

VŠB – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA  
FAKULTA STAVEBNÍ  
KATEDRA STAVEBNÍ MECHANIKY

Tvorba výpočetního programu pro výpočet trajektorie  
hlavních napětí nosné obdélníkové stěny

Creating a computer program for calculating the  
trajectories of the principal stresses supporting rectangular  
wall

Student:

David Litvan

Vedoucí bakalářské práce:

Ing. Michalcová Vladimíra, Ph.D.

Ostrava 2014

VŠB - Technická univerzita Ostrava  
Fakulta stavební  
Katedra stavební mechaniky

## Zadání bakalářské práce

Student: **David Litvan**

Studijní program: B3607 Stavební inženýrství

Studijní obor: 3607R037 Konstrukce staveb

Téma: Tvorba výpočetního programu pro výpočet trajektorie hlavních napětí nosné obdélníkové stěny  
Creating a computer program for calculating the trajectories of the principal stresses supporting rectangular wall

### Zásady pro vypracování:

V práci bude zpracován program pro numerické řešení složek napětí, hlavních napětí i trajektorie hlavních napětí obdélníkových stěn. Řešení bude provedeno pro různé typy zatížení. Program bude zpracován ve vhodném software, např. Excel nebo Matlab. Výsledky budou porovnány s numerickým řešením, např. v software Scia nebo ANSYS.

### Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Teplý, B., Šmířík, S. Pružnost a plasticita II, VUT v Brně, Brno 1993
- [2] Elektronické učební materiály projektu "Matematika pro inženýry 21. století". VŠB-TU Ostrava, 2012  
Internetová stránka: <http://mi21.vsb.cz>

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Vladimíra Michalcová, Ph.D.**

Datum zadání: 31.10.2013

Datum odevzdání: 05.05.2014



doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.  
vedoucí katedry



prof. Ing. Darja Kubečková, Ph.D.  
děkanka fakulty

**Prohlášení studenta:**

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě dne .....

.....

Podpis studenta

Prohlašuji, že:

- jsem byl seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB – TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§ 35 odst. 3)
- souhlasím s tím, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k prezenčnímu nahlédnutí. Souhlasím s tím, že údaje o bakalářské práci budou zveřejněny na informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavře licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- Bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- Beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě .....

.....

Podpis studenta

## **Poděkování**

Chtěl bych vyjádřit poděkování vedoucí bakalářské práce paní Ing. Vladimíře Michalcové, Ph.D. za čas, pomoc a cenné rady pro vypracování této práce.

Také děkuji panu doc. Ing. Jiřímu Brožovskému, Ph.D. za kontrolu odvozeného čtyřuzlového prvku.

## **Anotace**

Předkládaná bakalářská práce je věnována řešení nosných stěn. Úkolem bylo vytvořit program pro výpočet hlavních napětí obdélníkové stěny, jejich směrů a definování oblasti s překročením meze pevnosti materiálu, kde dochází k nevratným deformacím. Stěna je řešena metodou konečných prvků v programovém prostředí Matlab. Součástí práce je odvození trojuzlového prvku. Pro dosažení přesnějších výsledků a jejich vzájemné porovnání je v práci odvozen čtyřuzlový stěnový prvek. Celý program je řešen v uživatelském prostředí programu Matlab GUI, díky kterému je dosaženo jednoduchého a obecného zadávání parametrů stěn. Výsledky jsou zobrazovány zřetelně v jednotlivých grafech. Program umožňuje export výsledků do Excelu pro jejich následné použití. Ověření správnosti výsledků je provedeno na několika příkladech v programu Scia Engineer.

### **Klíčová slova:**

Normálové napětí, Smykové napětí, Trajektorie hlavních napětí, Matlab, Metoda konečných prvků, Čtyřuzlový prvek, Trojúhelníkový prvek, Uživatelské rozhraní GUI.

## **Annotation**

The present thesis is devoted to the solution of load-bearing walls. The task was to create a program to calculate the principal stresses rectangular walls, their direction and defining areas with exceeding the ultimate strength of the material, which leads to irreversible deformation. The wall is solved by finite element method in Matlab. The first part is derived and compared triangular element. To achieve more accurate results and their comparison is at work derived four nodal wall element. The entire program is designed in a user environment Matlab GUI that makes it simple and made of input parameters walls. The results are displayed clearly in each graph. The program allows you to export the results into Excel for subsequent use. Validation of the results is carried out on several examples in Scia Engineer.

### **Keywords:**

Normal stress, shear stress, principal stress trajectory, Matlab, Finite Element Method, Four nodal element triangular element, User Interface GUI.

# Obsah bakalářské práce:

## SEZNAM POUŽITÉHO ZNAČENÍ

<b>ÚVOD</b> .....	<b>1</b>
<b>1 PLOŠNÉ KONSTRUKCE</b> .....	<b>2</b>
<b>2 ROVINNÉ ÚLOHY</b> .....	<b>4</b>
2.1 Možnosti řešení stěn.....	5
2.2 Metoda sítí.....	6
2.3 Ritzova metoda.....	6
<b>3 METODA KONEČNÝCH PRVKŮ (MKP)</b> .....	<b>8</b>
3.1 Historie MKP .....	9
3.2 Postup MKP .....	9
3.3 Odvození trojuzlového prvku.....	10
3.4 Odvození čtyřuzlového prvku .....	14
3.4.1 Numerická integrace .....	16
<b>4 VÝPOČETNÍ SYSTÉM MATLAB</b> .....	<b>18</b>
4.1 Vlastnosti Matlabu .....	18
4.2 Uživatelské rozhraní Matlab GUI .....	19
<b>5 VÝPOČETNÍ PROGRAM NOSNÉ STĚNY</b> .....	<b>23</b>
5.1 Výpočetní část programu .....	24
5.1.1 Zadávání zatížení .....	26
5.2 Grafická část programu .....	26
5.2.2 Vykreslování trajektorie nosné stěny.....	28
5.2.3 Vykreslení oblasti s překročením meze pevnosti .....	29
5.3 Kontrola a porovnání výsledků .....	30
5.3.1 Porovnání vlivu hustoty sítě .....	31
5.3.2 Porovnání výsledků se Scia Engineer .....	33
<b>6 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY</b> .....	<b>36</b>
6.1 Stěna podepřená bodově .....	37
6.2 Stěna podepřená ve dvou uzlech .....	38
6.3 Stěna podepřená ve třech uzlech .....	39
6.4 Stěna podepřená ve čtyřech uzlech .....	40
6.5 Shrnutí výsledků u výše řešených stěn.....	41
6.6 Trajektorie hlavních napětí u různých typů stěn .....	42

6.6.1	Čtvercová stěna $b = h = 2$ m .....	43
6.6.2	Obdélníková stěna $b = 2$ m, $h = 1$ m .....	45
6.6.3	Obdélníková stěna $b = 1$ m, $h = 2$ m .....	47
6.6.4	Vyhodnocení výsledků u různých typů stěn .....	49
<b>7</b>	<b>ZÁVĚR .....</b>	<b>50</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....</b>	<b>51</b>
	<b>SEZNAM OBRÁZKŮ .....</b>	<b>52</b>
	<b>SEZNAM TABULEK.....</b>	<b>54</b>



## Seznam použitého značení

$w$	Posun ve směru působící síly [m]
$\sigma$	Normálové napětí [Pa]
$\sigma_{1,2}$	Hlavní napětí [Pa]
$\tau$	Smykové napětí [Pa]
$\varepsilon$	Poměrná deformace [m]
$p$	Působící zatížení [N/m]
$\pi$	Potenciální energie konstrukce [J]
$\pi_i$	Potenciální energie vnitřních sil [J]
$\pi_e$	Potenciální energie vnějších sil [J]
$K$	Matice tuhosti [N/m]
$r$	Vektor deformací [m]
$F$	Zatěžovací vektor [N]
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	Složky napětí ve směru os [Pa]
$D$	Matice tuhosti materiálu [N/m]
$K_e$	Matice tuhosti konečného prvku [N/m]
$E$	Youngův modul pružnosti v tahu a tlaku [Pa]
$\nu$	Poissonův součinitel příčné deformace [-]
$\partial$	Parciální derivace [-]
$B$	Matice odvozená derivacemi [-]
$u, v$	Posuny ve směru souřadných os $x, y$ [m]
$S$	Matice souřadnic [m]
$S^{-1}$	Inverzní matice souřadnic [m]
$t$	Tloušťka stěny [m]
$A$	Plocha konečného prvku [m <sup>2</sup> ]
$V$	Objem prvku [m <sup>3</sup> ]
$S$	Plocha prvku [m <sup>2</sup> ]
$F$	Integrovaná funkce
$a, b, d, c$	Meze integrálu
$\alpha_1, \alpha_2$	Směr hlavního napětí [°]
$U$	Matice zvolených funkcí [-]

# Úvod

Předmětem bakalářské práce je řešení nosných stěn. Úkolem bylo vytvořit program pro výpočet hlavních napětí obdélníkové stěny, jejich směrů a definování oblasti s překročením meze pevnosti materiálu, kde dochází k nevratným deformacím. Stěna je řešena metodou konečných prvků v programu Matlab. Součástí práce je odvození trojuzlového a čtyřuzlového prvku včetně ověření správnosti výsledků v programu Scia Engineer.

Práce je rozdělena do šesti částí. První dvě jsou věnovány teorii plošných konstrukcí a rovinných úloh. V třetí části je uvedena metoda konečných prvků (MKP), kterou jsou stěny v práci řešeny. Po stručné historii a teorii MKP je provedeno odvození trojuzlového prvku. Pro dosažení přesnějších výsledků a jejich vzájemné porovnání je v bakalářské práci odvozen čtyřuzlový stěnový prvek.

Čtvrtá a pátá kapitola je věnována programovacímu systému Matlab. Je zde vysvětleno použití jeho uživatelského prostředí a následně také popsán vytvořený program. Program je naprogramován v Matlabu v rámci uživatelského rozhraní GUI. Kapitola se zabývá řešením a popisem naprogramovaných funkcí. Pomocí různých typů ovládacích prvků je docíleno efektivního a jednoduchého ovládání a obecného zadávání parametrů stěn, jako je: Libovolná délka a výška, které jsou závislé na velikosti konečného prvku, velikost zatížení, tloušťka stěny a vlastnosti materiálu dle potřeb uživatele. Výsledky jsou zobrazovány zřetelně v grafu, mohou být vypsány číselnými hodnotami nebo exportovány do Excelu.

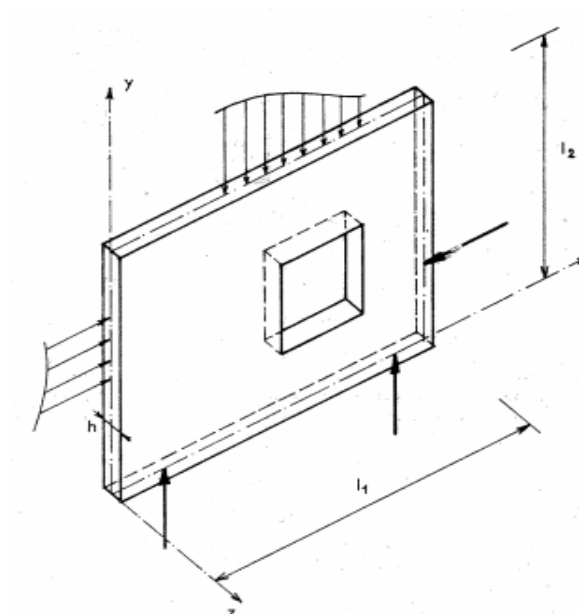
V poslední kapitole jsou uvedeny jednotlivé příklady, u kterých je vyhodnoceno napětí v oblasti uložení podpor a trajektorie hlavních napětí s využitím předkládaného programu. V závěru práce je provedena rekapitulace programu, jeho možnosti a jsou shrnuty dosažené výsledky.

# 1 Plošné konstrukce

Hlavním rysem nosných plošných konstrukcí je, že u nich prevažuje dĺžka a výška. Tretí rozměr tloušťka  $h$ , je oproti dĺžce a výšce řádově menší. Vzhledem k této geometrii a působícímu zatížení, lze při výpočtech stěn i dalších plošných konstrukcí zredukovat obecnou prostorovou napjatost na jednodušší případy. Jedná se o úlohy se dvěma nezávisle proměnnými  $x$  a  $y$ . Lze proto konstatovat, že se řeší úlohy ve 2D.

Souhrn bodů půlících tloušťku  $h$ , se nazývá střednicová plocha. Půlí vzdálenost mezi dvěma povrchy. Pokud je střednicová plocha rovinou, pak se jedná o nosné stěny nebo desky. Výpočetním modelem těchto konstrukcí je právě tato střednicová rovina.

Nosná stěna je plošná konstrukce, zatížená silami působících rovnoběžně se střednicovou rovinou (Obr. 1). Výslednice zatížení působí v její rovině. Jedná se o nosné stěny budov, mohou to být vnitřní nebo obvodové stěny a další případy zatížené ve své rovině (Obr. 2). U stěn se obvykle řeší jen jejich napjatost. Posuny se většinou nezjišťují, a to z toho důvodu, že bývají velmi malé a nerozhodují při návrhu.



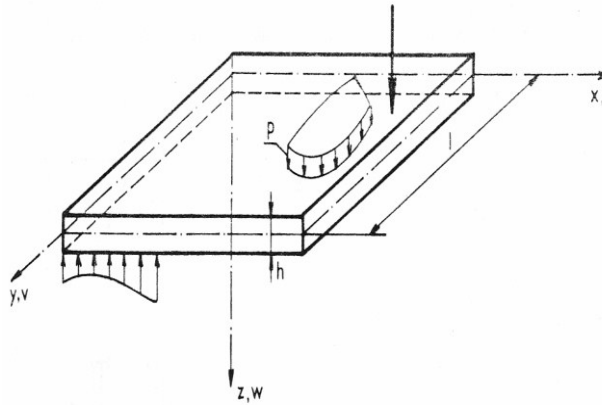
Obr. 1:  
Působící zatížení na nosnou stěnu [1].



Obr. 2: Ukázka nosné stěny v praxi.

Mezi další nosné konstrukce se řadí nosná deska. Rozdíl mezi stěnou a deskou je ve způsobu namáhání. Zatížení desky působí kolmo na střednicovou rovinu (Obr. 3). Většinou se jedná o konstrukce orientované vodorovně. Možnost použití desek je například u stropů, mostovek, střech a základů (Obr. 4). Způsob uložení není prvořadým

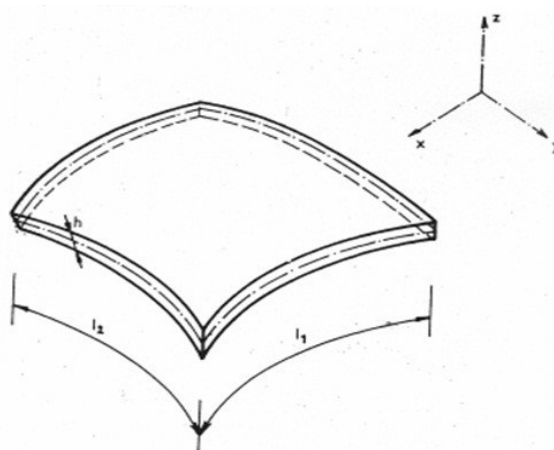
rozdílem mezi deskou a stěnou. U desek se většinou neřeší jen jejich napětí, ale i průhyb, protože průhyb může být rozhodující veličinou. [4]



Obr. 3: Působící zatížení na desku [1].

Obr. 4: Použití desky u základu.

Posledním případem plošných konstrukcí, se kterými je možno se setkat, je skořepina. Zatížení, která na skořepinu působí, jsou v obecném směru. Střednicová plocha skořepiny je zakřivená (Obr. 5), což je výhoda vzhledem ke spotřebě materiálu při určitém tvaru konstrukce. Jejich výpočet je však v obecných příkladech velmi obtížný [4].



Obr. 5:  
Zakřivená střednicová plocha u skořepiny  
[1].

Obr. 6:  
Příklad skořepiny v praxi.

## 2 Rovinné úlohy

Statický výpočet nosné stěny se provádí za účelem návrhu (dimenzování) konstrukce nebo jejího posouzení. Úkolem statického výpočtu je ověřit, zda projektovaná konstrukce, vyhoví požadavkům určených pro její funkci. U stávající konstrukce může být účelem stanovení přípustného zatížení při změněných podmínkách. Například změna účelu využití stavby, přístavba nebo změna provozu.

Pro posouzení nebo návrh dané konstrukce, bývají zpravidla rozhodující vnitřní síly (napětí), které nabývají extrémních hodnot. Pro řešení daného problému je klíčové správné určení výpočtového modelu. Jedná se o idealizaci materiálu, tvaru, okrajových podmínek a působení zatížení.

V bakalářské práci je vycházeno z předpokladu fyzikální linearity, to znamená lineárně pružného tělesa, na které se aplikuje předpoklad platnosti Hookeova zákona. Důsledek předpokladu malých deformací a jejich zanedbatelný vliv napjatosti v konstrukci má za následek, že lze řešit úlohu dle teorie prvního řádu. V práci není uvažováno o možnosti vzniku trhlin, trvalých deformací nebo jiných nespojitostí. Je pracováno s homogenním materiálem (má ve všech místech stejné vlastnosti), a také s materiálem izotropním (má ve všech směrech stejné vlastnosti).

Jak už bylo výše zmíněno, stěny mají jeden rozměr podstatně menší. Jedná se o plošné konstrukce, ve kterých se počítá se střednicovou rovinou. Na střednicovou rovinu působí silové účinky vnějších sil, kterými jsou zatížení a reakce. Výslednice leží ve střednicové rovině, zpravidla  $xy$ . Jednotlivé body stěny se s ohledem na to, že leží ve střednicové rovině, mohou pohybovat pouze jen v její ploše a to ve směrech  $u$  a  $v$  [2].

Vzhledem k malému rozměru tloušťky vůči výšce a délce, je možné rozdělení zatížení po tloušťce rovnoměrně, tzn.:

$$p(x, y) = q(x, y)h. \quad (1)$$

Povrchy v ose  $z$  ve vzdálenosti  $h = \pm \left(\frac{h}{2}\right)$  jsou nezatíženy a proto na nich musí platit:

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0. \quad (2)$$

Uvedené napětí (2) mohou sice nabývat nenulových hodnot, ale je možné jejich zanedbání oproti dalším složkám tenzoru napětí. Pro další výpočet je potřeba definovat obecný stav napjatosti v libovolném bodě, který se zapíše pomocí vektoru napětí:

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{yz}\}^T. \quad (3)$$

Z obecného stavu napjatosti v bodě (3) se při použití vztahu (2) dojde k výrazné redukci:

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, 0, 0, 0, \tau_{xy}\}^T. \quad (4)$$

Po zjednodušení se může vektor napětí zapsat:

$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T. \quad (5)$$

Stejným způsobem je možné zjednodušit vektor deformací. Pro výsledný tvar vektoru deformací po jeho zjednodušení platí:

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T. \quad (6)$$

## 2.1 Možnosti řešení stěn

U řešení se vychází ze stěnové rovnice (7), která se s okrajovými podmínkami integruje [1]. Výsledkem je funkce napětí a z ní se mohou dopočítat jednotlivé složky napětí. Pokud neodporují podmínky rovnováhy a spojitosti, lze z této funkce odvodit stav napjatosti stěny. Jako první k těmto závěrům přišel G. B. Airy, proto se tato funkce nazývá *Airyho funkce napětí* [1].

