VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Faktorizace kompletních grafů na housenky s průměrem 6 a třemi bohatými vrcholy

Factorizations of complete graphs into catepillars with diameter 6 and three rich vertices

2014 Tom Raiman

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Zadání bakalářské práce

Student: **Tom Raiman**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: Faktorizace kompletních grafů na housenky s průměrem 6 a třemi bohatými vrcholy
Factorizations of complete graphs into caterpillars with diameter 6 and three rich vertices

Zásady pro vypracování:

Housenky jsou speciální stromy, kde po odstranění vrcholů stupně jedna obdržíme cestu, které říkáme páteř housenky. Má-li páteř délku 4, pak hovoříme o housenkách s průměrem 6. Bohatými vrcholy nazýváme vrcholy stupně alespoň tři. Cílem práce je najít alespoň jednu nekonečnou třídu housenek s průměrem 6 a třemi bohatými vrcholy, která faktorizuje kompletní graf na sudém počtu vrcholů.

Tato práce je teoreticky zaměřena a může sloužit jako odrazový můstek k hlubšímu výzkumu v oblasti faktorizace a dekompozice grafů a má ambice navázat na řadu publikací v časopisech s IF.

Faktorizace kompletních grafů je jedno z klasických témat teorie grafů. Dlouhou dobu, zhruba do roku 2004, bylo o faktorizacích kompletních grafů na kostry známo jen velmi málo. Práce navazuje na výzkum faktorizací kompletních grafů housenkami s diametrem 5 (je známa úplná charakterizace) a na výsledky známé z bakalařské práce Heleny Nedošínské, kde zkoumá housenky s diametrem 6 a dvěma bohatými vrcholy.

Seznam doporučené odborné literatury:

- D. Frонček, P. Kovář, T. Kovářová, M. Kubesa: Factorizations of Complete Graphs into Caterpillars of Diameter 5, Discrete Mathematics, č. 310, 2010, str. 537-556

- P. Kovář: Necessary conditions for factorizations of complete graphs into spanning trees, 2011, submitted

- další články dle pokynů vedoucího diplomové práce

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Michael Kubesa, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2013

Datum odevzdání: 07.05.2014

Jiří Bouchala

doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry

VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ-TECHNICKÁ UNIVERZITA * Fakulta elektrotechniky a informatiky * OSTRAVA *

prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal. Řada definic a komentářů byla použita z publikací, které zpracovávaly velmi příbuzné téma. Tento postup je ovšem v matematice běžný, důkazy a formulace patřičných vět jsou však výhradně práce samostatná.

V Ostravě 2.5.2014

Tom Adman
....

Na tomto místě bych chtěl poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce panu RNDr. Michaelu Kubesovi, Ph.D. za odborné vedení, ochotu, trpělivost a rady, které mi velmi pomohly k napsání této bakalářské práce.

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je nalézt alespoň jednu nekonečnou, dosud neznámou, třídu housenek s průměrem 6, které faktorizují kompletní graf K_{2n}, kde n je liché. Zaměřili jsme se na housenky s přesně třemi vrcholy stupně alespoň 3. Housenky na $2n$ vrcholech, které zkoumáme, obsahují vrchol stupně n (to je největší stupeň vrcholu, který ještě umožňuje faktorizaci K_{2n}) a vrchol stupně 3. Součástí práce je citace známých výsledků pro faktorizace kompletních grafů na housenky s průměrem 4 a 5, dále citace nutných podmínek a postačujících podmínek pro faktorizaci kompletních grafů na kostry a jejich aplikace při charakterizaci vybrané nekonečné třídy housenek s průměrem 6.

Klíčová slova: faktorizace, kompletní graf, kostra, housenka

Abstract

The goal of this bachelor thesis is to find at least one unknown infinite class of caterpillars with a diameter 6 that factorizes a complete graph of order $2n$, where n is odd. We focus into caterpillars with exactly three vertices of degree at least 3. The caterpillars, which we investigate, contain a vertex of degree n (it is a maximum degree of vertex that allows factorization of K_{2n}) and a vertex of degree 3. A part of the thesis is a citation of known results for factorizations of complete graphs into caterpillars with diameters 4 and 5. Further included is a citation of necessary conditions and sufficient conditions for factorizations of complete graphs into spanning trees and their applications for characterization of chosen infinite class of caterpillars with a diameter 6.

Keywords: factorization, complete graph, spanning tree, caterpillar

Obsah

Seznam obrázků

1 Úvod

Faktorizace kompletních grafů na isomorfní podgrafy je klasické téma nejen teorie grafů, ale také tzv. teorie designů. Toto téma je intenzivně zkoumáno od šedesátých let minulého století, avšak o faktorizacích kompletních grafů se sudým počtem vrcholů na isomorfní kostry bylo ještě donedávna známo velmi málo. (Pouze se vědělo, že kompletní graf faktorizují hamiltonovská cesta, dvojhvězda. Dále existovala hypotéza, že každá symetrická kostra faktorizuje kompletní graf.) O nesymetrických kostrách nebylo známo nic. V letech 2004-2011 se podařilo týmu (Kovář, Kovářová, Kubesa) kolem prof. Frončka plně charakterizovat kostry s nejvýše čtyřmi nelistovými vrcholy, které faktorizují či nefaktorizují kompletní grafy se sudým počtem vrcholů. Tato práce přirozeně navazuje na předešlé výsledky a zabývá se faktorizacemi kompletních grafů na některé kostry s pěti nelistovými vrcholy.

2 Úvod do grafů

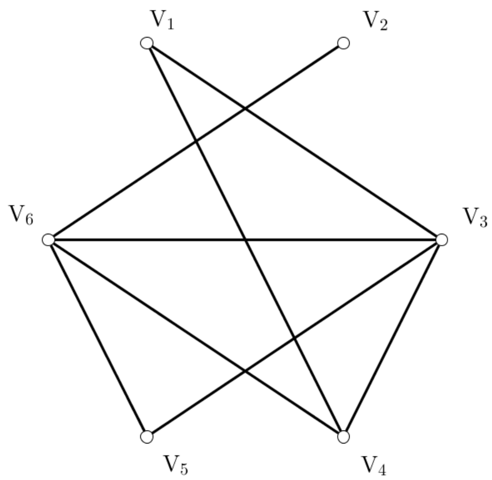
Abychom se mohli věnovat faktorizacím kompletních grafů na kostry, musíme nejdříve připomenout základní pojmy teorie grafů. Většina definic v této kapitole je převzata ze skript profesora Frončeka [4].

2.1 Graf

2.1. Definice *Graf* G (také jednoduchý graf nebo obyčejný graf) je uspořádaná dvojice V, E, kde V je neprázdná množina vrcholů a E je množina hran – množina dvouprvkových podmnožin množiny V.

Množině V grafu G říkáme *vrcholová množina* a značíme ji také $V(G)$, chceme-li zdůraznit, že jde o vrcholovou množinu grafu G. Množině E grafu G říkáme *hranová množina* a můžeme ji také značit $E(G)$, chceme-li zdůraznit, že jde o hranovou množinu grafu G. Graf G lze označit jako $G(V, E)$, případně $G = (V, E)$. Grafy lze zobrazovat takzvanými diagramy. Vrcholy grafu zobrazujeme pomocí bodů v rovině (většinou prázdnými kolečky) a hrany pomocí křivek. Každá taková křivka spojuje dva body, kterými zobrazujeme vrcholy. Hraně, určené dvěma vrcholy, říkáme *hrana incidentní* s těmito vrcholy. Vrcholy, které určují takovou hranu, označujeme jako *koncové vrcholy* hrany. Vrcholy, jenž jsou spojeny hranou, nazýváme vrcholy *sousední*, v opačném případě jde o vrcholy *nesousední* či *nezávislé.*

K označení hran používáme nejčastěji písmena e a f, vrcholy pak obvykle značíme písmeny $u, v, x, y, z, \ldots$. Hranu e incidentní s vrcholy u, v lze pak popsat buď jako $e = uv$ nebo jen uv. Ukázku máme na obr. 1



Obr. 1: Příklad grafu

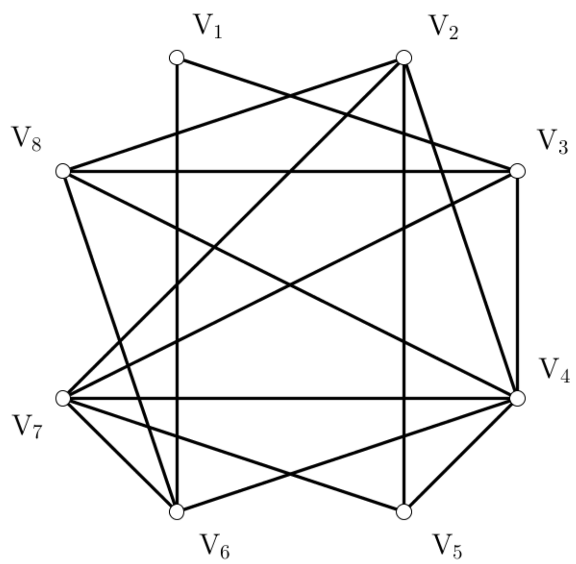
Lze se také setkat s obecnějšími definicemi grafů. U těchto grafů jsou povoleny *násobné hrany* (mezi dvěma vrcholy je více než jedna hrana) nebo *smyčky* (koncové vrcholy hrany jsou identické). Tomuto typu grafů říkáme *multigrafy*. Naopak grafy, ve kterých nejsou smyčky ani násobné hrany, říkáme *jednoduché grafy*. V této práci se budeme zabývat pouze jednoduchými grafy.

2.2 Stupeň vrcholu a stupňová posloupnost

2.2. Definice *Stupeň vrcholu* $v \in V(G)$ je počet hran, se kterými je vrchol v incidentní.

Stupeň vrcholu v grafu G značíme $\deg(v)$ nebo $\deg_G(v)$. Druhé označení použijeme, pokud chceme určit, ke kterému grafu se vrchol v vztahuje.

Nejmenší stupeň vrcholu grafu G značíme $\delta(G)$ a $\delta(G) = \min\{\deg(v) : v \in V(G)\}$. *Největší stupeň vrcholu* grafu G značíme $\Delta(G)$ a $\delta(G) = \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$. Viz obr. 2.



Obr. 2: Graf G, kde $\deg(v_1) = 2, \deg(v_2) = 4, \deg(v_3) = 4, \deg(v_4) = 6, \deg(v_5) = 3, \deg(v_6) = 4, \deg(v_7) = 5, \deg(v_8) = 4, \delta(G) = 2, \Delta(G) = 6$

2.3. Definice Nechť $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a $d_1 = \deg v_1 \geq d_2 = \deg v_2 \geq \cdots \geq d_n = \deg v_n$. Potom posloupnost $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ je *stupňová posloupnost* grafu G.

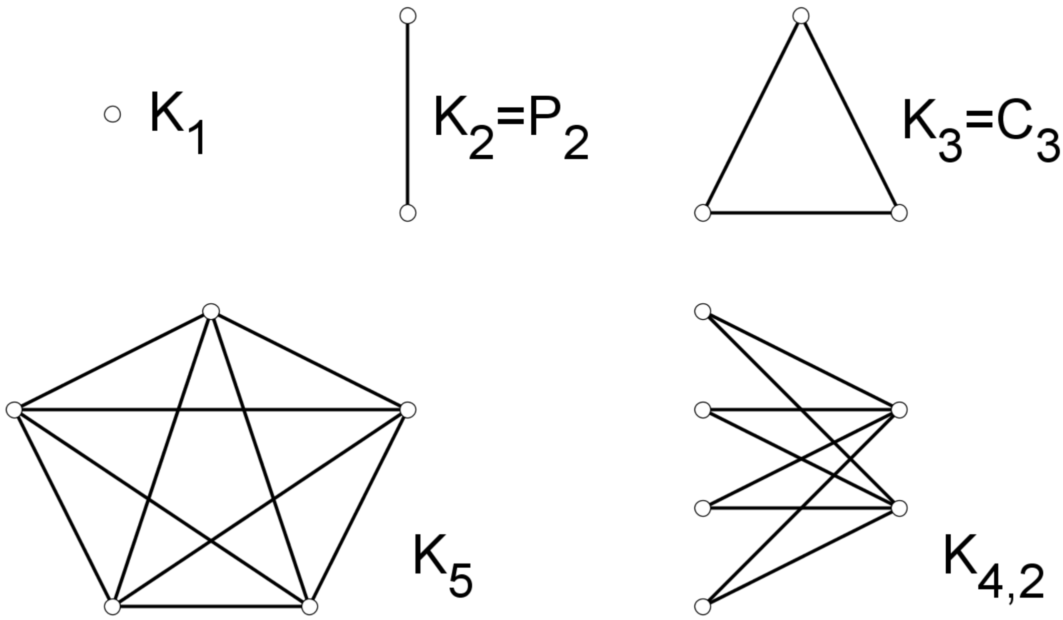
2.3 Základní třídy grafů

2.4. Definice Graf na n vrcholech, který obsahuje všech $\binom{n}{2}$ hran, se nazývá *kompletní graf* a značí se K_n.

2.5. Definice Mějme graf G na n vrcholech, $n \geq 3$, a $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Pokud $E(G) = \{v_i v_{i+1} : i = 1, 2, \dots, n-1\} \cup \{v_n v_1\}$, pak se graf G nazývá *cyklus* a značíme jej C_n. Číslo n je délka cyklu C_n.

