sa dostatočne nenaplní, neprekoná trenie a koleso sa neroztočí. Ak je prúdenie vody rýchle, hmotnosť hornej nádoby uvedie koleso do pohybu (Obrázok 4a). Otáčky môžu dosiahnuť takej hodnoty, že pokračujú rovnomernou rýchlosťou (Obrázok 4b). Ale ak je prúdenie ešte rýchlejšie otáčanie kolesa sa v dôsledku nelineárnych účinkov môže stať chaotickým. To ako sa nádoby naplnia, keď prechádzajú pod prúdom vody záleží na rýchlosti točenia kolesa. Ak sa koleso otáča rýchlo môžu začať stúpať na druhú stranu skôr ako sa stihnú vyprázdniť. Výsledkom je to, že nádoby na druhej strane môžu otáčanie spomaliť a dokonca obrátiť smer (Obrázok 4c). Lorenz zistil, že z dlhodobého hľadiska sa smer otáčania môže zmeniť nekonečne veľa krát. Otáčanie sa nikdy neustáli v rovnomernom tempe a nikdy sa neopakujú predpovedaným spôsobom [1].



Obrázok 4 Lorenzovo vodné koleso

1.3 Lord Robert May

Robert McCredie May alebo Baron May of Oxford sa narodil 8. Januára roku 1938 v Sydney. Chodil na chlapčenskú strednú školu a neskôr na univerzitu v Sydney. Na univerzite sa venoval chemickému inžinierstvu a teoretickej fyzike v ktorej roku 1959 získal doktorát. Hneď od začiatku svojej kariéry sa začal venovať populačnej dynamike zvierat a vzťahu medzi zložitou a stabilitou v prirodzenom spoločenstve. Aj keď nebol biológom spravil významné kroky v oblasti populačnej biológie prostredníctvom aplikácie matematických metód. Bol prednášajúcim na ústave aplikovanej matematiky na Harvardskej univerzite ale na začiatku 70 rokov odišiel späť do Sydney, kde sa začal zaoberať logistickou rovnicou. V roku 2001 mu bol pridelený doživotný titul Lord [1].



Obrázok 5 Lord Robert May

1.4 James York

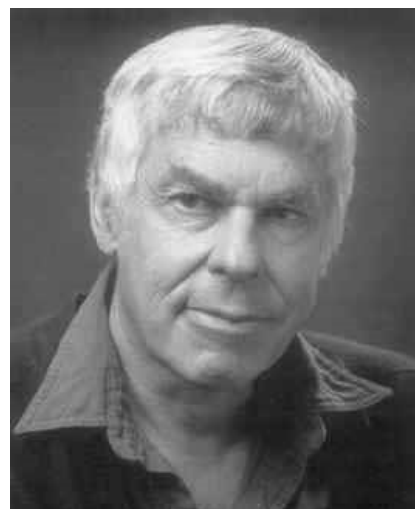
James A. York sa narodil 3. augusta 1941 v Plainfield, New Jersey. Tvrdí sa, že objavil Lorenza a dal **chaosu** jeho meno. Bol síce matematik ale považoval sa skôr za filozofa. Už v dvadsiatich dvoch rokoch nastúpil na interdisciplinárnu katedru Marylanskej univerzity, katedru fyzikálneho výskumu a techniky. Neskôr sa stal jej vedúcim. Patril k tým matematikom, ktorý cítili povinnosť svoje poznatky o svete zužitkovať. Okolo roku 1972 náhodou narazil na Lorenzov článok „*Deterministic aperiodic flow*“ [25], ktorý mu pripadal ako zázrak po ktorom pátral ale to pritom to vôbec nevedel. Bol to chaotický systém, ktorý porušoval Smaleovo pôvodné optimistické klasifikačné schéma. Vtedy sa mu hlavou prebehla myšlienka vytvoriť hybrid matematiky a fyziky. Jeho najslávnejšia práca vznikla v spolupráci s Tien Yien Li pod názvom „*Period three implies chaos*“ [3] a bola publikovaná v roku 1975 v časopise Nature [1].



Obrázok 6 James York

1.5 Stephen Smale

Americký matematik a nositeľ dvoch významných ocenení v oboru Fieldsovy medaile a Wolfovy cena za matematiku. Narodil a 15. júla roku 1930 v meste Flint, štáte Michigan. Roku 1998 zverejnil text, ktorý obsahuje 18 matematických problémov. Tieto problémy sú dodnes nevyriešené a známe ako „Smaleovy problémy“. Zo začiatku sa venoval topológii no neskôr dynamickým systémom. Patril medzi prvých matematikov, ktorý začali študovať nelineárnu dynamiku. Venoval sa trajektóriu systémom vo fázovom priestore a pozoroval ako sa ich časti naťahujú a skracujú. Výsledkom jeho výskumu bolo vynález Smaleovy podkovy. Vďaka tomu Smale vytvoril chybnú hypotézu. Tvrdil, že všetky dynamické systémy sa po väčšinu času vyznačujú nie príliš podivným chovaním. Ako sa neskôr dozvedel nebolo to tak jednoduché [28].



Obrázok 7 Stephen Smale

1.5.1 Smaleova podkova

Táto topologická transformácia vytvorila základ pre pochopenie chaotických vlastností dynamických systémov. Podstata je jednoduchá. Priestor v jednom smere je natiahnutý, v druhom stlačený a nakoniec spojený. Opakovaním procesu vzniká strunkované miešanie. Príkladom môže byť príprava lískového cesta. Dva body, ktoré sa nakoniec ocitnú tesne vedľa seba by mohli byť veľmi vzdialené [1].

2. Charakteristika chaosu

V preklade slovo chaos znamená „počiatok a prameň všetkého na svete“. Gréci si ho väčšinou predstavovali ako nekonečný vesmírny priestor alebo ako spleť prvkov beztvárnej prahmoty v neobmedzenej temnote a zosobnili si ho v božskú bytosť. Jednoducho bol považovaný za prázdnotu medzi nebom a zemou, z ktorej sa zrodil svet. Z toto popisu je zrejmé že chaos nie je len nekonečná pustina, ktorá všetko pohlcuje. Je to vlastne aj stav „počiatočný“, teda vstupný, ktorý obsahuje možnosť vzniku budúceho poriadku. Týmto spôsobom sa storočia pozeralo na chaos ako na stav pozitívny, ktorý má schopnosť vytvoriť niečo nové. No časom sa obsah tohto pojmu začal výrazne meniť a to hlavne vďaka objavom v modernej vede [1].

2.1 Čo je teória chaosu

Teória chaosu sa zaoberá chovaním nelineárnych dynamických systémov, ktoré za určitých podmienok vykazujú jav známy ako deterministický chaos. Charakteristickou vlastnosťou chaosu je citlivosť na počiatočné podmienky. Kvôli tejto citlivosti sa chovanie týchto fyzikálnych systémov javí ako náhodné aj keď model systémov je deterministický v tom zmysle, že je dobre definovaný a neobsahuje žiadne náhodné parametre [1].

2.2 Lineárny a nelineárny systém

Lineárny systém je v podstate taký systém kde môžeme uplatniť princíp superpozície. Vo všeobecnosti je známy princíp superpozície tak, že ak sú rovnice lineárne a popisujú rovnaký fyzikálny systém tak ich kombinácia je zároveň riešením. Jednoduchým príkladom zo života je hodenie kameňa do rybníka. V mieste dopadu sa rozbehnú vlny na všetky strany, ale ak hodíme ďalší kameň vznikne nové vlnenie. Keď sa vlny stretnú vytvoria zložitý obrazec. Ide o to že obe vlny sa šíria nezávisle a výška vody v každom mieste rybníka je daná súčtinou výšok, ktoré by osobitne vytvoril prvý a druhý kameň. Tomu sa vraví princíp superpozície [29].

Nelineárny systém je však taký systém kde neplatí princíp superpozície. V skutočnosti existuje malá množina izolovaných bodov pre ktoré platí princíp superpozície, ktoré sa nazývajú fixné body. No pre tie, ktoré to neplatí je nutné vypočítať zmenu stavu systému pomocou diferenciálnych rovníc, ale niekedy je to veľmi náročné a nie je zaručené že sa podarí predpovedať stav systému aj v budúcnosti [1].

2.3 Dynamický systém

Je definovaný pomocou dynamických podmienok, ktoré popisujú zmenu systému v čase. Stav systému v ľubovoľnom časovom okamžiku je popísaný vektorom, ktorý leží v stavovom priestore. Dynamické podmienky sú väčšinou zadané sústavou diferenciálnych rovníc, ktoré popisujú zmenu stavového vektoru v čase. Zmena stavu dynamického systému sa deje prevedením týchto diferenciálnych rovníc a nahradením starého stavového vektoru vektorom novým. Dynamický systém môže byť deterministický alebo stochastický (náhodný) [30].

2.4 Deterministický systém a jeho výskyt

Determinizmus je vlastne presvedčenie, že každá udalosť alebo stav vecí, vrátane ľudského rozhodnutia je dôsledkom predchádzajúcich udalostí. Z výrazu „deterministický chaos“ plynie fakt, že systémy, ktoré ho produkujú možno modelovať. V týchto modeloch sa nevyskytuje žiadna náhodnosť. Typickým príkladom je logistická mapa (kapitola 3.1). Základným princípom deterministického chaosu je sústava diferenciálnych rovníc, ktorá je charakterizovaná svojím chaotickým chovaním bez ohľadu na počiatočné podmienky. Dôležitou úlohu v týchto systémoch hrá nelinearita systému. Chaotické chovanie vypadá pro bežného pozorovateľa jakom úplne náhodný systém. Rôzne náhle a nepredvídateľné zmeny v systémoch dokážu spôsobiť vznik chaotického chovania. Systémy, ktoré generujú deterministický chaos sa delia na Hamiltoniánske a Disipatívne.

Aby sme mohli klasifikovať chovanie systému ako chaotické, musí systém vykazovať nasledujúce vlastnosti:

a) Veľká citlivosť počiatočných podmienkach

b) Hustá množina periodických bodov

c) Tranzitivita

Chaotické systémy sú napríklad atmosféra, ekonómia, vývoj populácie, solárny systém, tektonika zemských dosiek, turbulencia tekutín. Často sa stretávame s chaosom v elektronických obvodoch. Výskyt chaosu môžeme očakávať u systémov, ktoré obsahujú vhodnú nelinearitu, alebo pokiaľ medzi spolupracujúcimi systémami existuje nelineárna väzba. Samotný výskyt chaosu ešte nemusí znamenať, že sa v danom systéme deje niečo zlého. Veľakrát to iba znamená, že je príslušný systém „na ceste“ ku kvalitnejšiemu usporiadaniu [1,33].