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (7)$$

Většinou se přistupuje k řešení stěn přibližnými metodami. Spojujícím znakem přibližných metod řešení stěn (plošných konstrukcí) je nahrazení zjišťované funkce přibližnými tvary, tzn. náhradními funkcemi. Funkce, které hledáme, jsou složkami napětí, posunů nebo deformací.

Konstrukce musí být nejdříve idealizována a to tak, že se vytvoří její výpočetní model. To znamená, že se neřeší skutečná konstrukce. Do systému jsou zavedeny okrajové podmínky, které odpovídají skutečnému stavu. Z toho důvodu výpočetní model obsahuje nepřesnosti, které jsou vneseny právě použitou idealizací. Je usilováno o co nejpřesnější řešení modelu tak, aby celkový výsledek neklesl pod vhodnou mez.

## 2.2 Metoda sítí

Jedním z postupů řešení stěn je metoda sítí [1]. Touto metodou je řešena stěnová rovnice (7) tím způsobem, že je nahrazena parciální derivace diferencemi a převede se z řešení diferenciálních rovnic na lineární rovnice. Musí být splněny okrajové podmínky. Po vyřešení lineárních rovnic se získají hodnoty Airyho funkce v každém bodu sítě, ze kterých lze poté v každém bodu vypočítat složky napětí a následně dopočítat hlavní napětí i jejich směry.

## 2.3 Ritzova metoda

Ritzova metoda vychází z Lagrangeova principu minima celkové potenciální energie. V literatuře [2] je uvedena definice: „*Ze všech možných deformačních stavů tělesa, které neporušují jeho spojitost a respektují okrajové podmínky, nastane právě ten, při kterém je potenciální energie systému minimální.*“

Uvedenou definici lze zapsat jako:

$$\pi = \pi_e + \pi_i = \min. \quad (8)$$

Kde  $\pi$  je potenciální energie systému,  $\pi_e$  obsahuje potenciální energii vnějších sil a  $\pi_i$  je potenciální energii vnitřních sil. Řešení vztahu (8) by bylo velmi složité, protože je funkcí, může se tento vztah zjednodušit do tvaru [1, 2]:

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} = 0. \quad (9)$$

Následně je potom hledána funkce průhybu  $w$ . Aproximační funkce neobsahuje hodnoty daného průhybu, ale podobnost s průběhem vyšetřované funkce. Pokud má konstrukce komplikovanější tvar, popřípadě okrajové podmínky nebo zatížení, je velmi obtížné volit aproximační funkce u klasických variačních metod. Přesnost výsledku závisí na volbě aproximační funkce. Podobnost průběhu dané funkce je zajištěna splněním okrajových podmínek. Velkým kladem je, že potenciální energie je skalární veličinou, a tudíž se konstrukce může rozložit na libovolný počet menších oblastí [2].



### 3 Metoda konečných prvků (MKP)

Metoda konečných prvků je numerická metoda, která slouží k výpočtu napětí, deformací, vlastních frekvencí, ale také k řešení mnoha jiných případů, týkajících se nejen mechaniky. Například modelování proudění tepla, tekutin, simulace jevů elektromagnetismu a možností aplikace téměř ve všech odvětvích průmyslu.

Hlavní výhody MKP vycházejí z poměrně velké universálnosti a možnosti výpočtu problémů, které by při použití jiných metod nebylo možné. Nesporná výhoda této metody tkví v jejím snadném algoritmizování. Bez výpočetní techniky však není možné vyřešit ani nejjednodušší úlohy, které by jinou metodou řešit šly.

MKP je metodou variační a vychází z Ritzovy metody (kap. 2.3). Existují tři varianty MKP. První varianta je varianta deformační, ve které jsou jako neznámé voleny deformační veličiny. Tato metoda vychází z Lagrangeova principu. Jako další postup řešení MKP může být silová nebo smíšená varianta. V této bakalářské práci je použita metoda deformační. V zatížené konstrukci vznikají vnitřní síly, celkovou hodnotu potenciální energie vnitřních sil se může maticově zapsat:

$$\pi_i = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \sigma \, dV. \quad (10)$$

Zatížení působící na vyšetřovanou konstrukci vykoná práci. Potenciální energie vnějšího zatížení se může také maticově zapsat ve tvaru:

$$\pi_e = - \int_V X^T u \, dV - \int_S p^T u \, dS. \quad (11)$$

Ve vztahu (10) je  $V$  objem prvku,  $X$  vektor objemových sil, kterým patří právě vektor posunutí  $u$ . Vektor  $p$  je povrchové zatížení, které působí na část povrchu prvku  $S$ .

V metodě konečných prvků dochází k rozdělení konstrukce na konečné prvky. Prvky jsou navzájem propojeny společnými uzly. V uzlových bodech jsou definované neznámé parametry. Pro každý neznámý parametr v prvku a uzlu je definována funkční závislost ta se může pojmenovat jako básová funkce. MKP dále převádí hledání spojitě funkce na problém hledání konečného počtu neznámých parametrů, pomocí nichž se vyhledávají funkce, které se přibližně aproximují. Numerické řešení umožňuje řešit prakticky každý matematicky popsateľný problém. Úloha může být matematicky,

geometricky či jinak komplikovaná. Limitující prvek této metody je v kapacitě dostupného hardwaru, softwaru [8, 2].

### 3.1 Historie MKP

Druhá světová válka byla podnětem pro velký rozvoj výpočetní techniky a tak byly vytvořeny podklady pro rozvoj moderních metod numerického řešení fyzikálních problémů. Na veřejnosti se poprvé objevila ve druhé polovině 50. let. Dále se pak rychle rozšířila do Spojených států a do celého technicky vyspělého světa.

Základní myšlenka se zabývala rozdělením spojitě oblasti do množiny samostatných podoblastí a je připisována R. Courantovi. Pro rozvoj a uplatnění této metody se především zasloužil letecký a raketový průmysl. Pozdější prohloubení metody bylo především matematické. Metoda konečných prvků je v podstatě zmodernizovaná Ritzova metoda [8, 2].

### 3.2 Postup MKP

Při prvním kroku jsou analyzovány konečné prvky. Podle geometrického tvaru, řešeného problému a uživatelsky zvolených aproximací, se odvodí matice tuhosti a zatěžovací vektor. Celková potenciální energie se stanoví součtem všech konečných prvků jejich potenciálních energií [2]:

$$\pi = \sum_{j=1}^n \pi_j. \quad (12)$$

Pokud se řeší obecné úlohy, je praktické tento vztah (12) upravit do tvaru:

$$K r = F \quad (13)$$

Kde  $K$  [N/m] je matice tuhosti,  $r$  [m] je vektor neznámých posunutí (deformací) a  $F$  [N] je vektor uzlových zatížení.

Další krok je volba aproximačních polynomů. Aproximační polynomy jsou součástí zvolených funkcí, z praktického hlediska je nejvýhodnější volit polynomy

úplného stupně [2]. Měli by se volit polynomy, které je možné jednoduše integrovat a derivovat. Počet konstant musí být roven počtu hledaných deformačních veličin na daném prvku. Konstrukce se rozdělí na konečné prvky, přiřadí se jim čísla uzlů, kódová čísla a vektor zatížení. Každý konečný prvek je řešen podle aproximační funkce, které jsou dány jednoznačné funkční hodnoty. Z lokálních pozic se sestaví globální matice tuhosti. Pomocí vektoru kódových čísel se určí řádek a sloupec v globálních souřadnicích. Výsledná matice je symetrická podle hlavní diagonály, pokud je provedeno správné číslování, je také pásová.

Okrajové podmínky se zavádí podle typu konstrukce. Mohou se zadat pevné podpory, popuštění podpor nebo pružné podpory. Stejně jako zatížení jsou i podpory zadávány do uzlů konečných prvků. Silová interakce probíhá jen prostřednictvím uzlů, kterými jsou prvky spojeny. Spojité zatížení se rozloží na poloviny v podobě uzlových sil. Síly stejně jako podpory jsou zařazeny na příslušnou pozici ve vektoru a matici. Dále aplikací Langrangeova variačního principu vznikne soustava algebraických lineárních rovnic, jejichž řešením se získají kořeny této soustavy.

### 3.3 Odvození trojuzlového prvku

V této bakalářské práci jsou stěny řešeny pomocí trojuzlového prvku (Obr. 8), který byl podobný odvozován ve škole. U trojuzlového prvku se počítá napětí na celé ploše, z tohoto důvodu nejsou výsledky tak přesné. V každém prvku jsou výsledky napětí i přetvoření konstantní, nepřesnost prvku je dána tím, že vychází pouze z lineárních polynomů. Přesnost výsledku dále určuje volba velikosti jednotlivého prvku a tvaru. Ve vytvořeném programu je možnost si vybrat ze tří různých typů složení prvků sítě. V místech podpor má velký vliv jak jsou prvky seskládány (Obr. 17).

K řešení jsou potřeba geometrické rovnice popisující vztah mezi posuny a deformacemi, které při předpokladu malých deformací obsahují jen lineární členy.

Geometrické rovnice mají tvar:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (14)$$

A zkráceně se mohou zapsat ve tvaru:

$$\varepsilon = \partial^T u. \quad (15)$$

V úloze rovinné napjatosti dále vystupují fyzikální rovnice, které popisují vztah mezi napětím a poměrnými deformacemi. Fyzikální rovnice se můžou také maticově zapsat ve tvaru:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad (16)$$

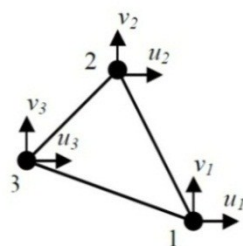
$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad (17)$$

$$\tau_x = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy}. \quad (18)$$

Fyzikální rovnice se mohou zkráceně zapsat ve tvaru:

$$\sigma = D \varepsilon. \quad (19)$$

Rovinný trojúhelníkový prvek má v každém uzlu dva neznámé parametry deformace  $u$ ,  $v$ , celkem má šest neznámých parametrů deformací (Obr. 7).



Obr. 7: Lineární trojúhelník, šest neznámých uzlových parametrů deformací [5].

Neznámé uzlové parametry se mohou vyjádřit jako:

$$\{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3\}^T. \quad (20)$$

Zvolí se aproximační funkce ve tvaru polynomů prvního stupně, které odpovídají neznámým uzlovým deformacím:

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y, \quad (21)$$

$$v(x, y) = a_4 + a_5 x + a_6 y. \quad (22)$$

Uvedené aproximace se zapíší v maticovém tvaru  $u = Ua$ :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}. \quad (23)$$

Do výše uvedeného vztahu (15) se dosadí (23), výsledný vztah bude mít tvar:

$$\varepsilon = \partial^T U a. \quad (24)$$

Ten se zapíše maticově:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}. \quad (25)$$

Následně se ze vzorce (25) vyjádří člen  $B = \partial^T U$ , který se zjednoduší a maticově zapíše ve tvaru:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Pro další krok se musí vyjádřit podle vztahu (23) aproximace neznámých posunutí v každém ze tří uzlů, ve kterém figuruje vektor deformací  $r$  a matice jednotlivých souřadnic uzlů  $S$ :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}. \quad (27)$$

Z rovnice (27) se může vyjádřit  $a$ , které se zkráceně zapíše ve tvaru:

$$a = S^{-1} r. \quad (28)$$

Dosazením do (24) a dále se zjednodušením (26) se získá výsledný tvar:

$$\varepsilon = B S^{-1} r. \quad (29)$$

Výsledná rovnice (29) se dosadí do zjednodušeného tvaru fyzikální rovnice (19), která nabyde hodnoty:

$$\sigma = D B S^{-1} r. \quad (30)$$

V posledním kroku jsou dosazeny vzorce (29) a (30) do výrazu pro potenciální energii vnitřních sil (10):

$$\pi_i = \frac{1}{2} \int_V B^T S^{-1T} r^T D B S^{-1} r dV. \quad (31)$$

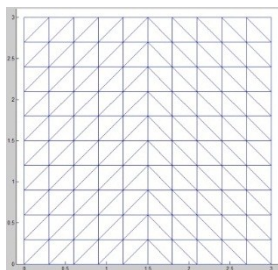
Vztah (31) spolu s výrazem pro potenciální energii vnějších sil (11), se dosadí do rovnice pro potenciální energii (8) a po výsledném zjednodušení podle [2], se dojde ke konečnému tvaru konečného trojúhelníkového prvku:

$$K = t A B^T S^{-1T} D B S^{-1}. \quad (32)$$

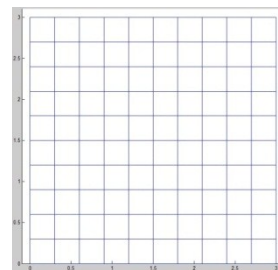
Vyjádřením zatěžovacího vektoru (11) se podle [2] dostane tvar rovnice:

$$F = X + p \quad (33)$$

Sestavením každého jednotlivého prvku se dostane zatěžovací vektor, neznámé parametry deformace a matice tuhosti celé konstrukce. Ze vztahu (13) vyplývá, že řešením této soustavy rovnic se dostanou jednotlivé složky deformace na každém konečném prvku. Následně se mohou vypočítat poměrné deformace ze vzorce (29), podle vzorce (30) se vypočítají napětí na daném konečném prvku. Protilehlé prvky jsou následně v programu zprůměrovány a s těmito hodnotami je pracováno v dalších výpočtech.



Obr. 8:  
Trojúhelníkový prvek z programu Matlab.



Obr. 9:  
Čtyřuzlový prvek z programu Matlab.

### 3.4 Odvození čtyřuzlového prvku

Vzhledem k tomu, že trojúhelníkový prvek není až tak přesný, protože se počítá napětí po celé ploše prvku, je odvozen čtyřuzlový konečný prvek (Obr. 9) pro kontrolu a dosažení přesnějších výsledků. U odvozování čtyřuzlového prvku se používá numerická integrace a to z důvodu, že po derivaci zvolených aproximací posunutí zůstanou v matici  $B$  neznámé parametry. Integrace se provádí v každém ze čtyř uzlů, ve kterých se získávají výsledná napětí. Výsledné napětí nejsou konstantní, ale jsou funkcí, proto je možné získat konečné výsledky napětí v libovolném bodě prvku. Proto byl zvolen střed prvku pro jasné porovnání výsledků s trojúhelníkovým prvkem.

V každém uzlu budou, podle teorie pružnosti, dva neznámé parametry deformace. Celkově je na konečném prvkem osm neznámých uzlových parametrů deformací.

$$\{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\}^T. \quad (34)$$

Geometrické rovnice mají tvar stejný jako u trojúhelníkového uzlu:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (35)$$

Zvolená aproximace neznámých posunutí, pro čtyřuzlový prvek:

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy, \quad (35)$$

$$v(x, y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy. \quad (36)$$

Pro další odvození je potřeba jejich maticový zápis  $u = Ua$ :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix}. \quad (34)$$

S použitím stejného principu jako u trojuzlového prvku se dostane vzorec (24), který se může maticově zapsat ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Následně se ze vzorce (35) vyjádří člen  $B = \partial^T U$ , který je podobný trojuzlovému prvku, ale s tím rozdílem, že ve členu  $B$  vystupují neznámé parametry. Ty se budou následně řešit numerickou integrací. Výsledné zjednodušení se maticově zapíše ve tvaru:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Dále se mohou zapsat aproximace neznámých uzlových posunutí v každém z uzlů 1, 2, 3, 4:  $r = Sa$ :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Potom se vyjádří  $a$  stejně jako u trojuzlového prvku, a dosadí se do rovnice (24). Tím se získá stejně zapsaný tvar rovnice (38):

$$\varepsilon = B S^{-1} r. \quad (38)$$

Vztah (38) se dosadí do zjednodušeného tvaru fyzikální rovnice (19), která nabyde hodnoty:

$$\sigma = D B S^{-1} r. \quad (39)$$



V posledním kroku jsou dosazeny vzorce (38) a (39) do výrazu pro potenciální energii vnitřních sil (10). V rovnici (40) vystupují ve členech  $B$  a  $S$  neznámé parametry, proto je nutné výpočet provést numerickou integrací.

$$\pi_i = \frac{1}{2} \int_V B^T S^{-1T} r^T D B S^{-1} r dV. \quad (40)$$

Pro další analýzu prvku je potřeba numerická integrace, která je více uvedena v další podkapitole.

### 3.4.1 Numerická integrace

Při řešení příkladů numerickou integrací je výsledkem určitého integrálu přibližné řešení. Interval se rozdělí na  $n$  stejně velkých intervalů, ve kterém se provádí aproximace integrované funkce. Šířka jednotlivých intervalů je stejná. Pro řešení určitých integrálů numerickou integrací lze použít celé řada metod, které se liší svou přesností. Například obdélníková metoda, která je nejméně přesná, dále například lichoběžníková nebo adaptivní metoda, více o výše uvedených metodou je uvedeno v literatuře [7].

Pro řešení čtyřuzlového prvku v této bakalářské práci je použita Gaussova metoda numerické integrace. Integrál, který má zadané meze obecně je nutno transformovat. Transformovaný integrál pro obecně zadané meze:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f\left(\frac{(b-a)t_i + b + a}{2}\right) \frac{b-a}{2}. \quad (41)$$

Kde  $t_i$  je příslušný kořen  $x_i$  Gaussovy kvadratury.

Přesnost Gaussovy metody lze ovlivnit volbou integračních bodů  $n$ , v této práci bylo zvoleno  $n = 2$ . Matice tuhosti se počítá Gaussovou metodou ve 2 x 2 integračních bodech, proto bylo nutné Gaussovu integraci ze skript [7] upravit pro dvě proměnné.

Výstup z programu Matlab, část upravené Gaussovy metody:

```
s=0;
for i=1:n
    for j=1:n
        s=s+f(0.5*(x(i)*(b-a)+b+a),0.5*(y(j)*(d-c)+d+c))*(d-
c)*(b-a)/4*v(i)*v(j);
    end
end
```

Zadání matice souřadnic v programu Matlab a vypsání inverzní matice souřadnic pro čtyřuzlový prvek pro proměnné  $x$  a  $y$ :

```
S= [1 x(1) y(1) x(1)*y(1) 0 0 0 0
    0 0 0 0 1 x(1) y(1) x(1)*y(1)
    1 x(2) y(2) x(2)*y(2) 0 0 0 0
    0 0 0 0 1 x(2) y(2) x(2)*y(2)
    1 x(3) y(3) x(3)*y(3) 0 0 0 0
    0 0 0 0 1 x(3) y(3) x(3)*y(3)
    1 x(4) y(4) x(4)*y(4) 0 0 0 0
    0 0 0 0 1 x(4) y(4) x(4)*y(4)];
Si=inv(S);
```

Zavedení proměnné  $x$  a  $y$ , matice odvozená derivacemi pro čtyřuzlový prvek:

```
B=@(x,y) [0,1,0,y,0,0,0,0;
           0,0,0,0,0,0,1,x;
           0,0,1,x,0,1,0,y];
```

Protože matice  $B$  je funkcí, bude i součin všech jednotlivých matic funkcí  $x$  a  $y$ , která obsahuje matice  $S_i$ ,  $B$  a  $D$ , které byli odvozovány výše. Hodnota proměnné z Matlabu  $FCE$ , ve které vystupují hodnoty  $x$  a  $y$ , představují uzly každého prvku. V těchto uzlech probíhá numerická integrace:

```
FCE=@(x,y) Si'*B(x,y) '*D*B(x,y)*Si*t;
```

Následně se s použitím Gaussovy metody numerické integrace se dostane matice tuhosti  $K_e$  jednotlivého konečného prvku. Ve skriptu `gaussova_metoda` se provádí výpočet:

```
Ke=gaussova_metoda(FCE,x(2),x(1),y(3),y(2),2);
```

V dalším kroku se sestaví celková matice tuhosti  $K$  z jednotlivých matic tuhosti  $K_e$  každého konečného prvku. Dále se sestaví zatěžovací vektor, zavedou se do systému podpory a řeší se soustava lineárních rovnic podle vzorce (13). Následně se mohou vypočítat poměrné deformace ze vzorce (38) a podle vzorce (39) vypočítat napětí na daném konečném prvku. Napětí je počítáno ve středu prvku.