2.6. Definice Mějme graf G na n vrcholech a $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Pokud $E(G) = \{v_i v_{i+1} : i = 1, 2, \dots, n-1\}$, pak se graf G nazývá *cesta* a značíme ji P_n. Číslo n je počet vrcholů cesty P_n. Počet hran $n-1$ cesty P_n je délka cesty.

2.7. Definice Graf, který má vrcholovou množinu rozdělenou na dvě neprázdné disjunktní podmnožiny M a N ($|M| = m$, $|N| = n$) a který obsahuje všech $m \cdot n$ hran uv tak, že $u \in M$ a $v \in N$, nazýváme *kompletním bipartitním grafem* a značíme jej $K_{m,n}$.



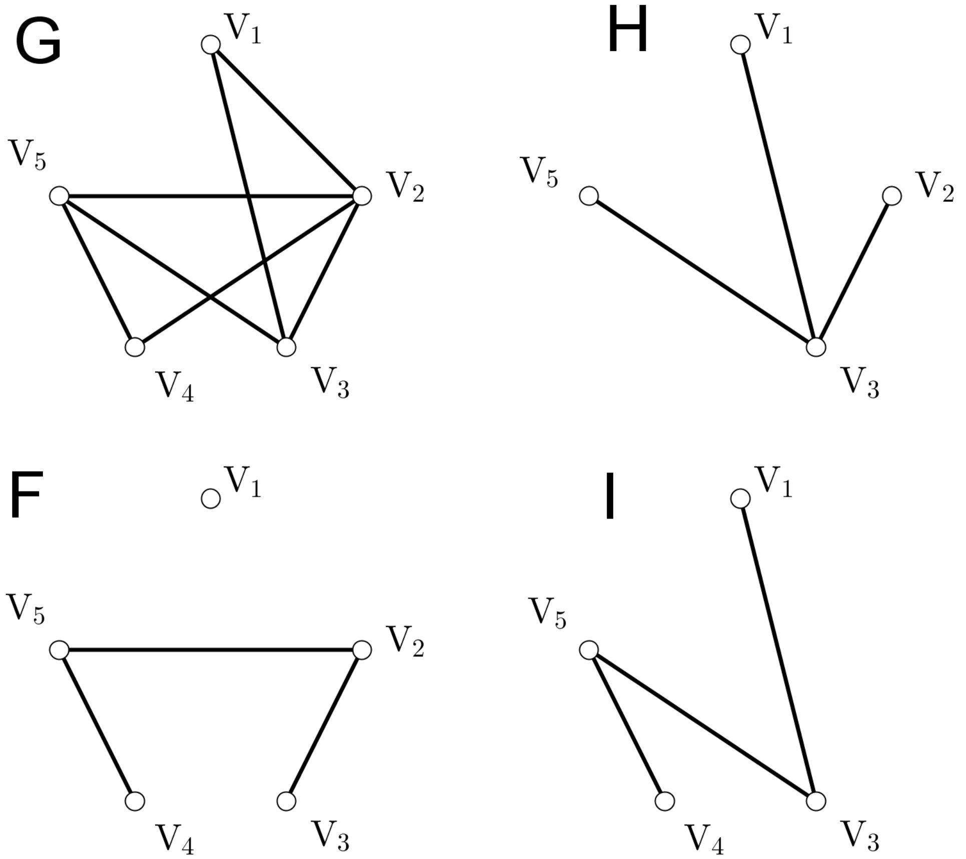
Obr. 3: Příklady tříd grafů

2.4 Podgrafy

2.8. Definice Graf H nazveme *podgrafem* grafu G, jestliže $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$.

2.9. Definice Podgraf F grafu G nazveme *faktorem* G, jestliže $V(F) = V(G)$.

V případě *vlastního podgrafu* H grafu G platí, že $V \neq V'$ nebo $E \neq E'$. Obsahuje-li podgraf H grafu G všechny hrany z $E(G)$, které jsou incidentní s vrcholy ve vrcholové množině $V(H) \subseteq V(G)$, pak hovoříme o *indukovaném podgrafu* grafu G. Ukázky vidíme na obr. 4.

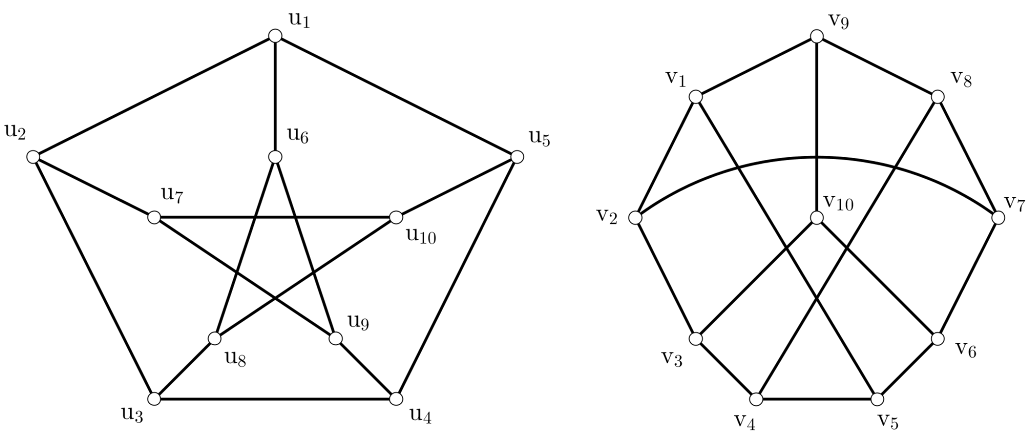


Obr. 4: Graf G a jeho: faktor F, podgraf H a indukovaný podgraf I

2.5 Isomorfismus

2.10. Definice *Isomorfismus* grafů G a H je bijektivní zobrazení $f : V(G) \to V(H)$, pro které platí, že každé dva vrcholy u, v v grafu G jsou sousední právě tehdy, když jsou sousední jejich obrazy $f(u), f(v)$ v grafu H. Isomorfní grafy značíme $G \cong H$.

Z definice je patrné, že hledané zobrazení zachovává strukturu grafu G. Odtud, je-li $G \cong H$, pak diagramy mohou vypadat jinak, ale struktura je stejná (viz obr. 5).

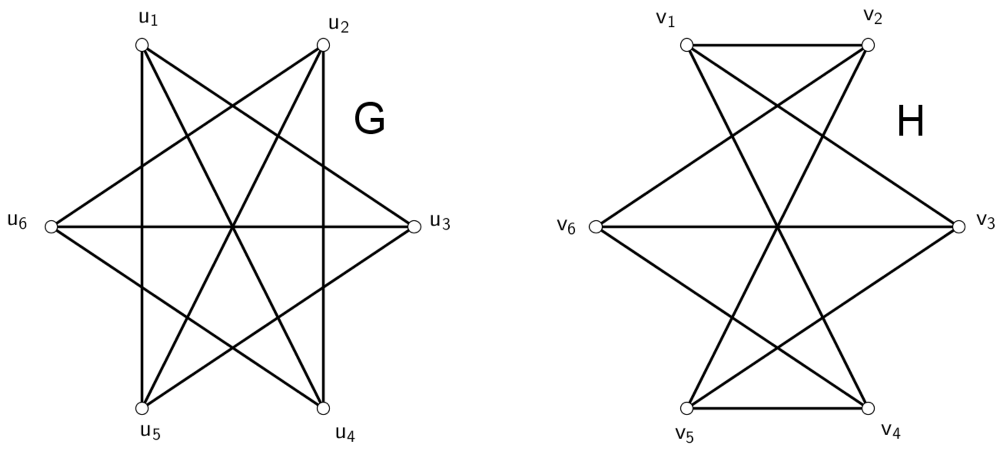


Obr. 5: Isomorfní grafy G a H s isomorfismem $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2, f(u_3) = v_3, f(u_4) = v_{10}, f(u_5) = v_9, f(u_6) = v_5, f(u_7) = v_7, f(u_8) = v_4, f(u_9) = v_6, f(u_{10}) = v_8$

Jsou-li $G \cong H$, pak:

- $|V(G)| = |V(H)|$.
- $|E(G)| = |E(H)|$.
- Mají stejné stupňové posloupnosti.
- Obsahuje-li G podgraf N, pak H obsahuje podgraf N' isomorfní s N.

Pozor, výše uvedené podmínky jsou pouze nutné. Tzn., není-li některá z nich splněna, pak $G \ncong H$. Jsou-li splněny, nic nás neopravňuje tvrdit, že G a H jsou isomorfní.



Obr. 6: Příklad neisomorfních grafů G a H (G obsahuje C_5 na rozdíl od H)

2.6 Sled, tah a cesta

2.11. Definice (v_0, v_n)*–sledem* v grafu G rozumíme posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n),$$

kde $v_i, i = 0, 1, \ldots, n$ jsou vrcholy grafu G a $e_j, j = 1, 2, \ldots, n$ jsou hrany grafu G, přičemž každá hrana e_j má koncové vrcholy v_{j-1} a v_j.

„Procházíme-li graf sledem", můžeme hrany i vrcholy opakovat. *Počátečním* vrcholem (v_0, v_n)–sledu je vrchol v_0 a *koncovým* vrcholem je vrchol v_n. Další vrcholy sledu jsou *vnitřní* vrcholy. Sled je *uzavřený*, pokud $v_0 = v_n$, tzn. počáteční a koncový vrchol je stejný. Vzhledem ke skutečnosti, že používáme jednoduché grafy, nemusíme uvádět v zápisu sledu hrany. *Délkou sledu* označíme počet hran nacházejících se ve sledu, včetně započítání jejich opakování.

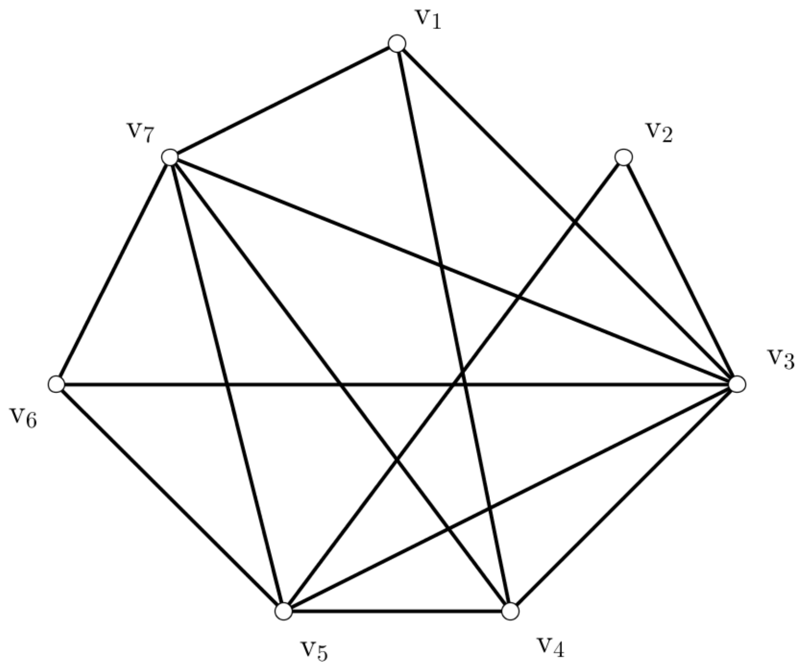
2.12. Definice *Tah* je sled, ve kterém se žádné hrany neopakují. Tah s počátečním vrcholem v_0 a koncovým vrcholem v_n nazveme (v_0, v_n)–tahem.

Tah je tedy zvláštním případem sledu a proto jsou definice počátečních, koncových a vntřních vrcholů analogické. Totéž platí pro definici délky tah, s tím rozdílem, že se zde nevyskytují opakující se hrany. Pokud počáteční vrchol splývá s koncovým vrcholem tahu, nazveme takový tah *uzavřeným tahem*.