2.5 Disipatívne systémy

Disipatívne systémy majú tú vlastnosť, že ak sa nachádza počiatočný stav kdekoľvek vo fázovom priestore, s rastúcim časom sa trajektória sťahuje do určitej časti tohto priestoru. Sú týmito oblasťami (atraktormi) priťahované. Tieto systémy sú známe tým, že u nich dochádza k disipácii teda strate energie. Takého systémy sú potom popísané sústavami diferenciálnych rovníc, ktoré umožňujú syntézu ich riadenia [31].

2.6 Hamiltoniánske systémy

Hamiltoniánske systémy sú typické tým, že u nich „nedochádza“ k disipácii energie. Toto treba brať s rezervou pretože každý systém časom stráca svoju energiu. Pokiaľ systém „ne stráca“ energiu, je to myslené v rámci krátkeho časového obdobia, kde je prevádzané pozorovanie a zráta je vtedy zanedbateľná. Pokiaľ sa vraví faktu, že systém ne stráca svoju energiu, tak je konzervatívny. Dost' často sa stretáme s pojmom „Konzervatívne systémy“ namiesto „Hamiltoniánske systémy“ [31].

2.7 Vizualizácia chaotických atraktorov

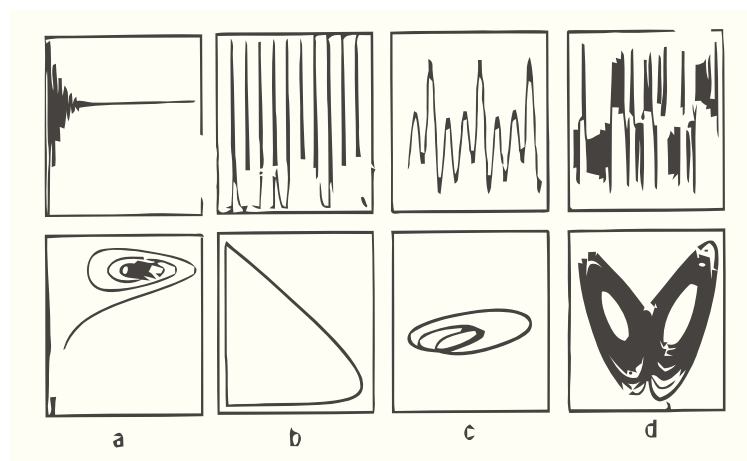
Atraktor, vlastne konečný stav systému, alebo inak povedané stav do ktorého systém v čase smeruje (je do neho priťahovaný). Bežným príkladom je pripojenie tlmiča ku kyvadlu. Bez ohľadu na počiatočnú pozíciu a rýchlosť sa bude blížiť ku kľudnému stavu (k jeho limite). Tento bod v strede, vlastne stav kedy je kyvadlo v kľude sa nazýva „atraktor“.

Atraktory delíme do niekoľkých skupín. Trajektória môže smerovať do jedného bodu, napríklad mechanické kyvadlo, na ktoré pôsobí trenie a časom sa zastaví. Tento prípad sa nazýva množina bodov a je to najjednoduchší príklad atraktora (Obrázok 8a).

Teleso, môže ustáliť tak, že osciluje medzi niekoľkými hodnotami. Tento stav sa nazýva periodické body (spočítateľné), alebo kvaziperiodické body (nespočítateľné). Príkladom môže byť cudzie teleso, ktoré sa objavilo do našej sústavy a je priťahované slnkom. No po čase sa ustáli (Obrázok 8b).

Ďalším príkladom sú chaotické atraktory. Tieto atraktory sú veľmi citlivé na počiatočné podmienky a preto je dosť zložitá dopredu predvídať ich chovanie (Obrázok 8c).

Zvláštnou skupinou sú podivné atraktory (Obrázok 8d). Vykazujú veľkú zložitosť. Príkladom je Lorenzovo vodné koleso opísané v kapitole 1.2.2.

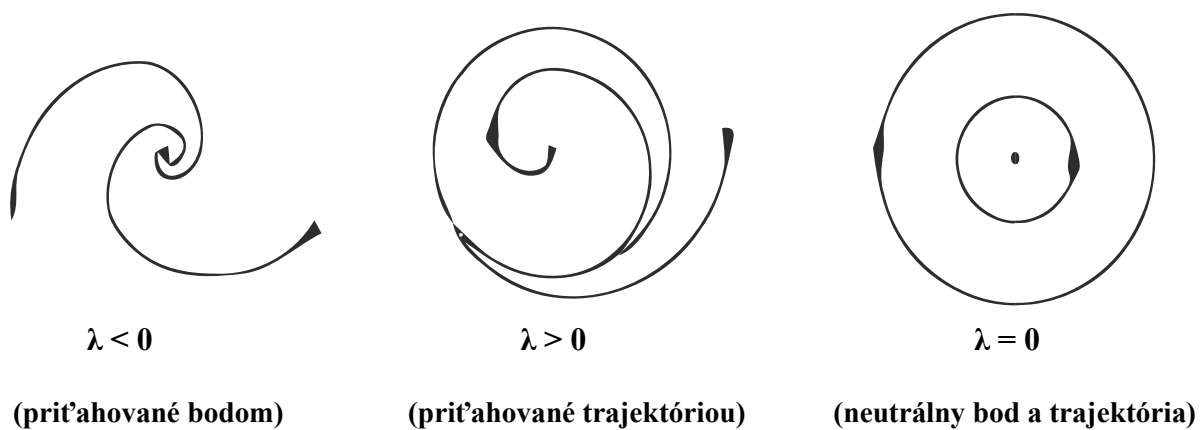


Obrázok 8 Príklady atraktorov a) množina bodov b) periodické body c)chaotický atraktor d) podivný atraktor

2.8 Ljapunov exponent

Ljapunov exponent je meradlo divergencie blízkych trajektórií a je označovaný symbolom λ . Ide o kvantitatívne meradlo chaotickosti, pomocou ktorého môžeme rozlíšiť chaotické chovanie od šumu. Taktiež nám umožňuje sledovať reakciu systému na zmenu parametrov.

V závislosti na hodnote λ môže nastať niekoľko situácií. Ak je λ záporné číslo, potom je trajektória priťahovaná fixným bodom alebo stabilnou periodickou trajektóriou. Záporný Ljapunov exponent je typický pre disipatívne systémy. Takého systému vykazujú asymptotickú stabilitu, ktorá rastie so znižujúcou sa hodnotou čísla λ . Pokiaľ je číslo λ rovné nule, systém sa nachádza v ustálenom režime a taktiež vykazuje Ljapunovu stabilitu. Nulovú hodnotu vykazujú konzervatívne systémy. Ak je Ljapunov exponent kladný jedná sa o systém, ktorý je nestabilný a chaotický, pričom jeho trajektória bude divergovať bez ohľadu na svoju vzdialenosť. Obrázok 9 znázorňuje ako veľkosť Ljapunovho exponentu ovplyvňuje trajektórie [34].

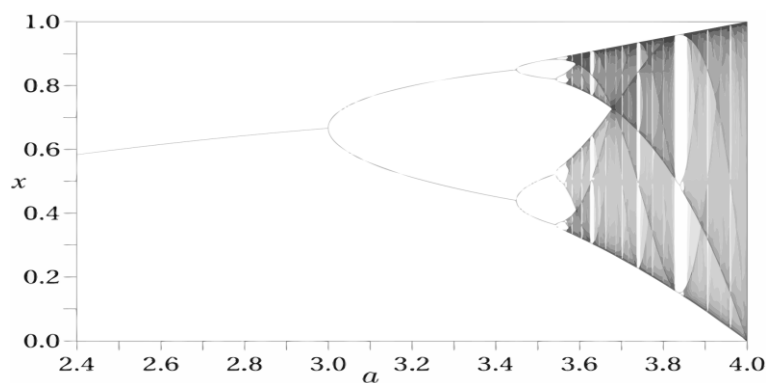


Obrázok 9 Trajektórie s rôznymi hodnotami Ljapunovho exponentu

3. Zoznam použitých atraktorov

V tejto kapitole uvediem všetky atraktory, ktoré som vo svojej aplikácii použil. Pravdou je, že ich je veľmi veľa ale vybral som len tie najznámejšie. Budem sa snažiť stručne popísať základné informácie o nich. Pre lepšie predstavu je pri každom priložený obrázok.

3.1 Logistická mapa



Obrázok 10 Logistická mapa

Patrí medzi jednu z najznámejších chaotických rovníc. Táto rovnica bola publikovaná v roku 1970 austrálskym biológom menom „Robert May“. Logistická mapa je definovaná:

$$X_{n+1} = r * X_n(1 - X_n) ,$$

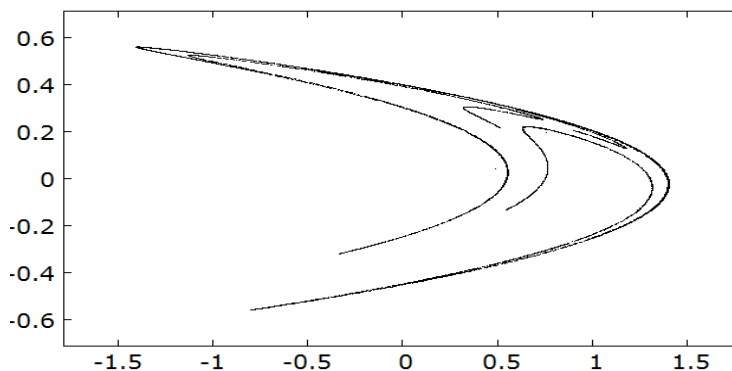
kde r je maximálna rýchlosť rastu. Robert May zistil že pri nízkych parametroch r sa populácia ustáli na konštantnej hodnote, no akonáhle zvýšil r na hodnotu 3 tak sa výsledok riešenia bol s periódou 2. Čo znamenalo že došlo k bifurkácii. So zvyšovaním parametru r vzniklo riešenie s periódou 4, 8, ... až k hodnote okolo 3,5699. Odtiaľ sa začalo chovať nestabilne [1].