## 4 Výpočetní systém Matlab

Program Matlab byl vyroben firmou MATHWORKS, jeho název vznikl ze spojení částí slov MATrix LABoratory. Matlab byl vytvořen na začátku 80. let 20. století. Jedná se o prostředí, které je určeno pro simulace, vědeckotechnické výpočty, paralelní výpočty, měření dat ve vědě, výzkumu, vzdělávání a průmyslu. Výpočetní systém Matlab se během uplynulých let stal celosvětově využívaným programem, kde jeho silnou stránkou je grafické rozhraní. V Matlabu se může pracovat ve velmi jednoduchém prostředí, při použití příkazového řádku nebo využívat i tvorby grafického uživatelského rozhraní. Vzhledem ke své dispozici lze jednoduše využít pro řešení náročných úloh. Matlab obsahuje velké množství jednoduchých i složitých matematických funkcí, z nichž lze sestavit libovolně složité a rozsáhlé výpočty, které už dále závisí na možnostech parametrů počítače [9].

### 4.1 Vlastnosti Matlabu

Klíčová struktura v Matlabu je výpočet matic. Hlavní částí jsou algoritmy, které umožňují operace s maticemi reálných a komplexních čísel, maticové funkce jako jsou obvykle používané operace násobení, inverze, determinant dále i složitější úlohy, řešení řídkých matic, které obsahují nulové prvky. Dále řešení lineárních rovnic, vlastní čísla a podobně. Matlab obsahuje funkce, které pomáhají s analýzou dat, jako je výpočet střední hodnoty, hledání extrému, výpočet směrodatné odchylky. Je zde možno použití skriptů nebo funkcí, využití globálních proměnných, dále export a import dat.

Grafická stránka Matlabu umožňuje jednoduché získání a zobrazení výsledků. Existuje zde možnost vykreslení různých typů grafů: jednorozměrné, dvourozměrné, sloupcové, vykreslení histogramů nebo koláčových grafů. Matlab umožňuje libovolné změny vzhledu, rozložení a nastavení grafů. Vzhled jednotlivých grafů lze měnit také interaktivně, a to v každém okně pomocí lišty nástrojů, pod záhlavím obrázku. Programovací jazyk Matlabu nezbytně obsahuje příkazy pro psaní programů. Jsou to například podmínovací příkazy „if“, cykly s konečným počtem opakováním „for“ nebo se známým opakováním „while“ a podobně [10].

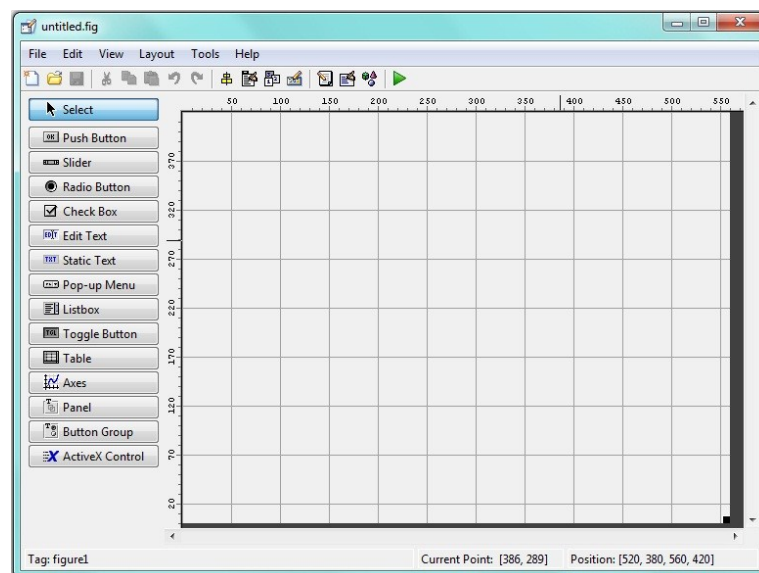
Velká kapitola týkající se grafického rozhraní je programování nazvané Handle Graphics. Uživatelské rozhraní je libovolně nastavitelné, takže si uživatel může volit rozměry a nástroje, aby co nejvíce vyhovovali uživateli. To umožňuje vkládat grafické prvky do ovládání, například tlačítka, lišty, posuvníky a tvořit tak aktivní graficky ovladatelné uživatelské rozhraní. V této bakalářské práci bylo využito právě tohoto systému, o kterém bude více zmíněno v další kapitole.

## 4.2 Uživatelské rozhraní Matlab GUI

Jak již bylo zmíněno, k vytvoření programu je použito uživatelské rozhraní Matlabu GUI (Graphical User Interface). Tím je docíleno velmi jednoduchého ovládání a libovolného zadávání parametrů. Uživatelské rozhraní GUI lze vytvářet dvěma způsoby:

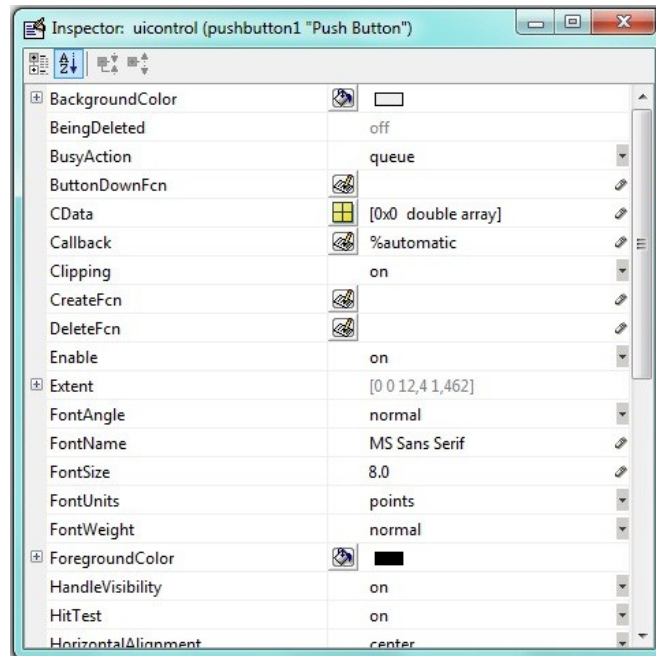
Prvním způsobem programování uživatelského prostředí je samotným vypsáním všech parametrů. Musí se vypsát všechno od typu ovládacího prvku, polohy, velikosti, barvy a podobně. Je to velmi náročné a v obsáhlejších programech i neefektivní.

Druhý typ postupu při programování uživatelského vývojového prostředí GUI je použití vývojového prostředí GUIDE (Obr. 10). Ve vlastním vývojovém prostředí GUIDE se může libovolně a velmi jednoduše volit místo, typ ovládacího nebo grafického prvku.



Obr. 10: Uživatelské rozhraní GUIDE.

Je možnost použití velkého počtu ovládacích prvků, jako je například: posuvník, přepínač, graf, seznam, editovatelný text, tabulku a podobně. Všechno ostatní nastavení ohledně ovládacích prvků se přehledně provádí v *Property Inspector* (Obr. 11). Zde se může měnit velikost, barva, typ písma, viditelnost a další věci potřebné k ovládní prvku.



Obr. 11: Nastavení jednotlivých ovládacích prvků (*Property Inspector*).

Při uložení jsou vytvořeny dva soubory s příponou *.m*, ve kterém se může editovat daný program v příkazovém řádku. Zde se nastavuje funkce a propojení jednotlivých ovládacích prvků. Další soubor je s příponou *.fig*, kde jsou uloženy všechny informace ohledně grafického uspořádání. Pro ovládní objektů je potřeba použít *CallBack*, je to funkce která odkazuje na akci po použití objektu. Může to být například zmáčknutí tlačítka, posunutí posuvníku nebo použití přepínače. Dalo by se říct, že je to vlastnost, která jednotlivé prvky propojuje. Může tam být zapsán jednoduchý příkaz, skript nebo funkce [6].

Vlastnosti každého prvku se mohou ovládat mnoha příkazy. Nejpoužívanější z nich jsou:

- Set – nastaví vlastnosti objektu.
- Get – získáme vlastnost objektu.
- Reset – nastaví hodnoty grafického objektu na výchozí.
- Delete – vymaže daný objekt.

Dále je uvedena ukázka z řešeného programu, několik příkazů v Matlabu:

```
pocetbodux_val=get(handles.edit1,'string')
```

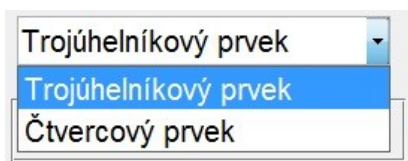
V každém příkazu figuruje *handles* je to označení každého prvku, dále musí být uveden příkazový název a v uvozovkách je uvedena hodnota nebo krok, který chceme provést. Konkrétně v tomto případě je převeden text na číselnou hodnotu.

Například pro výběr z rolovacího menu musí být zadán příkaz *value*, kterým se získá hodnota (položka v rolovacím menu), se kterou se bude dále pracovat:

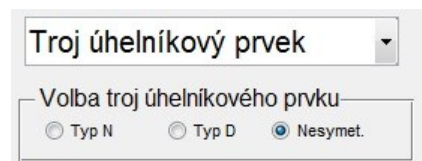
```
pop=get(handles.popupmenu1,'value')
```

Celý příkaz pro tlačítko *pushbutton* (*knoflík*), zapsaný v *CallBack* může vypadat například takto:

```
pop=get(handles.popupmenu1,'value') % získání hodnoty popupmenu
switch pop % rozhodovací příkaz
    case 1 % první část rolovacího menu
        if get(handles.radiobutton4,'value') % získání hodnoty
přepínače
            BC_03_prvky_troj % volba skriptu
            BC_01_vyp_troj % volba skriptu
            BC_07_VYP_PRO_GRAFY % volba skriptu
        end
        if get(handles.radiobutton5,'value') % získání hodnoty
přepínače
            BC_03_prvky_troj_a % volba skriptu
            BC_01_vyp_troj % volba skriptu
            BC_07_VYP_PRO_GRAFY % volba skriptu
        end
        if get(handles.radiobutton6,'value') % získání hodnoty
přepínače
            BC_03_prvky_troj_b % volba skriptu
            BC_01_vyp_troj % volba skriptu
            BC_07_VYP_PRO_GRAFY % volba skriptu
        end
    case 2 % druhá část rolovacího menu
        BC_04_prvky_ctvr % volba skriptu
        BC_02_vyp_ctvr % volba skriptu
        BC_07_VYP_PRO_GRAFY % volba skriptu
end % konec
```



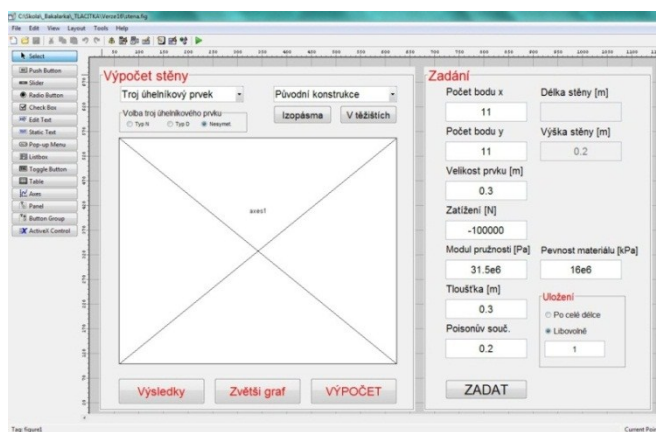
Obr. 12:  
Položky v rolovacím menu.



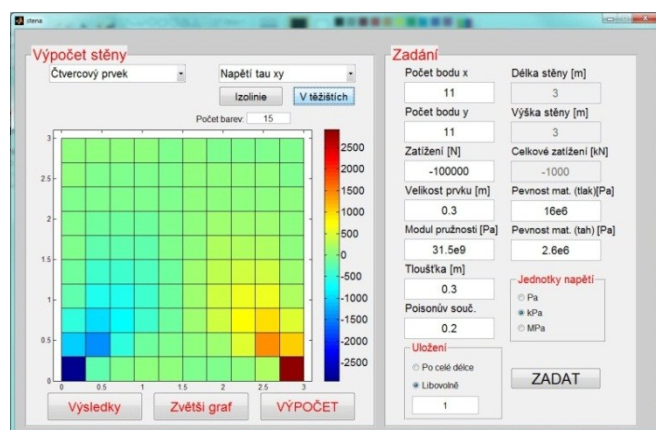
Obr. 13:  
Použití rolovacího menu a přepínače.

Při vykonání akce (zmáčknutí tlačítka) se provede výběr, co bylo uživatelem zadáno. Figuruje tady rolovací menu (*popupmenu*) a přepínač (*radiobutton*) (Obr.13). V prvním kroku se přiřadí proměnné *pop* hodnota rolovacího menu. Dále se rozhoduje, jestli je vybrána první nebo druhá volba příkazem *case* (Obr. 12). V druhé položce, která je jednodušší (čtvercový prvek), jsou použity pouze skripty, takže dojde k vyvolání skriptů, ve kterých proběhne daný úkol. V první části (Obr. 13), ale dále figurují přepínače, které se zobrazí při vybrání trojúhelníkového prvku, proto musí být ještě použita logická funkce *if*. Stejným příkazem jako byl uveden výše, získáme hodnotu přepínače (*get*). Pokud jsou použity v objektu *Button group* (skupina tlačítek), může být zaškrtnutý pouze jeden. U přepínače, který je zaškrtnutý se provede výpočet nebo v tomto případě také volba daných skriptů.

Možnosti GUI jsou opravdu velké. Libovolně nastavitelná grafika, možnosti ukládání, exportu a importu dat nebo obrázků. Je možnost propojení počítače s kamerami, zvukovými obrazy a mnoho dalších věcí.



Obr. 14: Grafické rozložení objektů v rozpracovaném programu pro výpočet stěn.



Obr. 15: Hotový program, řešený v GUI.

## 5 Výpočetní program nosné stěny

Při tvorbě programu na řešení nosných stěn je použit Matlab a jeho funkce GUIDE (Obr. 14). To umožňuje velmi jednoduché ovládání a libovolné zadávání parametrů programu a také grafických nebo číselných výstupů (Obr. 15). Délku a výšku stěny lze volit libovolně, ale v závislosti na počtu bodu (uzlů) v ose  $x$  a  $y$ . Při volbě velikosti prvku a počtu bodu (uzlů) dochází automaticky k přepočítání na reálnou délku a výšku stěny v metrech (Obr. 16).

Uložení stěny se může volit po celé délce nebo libovolně zadáním počtu podpor na spodní straně konstrukce. Zadané číslo udává, do kolika krajních uzlů (zleva i zprava) jsou podpory rozloženy, ty jsou následně použity na levou a pravou část konstrukce v uzlech. Zadané číslo jedna (Obr. 17) znamená, že podpora bude v prvních krajních uzlech (levém i pravém).

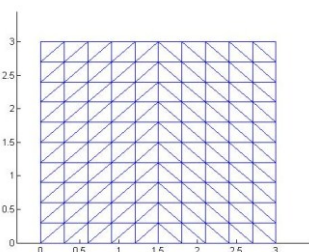
Počet bodu $x$	Délka stěny [m]
<input type="text" value="11"/>	<input type="text" value="3"/>
Počet bodu $y$	Výška stěny [m]
<input type="text" value="11"/>	<input type="text" value="3"/>
Velikost prvku [m]	
<input type="text" value="0.3"/>	

Obr. 16: Volba délky a výšky stěny.

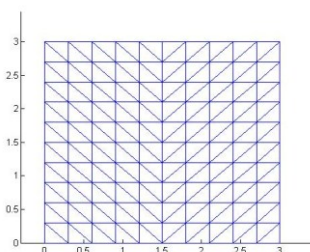
<b>Uložení</b>
<input type="radio"/> Po celé délce
<input checked="" type="radio"/> Libovolně
<input type="text" value="1"/>

Obr. 17: Volba podepření stěny.

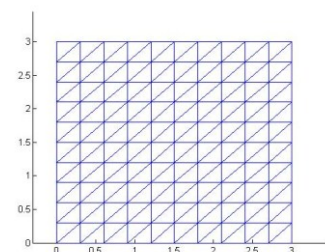
Před zahájením vlastního výpočtu je nutné definovat prvky sítě. Výpočet prvků sítě probíhá samostatně pro čtvercový a trojúhelníkový prvek. U trojúhelníkového prvku je možnost volby mezi třemi typy sítě (Obr. 18).



Typ sítě nahoru.



Typ sítě dolů.

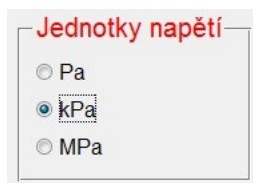


Nesymetrická síť.

Obr. 18: Typ sítě trojúhelníkového prvku.



Pro lepší orientaci ve výsledcích a hodnotách v grafu je v zadávání programu naprogramována funkce pro zobrazení typů jednotek. Pro tuto funkci je zvolen přepínač *radiobutton*, který při zadávání parametrů rozhoduje, v jakých jednotkách se bude počítat. Je možnost volby v Pa, kPa nebo MPa. Jeho hodnota je defaultně nastavena na kPa (Obr. 19).



Obr. 19: Volba jednotek napětí.



Obr. 20: Druhé okno v programu (Výsledky).

Po provedení výpočtu je možnost zobrazení výsledků. Otevře se nové okno, ve kterém se vybere požadovaná (sledovaná) veličina jeho hodnota a umístění ve stěně. Tlačítkem *Zobrazit v grafu* se zobrazí místo, ve kterém jsou extrémny. Červená barva představuje tlakovou složku a modrá tahovou (Obr. 20).