2.13. Definice *Cesta* je sled, ve kterém se neopakují vrcholy. Cestu s počátečním vrcholem v_0 a koncovým vrcholem v_n nazveme (v_0, v_n)–cestou.

Cesta je v rámci této definice chápana jako „putování" v grafu, dříve jsme definovali cestu jako graf.

Všechny definice ilustrujeme na obr. 7. Posloupnost $v_1, v_3, v_5, v_6, v_3, v_2, v_3, v_1, v_7$ je (v_1, v_7)–sled (opakuje se hrana v_2v_3), posloupnost $v_2, v_5, v_6, v_3, v_5, v_7, v_4, v_3, v_1$ je (v_2v_1)–tah (opakují se vrcholy v_5, v_3), posloupnost $v_2, v_5, v_6, v_7, v_4, v_1, v_3$ je (v_2, v_3)–cestou.



Obr. 7: Ilustrace sledu, tahu a cesty

2.7 Souvislost grafu

2.14. Definice Řekneme, že vrchol v je *dosažitelný* z vrcholu u, jestliže v grafu existuje sled z vrcholu u do vrcholu v. Graf nazveme *souvislý*, jestliže pro každé dva vrcholy u, v je vrchol v dosažitelný z vrcholu u. V opačném případě je graf *nesouvislý*.

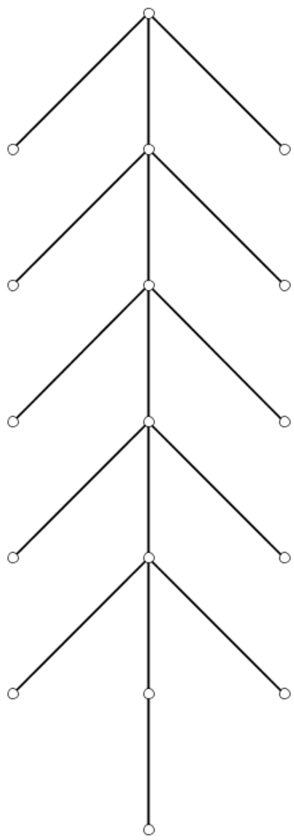
Vzdálenost vrcholu u od vrcholu určíme jako nejkratší cestu z vrcholu u do vrcholu v. Vzdálenost budeme značit jako $\mathrm{dist}(u, v)$ nebo $\mathrm{dist}_G(u, v)$. V případě, že jsou u, v nedosažitelné, tak $\mathrm{dist}_G(u, v) = \infty$.

2.8 Stromy a kostry

2.15. Definice *Strom* je acyklický (bez cyklů) souvislý graf.

2.16. Věta *Strom s n vrcholy má přesně $n-1$ hran.*

Strom obsahuje nejmenší počet hran na daném počtu vrcholů tak, aby byl graf souvislý. V každém stromu je mezi každou dvojicí vrcholů právě jedna cesta. Odebráním jakékoliv hrany ve stromu porušíme jeho souvislost (každá hrana je tzv. *most*). Stromy nejčastěji označujeme symbolem T z anglického *tree*. Příklad stromu je na obr. 8.

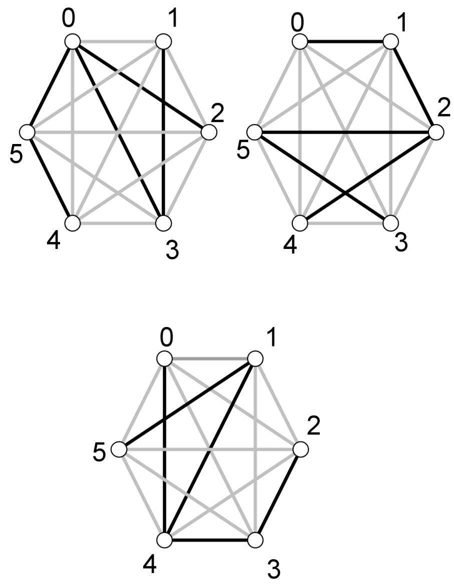


Obr. 8: Příklad stromu

2.17. Definice *Kostrou* souvislého grafu G rozumíme takový faktor grafu G, který je stromem.

3 Dekompozice a faktorizace grafů

3.1. Definice Mějme graf H na n vrcholech. Dekompozice grafu H je množina navzájem hranově disjunktních podgrafů $G_1, G_2, \dots, G_s$ grafu H taková, že každá hrana grafu H je obsažena v právě jednom podgrafu G_r, kde $r \in \{1, 2, \dots, s\}$ (viz obr. 10). Jestliže je každý podgraf G_r isomorfní s grafem G, pak se jedná o *G–dekompozici* grafu H. Jestliže je G souvislý faktor grafu H, pak G–dekompozici nazveme *G–faktorizací* (viz obr. 9).

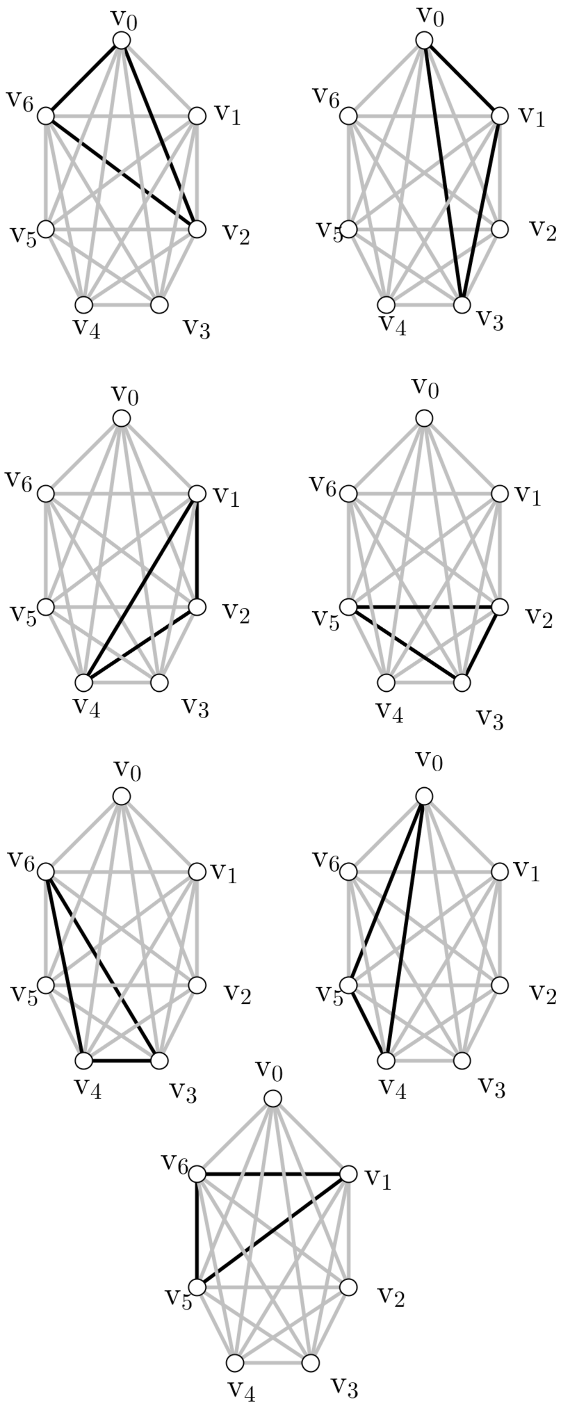


Obr. 9: G–faktorizace kompletního grafu K_6 housenkou $(2, 3, 2)$

3.1 Nutné podmínky dekompozice

Pro G–dekompozici daného grafu H existuje několik zřejmých nutných podmínek. Například počet hran $|E(G)|$ musí dělit počet hran $|E(H)|$, neboť každá hrana grafu H patří právě do jedné kopie grafu G. Existuje také nutná podmínka omezující nejvyšší stupeň grafu G, ovšem tu uvedeme až v konkrétní podobě pro faktorizaci kompletních grafů na kostry.

3.2. Definice *G–dekompozice* grafu H s n vrcholy na podgrafy $G_0, G_1, \dots, G_s$ je cyklická, pokud existuje uspořádání $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ vrcholů v grafu H a pokud existuje isomorfismus $\phi_i : G_0 \to G_i$, pro $i = 1, 2 \dots, s$, takový, že $\phi_i(x_j) = x_{j+i}$ pro každé $j = 0, 1, \dots, n-1$, přičemž součty $j+i$ jsou brány modulo n a $|E(H)|/|E(G)| = s + 1$ (viz obr. 10).



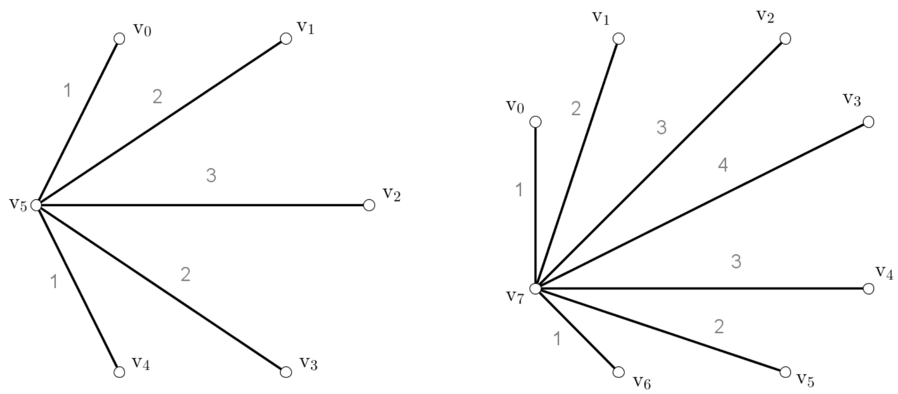
Obr. 10: Cyklická G–dekompozice grafu H, je-li $G \cong C_3$ a $H \cong K_7$

Z definice cyklické G–dekompozice plyne, že jakmile najdeme vhodné umístění pro první kopii grafu G v grafu H, pak ostatních s kopií grafu G získáme postupnou rotací první kopie v grafu H. Rotací grafu G s vrcholovou množinou $V(G) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ o jedničku, rozumíme přemístění každého jeho vrcholu v_i, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, do vrcholu v_{i+1}, přičemž součty jsou brány modulo n. Je zjevné, že žádná hrana grafu G nemůže být totožná se svým přemístěním pomocí rotace.

3.2 Postačující podmínky dekompozice

Zatím nejsou známy žádné zcela obecné postačující podmínky pro dekompozici, tzn. pro graf G rozkládající graf H, a to ani v případě, že je graf H kompletní. Z tohoto důvodu byly postačující podmínky určeny pouze pro některé třídy grafů. Dodejme, že my se specializujeme pouze na rozklady kompletních grafů, tedy $H \cong K_n$.

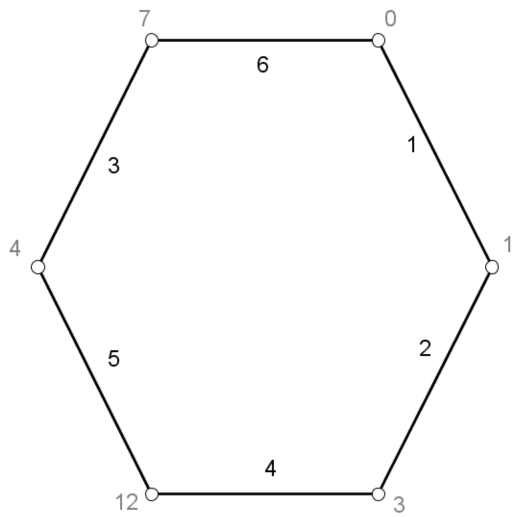
V teorii grafů problém existence G–dekompozice kompletního grafu převádíme na problém existence určitého *ohodnocení* daného grafu G. Pokud chceme vysvětlit dekompozici kompletních grafů pomocí ohodnocení, musíme v kompletních grafech zavést následující označení. Jednotlivé vrcholy kompletního grafu K_n označíme $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$. Délka hrany $v_i v_j$ v kompletním grafu K_n je menší z čísel $|j-i|$, $n - |j-i|$ (viz obr. 11). Kompletní grafy s lichým počtem vrcholů mají vždy n hran délky l, pro $l = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Kompletní grafy se sudým počtem vrcholů mají vždy n hran délky l, pro $l = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ a přesně $\frac{n}{2}$ hran délky $\frac{n}{2}$. Ohodnocení grafů G užívaná k dekompozicím jsou vlastně prostá zobrazení vrcholové množiny grafu G do množiny M po sobě jdoucích nezáporných celých čísel, přičemž z ohodnocení vrcholů odvozujeme délky hran dle stanovených pravidel. Mohutnost množiny M je vždy nejvýše rovna počtu vrcholů rozkládaného grafu, tedy grafu H.