Logistická rovnica je jedna z najjednoduchších modelov deterministického chaosu. No bežne sa používajú mapy, ktoré sú modifikované logistickou rovnicou. Príčinou vzniku rovnice bola simulácia biologických procesov ako je správanie rôznych živočíšnych druhov v ich prostredí. Jednoduchým príkladom môže byť spolužitie dvoch druhov v uzavretom prostredí ako je napríklad v rybníku, kde jeden druh predstavuje potravu pre druhého. Nevyvrátiteľným dôsledkom bude to, že požíraného druhu bude stále ubúdať, ale akonáhle bude požíraného druhu nedostatok, začne zomierať hladom dominantný druh, čo zase spôsobí zvýšenie jedincov požíraného druhu. Z tohto popisu je teda jasné že populácia druhov bude periodicky oscilovať alebo sa ustali na konštantnej hodnote [4].

Fakt že v logistickej mape sa chaos rozkladá v prechode sa využíva v generovaní pseudonáhodných čísel. Za týmto účelom skupina vedcov preukázala v článku [5] štatistické testy, ktoré dokázali, že tento spôsob generovania čísel má veľa vlastností.

V posledných rokoch sa na základe chaosu logickej mapy navrhli nové spôsoby šifrovania obrazu. Výsledky uvedené v článku [6] dokazujú, že navrhovaný systém šifrovania obrazu poskytuje efektívny a bezpečný spôsob ako v reálnom čase šifrovať obraz a prenos .

3.2 Henon



Obrázok 11 Henon

Mapa bola zavedená francúzskym matematikom a astronómom Michelom Hénonom a to ako zjednodušený model časti Poincaré modelu Lorenz roku 1976. V tom čase pracoval v „Nice Observatory“. Hénonova mapa je zaradovaná do skupiny „podivné atraktory“.

Je to jeden z najviac študovaných príkladov dynamických systémov, ktoré vykazujú chaotické chovanie. Hénonova mapa popisuje nasledujúce matematické vyjadrenie :

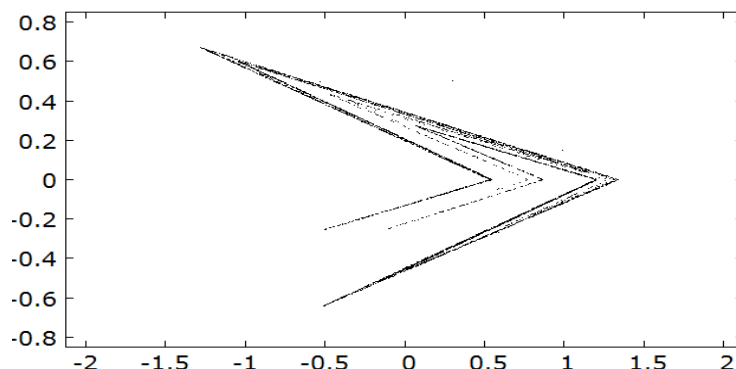
$$X_{n+1} = 1 + Y_n - a * X_n^2$$

$$Y_{n+1} = b * X_n$$

Mapa závisí na hodnotách dvoch parametrov **a** a **b**. Pre klasickú Hénonovu mapu majú hodnoty $a = 1,4$ a $b = 0,3$. Pre tieto hodnoty parametrov Hénonova mapa vykazuje chaotické chovanie. Pre ostatné hodnoty **a** a **b** môže byť chovanie chaotické, prerušované, alebo môže konvergovať k pravidelnej dráhe [7].

Hénonova mapa je považovaná za ilustratívny príklad použiteľnosti backstepping designu. Navrhovaný režim poukazuje na systematickú metódu konštrukcie pro synchronizáciu triedy diskretných hyperchaotických systémov, ktoré môžu byť použité ku zlepšeniu bezpečnosti v chaosu komunikácie [8].

3.3 Lozi



Obrázok 12 Lozi

Loziho mapa je dvoj-dimenzionálny chaotický systém. Po niekoľkých rokoch v snahe o zjednodušenie Henon modelu sa zistilo že, linearizovaná verzia Henon(Lozi) má rovnakú štruktúru podivného atraktoru. Jednou odlišnosťou je to že krivky boli nahradené priamkami [9].

Lozi mapa je definovaná nasledovne:

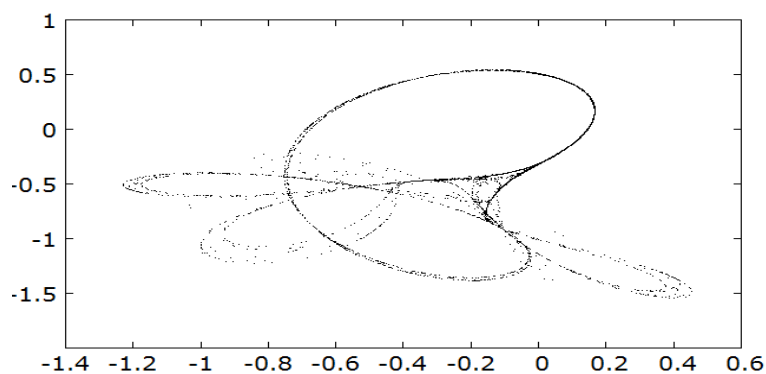
$$X_{n+1} = 1 - a * |X_n| + Y_n$$

$$Y_{n+1} = b * X_n$$

Mapa bola objavená roku 1978 profesorom René Lozim. Mapa sa zaoberá skutočnými a matematickými aplikáciami vrátane strojárstva, počítačov, komunikácie, lekárstva, biológie.

Roku 1995 bol zavedený takzvaný „PSO“ algoritmus, ktorý je založený na prirodzenom správaní vtákov a rýb. Loziho mapa sa využila k zvýšeniu výkonu pre PSO algoritmus, čo je popísané v nasledovnom článku [10].

3.4 Tinkerbell



Obrázok 13 Tinkerbell

Pôvod mena je dosť neistý, avšak grafický obraz systému ukazuje podobnosti pohybu „Tinker Bell“ nad Popoluškiným hradom, ako je uvedené na začiatku všetkých filmov spoločnosti Disney [1].

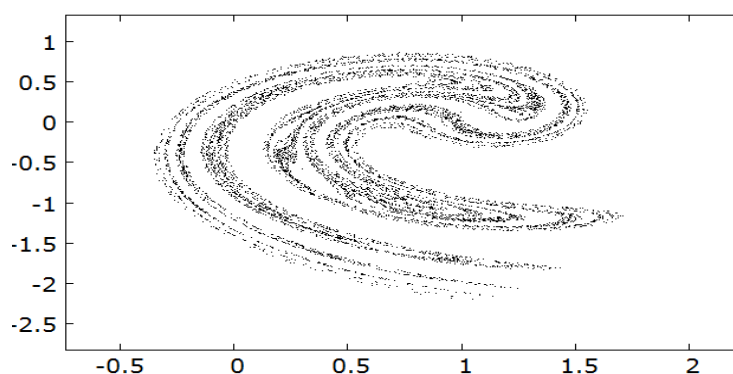
Tinkerbell je definovaná nasledovne:

$$X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 + a * X_n + b * Y_n$$

$$Y_{n+1} = 2 * X_n * Y_n + c * X_n + d * Y_n$$

Jednou z možností použitia v praxi je metóda generovania pseudonáhodných čísel, ktorá využíva algoritmus kombinujúci Tinkerbell mapu a Chebyshevov polynom. Podľa článku [12] experimentálne výsledky ukazujú dostatočne veľké vlastnosti v oblasti rušenia „Brute-force“ útokov.

3.5 Ikeda



Svetlo ktoré prechádza cez prstencovú dutinu obsahuje dve úrovne absorberu, ktoré produkujú výkyvy. Kensuke Ikeda zistil, že ak odhladá dopadajúce svetlo z absorberu, prenášané pole predstavuje chaotické chovanie. Svoju prácu publikoval roku 1980 v článku „Chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity“ [13].

Ikeda je definovaná nasledovne:

$$t_n = b - \left(\frac{a}{1 + X_n^2 + Y_n^2} \right)$$

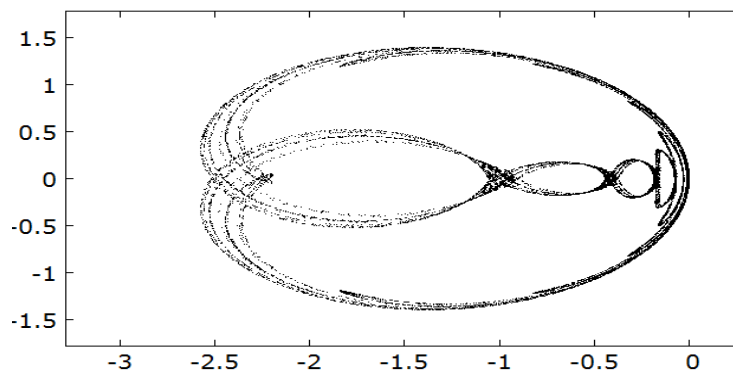
$$X_{n+1} = 1 + c * (X_n * \cos(t_n) - Y_n * \sin(t_n))$$

$$Y_{n+1} = c * (X_n * \sin(t_n) + Y_n * \cos(t_n))$$

Ikeda mapa nachádza využitie pre štúdium dynamických systémov implementovaných v intervale aritmetiky. Tieto metódy zahrnujú algoritmus pre nájdenie nízko-periodických cyklov uzavretých v určitej oblasti [14].

Ikedou sa zaujímali viacerý vedci, ktorý sa pokúšali zistiť Ljapunov exponent pre časové rady. V článku [15] dokázali, že je výhodnejšie použiť mapovanie vyššieho rádu s Taylorovou sériou ako lineárnej mapy.

3.6 Burger



Obrázok 14 Burger

Mapovanie Burgera bolo diskretizácia páru spojených diferenciálnou rovnicou. Ovládanie mapy okolo stabilných „Neimark Sacker“ bifurkácií bolo dosiahnuté pomocou spätnoväzobného regulátoru polynomiálnej techniky. Komplexná dynamika, bifurkácia a chaos boli zobrazené v numerických simuláciách v článku [16].