## 5.1 Výpočetní část programu

Pro samotný výpočet je nutné zapsání odvozených prvků do skriptů. Ty jsou pojmenovány následovně:

- BC\_01\_vyp\_troj.m
- BC\_02\_vyp\_ctvr.m

Jejich výstupem je napětí. U trojúhelníkového prvku je získáno průměrem dvou protilehlých prvků a u čtyřuzlového prvku výpočtem přes numerickou integraci v jeho středu. Pro další výpočet je nutné zajistit, aby byly proměnné ze skriptů převedeny do globálního systému *Workspace* nebo naopak načteny. To se provádí v uživatelském prostředí GUI následující funkcí:

```
assignin('base','sila',sila) % převod do globálního systému
sila=evalin('base','sila') % načtení do požadovaného skriptu
```

Výstup napětí je v proměnné pojmenované stejně pro oba typy prvků, aby následující výpočet mohl být stejný. Pro čtvercový prvek je výstup z Matlabu takto:

```
sigmacela(i,1)=sigmaxprumer(i,1); % napětí sigma x
sigmacela(i,2)=sigmayprumer(i,1); % napětí sigma y
sigmacela(i,3)=sigmaxyprumer(i,1); % napětí tau xy
```

Výpočet napětí pro trojúhelníkový prvek se skládá z cyklu, kde se průměrují dva trojúhelníkové prvky:

```
% napětí sigma x
sigmacela(i,1)=(sigmacela1(i,1)+sigmacela1(i+nprvku/2,1))/2;
% napětí sigma y
sigmacela(i,2)=(sigmacela1(i,2)+sigmacela1(i+nprvku/2,2))/2;
% napětí tau xy
sigmacela(i,3)=(sigmacela1(i,3)+sigmacela1(i+nprvku/2,3))/2;
```

Další část je naprogramována ve skriptu BC\_07\_VYP\_PRO\_GRAFY.m. Zde se v první části provádí výpočet hlavního napětí  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  [12] podle vzorce:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (42)$$

Ten je v Matlabu zapsaný výrazem:

```
sigma1(i,1)=0.5*(sigmaxprumer(i,1)+sigmayprumer(i,1)) ...
+0.5*sqrt((sigmaxprumer(i,1)-sigmayprumer(i,1))^2+4*...
(sigmaxyprumer(i,1)^2));

sigma2(i,1)=0.5*(sigmaxprumer(i,1)+sigmayprumer(i,1)) ...
-0.5*sqrt((sigmaxprumer(i,1)-sigmayprumer(i,1))^2+4*...
(sigmaxyprumer(i,1)^2));
```

Podle vzorce (43) a (44) se vypočítá směr hlavního napětí. Následující výpočty v tomto skriptu jsou použity pro další výpočty v samostatných skriptech. Tyto skripty jsou použity pro řešení grafické části a výpočtu, které prvky překročily mez pevnosti.

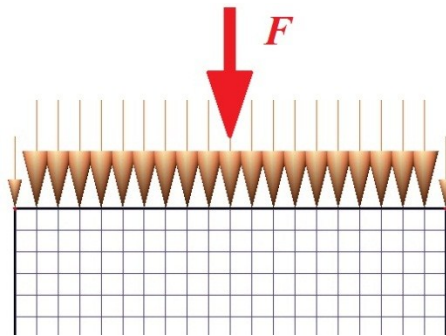
$$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y}\right), \quad (43)$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y}\right). \quad (44)$$

### 5.1.1 Zadávání zatížení

Hodnota, kterou uživatel zadá do programu je použita do každého uzlu v horní hraně konstrukce. Tato síla v uzlu se rozloží na levou a pravou polovinu přilehlých prvků. U krajních uzlů je hodnota automaticky zadána na polovinu. Výsledné zatížení  $F$  na konstrukci (Obr. 21) je dáno vztahem (44). U všech řešených příkladů v práci je celkové zatížení  $F$  (suma všech sil) shodné a je přepočítáváno na uzly, když je měněna hustota sítě. Celkové zatížení  $F$  [kN] je rovnou přepočítáváno v programu, aby uživatel jednoduše věděl, jaká je jeho hodnota.

$$F = ((\text{počet uzlů}) - 1) * \text{zatížení}. \quad (44)$$



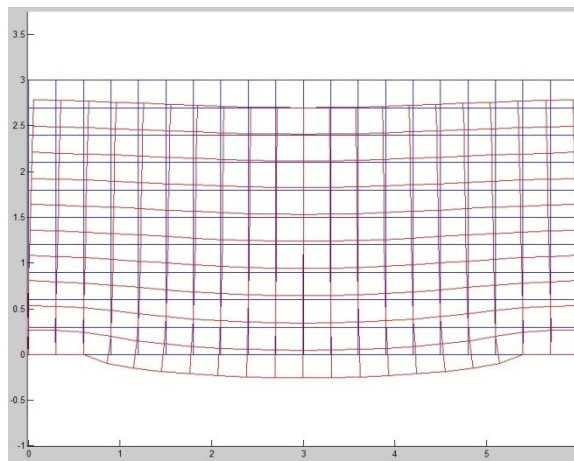
Obr. 21: Schéma zatížení v Matlabu (Vykeslení z Scia Engineer).

## 5.2 Grafická část programu

Program je vytvořen ze dvou oken. V prvním okně se zadávají parametry konstrukce a provádí se její výpočet. Při otevření druhého okna se mohou zjistit extrémní napětí a jejich poloha v konstrukci. Dále je možnost exportu hodnot napětí do Excelu, který je vytvořen ve složce tohoto programu pod názvem *Výsledky.xlsx*. Tento výpis umožňuje použití výsledků dle dalších potřeb uživatele. Vzhledem k tomu, že se výsledky ukládají pokaždé do toho souboru, je nutné po jeho uložení provést jeho vyčištění a to v programu tlačítkem *Vymazat Excel* (Obr. 20). Pokud bychom neprovedli tento krok, mohli by současné výsledky zkreslit minulý výpočet. Samotné vyčištění (vymazání) Excelu se provádí přiřazením prázdné hodnoty do každé buňky Excelu.

Vykreslování grafů je vytvořeno tak, že pomocí rolovacího menu je možnost výběru z několika různých typů grafů. Může se získat původní konstrukce,

zdeformovaná síť (Obr. 22), která je vykreslena ve zvětšeném měřítku. Z důvodu malých deformací by vykreslení nebylo zřetelné.

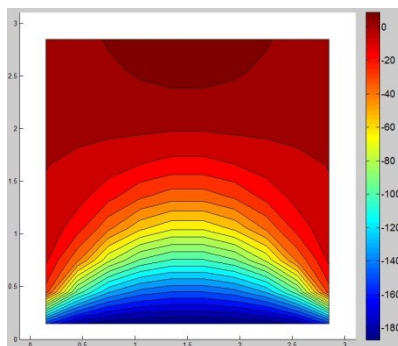


Obr. 22: Ukázka zdeformované konstrukce ve zvětšeném měřítku.

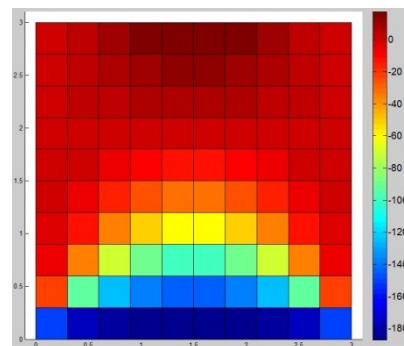
Pro vykreslení napětí se může volit mezi typem grafu, který vykreslí hodnoty v izoliniích nebo v těžištích. Jsou použity dvě funkce:

- *Contourf*
- *Fill*

*Contourf* (Obr. 23) vykresluje hodnoty v jednotlivých středech prvků z matice a vykreslí jejich přechody. Pro přesnost je naprogramována možnost volby počtu barev. Funkce *fill* (Obr. 24) vykresluje jednotlivě přiřazené hodnoty do uzavřené oblasti v tomto případě prvky. Vykreslení směru hlavní napětí a řešení překročení meze pevnosti materiálu bude více popsáno v následujících podkapitolách.



Obr. 23: Vykreslení napětí pomocí funkce *Contourf*.



Obr. 24: Vykreslení napětí pomocí funkce *Fill*.

## 5.2.2 Vykreslování trajektorie nosné stěny

Pro vykreslení trajektorie hlavního napětí nosné stěny je v Matlabu použita funkce *quiver*. Funkce *quiver* kreslí šipky, které jsou zadány bodem, ze kterého vychází a jejich pravoúhlým průmětem souřadnic. Jejich relativní délka se může měnit zadáním měřítka [11].

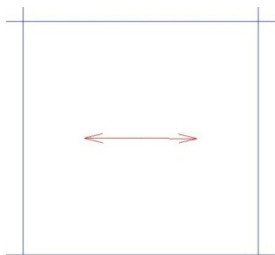
Výpis funkce *quiver* z Matlabu:

```
h1=quiver(xstred,ystred,usigma1plus,vsigma1plus,pomer1)
```

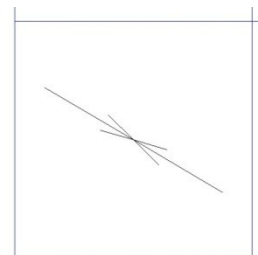
Bod, ze kterého mají šipky vycházet, je v tomto případě střed každého prvku, které představují proměnné matice *xstred* a *ystred*. Každé dvojici prvků matice se přiřadí hodnoty pravoúhlého průmětu jejich souřadnic a zadá se poměr, který se může libovolně volit zadáním hodnoty v programu.

Po získání výsledků velikosti napětí (42) a jejich směrů (43) a (44) je důležité zajistit jejich správné vykreslení. Protože se napětí pohybuje v kladných i záporných hodnotách, je nutné šipkám přiřadit správný směr. Základní nastavení je pro kladné napětí (Obr. 26), pro tlačný prvek je nutné šipky otočit (Obr. 25). To se provede pouze pevnou změnou v systému Matlabu. Výpis z Matlabu pro otočení směru šipky:

```
% Otočení šipky
L = get(h6, 'children');
D = get(L(2), {'xdata', 'ydata'}); % Začátek šipky
C = get(L(3), {'xdata', 'ydata'}); % Konec šipky
NPx = D{1}(~isnan(D{1})); % Řešení dat v ose x
NPx = reshape(NPx, 3, [])';
NPx = bsxfun(@minus, NPx, (NPx(:, 2) - C{1}'));
NPx(:, end+1) = NaN;
NPx = reshape(NPx', 1, []);
NPy = D{2}(~isnan(D{2})); % Řešení dat v ose y
NPy = reshape(NPy, 3, [])';
NPy = bsxfun(@minus, NPy, (NPy(:, 2) - C{2}'));
NPy(:, end+1) = NaN;
NPy = reshape(NPy', 1, []);
set(L(2), {'xdata', 'ydata'}, {NPx, NPy}) % Provede změnu
```



Obr. 25: Vykreslení kladného napětí.



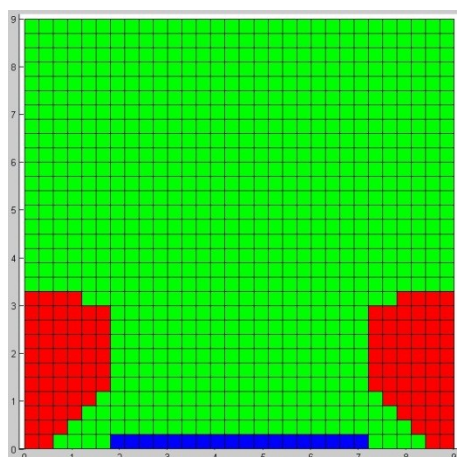
Obr. 26: Vykreslení záporného napětí.

### 5.2.3 Vykreslení oblasti s překročením meze pevnosti

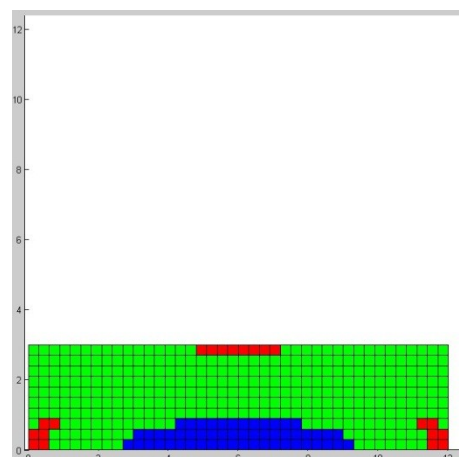
Součástí práce je také definování oblastí, ve kterých dojde k porušení prvků na mezi pevnosti. Poté dojde k nevratným deformacím a materiál se přestává chovat podle Hookeova zákona. Mez pevnosti je řešena na každém prvku. Je naprogramovaný algoritmus, který porovnává každý prvek s výchozí hodnotou meze pevnosti, která je zadána. Uživatel může zadat tlakovou a tahovou charakteristiku materiálu. Poté je přehledně vykresleno, které prvky překročily nebo nepřekročily mez pevnosti (Obr. 27). Prvky, které překročily mez pevnosti v tlaku, jsou vykresleny červenou barvou. Tahové překročení meze pevnosti je zobrazeno barvou modrou. Prvky, které nepřekročily mez pevnosti, zůstávají zobrazeny zeleně. Po vypsání výsledků je možnost zjistit kolik procent prvků překročilo mez pevnosti.

Výpis z programu Matlab pro vykreslení grafu:

```
for i=1:1:((pocetbodux-1)*(pocetboduy-1)) % počet cyklů dle
počtu prvků
    fill(uzlyxmensi(i,:),uzlyymensi(i,:), 'g')
        % vykreslení grafu zeleně,
        % které nepřekročily mez pevnosti pevnosti
end
for i=1:1:((pocetbodux-1)*(pocetboduy-1))
        % počet cyklů dle počtu prvků
    fill(uzlyxvetsi(i,:),uzlyyvetsi(i,:), 'r')
% vykreslení grafu červeně které překročily mez pevnosti v tlaku
end
for i=1:1:((pocetbodux-1)*(pocetboduy-1)) % počet cyklů dle
počtu prvků
    fill(uzlyxvetsitah(i,:),uzlyyvetsitah(i,:), 'b')
% vykreslení grafu modře které překročily mez pevnosti v tahu
end
```



a) Čtvercová stěna.

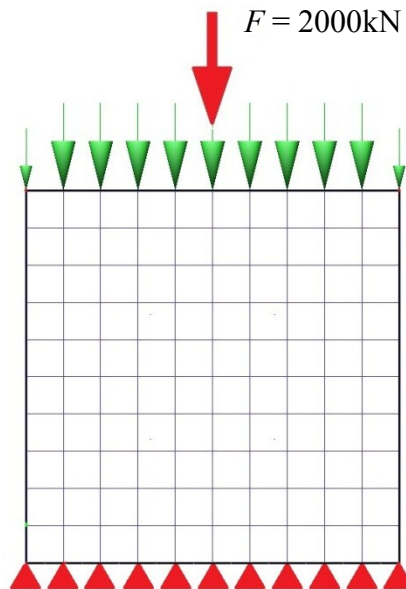


b) Obdélníková stěna.

Obr. 27: Ukázka překročení meze pevnosti prvků v konstrukci.

### 5.3 Kontrola a porovnání výsledků

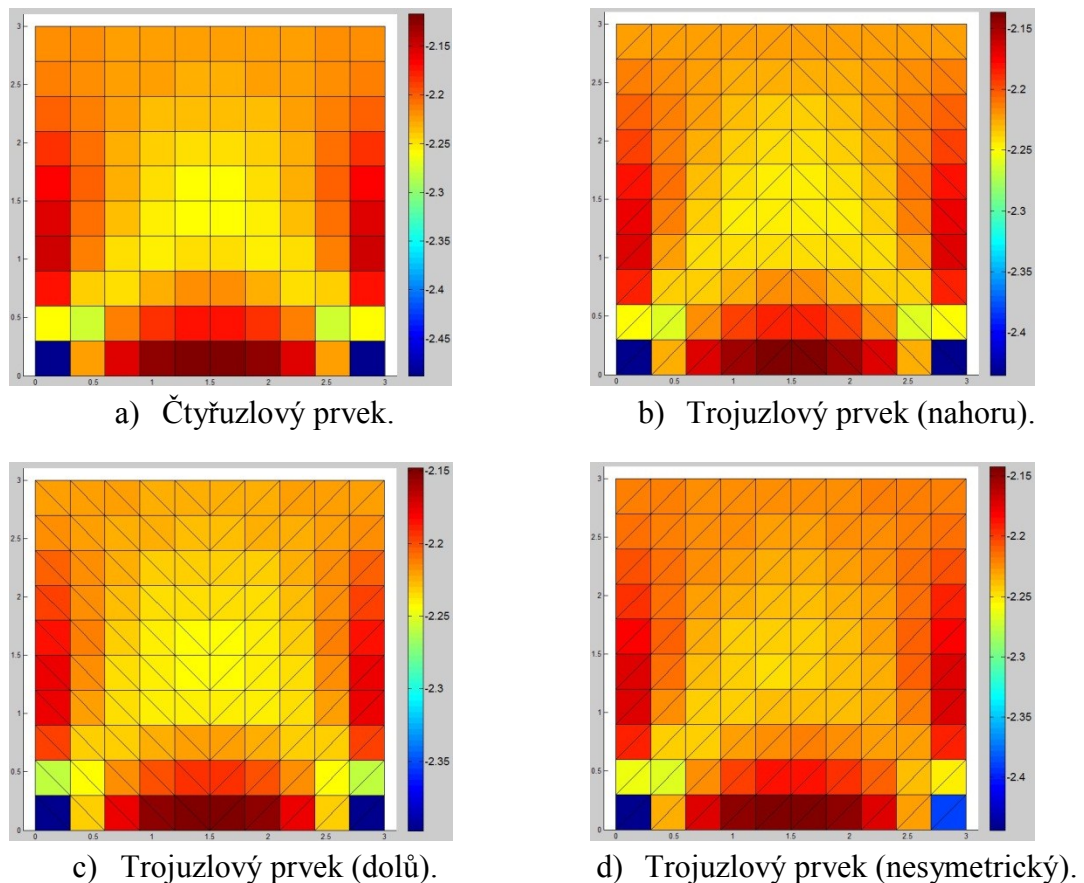
Jak bylo uvedeno výše, je odvozen čtyřuzlový a trojuzlový stěnový konečný prvek. V programu jsou naprogramovány algoritmy pro automatické vytvoření sítě těchto prvků. U trojuzlového (trojúhelníkového) prvku je možnost volby mezi třemi typy seskládání těchto prvků. Bylo také uvedeno, že čtyřuzlový prvek (čtvercový) je přesnější a to z důvodu vyšších polynomů v aproximační funkci. Rozdíl mezi výsledky z obou prvků je velmi znatelný v extrémech veličin, tedy v místech podepření podpor a uzlech kde působí síly. V případě bodového podepření stěny se výsledky budou lišit kvůli, uspořádání prvků.



Obr. 28: Schéma konstrukce, velikost hrany 3 metry, tloušťka 0,3 m.

V případě liniového podepření stěny na její spodní hraně, jsou výsledky totožné. Je uveden příklad, na kterém je řešen vliv uložení prvků v konstrukci. To dokazuje průběh normálového napětí  $\sigma_y$ , (Obr. 29), že ve čtvercové stěně zatížené a uložené podle (Obr. 28) je rozdíl v napětí minimální. Jde jasně vidět, že vliv uložení u trojuzlových prvků má velký vliv na výsledné napětí, kde v dolních rozích konstrukce vznikají rozdílné hodnoty napětí (Obr. 29d).