Obr. 11: Příklad ohodnocení vrcholů v K_6, K_8 a délek hran incidentních s vrcholem v_5 a v_7

Nejznámější taková ohodnocení se nazývají ρ, β a α. Nejprve si nadefinujeme ρ–ohodnocení.

3.3. Definice Mějme graf G s n hranami a nejvýše $2n+1$ vrcholy. Nechť existuje prosté zobrazení $\rho : V(G) \to \{0, 1, \ldots, 2n\}$ takové, že množina všech délek hran grafu G je $\{1, 2, \ldots, n\}$ a délka l hrany $ij \in E(G)$ je definována vztahem $l(ij) = \min\{|i-j|, 2n+1-|i-j|\}$. Potom graf G umožňuje *ρ–ohodnocení* (viz obr. 12).



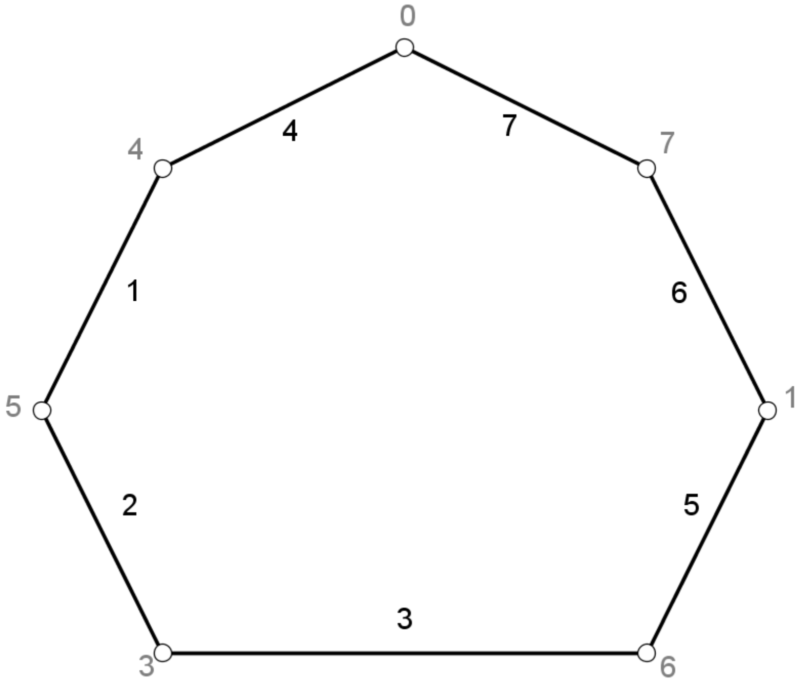
Obr. 12: ρ–ohodnocení v C_6

3.4. Věta *Nechť G je graf s n hranami a nejvýše $2n+1$ vrcholy. Potom existuje cyklická G–dekompozice kompletního grafu K_{2n+1} právě tehdy, když G umožňuje ρ–ohodnocení [11].*

Uvědomme si, K_{2n+1} má $n(2n+1)$ hran s tím, že každou hranu délky $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ obsahuje přesně $2n+1$ krát. Budeme-li v něm rotovat graf G s ρ–ohodnocením, který má každou hranu délky $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ přesně jedenkrát, pak pokryjeme každou hranu K_{2n+1} přesně jednou. Tedy $2n+1$ kopií grafu G vzniklých rotací „způsobí" G–dekompozici K_{2n+1}.

Následující β–ohodnocení je vlastně jen „zpřísněné" ρ–ohodnocení.

3.5. Definice Mějme graf G s n hranami a nejvýše $n+1$ vrcholy. Nechť existuje prosté zobrazení $\beta : V(G) \to \{0, 1, \ldots, n\}$ takové, že množina všech délek hran grafu G je $\{1, 2, \ldots, n\}$ a délka l hrany $ij \in E(G)$ je definována vztahem $l(ij) = |i-j|$. Potom graf G umožňuje *β–ohodnocení*. β–ohodnocení říkáme také *graciózní ohodnocení*, v angličtině *graceful labeling* (viz obr. 13).



Obr. 13: β–ohodnocení v C_7

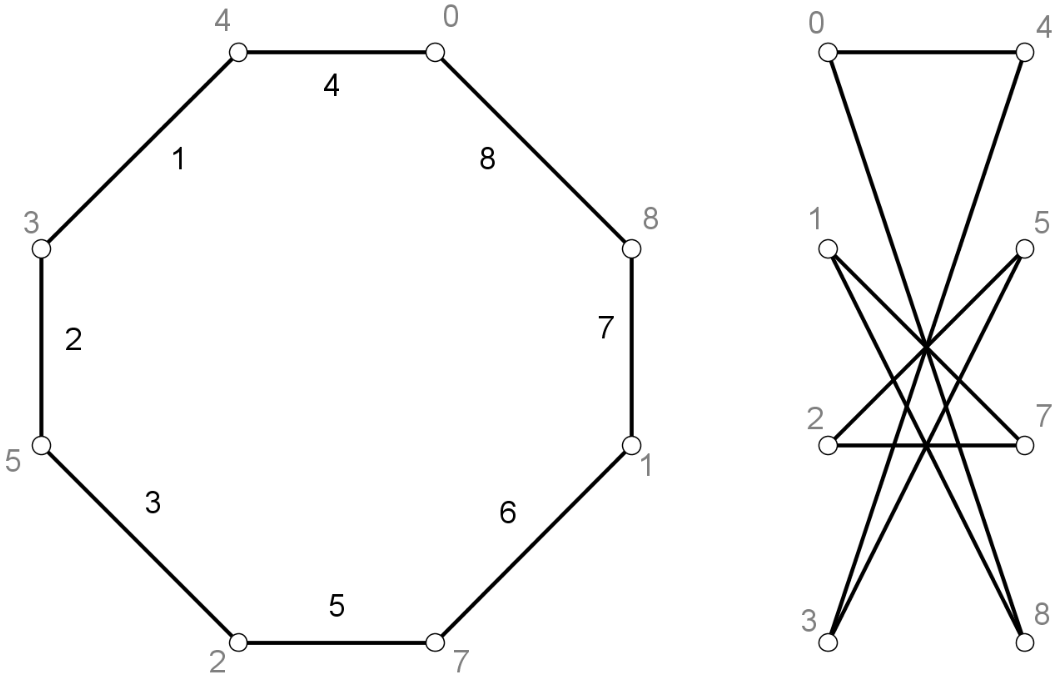
3.6. Věta *Nechť G je graf s n hranami a nejvýše $n+1$ vrcholy. Umožňuje-li graf G graciózní ohodnocení, pak existuje cyklická G–dekompozice kompletního grafu K_{2n+1} [11].*

α–ohodnocení je vlastně β–ohodnocení s jednou přidanou podmínkou.

3.7. Definice Mějme graf G s n hranami a nejvýše $n+1$ vrcholy. Nechť existuje prosté zobrazení $\alpha : V(G) \to \{0, 1, \ldots, n\}$ takové, že množina všech délek hran grafu G je $\{1, 2, \ldots, n\}$ a délka l hrany $ij \in E(G)$ je definována vztahem $l(ij) = |i - j|$. Navíc existuje číslo a tak, že pro každou hranu ij, $i < j$, platí $i \leq a < j$, potom graf G umožňuje *α–ohodnocení*. (viz obr. 14).

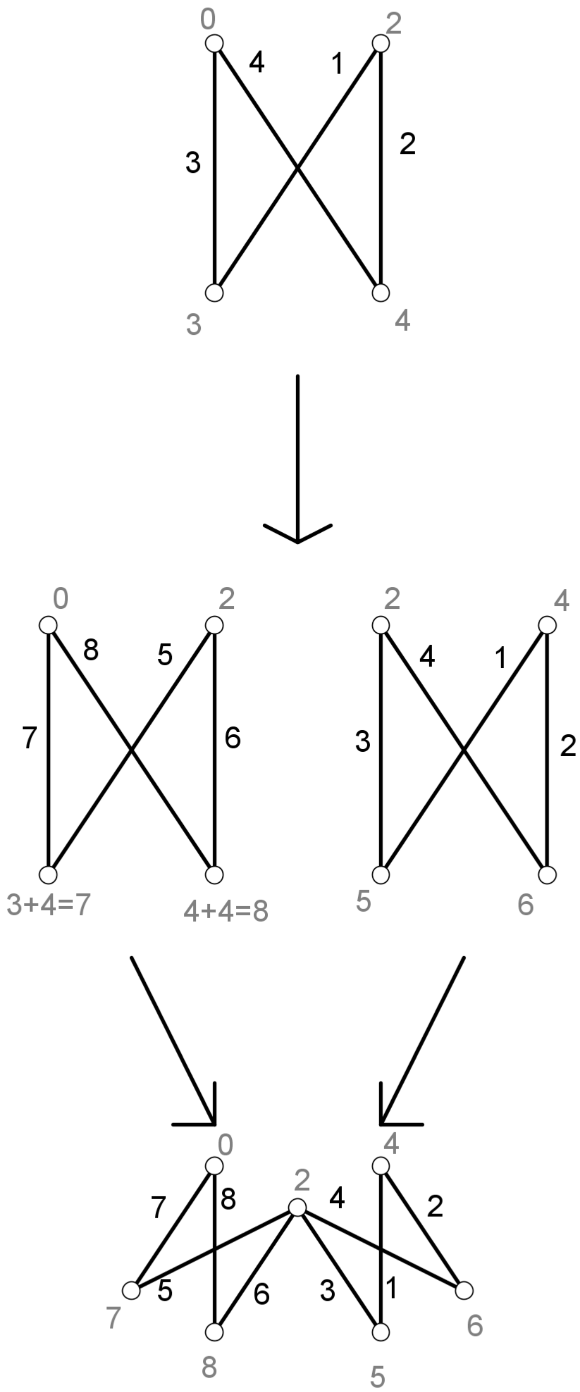
Jen bipartitní graf může mít α–ohodnocení, neboť v jedné partitě musí být vrcholy s čísly nejvýše a a ve druhé vrcholy s čísly, které jsou větší než a (viz obr. 14). Ale to, že je graf bipartitní, nezajišťuje automaticky existenci α–ohodnocení. Nejlépe to charakterizují například bipartitní cykly délky $n \equiv 2 \pmod 4$, které α–ohodnocení nemají (viz obr. 12).

3.8. Věta *Nechť G je graf s n hranami a nejvýše $n+1$ vrcholy. Umožňuje-li graf G α–ohodnocení, pak existuje G–dekompozice kompletního grafu K_{2kn+1}, kde k je libovolné přirozené číslo [11].*



Obr. 14: α–ohodnocení cyklu C_8, kde $a = 3$

Na obr. 15 ukazujeme, jak je možné z C_4 s α–ohodnocením vytvořit dvě hranově disjunktní kopie cyklu C_4, které sdílejí právě jeden vrchol a mají také α–ohodnocení. Nazvěme toto sloučení dvou kopií cyklů grafem G. Protože G má α–ohodnocení, musí existovat cyklická G–dekompozice kompletního grafu K_{2kn+1} pro $k = 2, n = 4$, tedy K_{17}. Existuje-li cyklická G–dekompozice K_{17}, pak existuje také C_4–dekompozice $K_{17} \cong K_{2kn+1}$ pro $k = 2$ a $n = 4$.



Obr. 15: α–ohodnocení pro dvě kopie cyklu C_4, sdílející jeden vrchol

3.3 Nutné podmínky faktorizace

Speciálním případem G–dekompozice je G–faktorizace. Nutné podmínky G–faktorizace jsou tudíž přísnější než nutné podmínky G–dekompozice. My se budeme zabývat konkrétně faktorizací kompletních grafů K_n na kostry.

Nechť T je kostra grafu K_n, potom T je strom na n vrcholech s $n-1$ hranami a $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$ je počet hran kompletního grafu K_n. Vidíme, že číslo $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$ je dělitelné číslem $n-1$ pouze tehdy, když n je sudé. Proto T–faktorizace K_n může existovat jen, když je n sudé. Dále tedy budeme uvažovat pouze kompletní grafy K_{2n}.

Kompletní graf K_{2n} má $n(2n-1)$ hran a kostra T_{2n} má $2n-1$ hran. Každá T_{2n}–faktorizace K_{2n} tudíž obsahuje n faktorů. Představme si, že by kostra T_{2n} měla vrchol x stupně vyššího než n. Pokud vrchol x ztotožníme s některým z vrcholů v K_{2n}, tak hrany s ním incidentní pokryjí více než n hran incidentních s x. Dále, každý vrchol v T_{2n} má stupeň alespoň jedna. Proto každý ze zbývajících $n-1$ faktorů pokryje alespoň jednu hranu incidentní s vrcholem x v K_{2n}. Odtud, n faktory by bylo pokryto více než $2n-1$ hran incidentních s vrcholem x. Potom by ovšem musela být pokryta některá hrana vícekrát, neboť vrchol x má v K_{2n} stupeň $2n-1$.