Burger mapa je definovaná nasledovne:

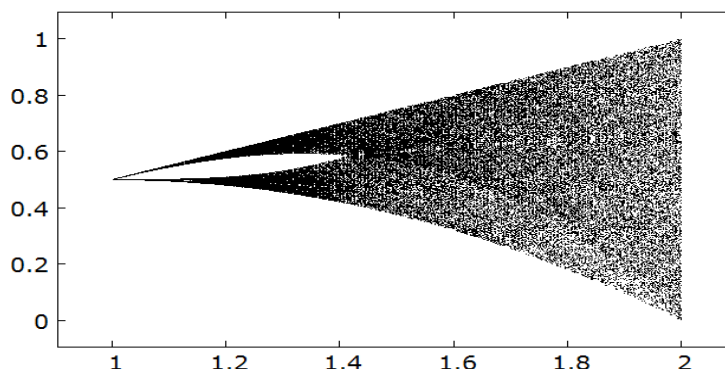
$$X_{n+1} = a * X_n - Y_n^2$$

$$Y_{n+1} = b * Y_n + X_n * Y_n$$

Burgerova rovnica umožnila chaotické riešenia pre konštrukciu turbulencie malého rozsahu. Vedci v práci [17] došli k riešeniu, ktoré sa stalo dočasne chaotické so štruktúrou podivného atraktoru.

Zaujímavosťou je, že niektorých hodnotách jeho parametrov sa objavuje prechod medzi chaotickým pohybom na podivný atraktor, pre ktorý je Lyapunov exponent pozitívny. Bližšie informácie sú publikované v článku [18].

3.7 Tent



Obrázok 15 Tent

Tent mapa sa môžeme stretnúť aj s názvom stanová a je definovaná nasledovne:

$$X_n < \frac{1}{2} \quad X_{n+1} = \mu * X_n$$

$$X_n \geq \frac{1}{2} \quad X_{n+1} = \mu * (1 - X_n)$$

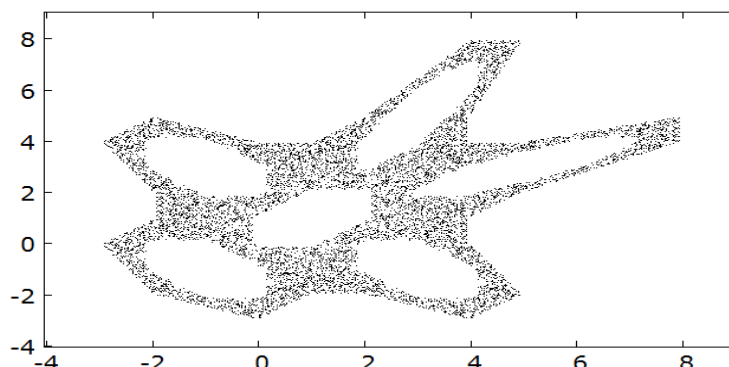
Tent mapa a logistická mapa sú topologicky konjugatívne. Ich chovanie je identické v zmysle správania sa pod iteráciou. V závislosti na hodnote μ Tent mapa ukazuje rozsah dynamického chovania v rozsahu od predvídateľnosti až k chaosu. Podľa veľkosti parametru μ môže nastať niekoľko situácií:

- $\mu < 1$ bod x je pevný bod systému pre všetky počiatočné hodnoty x , to znamená že systém bude konvergovať k 0 z akejkoľvek počiatočnej hodnoty x
- $\mu = 1$ všetky hodnoty x sú menšie alebo rovné polovici fixných bodov systému
- $\mu > 1$ systém má dva pevné body, jeden 0 a druhý $\mu / (\mu + 1)$. Obidva body sú nestabilné, to znamená že hodnota x v blízkosti pevného bodu sa bude pohybovať skôr

Výbornou výhodou Tent mapy je jeho hybridný algoritmus založený na chaotickej mape. V kombinácii so vzorom vyhľadávacieho algoritmu vznikne hybridný optimalizačný algoritmus. Príklady ukazujú uskutočniteľnosť algoritmu ako aj praktickosť Tent mapy [19].

Patrí medzi najjednoduchšie chaoticke mapy. Využitie nájde hlavne v kryptológii, kde je algoritmus založený na chaotickej mape. V článku [20] poukazujú na príklady uskutočniteľnosti algoritmu ako aj praktickosť Tent mapy.

3.8 Gingerbreadman



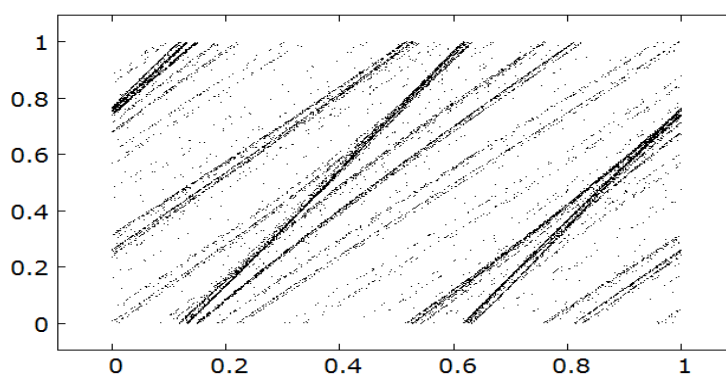
Obrázok 16 Gingerbreadman

Táto mapa bola navrhnutá profesorom matematiky menom Robert L. Devaney. Publikoval ju v roku 1992. Je chaotická v niekoľkých regiónoch, ale v iných je stabilná. Príkladom $(1,1)$ je pevný bod. Všetky ostatné body v šesťuholníkovom regióne $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(1,2)$ a $(0,1)$ sú periodické s periódou 6. To je v rozpore s bodom mimo tento región, čo vedie k chaotickej dráhe. Vznikne šesťuholníková oblasť, ktorá tvorí brucho a päť ďalších ktoré tvoria nohy hlavu a ruky perníkového mužíčka [32]. Táto mapa je definovaná nasledovne:

$$X_{n+1} = 1 - Y_n + |X_n|$$

$$Y_{n+1} = X_n$$

3.9 Sinai



Obrázok 17 Sinai

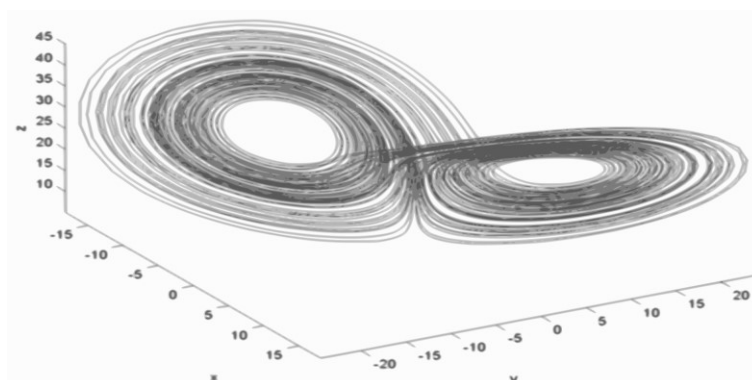
Mapa, ktorá bola publikovaná roku 1972 ruským mikrobiológom menom Yakov G. Sinai. Ako vedec dosiahol prielomové výsledky v teórii dynamických systémov, v matematickej fyzike a teórii pravdepodobnosti. Väčšina matematických výsledkov sú aj po ňom pomenované [33].

Sinai mapa je definovaná nasledovne:

$$X_{n+1} = X_n + Y_n + \delta * \cos(2 * \pi * X_n) \pmod{1}$$

$$Y_{n+1} = (X_n + 2 * Y_n) \pmod{1}$$

3.10 Lorenzov atraktor



Obrázok 18 Lorenzov atraktor

Atraktor tohoto systému je prvým z tzv. „podivných atraktorov“. Tento model bol prezentovaný roku 1963 meteorológom Edwardem Lorenzom a ide o zjednodušený model cirkulácie kvapaliny v malej idealizovanej nádobe. Lorenzův model popisuje atmosféru ako vrstvu, ktorá je zospodu ohrievaná a z hornej časti chladená. Dolná časť atmosféry má teplotu označovanou T_w , ktorá je vyššia ako teplota horného okraja označovaná T_C . U modelu sa predpokladá, že rozdiel teplôt $\delta T \equiv T_w - T_C$ je udržiavaný na konštantnej hodnote [25].

To je typickým príkladom nelineárneho chovania. Aj napriek tomu, že je prostredie v čase stabilné, systém spontánne vykazuje časovo závislé chovanie. Tento systém je popísaný nasledujúcimi rovnicami:

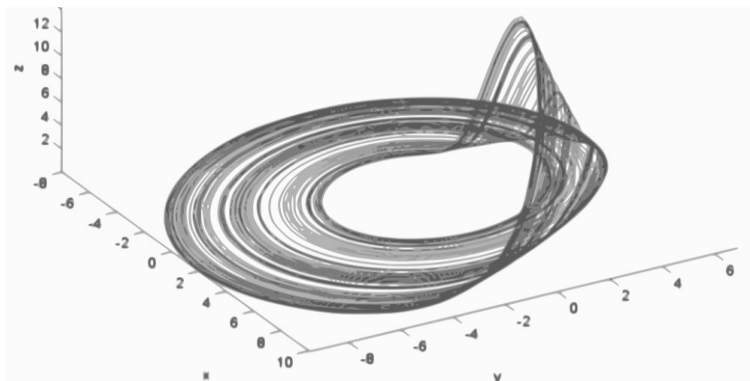
$$\frac{dx}{dt} = \sigma * (y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x * (p - z) - y$$

$$\frac{dz}{dt} = x * y - \beta * z$$

kde σ je Prandtovo číslo, kde jeho hodnota je závislá na vlastnostiach kvapaliny a p je Rayleighovo číslo, pro ktoré platí, že aby dokázalo k cirkulácii kvapaliny musí byť väčšie ako 1 [21].