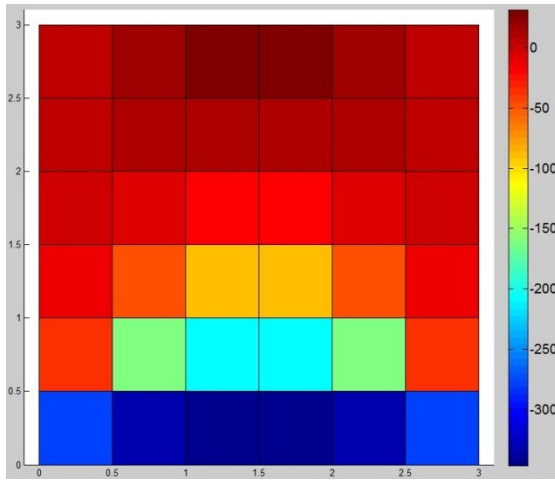
Obr. 29: Průběh normálového napětí  $\sigma_y$  z Matlabu (typy prvků).

### 5.3.1 Porovnání vlivu hustoty sítě

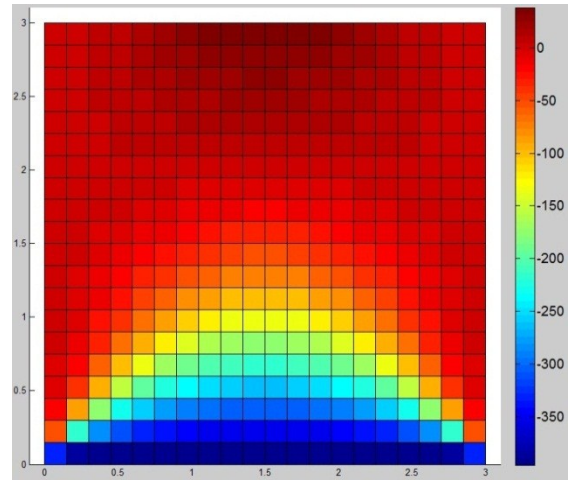
V bakalářské práci jsou řešeny extrémní napětí u stěn v místě uložení podpor. Vzhledem k menší přesnosti trojuzlového prvku je dále používán pouze čtyřuzlový stěnový prvek. Přesnost výpočtu ovlivňuje také velikost sítě. Pokud je síť prvků velmi řídká, výsledky jsou zkreslené. Čím je síť prvků hustější, dosahuje se přesnějších výsledků. Ovšem hustota sítě velmi ovlivňuje rychlost výpočtu a je také závislá na možnosti počítače.

Pro ukázkový příklad je zvolena stěna shodná s výše uvedeným příkladem (Obr. 28). Na obrázku 30a je síť prvků velmi řídká, normálové napětí  $\sigma_x$  dosahuje zaokrouhleně hodnoty -346 kPa. Pokud se síť zhušťuje je vidět na obrázcích 30b, c, že se výsledné hodnoty napětí v patě stěny zvětšují. Tím je dosaženo přesnějších výsledků. Na posledním snímku je síť zhuštěna téměř 7x oproti prvnímu případu. Napětí v patě stěny je po zaokrouhlení -429 kPa. Při zhuštění sítě se napětí v patě stěny zvětšilo (zprecnilo) o téměř 20 %, což dokazuje srovnání se Scia Engineer (Obr. 31).

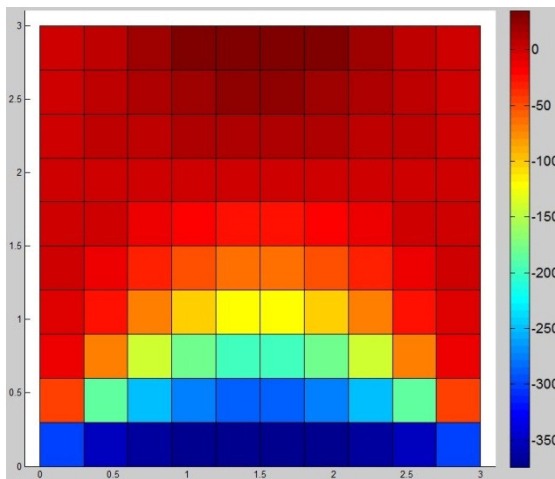




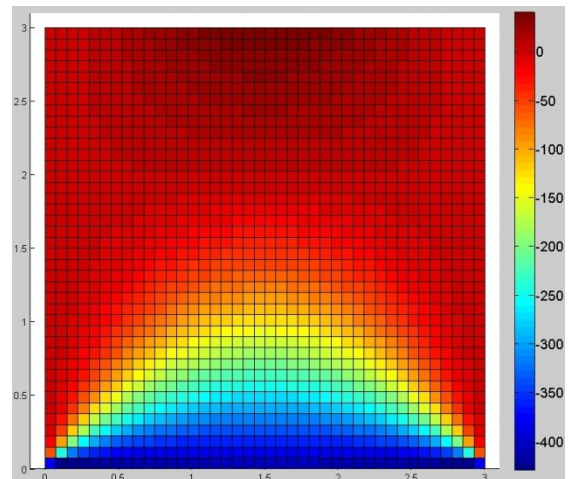
a) Prvek 0,5 m,  $\sigma_{x,extrm} = -346$  kPa.



b) Prvek 0,15 m,  $\sigma_{x,extrm} = -395$  kPa.

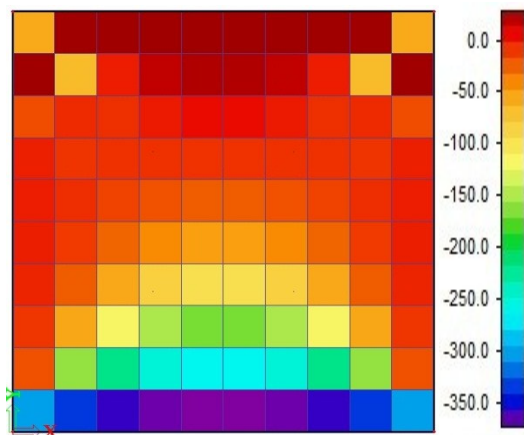


c) Prvek 0,3 m,  $\sigma_{x,extrm} = -374$  kPa.

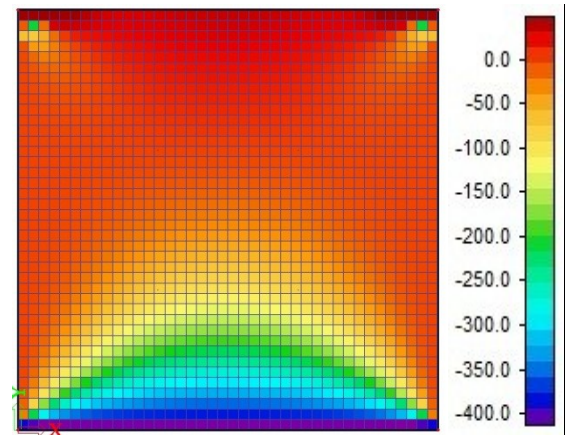


d) Prvek 0,075 m,  $\sigma_{x,extrm} = -429$  kPa.

Obr. 30: Průběh napětí  $\sigma_x$  [kPa] při různých hustotách sítě – Matlab.



a) Hustota sítě shodná s 30c.



b) Hustota sítě shodná s 30d.

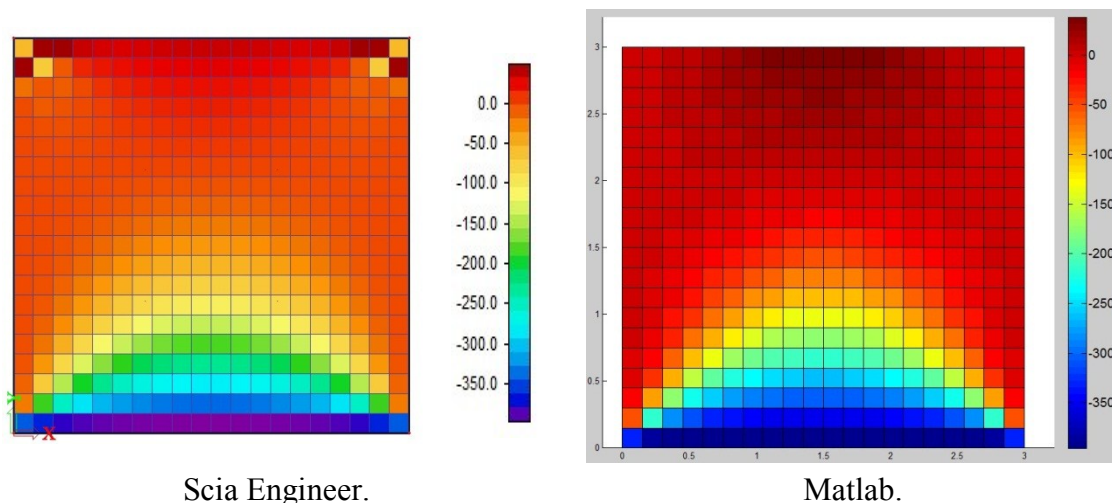
Obr. 31: Průběh napětí  $\sigma_x$  [kPa] v Scia Engineer.

### 5.3.2 Porovnání výsledků se Scia Engineer

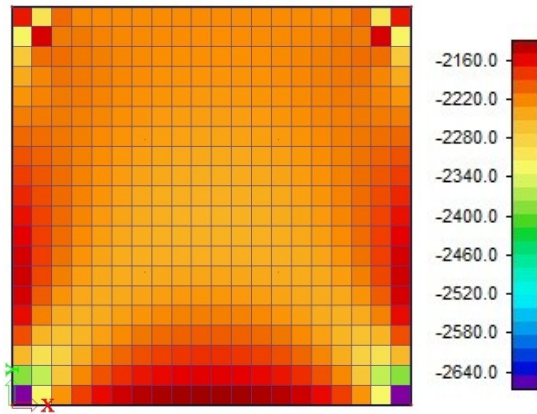
Jak bylo uvedeno v předešlé kapitole, hustota sítě velmi ovlivňuje rychlost výpočtu, proto byla pro srovnání výsledků je zvolena hustota sítě dle varianty 30b o velikosti prvku 0,15 m. Kontrola správnosti řešení je opět provedena čtyřuzlovým prvkem. Výsledky jsou porovnávány v programu Scia Engineer. Srovnání je řešeno na čtvercové stěně shodné s obr 28. Síť prvků je v obou programech totožná. Materiál je zvolen beton pevnosti C25/30. Označení betonu vyjadřuje jeho pevnostní charakteristiky, konkrétně charakteristická válcová pevnost v tlaku tj.  $f_{ck,cyl} = 25$  MPa a charakteristická krychelná pevnost v tlaku  $f_{ck,cube} = 30$  MPa. Pevnost betonu v tahu je mnohem menší u výše uvedeného betonu je  $f_{ctm} = 2,6$  MPa.

Průběhy hodnoty sledovaných napětí (Obr. 32 až 37) vyšly v obou programech téměř totožně. Hodnoty se lišily pouze v extrémech, které vznikly ve Scia Engineer v prvcích pod silami v horních rozích konstrukce. Směry hlavních napětí (Obr. 37) se liší pouze v poměrech (nikoli v reálných hodnotách), jejich směry jsou totožné. Poměry velikostí šipek se liší z důvodu vykreslení v Matlabu, kvůli otočení funkce *quiver*, aby bylo zobrazeno tlakové a tahové napětí. Hodnota napětí (Obr. 35, 36) je v Matlabu i Scia Engineer totožná. Ukazují pouze směry nikoli hodnoty.

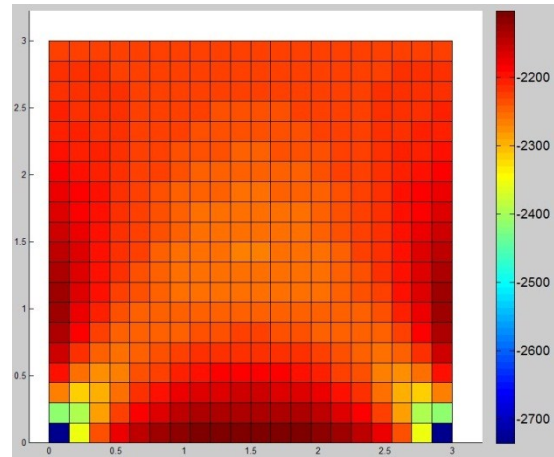
Také je provedena kontrole výsledků při řešení vlivu hustoty sítě na konstrukci. Na obrázku 31 je provedena kontrola v programu Scia Engineer. Výsledky vyšly téměř stejně. Pro kontrolu výsledků z příkladu 30b lze použít výstup z programu Scia Enginner (Obr. 32), řešená stěna v této kapitole má stejnou síť, zatížení a podpory.



Obr. 32: Průběh napětí  $\sigma_x$  [kPa].

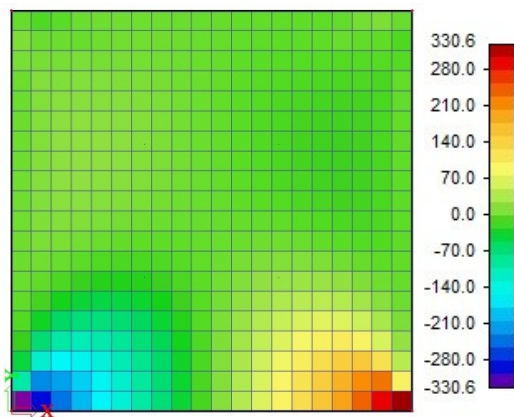


Scia Engineer.

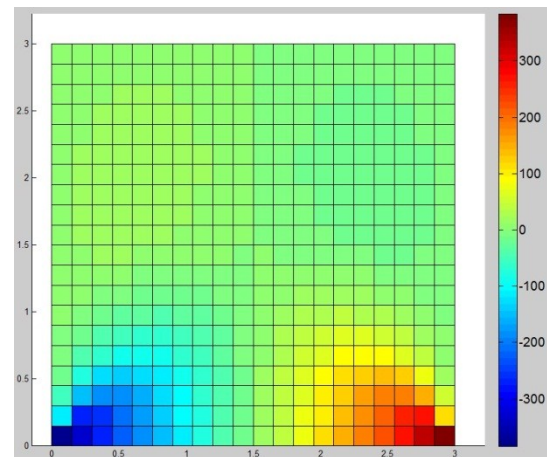


Matlab.

Obr. 33: Průběh napětí  $\sigma_y$  [kPa].

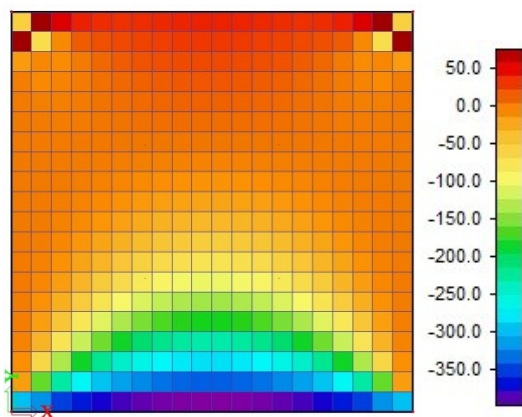


Scia Engineer.

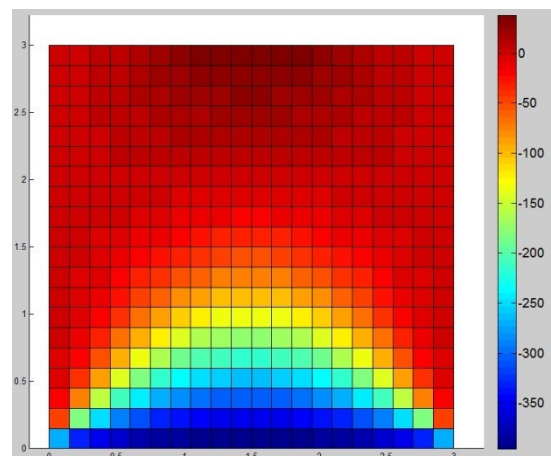


Matlab.

Obr. 34: Průběh napětí  $\tau_{xy}$  [kPa].



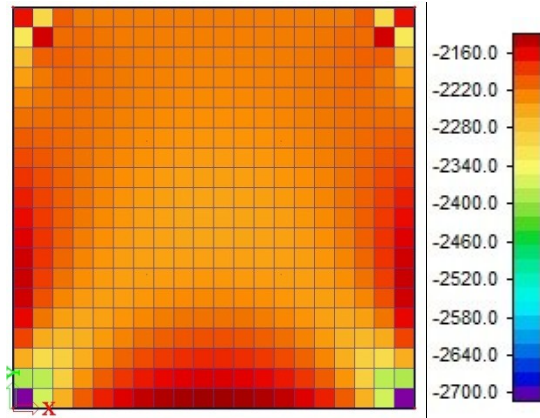
Scia Engineer.



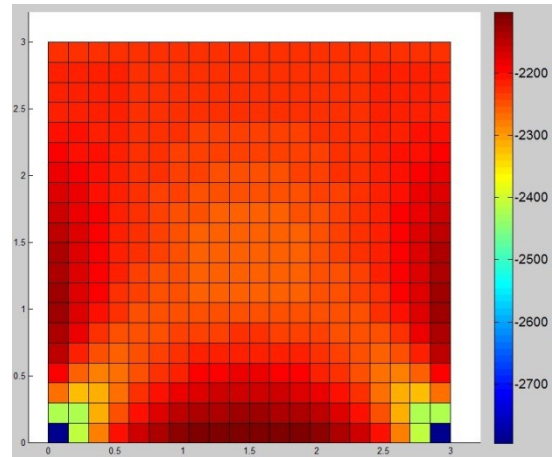
Matlab.

Obr. 35: Průběh hlavního napětí  $\sigma_1$  [kPa].



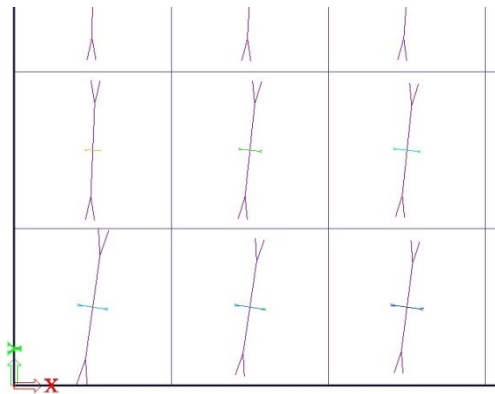


Scia Engineer.

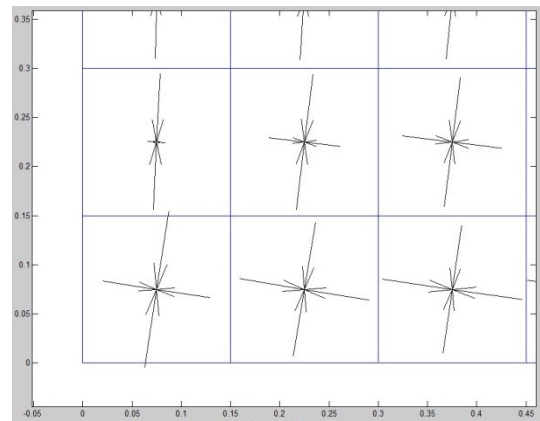


Matlab.

Obr. 36: Průběh hlavních napětí  $\sigma_2$  [kPa].



Scia Engineer.