Existuje-li T_{2n}–faktorizace K_{2n}, pak $\Delta(T_{2n}) \leq n$. Tato nutná podmínka se nazývá *stupňová podmínka.*

3.4 Postačující podmínky faktorizace

Postačující podmínky faktorizace jsou zatím stále relativně neprozkoumané. Kromě triviální faktorizace K_{2n} na hamiltonovské cesty a faktorizace na dvojhvězdy (dvojhvězda vznikne tak, že mezi centrální vrcholy dvou hvězd $K_{1,n-1}$ přidáme hranu) jsou všechny postačující podmínky faktorizací na kostry založeny na ohodnocení. Mezi tato ohodnocení patří ρ–symetrické ohodnocení, smíšené ρ-ohodnocení a přepínací ohodnocení. My se budeme dále zabývat pouze smíšeným ρ–ohodnocením a přepínacím ohodnocením, neboť ρ–symetrické ohodnocení nebudeme potřebovat.

3.9. Definice G–dekompozice grafu H s $2n$ vrcholy na $G_0, G_1, \ldots, G_s$ je *bicyklická,* jestliže existuje uspořádání $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ vrcholů H a isomorfismus $\phi_i : G_0 \to G_i$, pro $i = 1, 2, \ldots, s$, takový, že $\phi_i(x_j) = x_{j+i}$ a $\phi_i(y_j) = y_{j+i}$ pro každé $j = 0, 1, \ldots, n-1$, kde součty $j + i$ jsou brány modulo n.

Z definice plyne, že $2n$ vrcholů grafu H musíme rozdělit do dvou stejně velkých množin, např. X a Y, kde $|X| = |Y| = n$, dále musíme vhodně umístit první kopii G_0 a zbývající kopie grafu G získáme díky postupnému otáčení G_0 tak, že vrcholy z G_0, umístěné do X, rotujeme v rámci X a vrcholy z G_0, umístěné do Y, rotujeme v rámci Y.

3.5 Faktorizace kompletního bipartitního grafu

Bipartitní ρ–ohodnocení bylo zavedeno Frončkem pro dekompozici pravidelných kompletních bipartitních grafů.

3.10. Úmluva Hranu xy, tedy hranu mezi vrcholy x a y, budeme pro případ ohodnocení vrcholů čísly $\lambda(x)$ a $\lambda(y)$ označovat $(\lambda(x), \lambda(y))$. Toto bude platit dále vždy.

3.11. Definice Nechť G je bipartitní graf s množinou vrcholů $V(G) = X_0 \cup X_1$ a n hranami. Dále nechť je λ prosté zobrazení $\lambda : X_i \to S_i$, kde S_i je podmnožinou množiny $V_i = \{0_i, 1_i, \dots, (n-1)_i\}$, pro $i = 0, 1$. Pak je délka hrany (x_0, y_1) pro $x_0 \in V_0$ a $y_1 \in V_1$ definována jako $l_{01}(x_0, y_1) = y - x$, kde rozdíl $y - x$ je brán modulo n. Jestliže množina všech délek hran je rovna $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, potom je λ *bipartitní ρ–ohodnocení.*

Existence bipartitního ρ–ohodnocení zaručuje bicyklickou dekompozici kompletního grafu $K_{n,n}$, jak bylo ukázáno v [3].

3.12. Věta *Nechť má bipartitní graf G s n hranami bipartitní ρ–ohodnocení. Pak existuje bicyklická dekompozice kompletního grafu $K_{n,n}$ na n kopií grafu G.*

Tato věta je důležitá pro ostatní ohodnocení, která umožňují faktorizaci kompletních grafů na kostry.

3.6 Smíšené ρ–ohodnocení

Smíšené ρ–ohodnocení, budeme nazývat krátce jen jako *smíšené ohodnocení.* Bylo uvedeno Frončkem v [3] jako zobecnění ρ–symetrického graciózního ohodnocení [1], které zde nebudeme definovat.

3.13. Definice Nechť je graf G s $V(G) = V_0 \cup V_1, V_0 \cap V_1 = \emptyset$ a $|V_0| = |V_1| = n$. Nechť je λ prosté zobrazení, $\lambda : V_i \to \{0_i, 1_i, \dots, (2n)_i\}$, pro $i = 0, 1$. Čistá délka hrany (x_i, y_i), kde $x_i, y_i \in V_i$, kde $i \in \{0, 1\}$, pro $\lambda(x_i) = p_i$ a $\lambda(y_i) = q_i$ je definována jako

$$l_{ii}(x_i, y_i) = \min\{|p - q|, n - |p - q|\}.$$

Smíšená délka hrany (x_0, y_1), kde $x_0 \in V_0, y_1 \in V_1$, pro $\lambda(x_0) = p_0$ a $\lambda(y_1) = q_1$, je definována jako

$$l_{01}(x_0, y_1) = q - p \pmod{n},$$

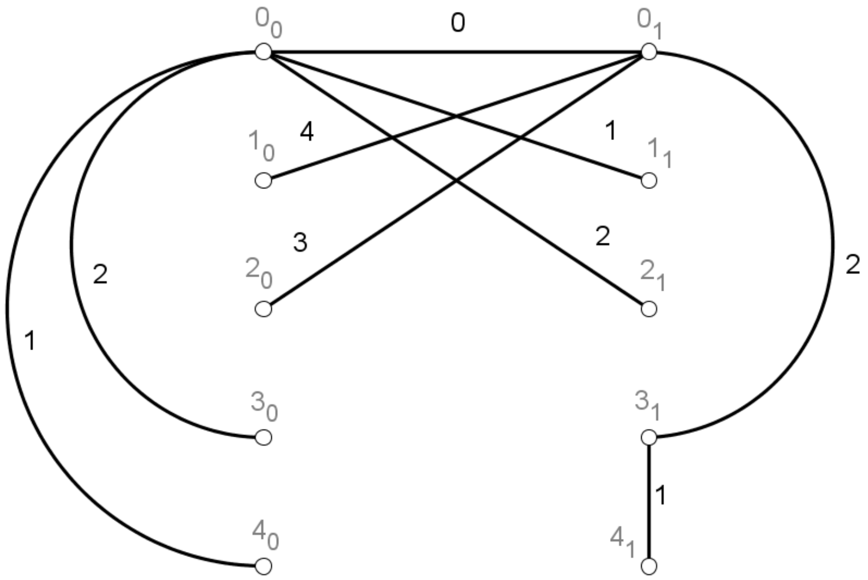
kde $p, q \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ jsou ohodnocení vrcholů bez indexů. Hrany (x_i, y_i), kde $i = 0, 1$, s čistou délkou l_{ii} jsou *čisté ii–hrany* a hrany (x_0, y_1) se smíšenou délkou l_{01} jsou *smíšené hrany.*

3.14. Definice Nechť G je graf se $4n + 1$ hranami, $V(G) = V_0 \cup V_1, V_0 \cap V_1 = \emptyset$, a $|V_0| = |V_1| = 2n + 1$. Nechť λ je prosté zobrazení $\lambda : V_i \to \{0_i, 1_i, \dots, (2n)_i\}$, pro

$i = 0, 1$ a nakonec nechť délky hran jsou počítány dle Def. 3.13. Pak řekneme, že G má *smíšené ρ–ohodnocení*, pokud:

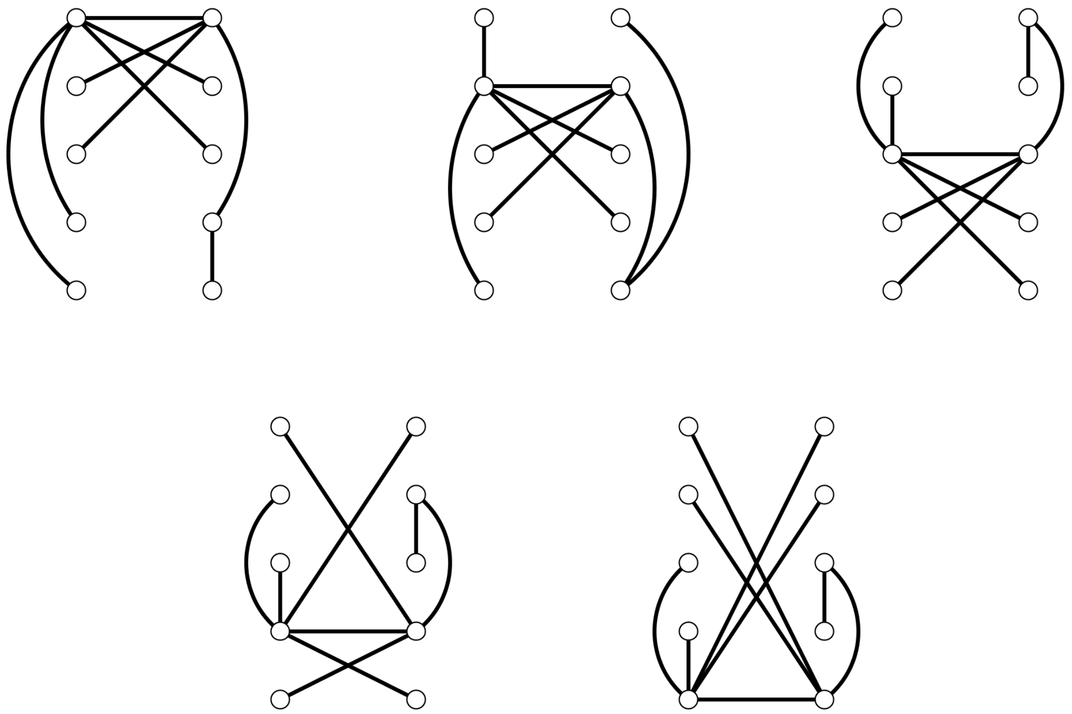
1. $\{l_{ii}(x_i, y_i) : (x_i, y_i) \in E(G)\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, pro $i = 0, 1$
2. $\{l_{01}(x_0, y_1) : (x_0, y_1) \in E(G)\} = \{0, 1, \ldots, 2n\}$.

Má-li mít kostra T smíšené ohodnocení, pak musí mít $4n + 2$ vrcholů. Smíšené ohodnocení tedy nelze použít v případě, že má kostra $4n$ vrcholů. Množina vrcholů kostry T, která má smíšené ohodnocení, je rozdělena na dvě stejně velké množiny V_0, V_1 a celý graf G se pak skládá ze tří podgrafů, a to H_0, H_1 a H_{01}, s tím, že H_0 je indukovaný na V_0 (obsahuje n hran), H_1 je indukovaný na V_1 (obsahuje n hran), H_{01} je bipartitní graf s partitami $X_0 \subseteq V_0$ a $X_1 \subseteq V_1$. Dále H_0 sdílí jediný vrchol s H_{01}, taktéž H_1 s H_{01}. H_0 a H_1 splňují podmínky ρ–ohodnocení, H_{01} splňuje podmínky bipartitního ρ–ohodnocení. Z toho lze tedy vyvodit (dokázáno v [3]) následující. Pokud si představíme, že K_{4n+2} je rozdělen na dvě kopie K_{2n+1}, mezi kterými jsou hrany $K_{2n+1,2n+1}$, pak hrany H_0 při bicyklické faktorizaci pokryjí hrany jedné kopie K_{2n+1}, hrany H_1 pokryjí hrany druhé kopie K_{2n+1} a hrany H_{01} pokryjí hrany $K_{2n+1,2n+1}$ (viz obr. 16, obr. 17).



Obr. 16: Strom T se smíšeným ohodnocením

3.15. Věta *Nechť je G graf s $4n + 1$ hranami, který má smíšené ρ–ohodnocení. Potom existuje bicyklická dekompozice kompletního grafu K_{4n+2} na $2n + 1$ kopií grafu G.*



Obr. 17: Bicyklická T–faktorizace K_{10}

3.7 Přepínací ohodnocení

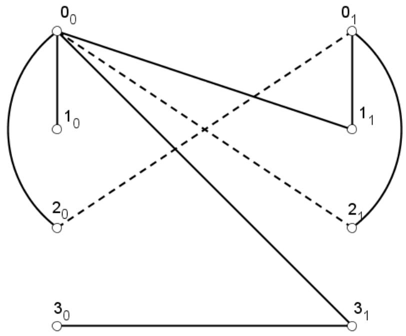
V dizertační práci Kovářové bylo uvedeno přepínací ohodnocení, které, na rozdíl od smíšeného ohodnocení zaručuje faktorizaci kompletních grafů i řádu 0 modulo 4. Důkaz v [9].