3.11 Rössler



Obrázok 19 Rössler

Pravdepodobne najjednoduchší spojité systém, ktorý môže vykazovať chaotické chovanie. Popísal ho v roku 1976 vo svojom článku Otto E. Rössler [22]. Vychádza z Lorenzovho atraktoru. Rössler je pôvodom nemecký lekár, ktorý sa dostal k chaosu cez chémiu a teoretickú biológiu. Rösslerov atraktor je popísaný nelineárnou sústavou troch diferenciálnych rovníc:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + a * y$$

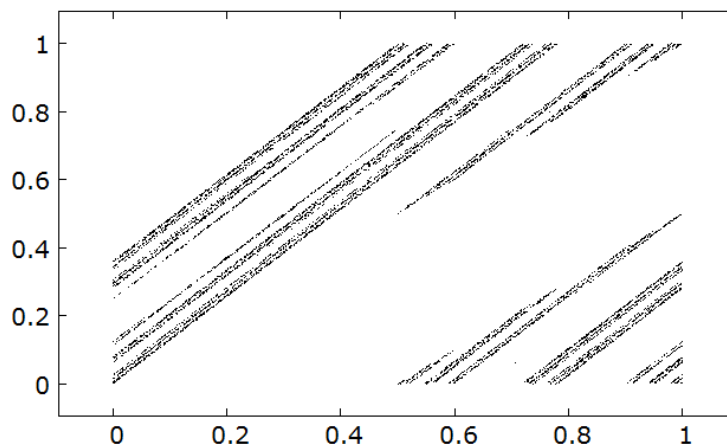
$$\frac{dz}{dt} = b + z * (x - c),$$

pričom $a = 0.2$, $b = 0.2$, $c = 5,7$. Zmenou hodnoty parametru c sa výrazne ovplyvňuje chovanie systému.

Rösslerovo meno začalo byť spojované s jednoduchým atraktorem v tvare stuhy, zvinuté do venčeku so záhybom. Rössler si ale tiež predstavoval atraktory z vyšších dimenzií ako ohýbanie a stlačovanie stavového priestoru, ktoré sa skutočne stalo kľúčom ku konštrukciám podivných atraktorů.

Rössler zastával názor, že tieto tvary predstavujú princíp samoorganizácie v prírode (vznik disipatívnych štruktúr vďaka zložitým a vzájomne súvisiacim procesom). V publikácii [31] sa dočítame nasledujúce: „Rössler si predstavoval *punčochu k měření větru, do které se chytil vítr. Vítr je v pasti a musí "proti své vůli" konat něco užitečného. Podle něj princip samoorganizace spočíval vtom, že příroda dělá něco proti své vůli a díky tomu se zaplétá do sebe a dává tak vzniknout kráse*“.

3.12 Arnold cat map



Obrázok 20 Arnold cat map

Chaotická mapa, ktorú po sebe pomenoval Vladimír Arnold. Publikoval ju v roku 1960 a to s použitím fotky mačky (Obrázok 21). Preto sa táto mapa aj tak volá.

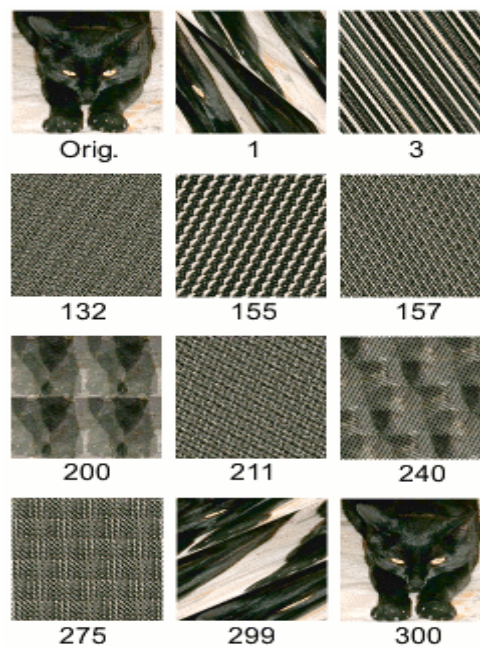
Arnold Cat mapa je definovaná rovnicou:

$$X_{n+1} = (X_n + Y_n)(\text{mod } 1)$$

$$Y_{n+1} = (X_n + k * Y_n)(\text{mod } 1)$$

Bola využitá napríklad u kryptografických systémov. Systém, ktorý je uvedený v článku [23] obsahuje permutácie, substitúcie a šírenia, ktoré sú nezbité pre dobré a kvalitné šifrovanie. Je odolný voči známym „plain-text“ útokom. Výhodou je premenná dĺžka kľúča a variabilného obrazu. Veľmi rýchle šifrovanie a dešifrovanie.

Pomocou Arnold Cat mapy vedci učinili významný pokrok v mapovaní, identifikácii génov a mutácií zodpovedných za zdedené formy šedého zákalu. Zamerali sa na rastúce genetické zložitosti Mendelianových zákonov a šedého zákalu v súvislosti s vekom. Výsledky testov sú uvedené v článku [24].

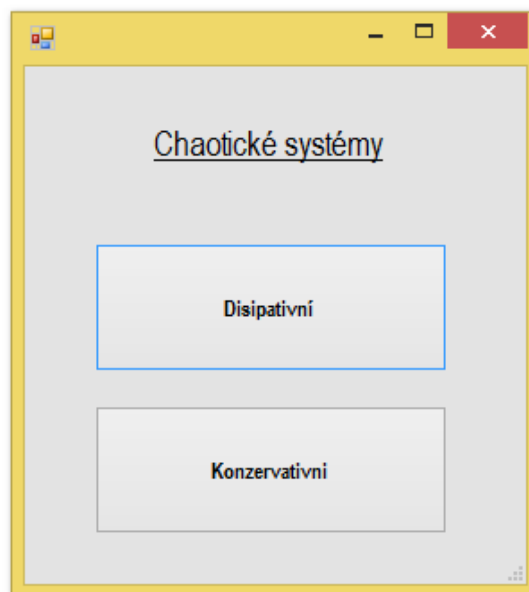


Obrázok 21 Prezentácia Cat mapy

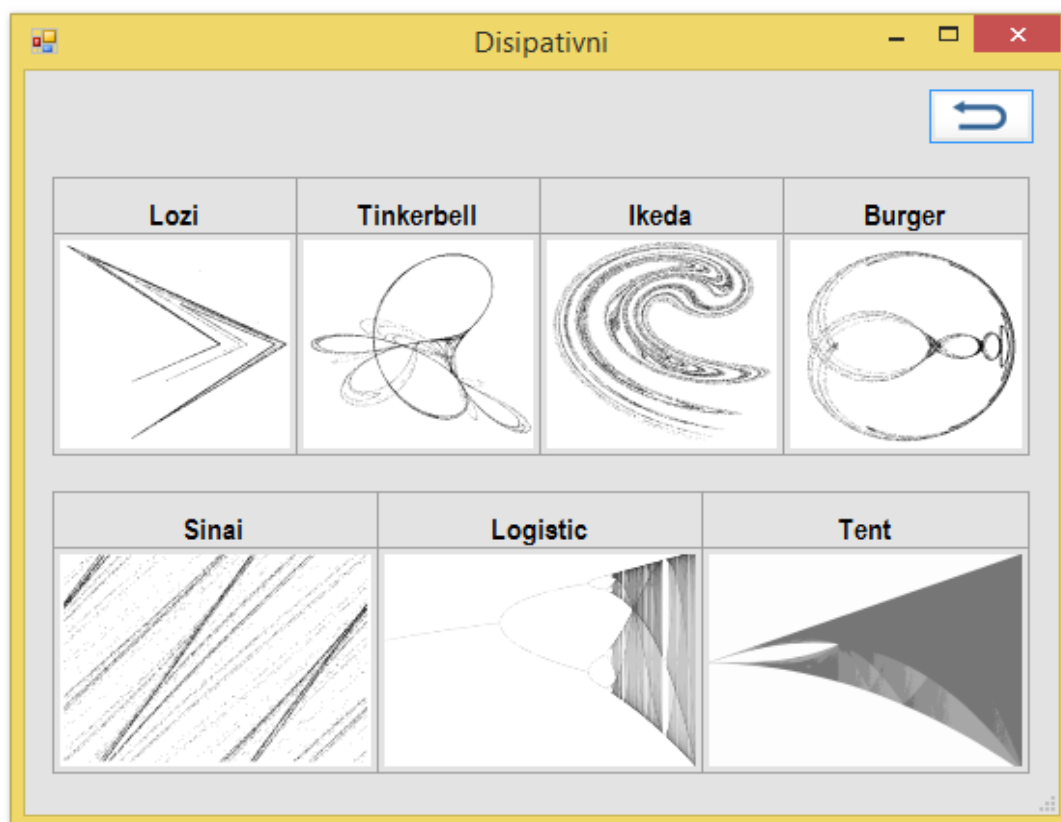
II. PRAKTICKÁ ČASŤ

4. Charakteristika programu

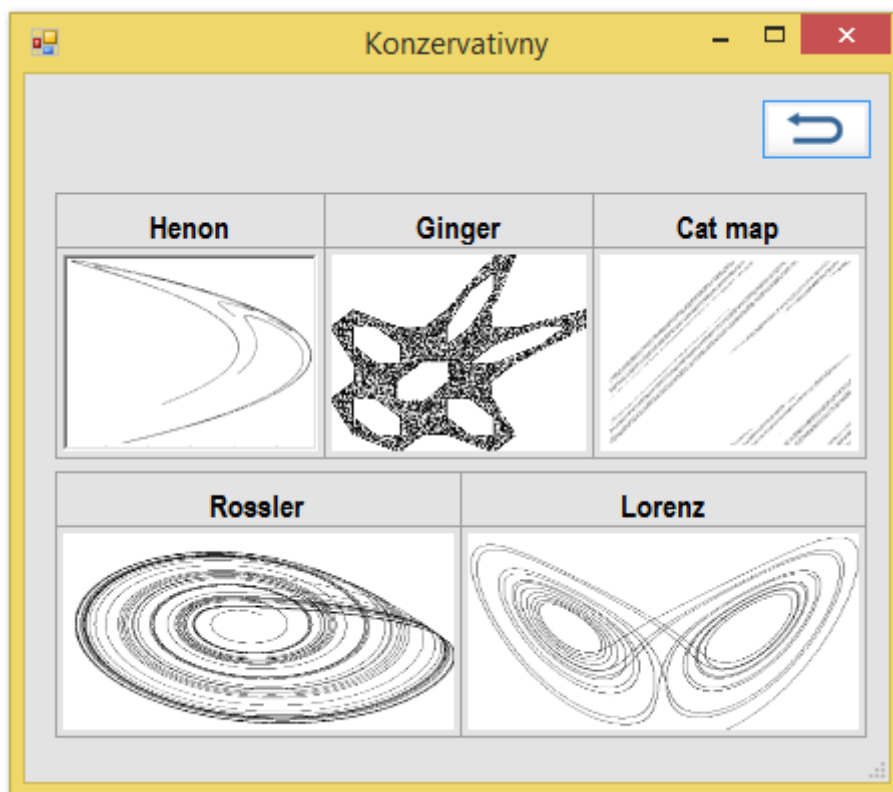
Tento program je vytvorený ako desktopová aplikácia, ktorá je ovládaná klasicky pomocou kurzora. Aplikácia sa vie prispôbiť podľa veľkosti. Hneď po zapnutí programu je užívateľ vyzvaný k vybraní chaotického systému (Obrázok 22). Následovne po jeho výbere sa zobrazí grafický zoznam atraktorov daných systémov (Obrázok 23, 24). Pre disipatívny systém sa zobrazia systémy uvedené v tabuľke 4-1 a pre konzervatívny systémy uvedené v tabuľke 4-2 Po výbere konkrétneho atraktora sa otvorí nové okno, kde má užívateľ grafický náhľad na tento systém. (kapitola 4.3)