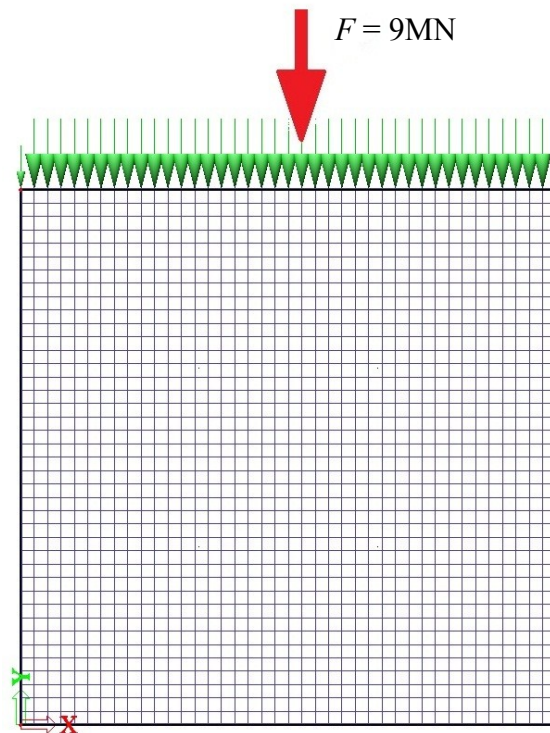


Matlab.

Obr. 37: Trajektorie hlavních napětí.

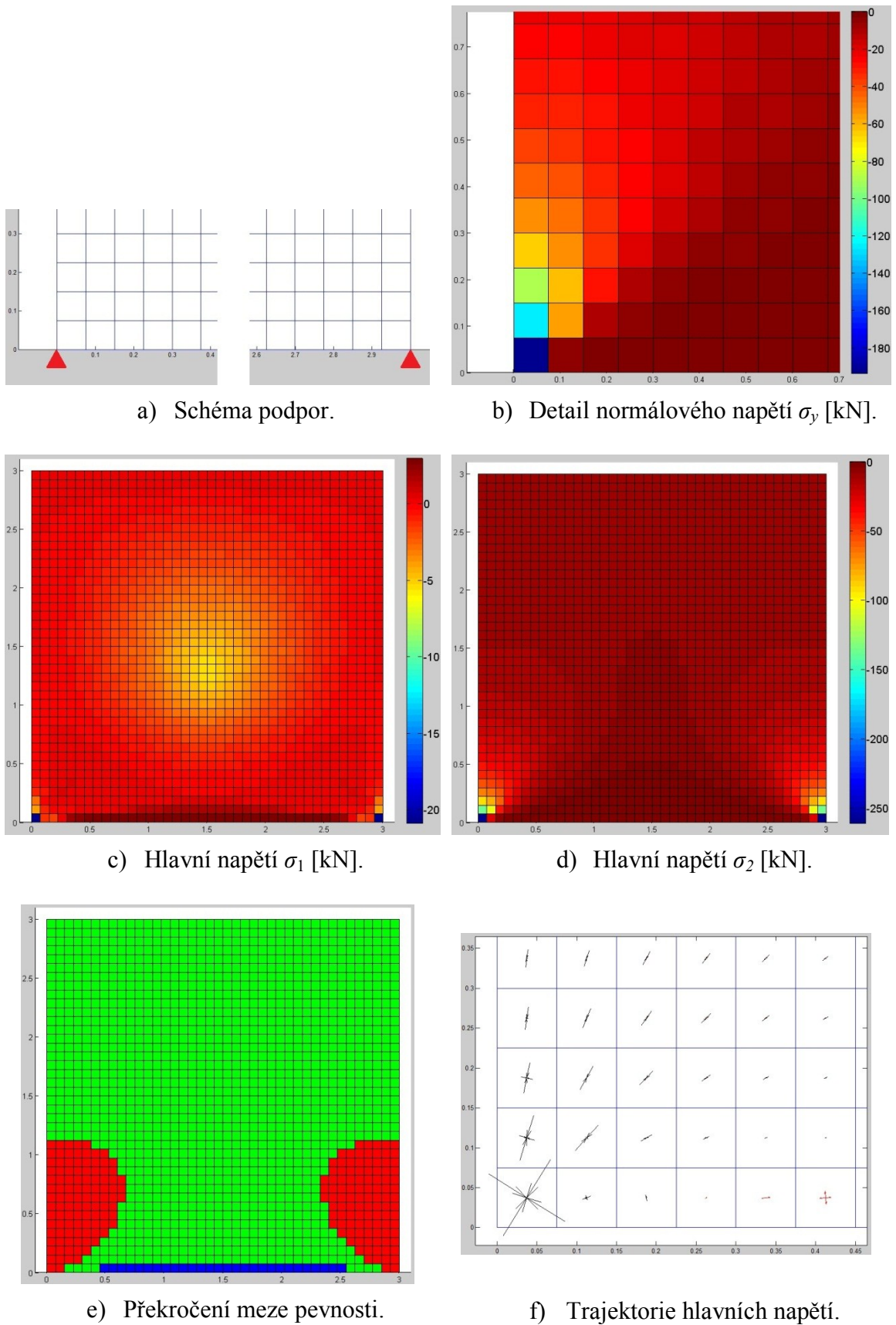
## 6 Řešené příklady

Po úspěšném ověření správnosti vytvořené aplikace na několika výše uvedených příkladech porovnaných se Scia Engineer a dosažením stejných výsledků v obou programech lze konstatovat, že naprogramovaná aplikace v Matlabu počítá správně. Tudíž je možno přistoupit k řešení vybraných příkladů. V bakalářské práci je vyšetřováno napětí v oblasti uložení podpor. Jsou zadány čtyři příklady stěn, které se vzájemně liší ve způsobu uložení. První varianta předpokládá uložení stěny jako kloubové podepření v obou rozích konstrukce. Podepření pouze v jednom bodě vyvolá extrémní napětí, které je nereálné. To se v praxi nepoužívá, z tohoto důvodu jsou postupně přidávány podpory (do uzlů), aby bylo rozložení účinků napětí na větší ploše. Jednotlivé příklady jsou řešeny v následujících podkapitolách. Je zvolena čtvercová stěna (Obr. 38) o velikosti hrany 3 metry. Velikost zatížení a hustota sítě je v řešených příkladech stejná. Stěny jsou rozděleny na 40 prvků v obou směrech a velikost jednoho prvku je 0,075 metru. Vzhledem k tomu, že jsou řešeny extrémy v oblastech podpor, jsou výsledné grafy  $\sigma_y$  pro zřetelnost zvětšeny.



Obr. 38: Schéma konstrukce bez podpor, velikost hrany 3 metry, tloušťka 0,3 metru.

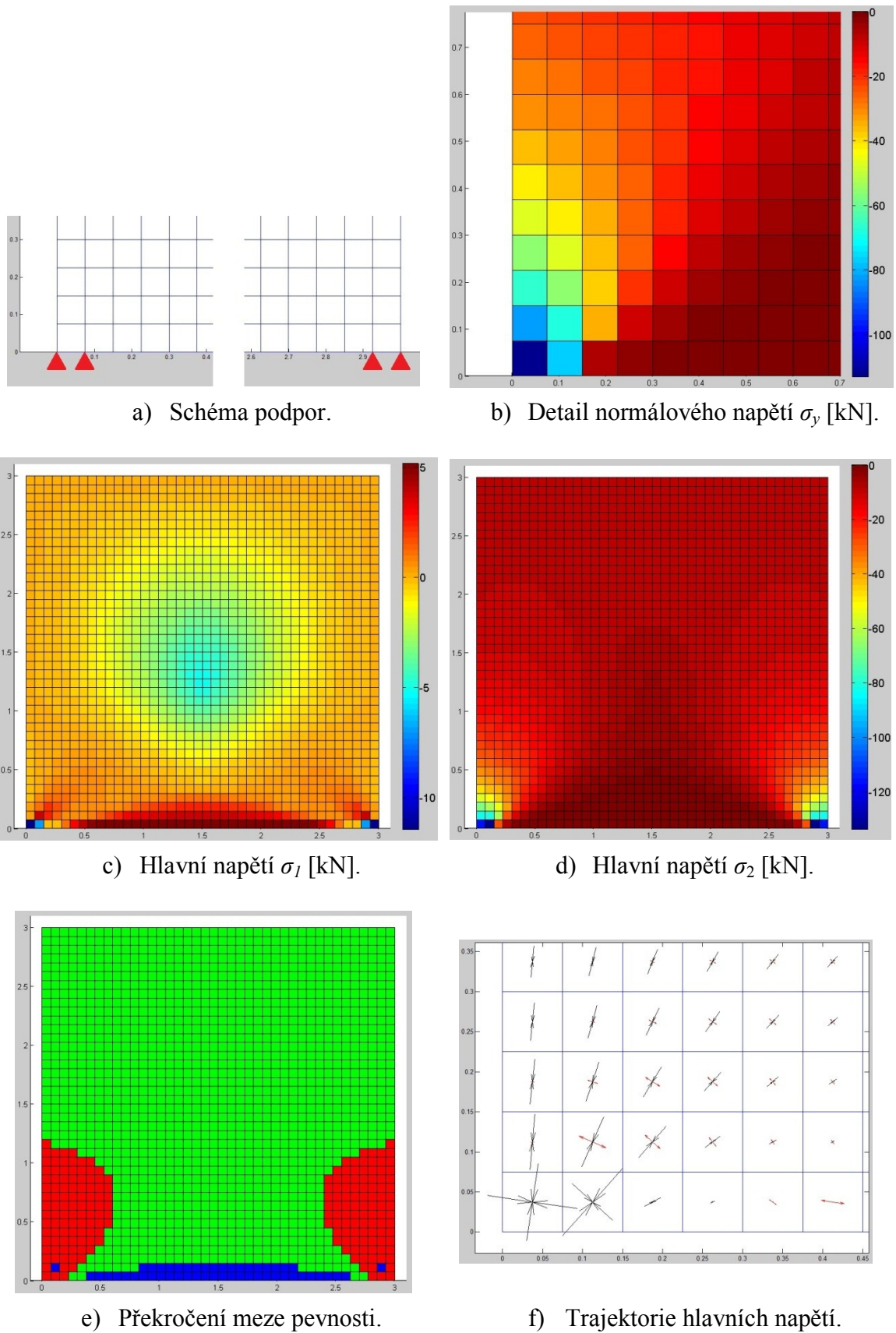
## 6.1 Stěna podepřená bodově



Obr. 39: Bodové podepření stěny - Matlab.

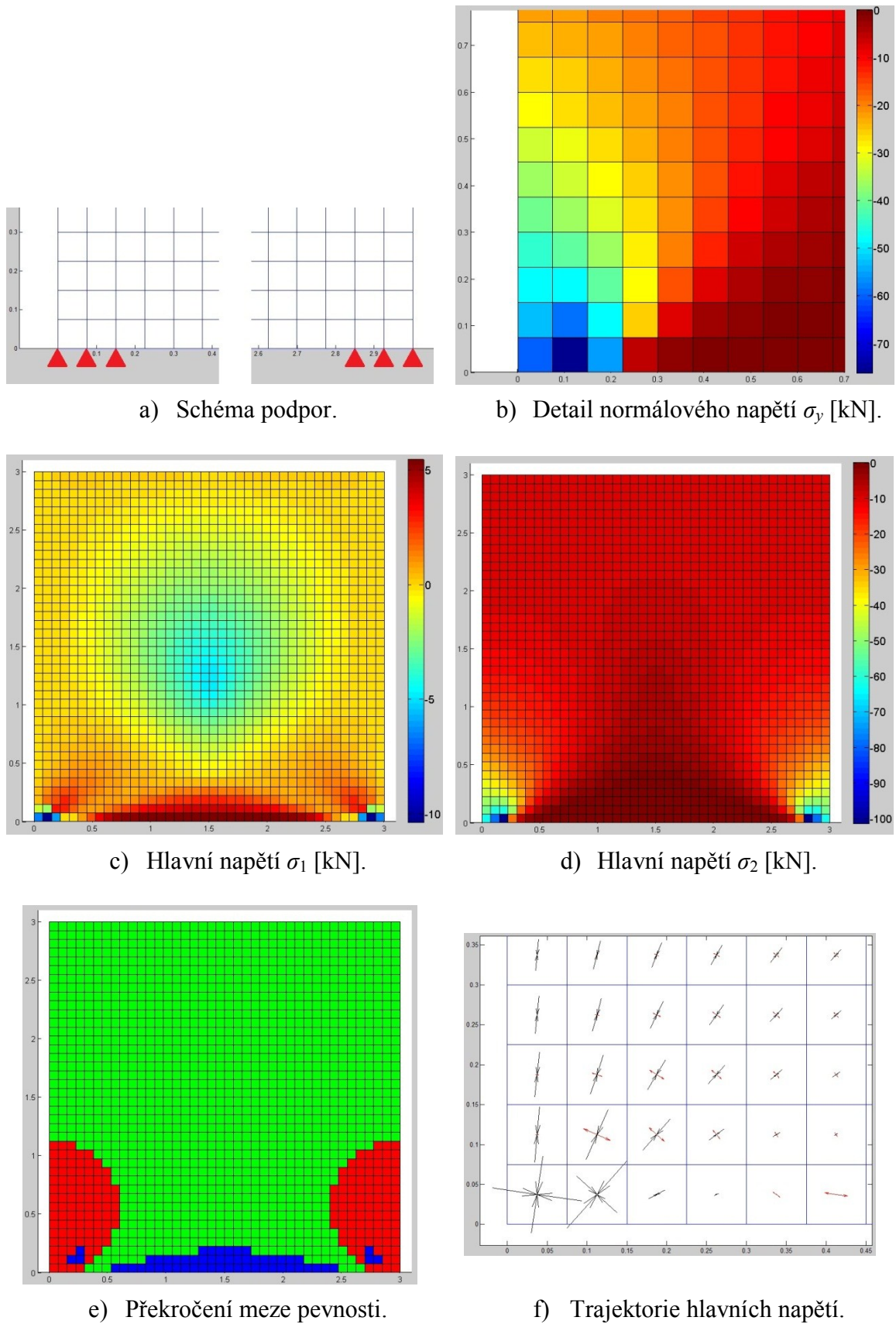


## 6.2 Stěna podepřená ve dvou uzlech



Obr. 40: Stěna podepřená ve dvou uzlech - Matlab.

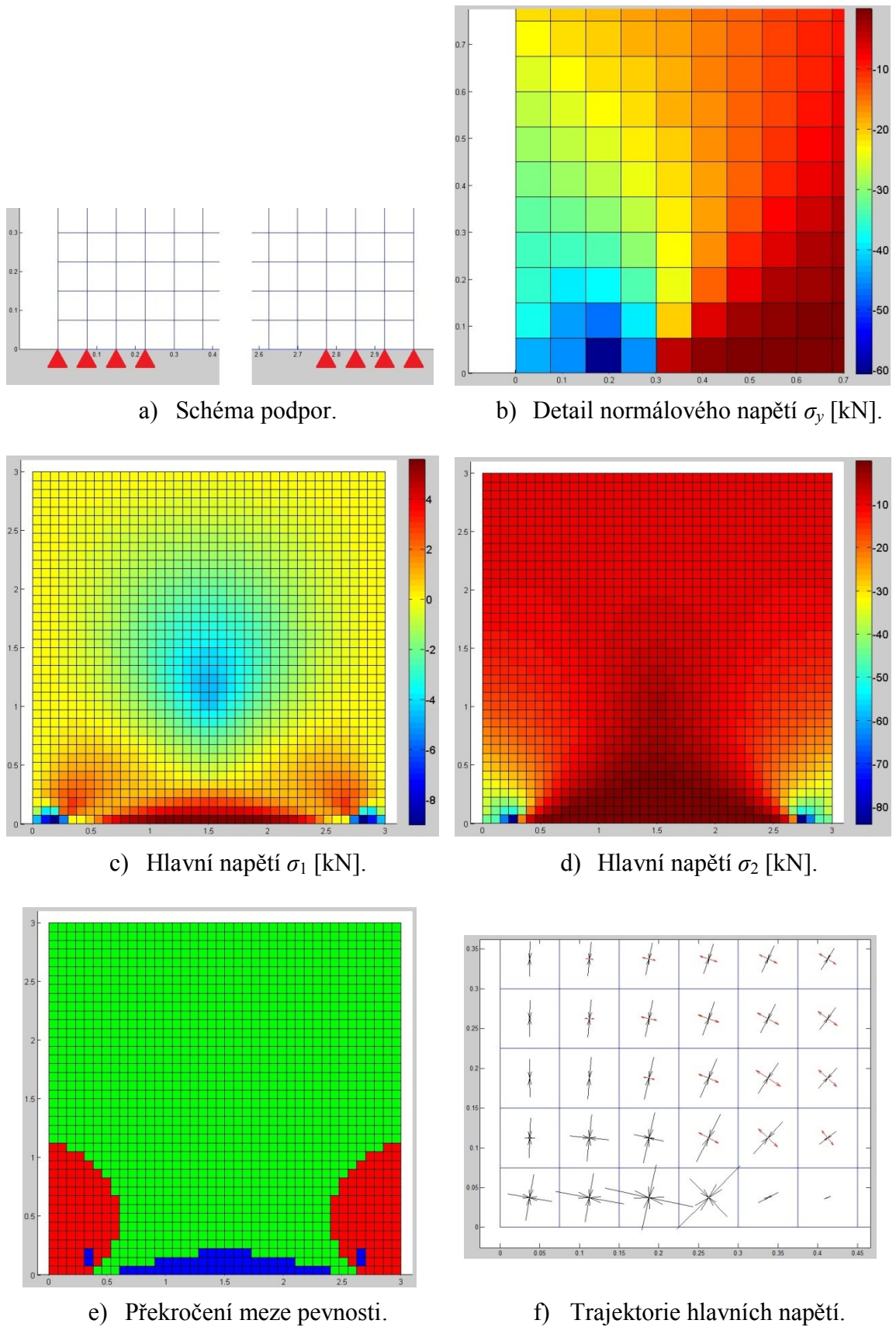
### 6.3 Stěna podepřená ve třech uzlech



Obr. 41: Stěna podepřená ve třech uzlech - Matlab.



## 6.4 Stěna podepřená ve čtyřech uzlech



Obr. 42: Stěna podepřená ve čtyřech uzlech - Matlab.

## 6.5 Shrnutí výsledků u výše řešených stěn

<b>Podepření stěny: →</b>	<b>Bodově: (Obr. 39)</b>	<b>Dva uzly: (Obr. 40)</b>	<b>Tři uzly: (Obr. 41)</b>	<b>Čtyři uzly: (Obr. 42)</b>
<b>Výsledné napětí [MPa]: ↓</b>				
Normálové napětí $\sigma_x$ :	-88,24 2,96	-63,32 5,16	-52,17 5,46	-44,78 5,58
Normálové napětí $\sigma_y$ :	-193,56 0,07	-112,99 0,00	-76,17 0,00	-60,61 0,00
Smykové napětí $\tau_{xy}$ :	-107,88 107,88	-62,93 62,93	-47,57 47,57	-39,27 39,27
Hlavní napětí $\sigma_1$ :	-20,86 2,96	-11,44 5,16	-10,36 5,46	-8,99 5,58
Hlavní napětí $\sigma_2$ :	-260,98 0,02	-133,63 0,00	-101,31 0,00	-83,98 0,00
Překročení meze pevnosti:	14,63	15,25	15,25	14,88

Tab. 1: Výpis výsledků z výše řešených příkladů.