3.16. Věta *Graf G s $4n-1$ hranami má* přepínací smíšené ohodnocení*, jestliže splňuje následující podmínky:*
Množina vrcholů $V(G) = V_0 \cup V_1, V_0 \cap V_1 = \emptyset, |V_0| = |V_1| = 2n$. Nechť je λ prosté zobrazení $\lambda : V_i \to \{0_i, 1_i, \ldots, (2n-1)_i\}$, pro $i = 0, 1$ (délky hran jsou definovany stejně jako v Definici 3.13), potom:

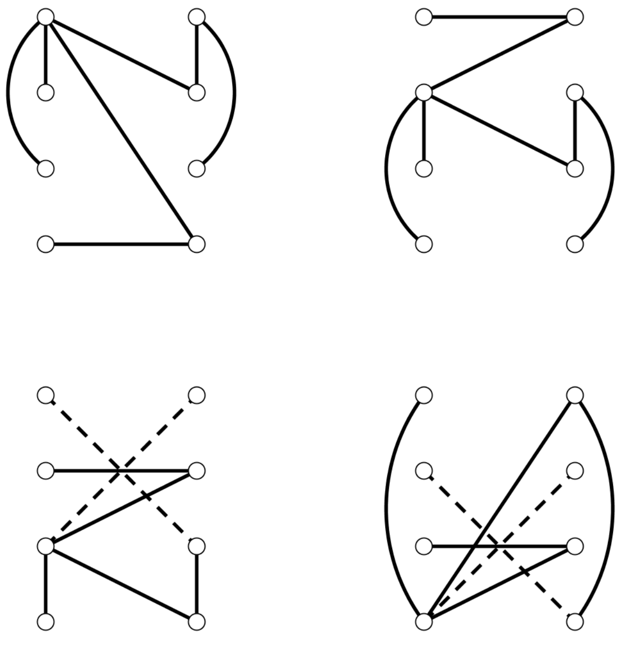
1. $\{l_{ii}(x_i, y_i) : (x_i, y_i) \in E(G)\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, *pro* $i = 0, 1$,
2. *existuje isomorfismus φ takový, že G je isomorfní s G', kde $V(G') = V(G)$ a* $E(G') = (E(G) \setminus \{(k_0, (k+n)_0), (l_1, (l+n)_1)\}) \cup \{(k_0, (l+n)_1), ((k+n)_0, l_1)\}$,
3. $\{l_{01}(x_0, y_1) : (x_0, y_1) \in E(G)\} = \{0, 1, \ldots, 2n-1\} \setminus \{l_{01}(k_0, (l+n)_1), l_{01}((k+n)_0, l_1)\}$.

3.17. Věta *Nechť G je graf na $4n$ vrcholech s $4n-1$ hranami, mající přepínací smíšené ohodnocení. Potom existuje G–dekompozice kompletního grafu K_{4n} na $2n$ isomorfních kopií G.*

Ukažme si například přepínací ohodnocení housenky $(2,4,2,2)$ s průměrem 5, kde ve třetím a čtvrtém faktoru budou původní hrany $(0_0, 2_0)$ a $(0_1, 2_1)$ s čistou délkou 2 nahrazeny hranami $(0_0, 2_1)$ a $(2_0, 0_1)$ se smíšenou délkou 2 (viz obr. 18 a 19).



Obr. 18: Přepínací ohodnocení housenky $(2,4,2,2)$



Obr. 19: Bicyklická faktorizace K_8 na housenky $(2,4,2,2)$

4 Housenky s průměrem 6 a třemi vrcholy stupně alespoň 3

Již padesát let upoutává pozornost matematiků problém dekompozice kompletního grafu. Tento výzkum byl inspirován známou Ringelovou hypotézou z roku 1963, která říká, že každý strom s m hranami rozkládá kompletní graf K_{2m+1}. Kotzig poté stanovil ještě přísnější hypotézu, a to takovou, že každý strom má graciózní ohodnocení. Tato hypotéza není dosud ani potvrzena ani vyvrácena.

V [8] je uveden skoro úplný a kvalitní přehled výsledků ohledně graciózních a ρ–ohodnocení. V roce 1997 byly uvedeny Eldergillem [1] v jeho diplomové práci nutné a postačující podmínky pro faktorizaci K_{2n} na symetrické kostry. Eldergill zavedl symetrické graciózní ohodnocení, ρ–symetrické graciózní ohodnocení a klasifikoval všechny stromy řádu 10 (rozhodl o všech stromech řádu 10, zda faktorizují či nefaktorizují K_{10}).

Další krok učinil Fronček ([2], [3]), který zavedl smíšené ρ–ohodnocení. Díky této metodě našel širší třídu stromů na $4n+2$ vrcholech, které faktorizují K_{4n+2}. Přepínací ohodnocení, které je postačující pro faktorizaci stromů na $4n$ vrcholech, bylo uvedeno v [7]. ρ–symetrické graciózní ohodnocení i přepínací ohodnocení vyžadují silný automorfismus faktorizujícího grafu, což značně omezuje jejich použití. Fronček dále nalezl pro každý průměr $3 \leq d \leq 2n-1$ kostru, která faktorizuje K_{4n+2}. Byly také klasifikovány všechny housenky diametru 4 a 5, které musely být rozděleny do mnoha podtříd. Klasifikace všech stromů s nejméně čtyřmi nelistovými vrcholy byla provedena v prácích [6], [10] a [5]. Klasifikace housenek diametru 3, 4, 5 je kompletní.

Housenka H je takový strom, kdy po odstranění listů dostaneme cestu délky alespoň jedna (V některé literatuře je připuštěna i cesta délky nula, tedy hvězda je chápána jako housenka). Tuto cestu nazýváme *páteř* housenky. Má-li páteř housenky délku 4, pak hovoříme o *housence s průměrem 6*. Označme vrcholy páteře housenky s diameterem 6 zleva doprava takto: A, a, C, b, B.

Nechť $\deg(A) = d_1, \deg(a) = d_2, \deg(C) = d_3, \deg(b) = d_4, \deg(B) = d_5$ ($d_i \geq 2$ pro každé $i = 1,2,3,4,5$), pak pomocí uspořádané pětice $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ můžeme jednoznačně popsat každou housenku s průměrem 6. Samozřejmě, že $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + |V(H)| - 5 = 2(|V(H)| - 1)$, odtud $|V(H)| = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 - 3$.

Zápis $[d_1, d_2, d_3, d_4, d_5]$, kde $d_i \geq 2$ pro každé $i = 1,2,3,4,5$ a $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq d_4 \geq d_5$, znamená, že máme na mysli množinu všech vzájemně neisomorfních housenek s průměrem 6, jejichž vrcholy páteře mají stupně d_1, d_2, d_3, d_4, d_5. Je zřejmé, že housenky s průměrem 6 na $2n$ vrcholech existují až pro $n \geq 4$.

Housence s průměrem 6, která obsahuje právě tři vrcholy stupně alespoň 3, budeme říkat 3–*housenka.* Protože se budeme zabývat faktorizacemi kompletních grafů na 3–housenky, musí mít 3–housenky sudý počet vrcholů. Tudíž místo 3–*housenky řádu* $2n$ budeme dále stručněji říkat pouze 3–*housenky.* Housenky, které mají právě tři vrcholy stupně alespoň 3 vyžadují $n \geq 5$.

My se budeme zabývat 3–housenkami typu $(n, n-4, 3, 2, 2), (2, n, n-4, 3, 2)$ a $(2, 2, n, n-4, 3)$ a ty vyžadují $n \geq 7$.

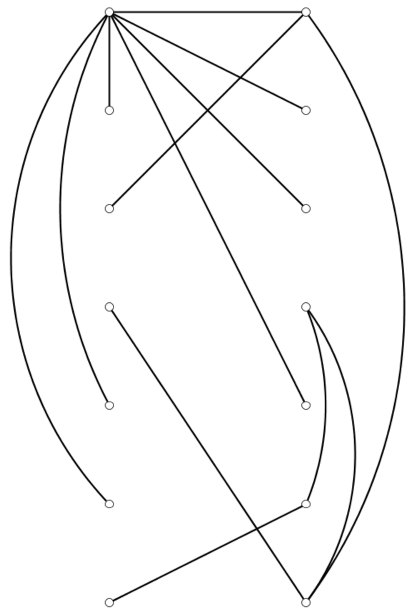
4.1. Úmluva Ve všech obrázcích je levá množina vrcholů množina V_0, přičemž vrcholy jsou označeny po řadě $0_0, 1_0, \ldots, (2k)_0$, a pravá množina je množina V_1, s vrcholy označenými po řadě $0_1, 1_1, \ldots, (2k)_1$.

4.2. Úmluva Všechny následující důkazy jsou konstruktivní. Pokud uvádíme rostoucí posloupnost ohodnocení vrcholů, kde pro jisté konkrétní k je první člen posloupnosti větší než poslední, pak takovou posloupnost pro dané k považujeme za prázdnou. Pokud uvádíme klesající posloupnost ohodnocení vrcholů, kde pro jisté konkrétní k je první člen posloupnosti menší než poslední, pak takovou posloupnost pro dané k považujeme za prázdnou.

4.3. Věta *3–housenka $(n, n-4, 3, 2, 2)$ umožňuje smíšené ohodnocení pro každé liché $n \geq 7$.*

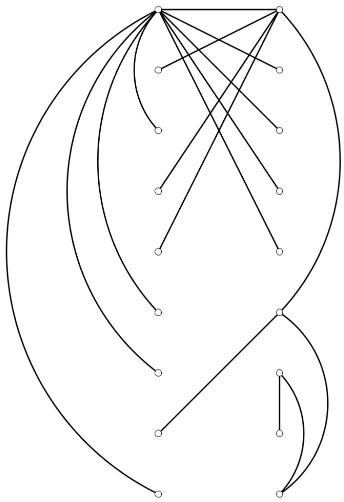
Důkaz Nechť $n = 2k+1$, $k \geq 3$. Důkaz rozdělíme do dvou případů. Nejprve budeme uvažovat $k = 3$, potom $k \geq 4$.

- Nechť $k = 3$. Potom 3–housenka H $(7, 3, 3, 2, 2)$ obsahuje čisté 00–hrany $(0_0, 1_0), (0_0, 4_0), (0_0, 5_0)$ délek $1, 3, 2$, smíšené hrany $(0_0, 0_1), (0_0, 1_1), (0_0, 2_1)$, $(0_0, 4_1), (2_0, 0_1), (3_0, 6_1), (6_0, 5_1)$ délek $0, 1, 2, 4, 5, 3, 6$ a cestu $(0_1, 6_1, 3_1, 5_1)$ s čistými 11–hranami délek $1, 3, 2$.

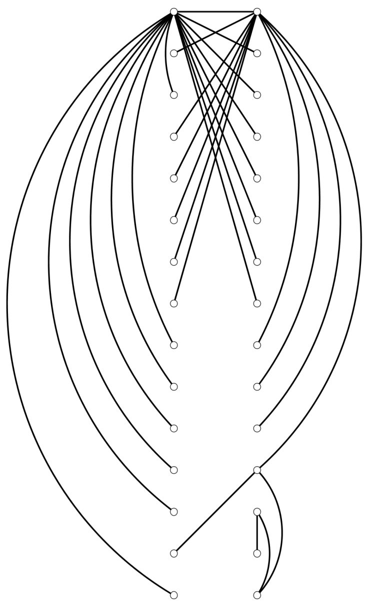


Obr. 20: Konstrukce pro $k = 3$

- Nechť $k \geq 4$. Potom 3−housenka H $(2k+1, 2k-3, 3, 2, 2)$ obsahuje čisté 00−hrany $(0_0, x_0)$, kde $x = 2k-2, 2k-3, \ldots, k+2, k+1$ délek $3, 4, 5, \ldots, k-1, k$, dále obsahuje hrany $(0_0, 2_0)$ a $(0_0, (2k)_0)$ délek 2 a 1.
  H obsahuje smíšené hrany $(0_0, y_1)$ pro $y = 0, 1, 2, \ldots, k-1, k$ délek $0, 1, 2, \ldots, k-1, k$. Dále H obsahuje smíšené hrany $(0_1, z_0)$ pro $z = 3, 4, 5, \ldots, k-1, k$ délek $2k-2, 2k-3, 2k-4, \ldots, k+2, k+1$ a smíšené hrany $(0_1, 1_0)$ a $((2k-3)_1, (2k-1)_0)$ délek $2k$ a $2k-1$.
  3−housenka H obsahuje cestu $(0_1, (2k-3)_1, (2k)_1, (2k-2)_1, (2k-1)_1)$ s čistými 11−hranami délek $4, 3, 2, 1$. Nakonec H obsahuje čisté hrany $(0_1, w_1)$, kde $w = 2k-4, 2k-5, 2k-6, \ldots, k+2, k+1$ délek $5, 6, 7, \ldots, k-1, k$.