Obrázok 22 Menu



Obrázok 23 Ukážka grafického rozhrania pre disipatívny systém



Obrázok 24 Ukážka grafického rozhrania pre konzervatívny systém

4.1 Prehľad vybraných systémov pre disipatívny systém

Tabuľka 4-1 Disipatívny systém

Disipatívny systém			
Systém	Matematická rovnica	Parametre	Počiatkové hodnoty
Lozi	$X_{n+1} = 1 - a * X_n + Y_n$ $Y_{n+1} = b * X_n$	$a = 1,7$ $b = 0,5$	$X_0 = 1$ $Y_0 = 1$
Tinkerbell	$X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 + a * X_n + b * Y_n$ $Y_{n+1} = 2 * X_n * Y_n + c * X_n + d * Y_n$	$a = 0,9$ $b = -0,6013$ $c = 2,0$ $d = 0,5$	$X_0 = -0,72$ $Y_0 = -0,64$
Ikeda	$t_n = b - \left(\frac{a}{1 + X_n^2 + Y_n^2} \right)$ $X_{n+1} = 1 + c * (X_n * \cos(t_n) - Y_n * \sin(t_n))$ $Y_{n+1} = c * (X_n * \sin(t_n) + Y_n * \cos(t_n))$	$a = 6$ $b = 0,4$ $c = 0,9$	$X_0 = 0,1$ $Y_0 = 0,1$
Burger	$X_{n+1} = a * X_n - Y_n^2$ $Y_{n+1} = b * Y_n + X_n * Y_n$	$a = 0,42$ $b = 1,8$	$X_0 = -0,1$ $Y_0 = 0,1$
Sinai	$X_{n+1} = X_n + Y_n + \delta * \cos(2 * \pi * X_n) \pmod{1}$ $Y_{n+1} = (X_n + 2 * Y_n) \pmod{1}$	$\delta = 0,1$	$X_0 = 0,5$ $Y_0 = 0,5$
Logistic	$X_{n+1} = r * X_n(1 - X_n)$	$r > 2,4$ $r < 4$	
Tent	$X_n < \frac{1}{2} \quad X_{n+1} = \mu * X_n$ $X_n \geq \frac{1}{2} \quad X_{n+1} = \mu * (1 - X_n)$	$\mu > 1$ $\mu < 2$	

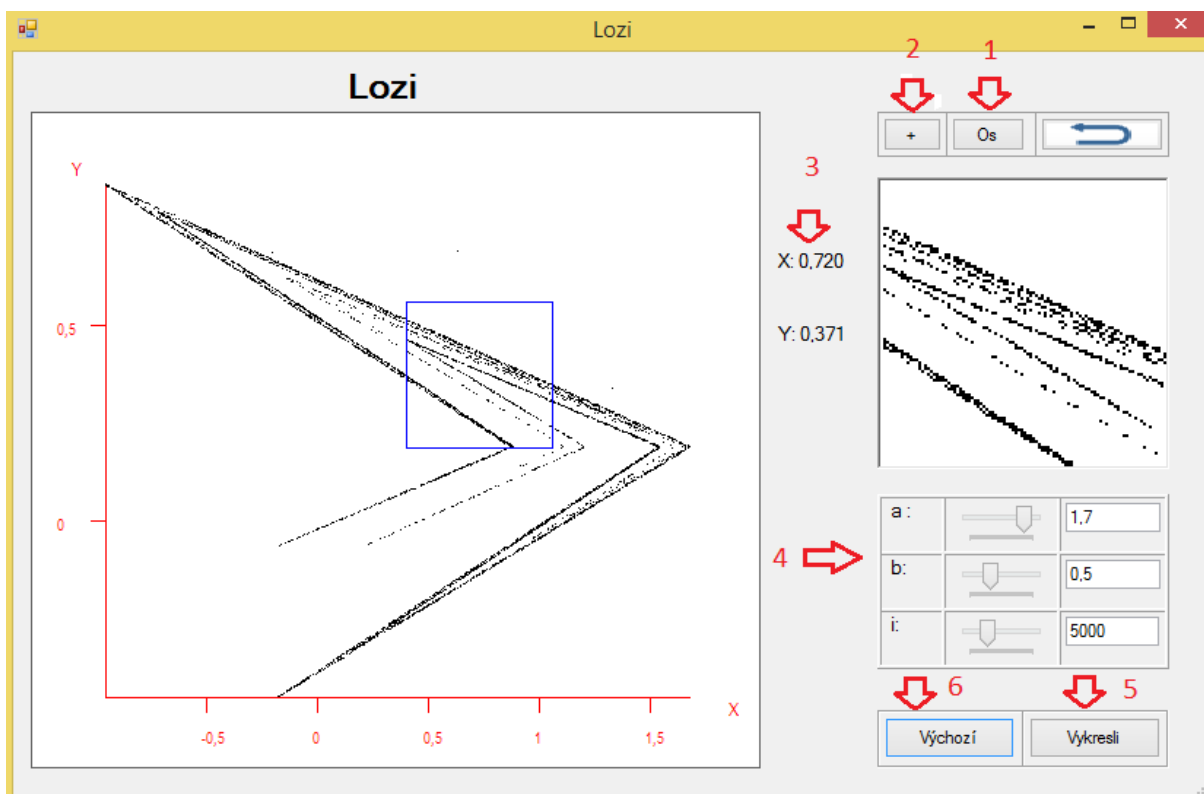
4.2 Prehľad vybraných systémov pre konzervatívny systém

Tabuľka 4-2 Konzervatívny systém

Konzervatívny systém			
Systém	Matematická rovnica	Parametre	Počiatočné hodnoty
Henon	$X_{n+1} = 1 - a * X_n + Y_n$ $Y_{n+1} = b * X_n$	$a = 1,2$ $b = 0,4$	$X_0 = 0,1$ $Y_0 = -0,5$
Gingerbreadman	$X_{n+1} = 1 - Y_n + X_n $ $Y_{n+1} = X_n$	$a = -0,142$	$X_0 = -0,142$ $Y_0 = 1$
Arnold cat map	$X_{n+1} = (X_n + Y_n)(mod\ 1)$ $Y_{n+1} = (X_n + k * Y_n)(mod\ 1)$	$k = 1,5$	$X_0 = 0,1$ $Y_0 = -0,5$
Lorenz	$\frac{dx}{dt} = \sigma * (y - x)$ $\frac{dy}{dt} = x * (p - z) - y$ $\frac{dz}{dt} = x * y - \beta * z$	$\sigma = 10$ $p = 28$ $\beta = 8/3$ $dt = 0.006$	$X_0 = 1$ $Y_0 = 1$ $Z_0 = 1$
Rössler	$\frac{dx}{dt} = -y - z$ $\frac{dy}{dt} = x + a * y$ $\frac{dz}{dt} = b + z * (x - c)$	$a = 0,2$ $b = 0,2$ $c = 5,7$ $dt = 0,006$	$X_0 = 1$ $Y_0 = 1$ $Z_0 = 1$

4.3 Možnosti systému

4.3.1 Vizualizácia v 2D



Obrázok 25 Ukážka rozhrania pre 2D

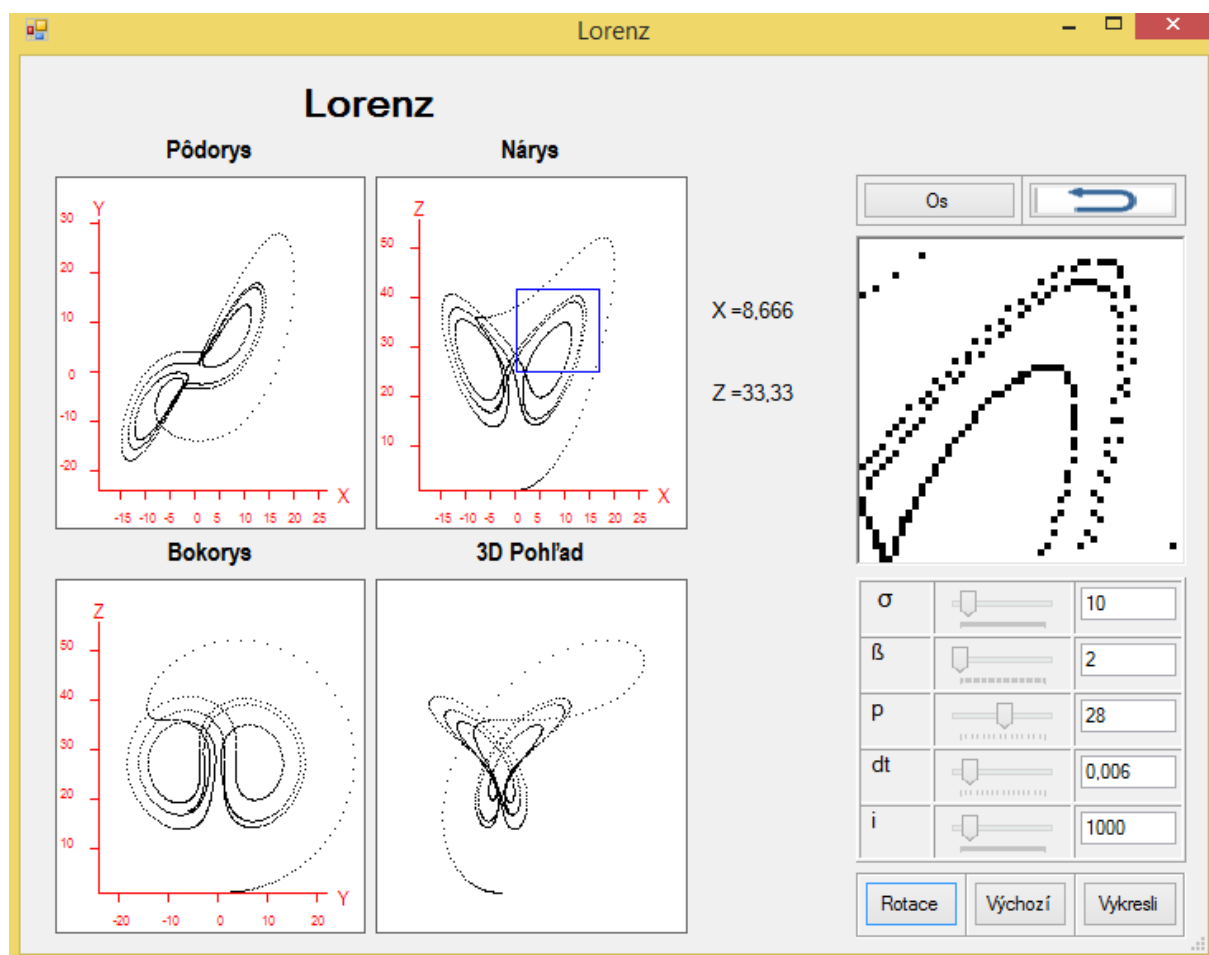
Systém dokáže nasledujúce operácie, ktoré budem demonštrovať na Lozi mape (Obrázok 25). Po zapnutí systému sa otvorí desktopová aplikácia (winforma) konkrétneho atraktora. Na ľavej strane môžeme vidieť vykreslený atraktor. Toto okno obsahuje:

- os, ktorá ohraničuje krajné body. Táto os sa dá zmeniť aby x a y pretínalo body $[0,0]$. Stačí len stlačiť tlačítko „os“ (Obrázok 25-1). Tlačidlo je typu Boolean takže užívateľ má možnosť si vybrať podľa toho aký druh osy mu vyhovuje.
- modrý rámček, pomocou ktorého možno zoomovať časť vo vnútri rámčeka. Pre zoomovanie stačí kurzorom prejsť na konkrétnu časť a odkliknúť. Vybraná časť sa zobrazí v menšom okne na pravej strane. Systém obsahuje aj tlačidlo „+“ (Obrázok 25-2) pomocou, ktorého možno zväčšiť alebo zmenšiť časť, ktorú chceme zoomovať.
- Toto okno má aj funkciu, ktorá užívateľovi presne vypíše v akom bode $[x,y]$ sa nachádza. Stačí len prebehnúť kurzorom po okne a súradnice sa vypíšu viz. (Obrázok 25-3). Menšie okno na pravej strane má rovnakú funkciu.

Veľmi dôležitá funkcia sa nachádza pod pravým oknom. Je to panel, obsahujúci parametre daného atraktoru (Obrázok 25-4). V tomto panele môžeme regulovať veľkosť daných parametrov a môžeme vidieť ako sa vzhľad atraktora mení. Dôležitým parametrom, ktorý sa nachádza pri každom atraktore je „i“. Tento parameter predstavuje počet iterácií. Tieto regulátory majú však každý vlastné obmedzenie, preto tam je aj textové pole do ktorého možno napísať hodnotu, ktorá je mimo rozsah regulátora. Po vpísaní hodnôt je nutné odkliknúť na tlačidlo „Vykreslí“ (Obrázok 25-5). Týmto tlačidlom sa kontrolujú vstupy. Ak sú správne tak sa atraktor vykreslí. Viac o vstupoch a obmedzeniach v kapitole 4.4.

Ďalšou funkciou systému je nastavovanie parametrov na defaultné hodnoty (Obrázok 25-6). Môže sa stať, že užívateľ testuje zmenu parametrov v paneli dôsledkom čoho sa mu zobrazí mračno nepoužiteľných bodov. Pre tento prípad stačí stlačiť „Výchozí“ a užívateľovi sa nastavia defaultné hodnoty systému, ktoré sú definované v tabuľkách 4-1 a 4-2.

4.3.2 Vizualizácia v 3D

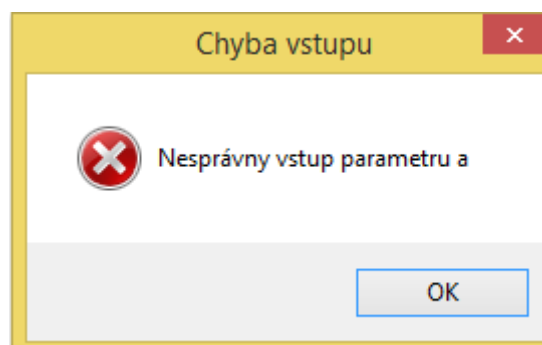


Obrázok 26 Ukážka rozhrania pre 3D

Rozhranie pre 3D sa týka atraktorov Rossler a Lorenz, ktoré na nachádzajú v konzervatívnom systéme. V princípe sú skoro totožné až na malé zmeny. Taktiež ako v 2D atraktoroch tam je panel parametrov, zoomovacie okno a tlačidlo os. Funkčnosť majú rovnakú. Namiesto jedného atraktora tam sú 4 obrázky. Pôdorys, Narys, Bokorys a 3D Pohľad. Zmenou je to že nie je možnosť si vybrať veľkosť zoomovania časti atraktora, ale môžete si vybrať, či chcete zoomovať P, N alebo B. Klasicky či už budete v akomkoľvek z týchto 3 okien ich súradnice sa užívateľovi budú vedľa zobrazovať. Pribudlo tam tlačidlo „Rotace“ (Obrázok 26-1). Tlačidlo umožňuje rotáciu atraktora. Je typu Boolean takže si užívateľ môže vybrať či sa atraktor bude alebo nebude otáčať.

4.4 Vstupy a obmedzenia

V predchádzajúcej kapitole sme si vysvetlili ako jednotlivé časti aplikácie pracujú. V tejto kapitole si povieme niečo o vstupoch, ktoré zadávame v textovom poli. Po kliknutí na tlačidlo „Vykresli“ sa kontroluje či sú vstupy v poriadku. Za správny vstup sa považuje číselná hodnota či už **Integer** alebo **Double**. Za nesprávny sa považujú vstupy, ktoré obsahujú písmená alebo špeciálne znaky. Pri nesprávnom vstupe program upozorní užívateľa o zlom vstupe a vypíše pri ktorom parametre nastala chyba (Obrázok 27). Po zle zadanom vstupe sa program automaticky nastaví na defaultné hodnoty. Môže nastať prípad že užívateľ vloží za parameter číslo 8465165165516, čo je síce Integer ale je príliš vysoké, preto je tam nastavené aj obmedzenie. Obmedzenie funguje tak, že program síce bude počítat súradnice ale iba v rozmedzí **absolútnej hodnoty 500**. Ďalším dôležitým obmedzením je hodnota parametru i . Táto hodnota musí byť väčšia ako 0 a zároveň menšia ako 30000. Nemôžeme predsa zvoliť počet iterácií záporný. Keby nastal tento prípad program na to upozorní.



Obrázok 27 Chyba vstupu

4.5 Implementácia

Aplikácia je vytvorená vo vývojovom prostredí Visual C#. Konkrétne ide o desktopovú aplikáciu. Každý atraktor je vlastne jedna „winforma“, ktorá obsahuje svoje metódy. Pre vykresľovanie objektov využívam rastrovú grafiku.

4.5.1 Ukladanie súradníc atraktora

Ukladanie súradníc má na starosti metóda UlozBoby(). Táto metóda nepríma žiadny parameter ani nemá žiadnu návratovú hodnotu. Vytvorí si nový list Bodov a vezme verejnú hodnotu iterácie. Podľa počtu iterácií vypočítavajú hodnoty rovnice daného atraktora. Táto rovnica sa mení vzhľadom na atraktor. Taktiež táto funkcia obmedzuje veľkosť bodov ako bolo uvedené v kapitole 4.4.

Pseudokód metódy UlozBody():

```

1. void function UlozBody
2. INTEGER i = ITERACIA;
3. Body = List();
4. DOUBLE lx, ly;
5. bod.x = -0.1; bod.y = 0.1; /* počiatočné hodnoty daného systému*/
6. WHILE i > 0
7. BEGIN
8. lx = bod.x;
9. ly = bod.y;
10. bod.x = A * bod.x - bod.y * bod.y; /* rovnica x pre daný atraktor */
11. bod.y = B * bod.y + lx * bod.y; /* rovnica y pre daný atraktor */
12. IF |bod.x| > 500 OR |bod.y| > 500 /* Kontrola hodnôt */
13. BREAK;
14. END IF
15. Body.add(bod.x,bod.y);
16. i = i - 1;
17. END WHILE

```

4.5.2 Prispôbenie atraktora vzhľadom na veľkosť okna

Ako je možné vidieť z tabuliek 4-1 a 4-2 hodnoty x a y sú veľmi malé na vykreslenie na mapu. Je potrebné tieto body prenásobiť určitou mierkou. Pre tento problém existujú metódy *zvacsix()* a *zvacsiy()*, poprípade pre 3D *zvacsiz()*. Pseudokód metódy *zvacsix()* je uvedený nižšie. Premenná *pom* označuje aký veľký je rozsah medzi maximálnou a minimálnou hodnotou pre súradnice x v danom atraktore. Potom sa tento rozsah prenásobuje atribútom *zvacsi* pokiaľ nebude tento rozsah rozšírený až na veľkosť okna, pričom z každej strany okna je voľných 50 pixelov z dôvodu lepšej viditeľnosti. Metóda vracia parameter, ktorým sa nasledovne vynásobia hodnoty v liste. Rovnaký princíp je použitý pre metódu *zvacsiy()*.