V podkapitole 6.1 je řešena stěna, která je podepřená pouze v obou dolních rozích konstrukce (Obr. 39a). Přenos účinků zatížení tak probíhá pouze bodově. Detail průběhu normálového napětí  $\sigma_y$  v oblasti podpor je na obrázku 39b, na kterém je zřetelné nereálné namáhání, které dosahuje hodnoty -193,56 MPa. Velikosti hlavních napětí  $\sigma_{1,2}$  (Obr. 39c, d) také dosahují nereálných hodnot, -20,86 MPa a -260,98 MPa. Postupným přidáváním podpor do uzlů dochází k přenosu účinků napětí na větší ploše a tím snižování napětí (Obr. 40b, 41b, 42b) v oblasti uložení konstrukce:

- Dvě podpory – 0,075 metru (Obr. 40a)
- Tři podpory – 0,150 metru (Obr. 41a)
- Čtyři podpory – 0,225 metru (Obr. 42a)

Pro lepší zřetelnost jsou výsledky všech napětí u jednotlivých příkladů stěn vypsány v tabulce 1. Při rozložení napětí na úseku 0,225 metru (použití čtyř podpor), je záporné hlavní napětí  $\sigma_2$  o více než 3x menší a jeho pokles činí 67,82 % než při bodovém uložení konstrukce. Pokles normálového napětí  $\sigma_y$  je 68,69 %. Zatímco rozdíl v překročení meze pevnosti materiálu prvků je pouhých 0,25 %.

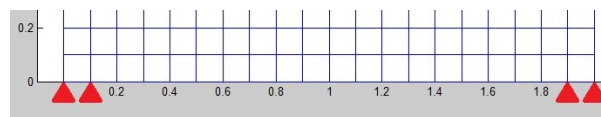
U rozložení podpor do více uzlů je rozdíl v poklesu napětí mnohem menší než při uložení stěny pouze v rozích konstrukce. Pokles záporného hlavního napětí  $\sigma_2$  je u stěny podepřené čtyřmi podporami jen 16,85 % oproti stěně podepřené ve třech uzlech.

Oblasti s překročením meze pevnosti materiálu je ve všech případech skoro stejné. Proto je jednoznačné, že přenos účinku zatížení na větším úseku (v poměru velikosti stěny je to malý úsek) má velký vliv na výpočet a blíží se k reálným hodnotám. V praxi nejsou podpory situovány do jednoho bodu, jsou rozloženy na větší ploše.

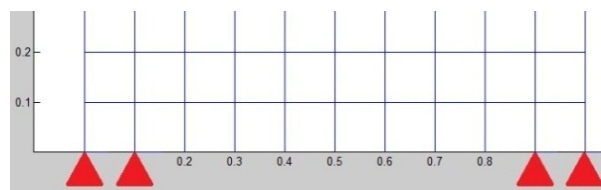
Hodnoty napětí se zvýšily pouze v tahové oblasti (Obr. 39e, 40e, 41e, 42e). V uvedených grafech jsou překročení meze pevnosti v tahu zobrazeny modrou barvou. Při použití dvou, tří nebo čtyř podpor v uzlech hodnota napětí zůstává téměř stejná.

## 6.6 Trajektorie hlavních napětí u různých typů stěn

Jsou vybrány tři typy stěn, u kterých je řešena velikost a směr jejich hlavních napětí. Pro lepší přehlednost výsledků jsou trajektorie hlavních napětí zobrazeny jednotlivě. Stěny jsou podepřeny v prvních dvou uzlech na každé straně konstrukce (Obr. 43).



a) Stěna s délkou hrany 2 metry.



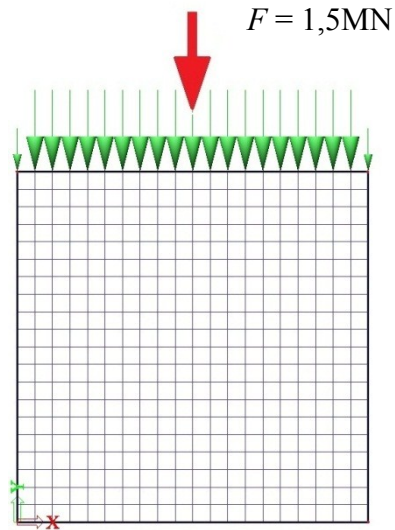
b) Stěna s délkou hrany 1 metr.

Obr. 43: Schéma podepření stěn v níže uvedených příkladech.

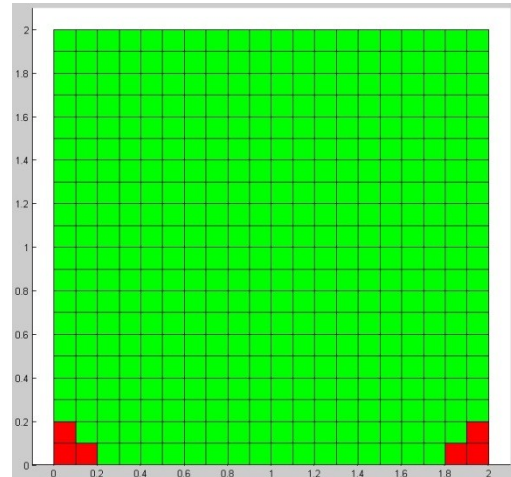
Je zvoleno celkové zatížení  $F = 1,5 \text{ MN}$ , které je přepočteno pro každou síť (Obr. 44, 49, 54). Tloušťka všech konstrukcí je 0,2 metru a velikost prvků sítě je 0,1 x 0,1 metru. Materiál je zvolen beton třídy C25/30 jako ve výše uvedených příkladech.

## 6.6.1 Čtvercová stěna $b = h = 2$ m

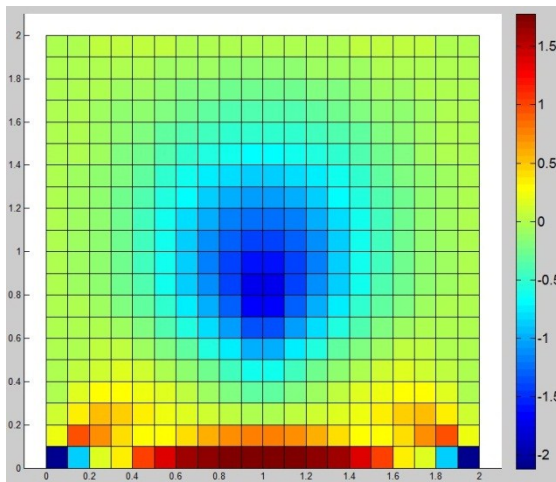
U této varianty stěny byla zvolena hrana velikosti 2 metry. Uložení stěny je v prvních dvou uzlech (Obr. 43a).



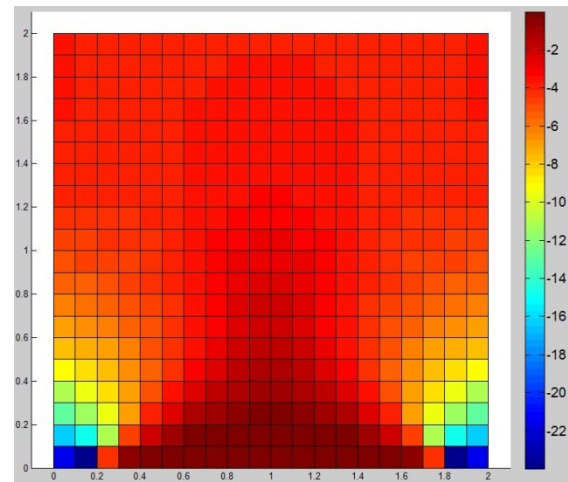
Obr. 44: Schéma konstrukce.



Obr. 45: Porušení meze pevnosti.



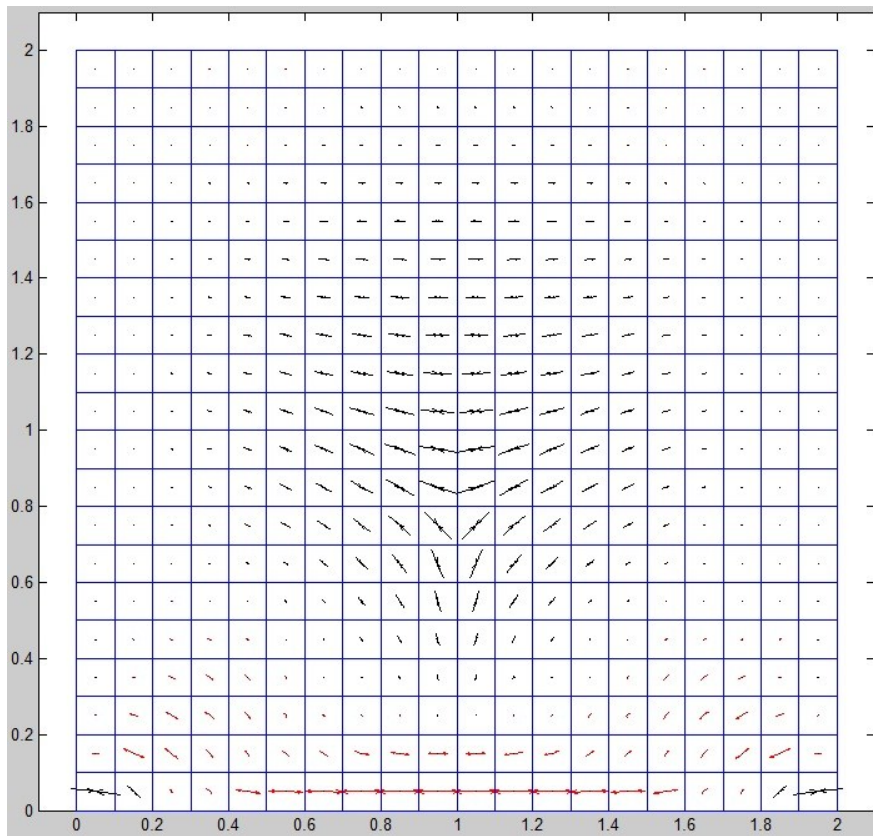
a) Hlavní napětí  $\sigma_1$ .



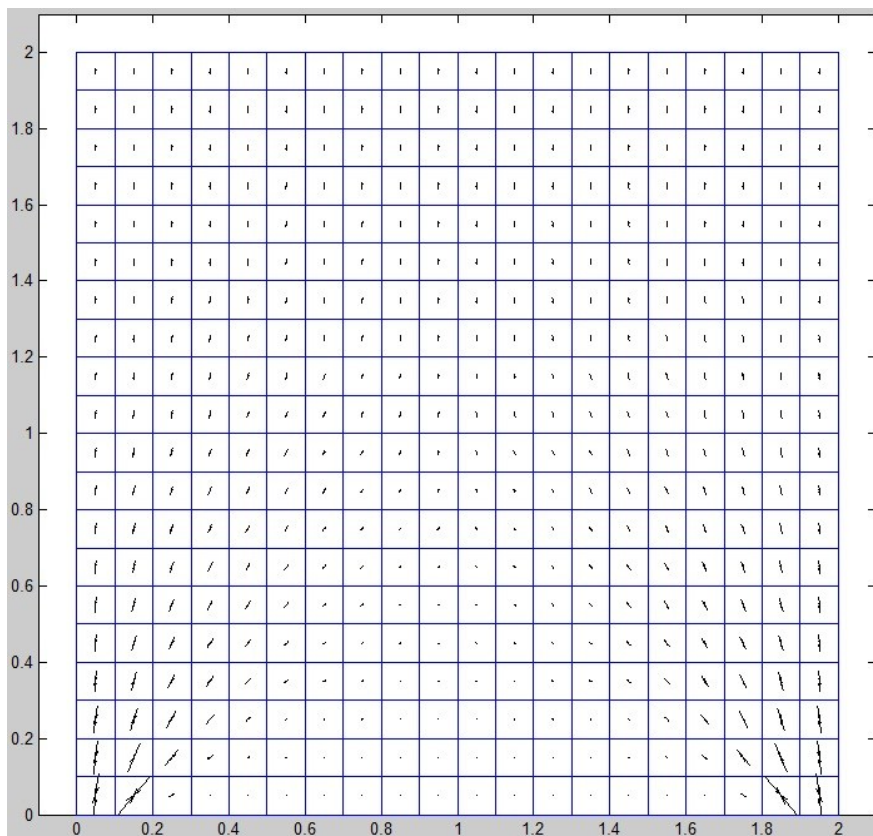
b) Hlavní napětí  $\sigma_2$ .

Obr. 46: Průběh hlavních napětí [MPa].





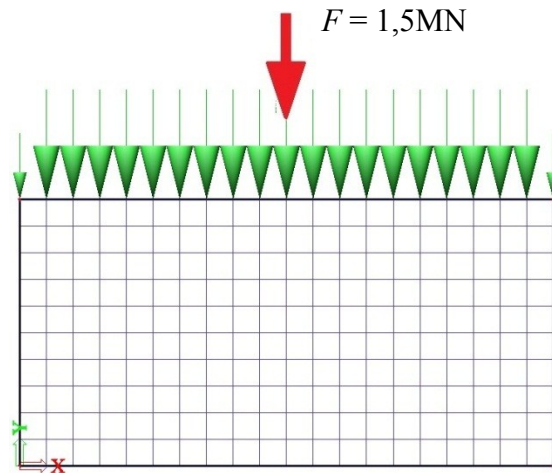
Obr. 47: Trajektorie hlavního napětí  $\sigma_1$  u čtvercové stěny.



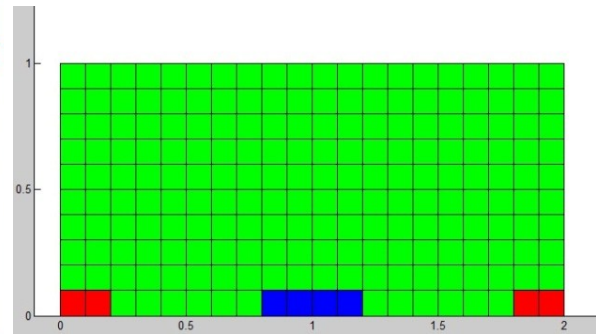
Obr. 48: Trajektorie hlavního napětí  $\sigma_2$  u čtvercové stěny.

## 6.6.2 Obdélníková stěna $b = 2 \text{ m}$ , $h = 1 \text{ m}$

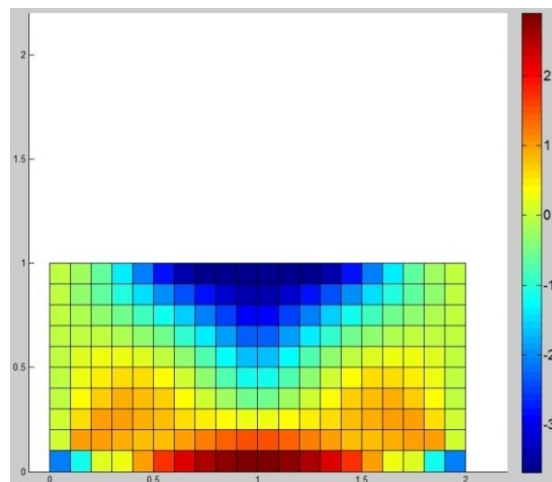
U této varianty stěny byla zvolena délka stěny 2 metry a její výška 1 metr. Uložení stěny je v prvních dvou uzlech (Obr. 43a).



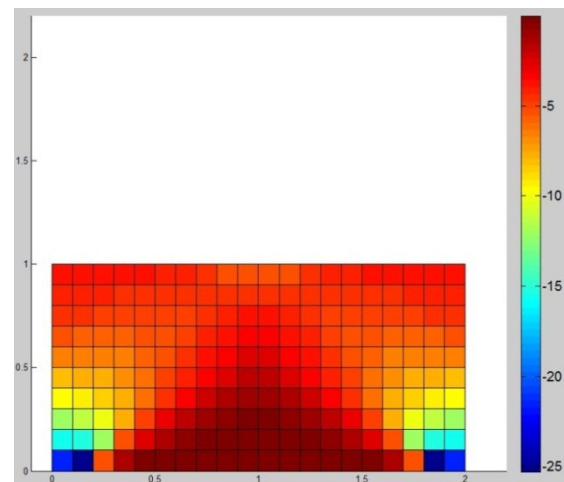
Obr. 49: Schéma konstrukce.



Obr. 50: Porušení meze pevnosti.

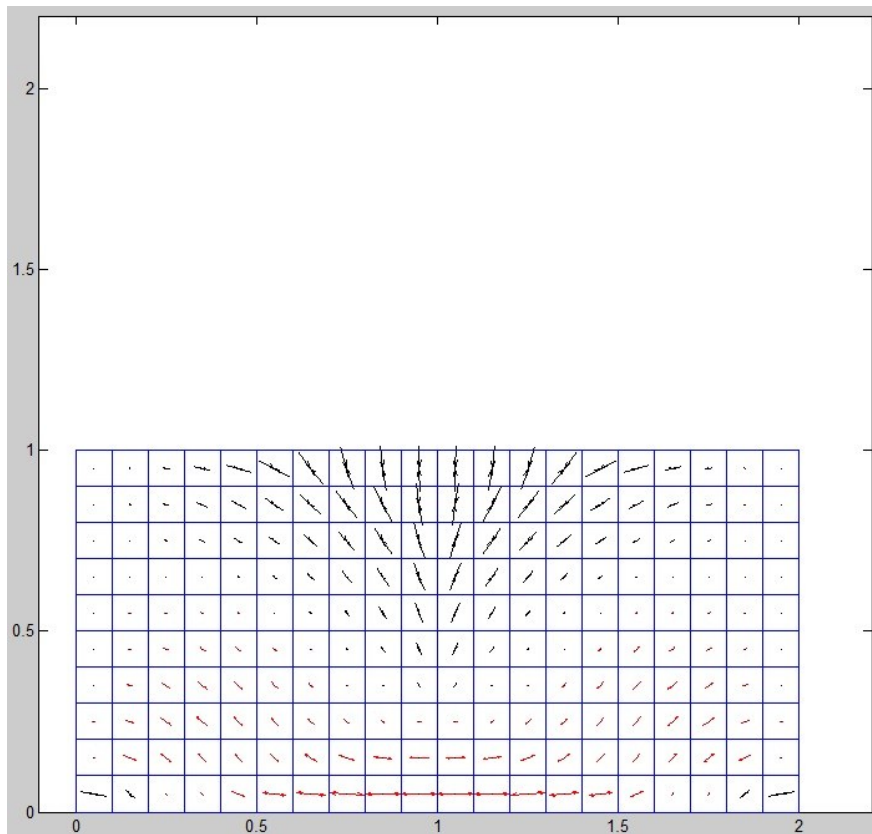


a) Hlavní napětí  $\sigma_1$ .