Obr. 21: Konstrukce pro $k = 4$



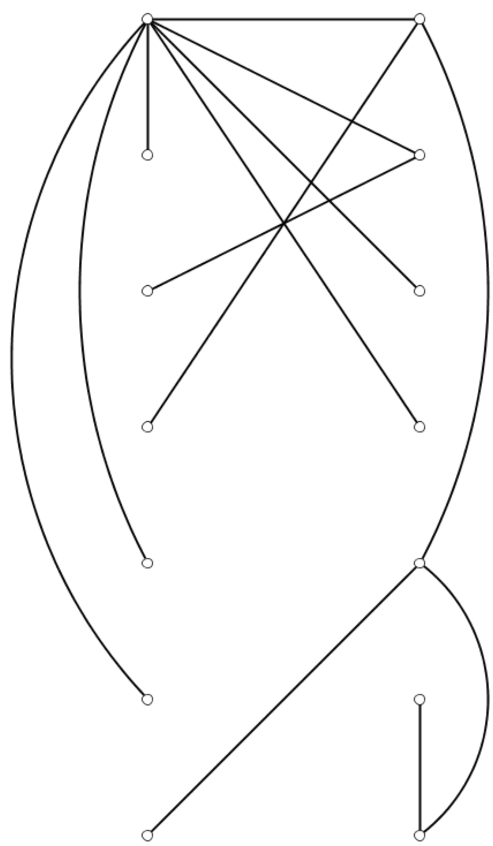
Obr. 22: Konstrukce pro $k = 7$

Snadno ověříme, že popsané hrany jsou skutečně hrany 3−housenky H $(2k+1, 2k-3, 3, 2, 2)$ (vrchol 0_0 má stupeň $2k+1$, 0_1 má stupeň $2k-3$, vrchol $(2k-3)_1$ má stupeň 3 a vrcholy $(2k)_1, (2k-2)_1$ jsou zbylé vrcholy páteře). Tudíž H má smíšené ohodnocení pro každé $k \geq 3$.

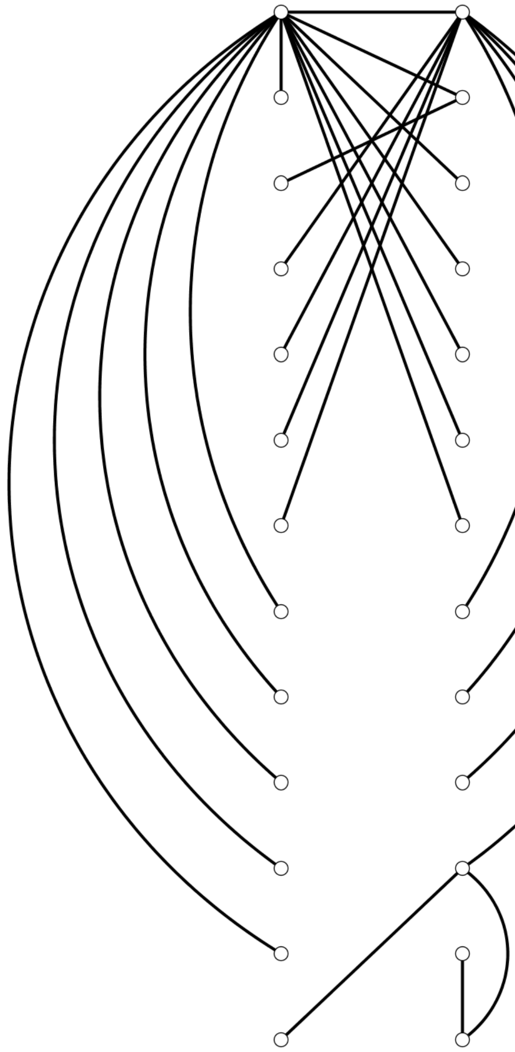
□

4.4. Věta *3–housenka $(2, n, n-4, 3, 2)$ umožňuje smíšené ohodnocení pro každé liché $n \geq 7$.*

Důkaz Nechť $n = 2k+1$, $k \geq 3$. Potom 3–housenka H $(2, 2k+1, 2k-3, 3, 2)$ obsahuje čisté 00–hrany $0_0, x_0)$, kde $x = 2k-1, 2k-2, 2k-3, \ldots, k+2, k+1$ délek $2, 3, 4, \ldots, k-1, k$ a hranu $(0_0, 1_0)$ délky 1.
H obsahuje čisté 11–hrany $(0_1, y_1)$, kde $y = 2k-3, 2k-4, 2k-5, \ldots, k+2, k+1$ délek $3, 4, 5, \ldots, k-1, k$. Dále H obsahuje cestu $(0_1, (2k-2)_1, (2k)_1, (2k-1)_1)$ s čistými 11–hranami délek $1, 2$.
Dále H obsahuje cestu $(0_0, 1_1, 2_0)$ se smíšenými hranami délek $1, 2k$. Dále H obsahuje smíšenou hranu$(0_0, 0_1)$ délky 0. Poté H obsahuje smíšené hrany $(0_0, z_1)$, kde $z = 2, 3, 4, \ldots, k-1, k$. Dále H obsahuje smíšené hrany $(0_1, w_0)$ pro $w = 3, 4, 5, \ldots, k-1, k$ délek $2k-2, 2k-3, 2k-4, \ldots, k+2, k+1$. Nakonec H obsahuje hranu $((2k)_0, (2k-2)_1)$ délky $2k-1$.



Obr. 23: Konstrukce pro $k = 3$



Obr. 24: Konstrukce pro $k = 6$

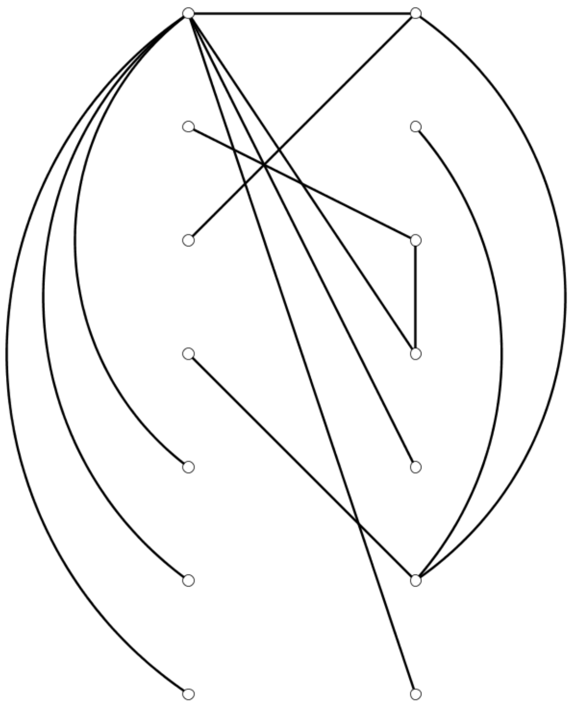
Snadno ověříme, že popsané hrany jsou skutečně hrany 3–housenky H $(2, 2k+1, 2k-3, 3, 2)$ (vrchol 0_0 má stupeň $2k + 1$, vrchol 0_1 má stupeň $2k - 3$, vrchol $(2k - 2)_1$ má stupeň 3 a vrcholy $1_1, (2k)_1$ jsou zbylé vrcholy páteře). Tudíž H má smíšené ohodnocení pro každé $k \geq 3$.

□

4.5. Věta *3–housenka* $(2, 2, n, n-4, 3)$ *umožňuje smíšené ohodnocení pro každé liché* $n \geq 7$.

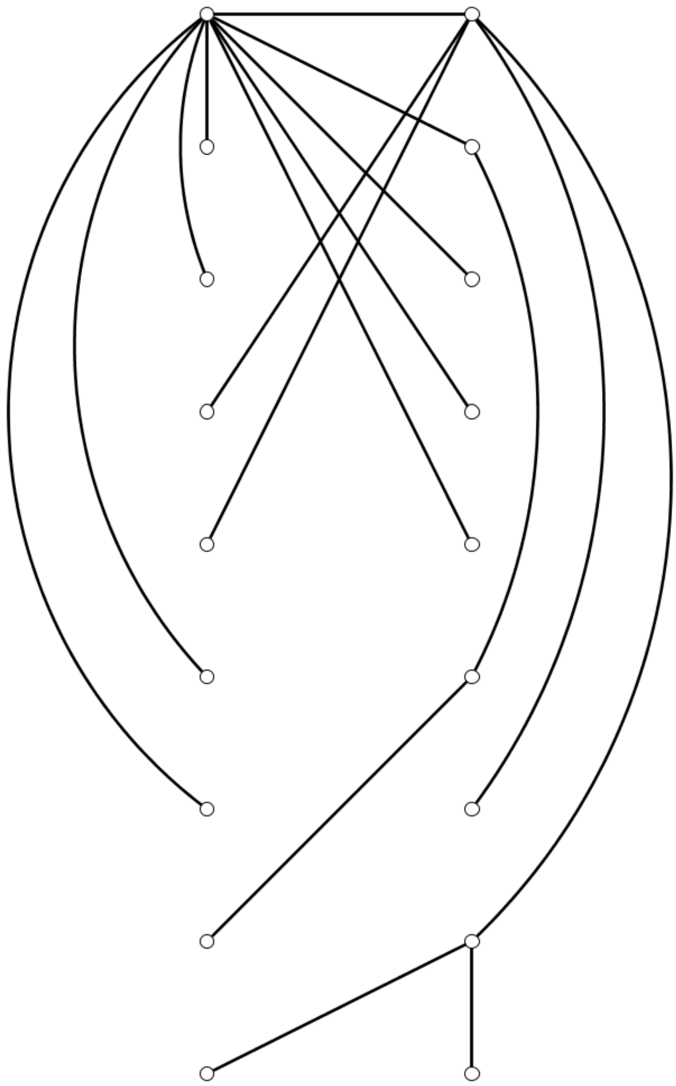
Důkaz Nechť $n = 2k+1$, $k \geq 3$. Důkaz rozdělíme do pěti případů. Nejprve budeme uvažovat $k = 3, k = 4, k = 5$ a nakonec $k \geq 6$ pro $k = 2q$ a $k = 2q+1$ (k je sudé a k je liché).

- Nechť $k = 3$. Potom 3–housenka H $(2, 2, 7, 3, 3)$ obsahuje čisté 00–hrany $(0_0, 4_0), (0_0, 5_0), (0_0, 6_0)$ délek $3, 2, 1$, smíšené hrany $(0_0, 0_1), (0_0, 3_1), (0_0, 4_1)$, $(0_0, 6_1), (0_1, 2_0), (2_1, 1_0), (5_1, 3_0)$ délek $0, 3, 4, 6, 5, 1, 2$ a čisté 11–hrany $(0_1, 5_1)$, $(5_1, 1_1), (3_1, 2_1)$ délek $2, 3, 1$.



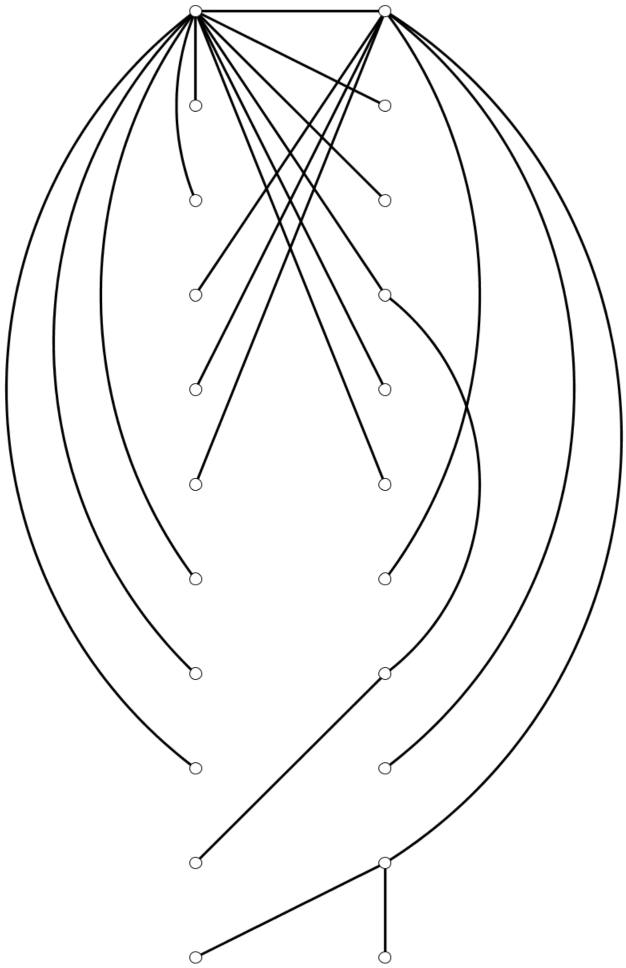
Obr. 25: Konstrukce pro $k = 3$

- Nechť $k = 4$. Potom 3–housenka H $(2, 2, 9, 5, 3)$ obsahuje čisté 00–hrany $(0_0, 1_0), (0_0, 2_0), (0_0, 5_0), (0_0, 6_0)$ délek $1, 2, 4, 3$, smíšené hrany $(0_0, 0_1), (0_0, 1_1)$, $(0_0, 2_1), (0_0, 3_1), (0_0, 4_1), (0_1, 4_0), (0_1, 3_0), (5_1, 7_0), (7_1, 8_0)$ délek $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $7, 8$ a čisté 11–hrany $(1_1, 5_1), (0_1, 6_1), (0_1, 7_1), (7_1, 8_1)$ délek $4, 3, 2, 1$.