Pseudokód metódy zvacsix():

```

1. INTEGER function zvacsix
2. INTEGER zvacsi = 1;
3. DOUBLE pom;
4. IF (minx < 0)
5. pom = |INTEGER(minx * zvacsi)| + |INTEGER(maxx * zvacsi)|;
6. ELSE
7. pom = |INTEGER(maxx * zvacsi)| - |INTEGER(minx * zvacsi)|;
8. WHILE pom < PICTUREBOX.WIDTH - 100
9. BEGIN
10. zvacsi=zvacsi+1;

```

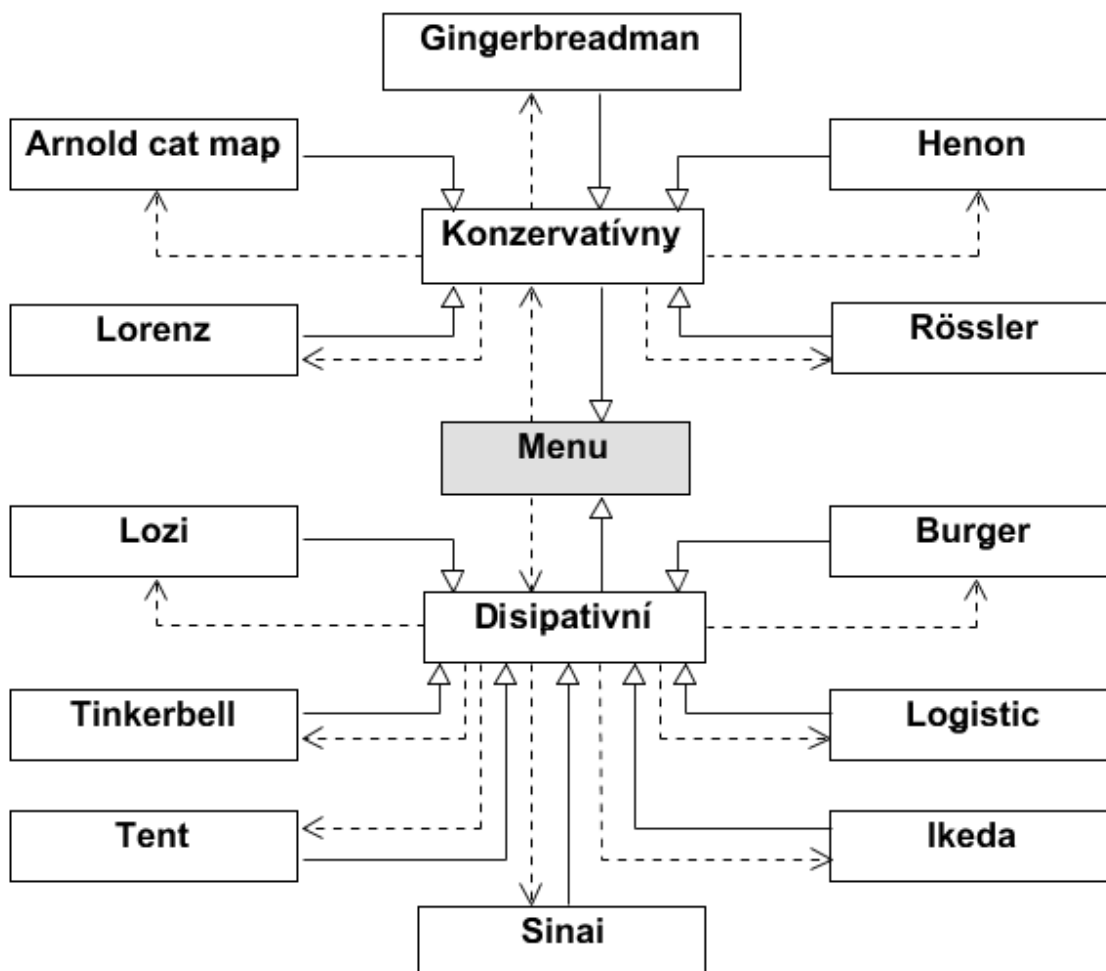
```

11. IF minx < 0
12. pom = |INTEGER(minx * zvacsi)| + |INTEGER(maxx * zvacsi)|;
13. ELSE
14. pom = |INTEGER(maxx * zvacsi)| - |INTEGER(minx * zvacsi)|;
15. IF pom < 1 BREAK;
16. END WHILE
17. RETURN zvacsi

```

4.6 Možnosti prepínania medzi oknami

Spustenie aplikácie začína triedou Menu. Všetky tieto triedy sú vlastne „winformy“, ktoré sa odkazujú jedna na druhú. Možnosti jednotlivého odkazovania je znázornené na Obrázku 28, pričom \dashrightarrow predstavuje krok dopredu a \dashleftarrow predstavuje krok späť.



Obrázok 28 Referencie

Záver

Hlavným účelom tejto práce bolo vytvorenie aplikácie, ktorá vykresľuje chaotické atraktory. Na základe vykreslenia každého využitého systému, možno povedať že tieto systémy môžu byť pri splnení určitých podmienok veľmi užitočné. Jednou z podmienok patrí správny výber systému, pretože výsledný atraktor jednotlivých systémov pri rôznych zmenách parametrov vykazoval miestami kolosálne rozdiely. Z dôvodu, že je oblasť chaotických atraktorov značne rozsiahla nebolo možné popísať do detailu všetky informácie a poznatky. Prácu som sa snažil riešiť tak aby sa bolo ňu v budúcnosti možné naviazať a rozvinúť. Z pohľadu budúceho vývoja by som navrhoval prídanie ďalších chaotických systémov, ktoré majú svoje uplatnenie v rôznych oboroch. Popríklad možnosť vyniesť súradnice systémov do grafu pre znázornenie chovania daného systému v čase.

V oficiálnom zadaní Bakalárskej práce sa nachádza položka – možnosť sledovať periodicitu hodnôt v danom atraktore. Po vzájomnej dohode s vedúcou práce bol tento bod z práce vypustený.

Použitá literatura

- [1]. GLEICK, James. Chaos: vznik nové vědy. Ando Publishing, 1996. 350s. ISBN 80- 86047-04-0.
- [2]. EINSTEIN, Albert, et al. On the electrodynamics of moving bodies. Annalen der Physik, 1905, 17.891: 50.
- [3]. LI, Tien-Yien; YORKE, James A. Period three implies chaos. American mathematical monthly, 1975, 985-992.
- [4]. ZELINKA, Ivan, et al. Evoluční výpočetní techniky : Principy a aplikace. Praha : BEN, 2008. 536 s. ISBN 978-80-7300-218-3.
- [5]. PHATAK, S. C.; RAO, S. Suresh. Logistic map: A possible random-number generator. Physical review E, 1995, 51.4: 3670.
- [6]. PAREEK, Narendra K.; PATIDAR, Vinod; SUD, Krishan K. Image encryption using chaotic logistic map. Image and Vision Computing, 2006, 24.9: 926-934.
- [7]. ŠENKERŮ, Roman. Optimal Control of Deterministic Chaos. Zlín, 2008. 316 s. Dizertační práce. Univerzita Tomáše Bati, Fakulta aplikované informatiky. ISBN 978-80-7318-783-5.
- [8]. HUANG, Lilian; WANG, Mao; FENG, Rupeng. Synchronization of generalized Henon map via backstepping design. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 23.2: 617-620.
- [9]. Hénon, M.: A Two-dimensional mapping with a strange attractor. Commun. Math. Phys., 50, 69-77 (1976).
- [10]. PLUHACEK, Michal, et al. Extended initial study on the performance of enhanced PSO algorithm with lozi chaotic map. In: Nostradamus: Modern Methods of Prediction, Modeling and Analysis of Nonlinear Systems. Springer Berlin Heidelberg, 2013. p. 167-177.
- [12]. STOYANOV, Borislav. Pseudo-random Bit Generation Algorithm Based on Chebyshev Polynomial and Tinkerbell Map. Applied Mathematical Sciences, 2014, 8.125: 6205-6210.
- [13]. K. Ikeda, H. Daido & O. Akimoto, Optical turbulence : chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity, Physical Review Letters, 45, 709-712, 1980
- [14]. GALIAS, Zbigniew. Rigorous investigation of the Ikeda map by means of interval arithmetic. Nonlinearity, 2002, 15.6: 1759.
- [15]. BRYANT, Paul; BROWN, Reggie; ABARBANEL, Henry DI. Lyapunov exponents from observed time series. Physical Review Letters, 1990, 65.13: 1523.
- [16]. ELABBASY, E. M., et al. Bifurcation analysis, chaos and control in the Burgers mapping. International Journal of Nonlinear Science, 2007, 4.3: 171-185.

-
- [17]. MCDONOUGH, J. M.; BYWATER, R. J.; BUELL, J. C. An investigation of strange attractor theory and small-scale turbulence. In: 17th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics, and Lasers Conference. 1984.
- [18]. WHITEHEAD, R. R.; MACDONALD, N. A transition between two kinds of chaos in the burgers mapping. *Physics Letters A*, 1984, 105.9: 433-435.
- [19]. SHAN, Liang, et al. Chaotic optimization algorithm based on Tent map. *Control and Decision*, 2005, 20.2: 179-182.
- [20]. HABUTSU, Toshiki, et al. A secret key cryptosystem by iterating a chaotic map. In: *Advances in Cryptology—EUROCRYPT'91*. Springer Berlin Heidelberg, 1991. p. 127-140.
- [21]. Bergé, Pierre; Pomeau, Yves; Vidal, Christian (1984). *Order within Chaos: Towards a Deterministic Approach to Turbulence*. New York: John Wiley & Sons. ISBN 978-0-471-84967-4.
- [22]. RÖSSLER O. E. An Equation for Continuous Chaos. *Physics Letters*, 1976, 57A(5)
- [23]. MA, Zai-guang; QIU, Shui-sheng. An image cryptosystem based on general cat map. *JOURNALCHINA INSTITUTE OF COMMUNICATIONS*, 2003, 24.2: 51-57.
- [24]. SHIELS, Alan; BENNETT, Thomas M.; HEJTMANCIK, J. Fielding. Cat-Map: putting cataract on the map. *Molecular vision*, 2010, 16: 2007.
- [25]. LORENZ, Edward N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 1963, 20.2: 130-141.

Internetové zdroje

[26] Dostupné z WWW: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Poincare.html>

[27] Dostupné z WWW: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lorenz_Edward.html

[28] Dostupné z WWW: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Smale.html>

[29] Dostupné z WWW: http://en.wikipedia.org/wiki/Superposition_principle

[30] Dostupné z WWW: <http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/publikace/diplomka/doc/node29.html>

[31] Dostupný z WWW: http://www.ft.utb.cz/people/zelinka/chaos/Chaos_control.html

[32] Dostupné z WWW: <http://www.gustavodiazjerez.com/?p=230&lang=en>

[33] Dostupné z WWW: <http://www.abelprize.no/c61094/binfil/download.php?tid=61120>

[34] Dostupné z WWW: <http://hypertextbook.com/chaos/43.shtml>

A Obsah CD

Adresárová štruktúra priloženého CD:

Adresár	Popis
/src	Zdrojový súbor aplikácie
/doc	Text bakalárskej práce