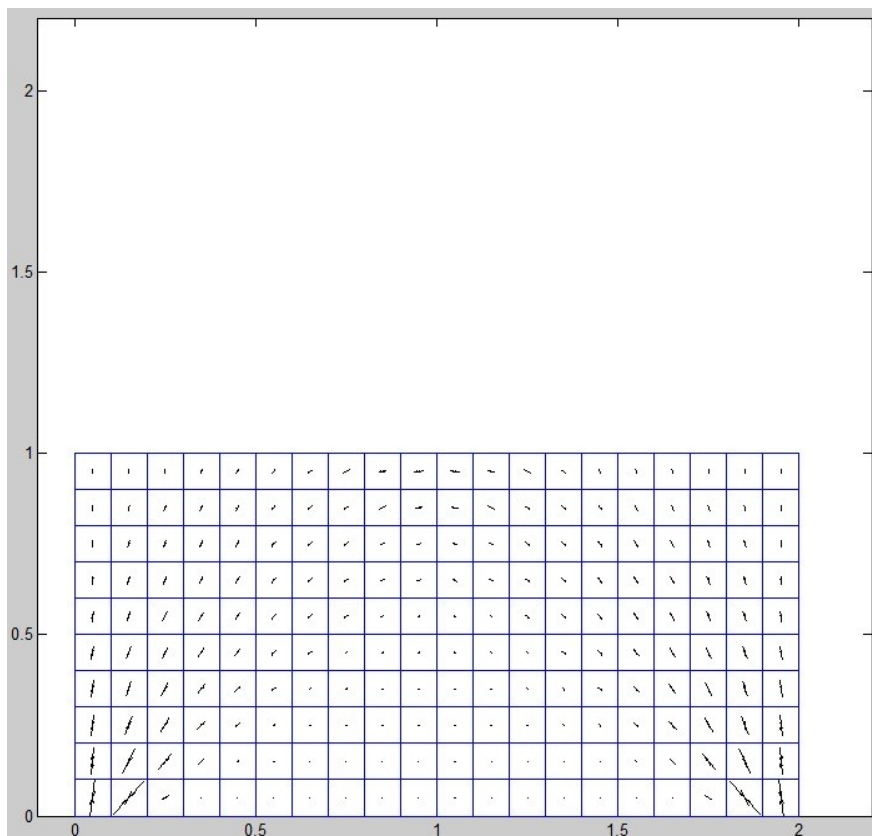


b) Hlavní napětí  $\sigma_2$ .

Obr. 51: Průběh hlavních napětí [MPa].



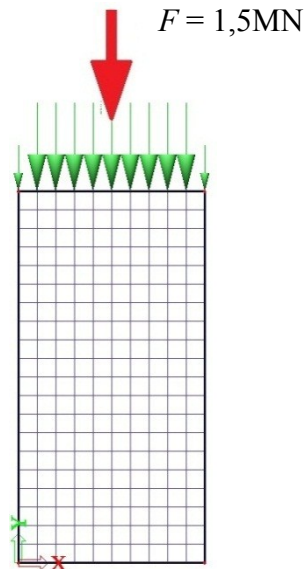
Obr. 52: Trajektorie hlavního napětí  $\sigma_1$  u obdélníkové stěny  $b > h$ .



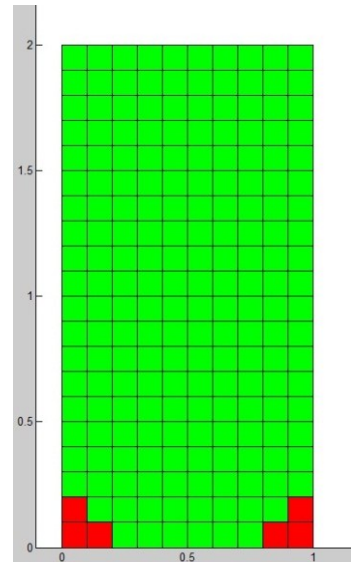
Obr. 53: Trajektorie hlavního napětí  $\sigma_2$  u obdélníkové stěny  $b > h$ .

### 6.6.3 Obdélníková stěna $b = 1 \text{ m}$ , $h = 2 \text{ m}$

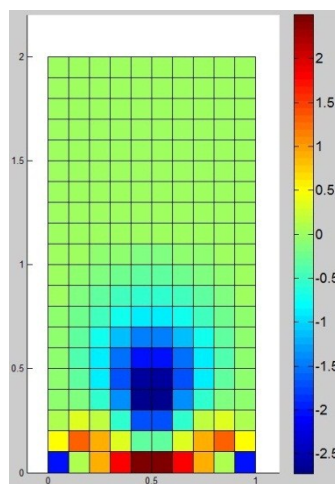
U této varianty stěny byla zvolena délka stěny 1 metr a její výška 2 metry. Uložení stěny je v prvních dvou uzlech (Obr. 43a).



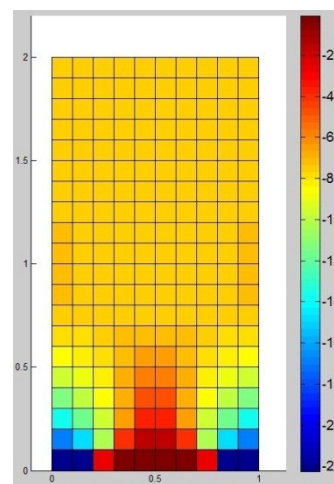
Obr. 54: Schéma konstrukce.



Obr. 55: Porušení meze pevnosti.



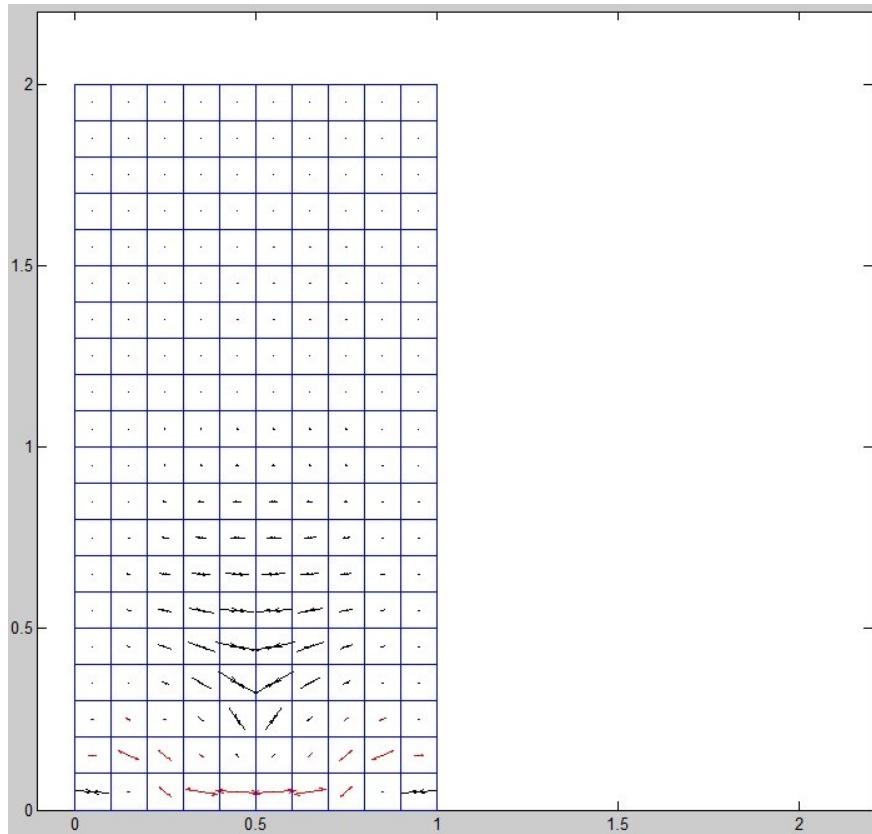
a) Hlavní napětí  $\sigma_1$ .



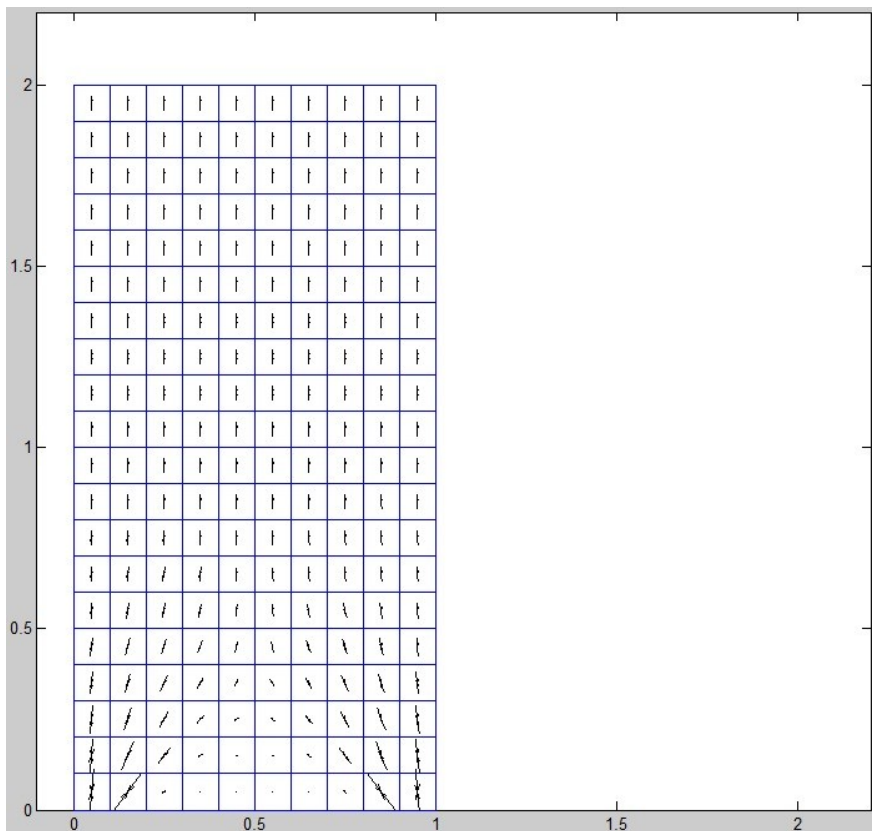
b) Hlavní napětí  $\sigma_2$ .

Obr. 56: Průběh hlavních napětí [MPa].





Obr. 57: Trajektorie hlavního napětí  $\sigma_1$  u obdélníkové stěny  $b < h$ .



Obr. 58: Trajektorie hlavního napětí  $\sigma_2$  u obdélníkové stěny  $b < h$ .

## 6.6.4 Vyhodnocení výsledků u různých typů stěn

<b>Podpření stěny: →</b>	<b>Bodově: (Obr. 39)</b>	<b>Dva uzly: (Obr. 40)</b>	<b>Tři uzly: (Obr. 41)</b>	<b>Čtyři uzly: (Obr. 42)</b>
<b>Výsledné napětí [MPa]: ↓</b>				
Normálové napětí $\sigma_x$ :	-10,35 1,78	-11,96 2,89	-7,90 2,49	-10,35 1,78
Normálové napětí $\sigma_y$ :	-21,36 0,00	-21,08 -0,02	-21,80 -0,08	-21,36 0,00
Smykové napětí $\tau_{xy}$ :	-11,38 11,38	-11,97 11,97	-10,71 10,71	-11,38 11,38
Hlavní napětí $\sigma_1$ :	-2,12 1,78	-3,68 2,90	-2,72 2,50	-2,12 1,78
Hlavní napětí $\sigma_2$ :	-23,98 0,00	-25,28 -0,02	-22,24 -0,08	-23,98 0,00
Překročení meze pevnosti:	1,50	4	3	1,50

Tab. 2: Výpis výsledků z výše řešených příkladů.

Výsledky napětí jsou uvedeny v tabulce 2. Největší rozdíly vznikly u normálového napětí  $\sigma_x$  a u hlavního napětí  $\sigma_1$  ve stěně typu  $b < h$ .

Porušení meze pevnosti materiálu je dosaženo nejvíce v případě obdélníkové stěny  $b > h$ , kde oproti jiným typům stěn dochází k porušení tahem, což je v obrázku 50 zobrazeno modrou barvou.

Trajektorie hlavních napětí u čtvercové stěny (Obr. 47, 48) jsou velmi podobné jako u typu  $b < h$  (Obr. 57, 58). U stěny  $b > h$  (Obr. 49) je rozdíl v trajektoriích hlavních napětí znatelný, protože se svým chováním pomalu přibližuje k nosníku (Obr. 52, 53).

## 7 Závěr

Cílem bakalářské práce bylo naprogramovat program v Matlabu v jeho uživatelském prostředí GUI pro výpočet napětí a trajektorie hlavních napětí obecně zadané nosné stěny. Dále bylo cílem zjištění kdy a v jakých prvcích dojde k porušení na jejich mezi pevnosti. Stěny byly řešeny metodou konečných prvků. Pro výpočet stěn byl použit trojuzlový a čtyřuzlový stěnový prvek. Tyto prvky jsou odvozeny v bakalářské práci.

Aplikace je vytvořena pro zadání libovolné velikosti a tloušťky stěny. Uživatel si může zvolit, jak hustou síť potřebuje, zadat libovolnou velikost, zatížení a typ podepření konstrukce. Konstrukce může být podepřena po celé délce nebo libovolným počtem podpor, které jsou vkládány symetricky do levé a pravé strany stěny.

Získané výsledky jsou přehledně zobrazeny v grafech, které si uživatel může vybírat z rolovacího menu. V grafech je zahrnuta původní a zdeformovaná síť konstrukce, normálové, smykové a hlavní napětí. Dále v programu existuje možnost vykreslení trajektorie hlavních napětí a zobrazení prvků, kde byla překročena jejich mez pevnosti. Grafy lze zvětšovat pro jejich lepší přehlednost nebo mohou být jednoduše ukládány pro zachování výsledků.

Program dále obsahuje možnost vypsání výsledků, zjištění maximálních kladných a záporných hodnot napětí a jejich umístění v konstrukci. Aby byly výsledky zachovány pro další práci, lze exportovat výsledky napětí v jednotlivých prvcích do Excelu.

Správnost programu je ověřena na ukázkových příkladech v programu Scia Engineer. Poté je proveden výpočet několika příkladů, u kterých je řešeno napětí v oblasti jejich podpor. Tam je sledováno extrémní napětí v závislosti na uložení konstrukce. Rychlost a možnosti výpočtu závisí na parametrech počítače, ve kterých je program používán. Vytvořený programu může být ve stavební praxi využíván pro zjišťování napětí ve stěnové konstrukci. Hlavní výhodou vytvořeného programu je jednoduché a rychlé zadávání libovolných parametrů dle uživatele.

## SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Břetislav Teplý, Svatopluk Šmiřák. *Pružnost a plasticita II*, Brno, 2000.
- [2] Jiří Brožovský, Alois Materna. *Metoda konečných prvků ve stavební mechanice*, ISBN, 2012
- [3] Václav Blažek, Jiří muk. Jiří Šejnoha, *Metoda konečných prvků*, Vydavatelství ČVUT Praha 1, 1973
- [4] Jiří Brožovský, Alois Materna. *Základy matematické teorie a pružnosti* , ISBN, 2012
- [5] Jindřich Petruška. *Počítačové metody mechaniky II*, VUT Brno  
Na webové adrese:  
<http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/PocitacoveMetodyII/PocitacovaMechanikaII.pdf>
- [6] František Dušek, Daniel Honc, *MATLAB a SIMULINK: Úvod do používání 3*. Univerzita Pardubice, 2005
- [7] Martin Krejsa. *Algoritmizace inženýrských výpočtů*, Ostrava 2011
- [8] Břetislav Teplý. *Metoda konečných prvků*, VUT Brno, 1981
- [9] <http://www.mathworks.com>
- [10] Blanka Heringová, Petr Hora. *Matlab Díl I. – Práce s programem*, Praha, 1995
- [11] Blanka Heringová, Petr Hora. *Matlab Díl II. – Popis funkcí*, Praha, 1995
- [12] Svatopluk Šmiřák. *Pružnost a plasticita I*, Brno, 1995.

## SEZNAM OBRÁZKŮ

1	Působící zatížení na nosnou stěnu [1].	2
2	Ukázka nosné stěny v praxi.	2
3	Působící zatížení na desku [1].	3
4	Použití desky u základu.	3
5	Zakřivená střednicová plocha u skořepiny [1].	3
6	Příklad skořepiny v praxi.	3
7	Lineární trojúhelník, šest neznámých uzlových parametrů deformací [4].	11
8	Trojúhelníkový prvek z programu matlab.	13
9	Čtyřuzlový prvek z programu matlab.	13
10	Uživatelské rozhraní GUIDE.	19
11	Nastavení jednotlivých ovládacích prvků ( <i>Property Inspector</i> ).	20
12	Položky v rolovacím menu.	21
13	Použití rolovacího menu a přepínače.	21
14	Grafické rozložení objektů v rozpracovaném programu pro výpočet stěn.	22
15	Hotový program, řešený v GUI.	22
16	Volba délky a výšky stěny	23
17	Volba podepření stěny	23
18	Typ sítě trojúhelníkového prvku	23
19	Volba jednotek napětí	24
20	Druhé okno v programu (Výsledky).	24
21	Schéma zatížení v Matlabu (Vykreslení z Scia Engineer).	26
22	Ukázka zdeformované konstrukce ve zvětšeném měřítku.	27
23	Vykreslení napětí pomocí funkce <i>Contourf</i> .	27
24	Vykreslení napětí pomocí funkce <i>Contourf</i> .	27
25	Vykreslení kladného napětí.	28
26	Vykreslení kladného napětí.	28
27	Ukázka překročení meze pevnosti prvků v konstrukci.	39
28	Schéma konstrukce, velikost hrany 3 metry, tloušťka 0,3m.	30
29	Průběh normálového napětí $\sigma_y$ z Matlabu (typy prvků).	31
30	Průběh napětí $\sigma_x$ [kPa] při různých hustotách sítě – Matlab.	32
31	Průběh napětí $\sigma_x$ [kPa] v Scia Engineer.	32

32	Průběh napětí $\sigma_x$ [kPa].	33
33	Průběh napětí $\sigma_y$ [kPa].	34
34	Průběh napětí $\tau_{xy}$ [kPa].	34
35	Průběh napětí $\sigma_1$ [kPa].	34
36	Průběh napětí $\sigma_2$ [kPa].	35
37	Trajektorie hlavních napětí.	35
38	Schéma konstrukce bez podpor, velikost hrany 3 metry, tloušťka 0,3 metru.	36
39	Bodové podepření stěny - Matlab.	37
40	Stěna podepřená ve dvou uzlech - Matlab.	38
41	Stěna podepřená ve třech uzlech - Matlab.	39
42	Stěna podepřená ve čtyřech uzlech - Matlab.	40
43	Schéma podepření stěn v níže uvedených příkladech.	42
44	Schéma konstrukce.	43
45	Porušení meze pevnosti.	43
46	Průběh hlavních napětí [MPa].	43
47	Trajektorie hlavního napětí $\sigma_1$ u čtvercové stěny	44
48	Trajektorie hlavního napětí $\sigma_2$ u čtvercové stěny	44
49	Schéma konstrukce.	45
50	Porušení meze pevnosti.	45
51	Průběh hlavních napětí [MPa].	45
52	Trajektorie hlavního napětí $\sigma_1$ u obdélníkové stěny $b > h$ .	46
53	Trajektorie hlavního napětí $\sigma_2$ u obdélníkové stěny $b > h$ .	46
54	Schéma konstrukce.	47
55	Porušení meze pevnosti.	47
56	Průběh hlavních napětí [MPa].	47
57	Trajektorie hlavního napětí $\sigma_1$ u obdélníkové stěny $b < h$ .	48
58	Trajektorie hlavního napětí $\sigma_2$ u obdélníkové stěny $b < h$ .	48

## SEZNAM TABULEK

1	Výpis výsledků z výše řešených příkladů.	41
2	Výpis výsledků z výše řešených příkladů.	49