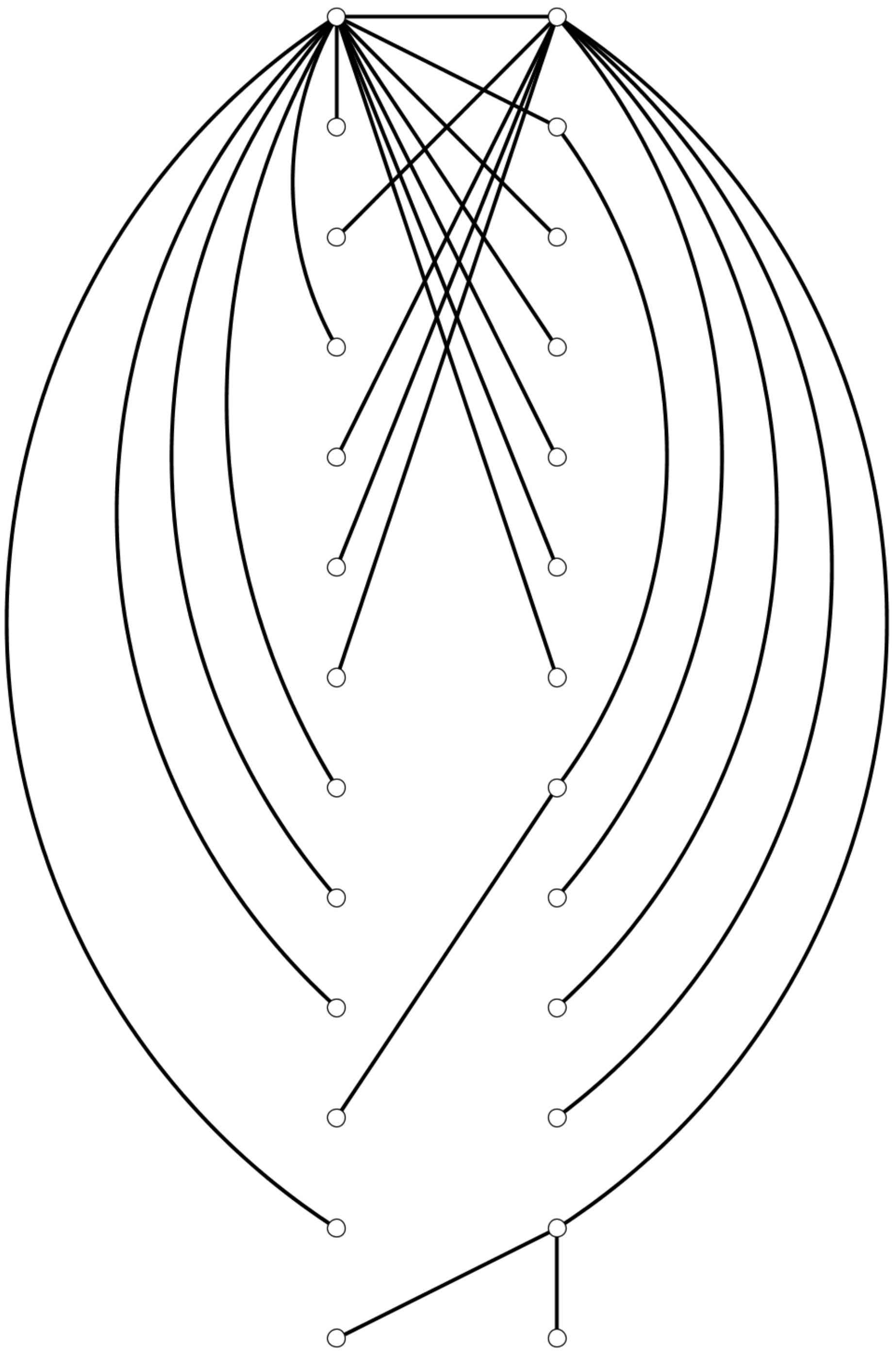
Obr. 26: Konstrukce pro $k = 4$

- Nechť $k = 5$. Potom 3–housenka H $(2, 2, 11, 7, 3)$ obsahuje čisté 00–hrany $(0_0, 1_0), (0_0, 2_0), (0_0, 6_0), (0_0, 7_0), (0_0, 8_0)$ délek $1, 2, 5, 4, 3$, smíšené hrany $(0_0, 0_1)$, $(0_0, 1_1), (0_0, 2_1), (0_0, 3_1), (0_0, 4_1), (0_0, 5_1), (0_1, 5_0), (0_1, 4_0), (0_1, 3_0), (7_1, 9_0)$, $(9_1, 10_0)$ délek $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ a čisté 11–hrany $(0_1, 6_1), (0_1, 8_1), (0_1, 9_1)$, $(3_1, 7_1), (9_1, 10_1)$ délek $5, 3, 2, 4, 1$.

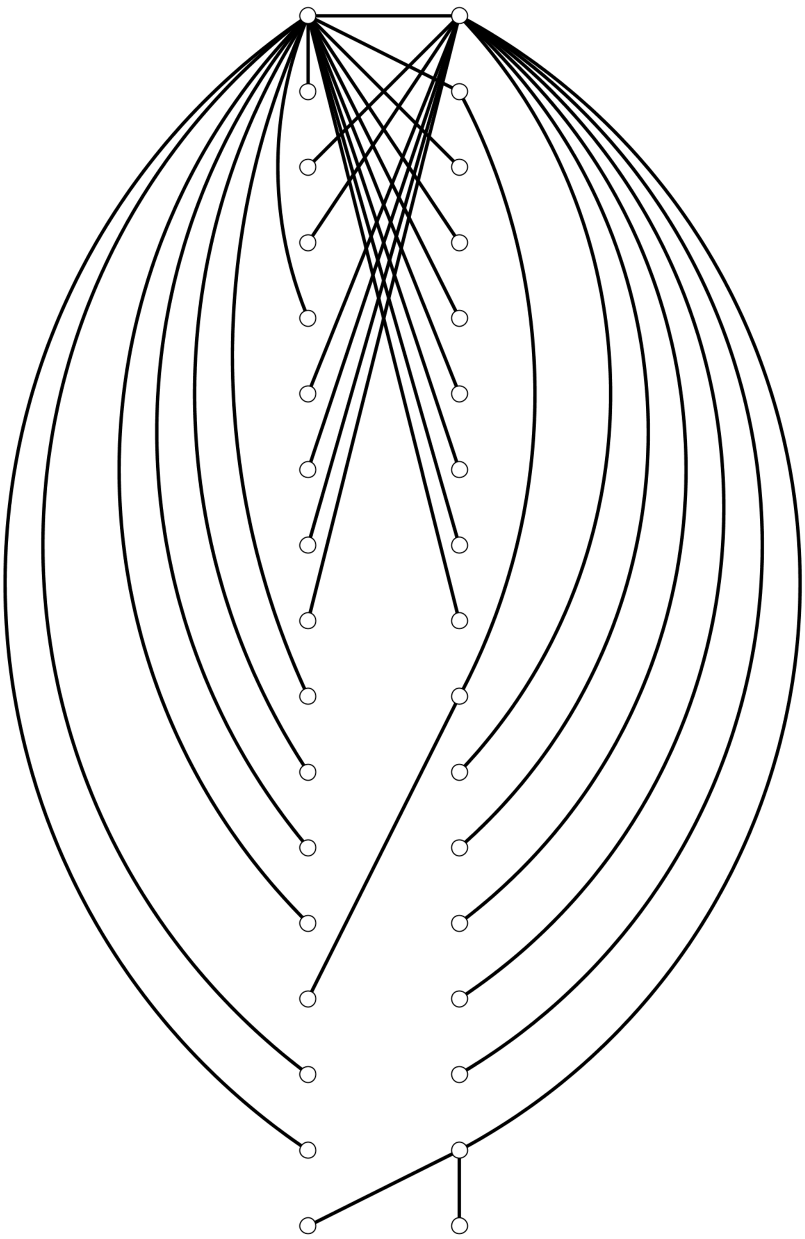


Obr. 27: Konstrukce pro $k = 5$

- Nechť $k \geq 6$ a $k = 2q$ (k je sudé). Potom 3–housenka H $(2, 2, 2k+1, 2k-3, 3)$ obsahuje čisté $00-$hrany $(0_0, x_0)$, kde $x = k+1, k+2, k+3, \ldots, 3q-1, 3q, 3q+2, 3q+3, \ldots, 2k-2, 2k-1$ délek $k, k-1, k-2, \ldots, q+2, q+1, q-1, q-2, \ldots, 3, 2$, dále obsahuje hrany $(0_0, 1_0), (0_0, q_0)$ délek $1, q$.
  H obsahuje cestu $(0_1, (2k-1)_1, (2k)_1)$ s hranami délek $2, 1$ a hranu $(1_1, (k+1)_1)$ délky k a hrany $(0_1, y_1)$, kde $y = k+2, k+3, k+4, \ldots, 2k-3, 2k-2$ délek $k-1, k-2, k-3, \ldots, 4, 3$.
  Dále H obsahuje smíšené hrany $(0_0, z_1)$, kde $z = 0, 1, 2, \ldots, k-1, k$ délek $0, 1, 2, \ldots, k-1, k$, dále obsahuje $(0_1, w_0)$, kde $w = 2, 3, 4, \ldots, q-2, q-1, q+1, q+2, \ldots, k-1, k$ délek $2k-1, 2k-2, 2k-3, \ldots, 3q+3, 3q+2, 3q, 3q-1, \ldots, k+2, k+1$. Nakonec obsahuje hrany $((2k-1)_1, (2k)_0), ((2q+1)_1, (3q+1)_0)$ délek $2k, 3q+1$.

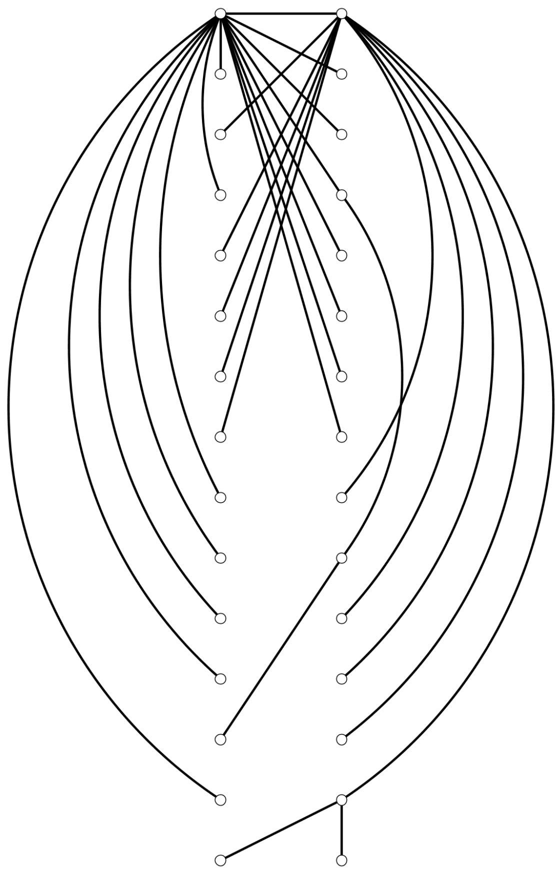


Obr. 28: Konstrukce pro $k = 6$

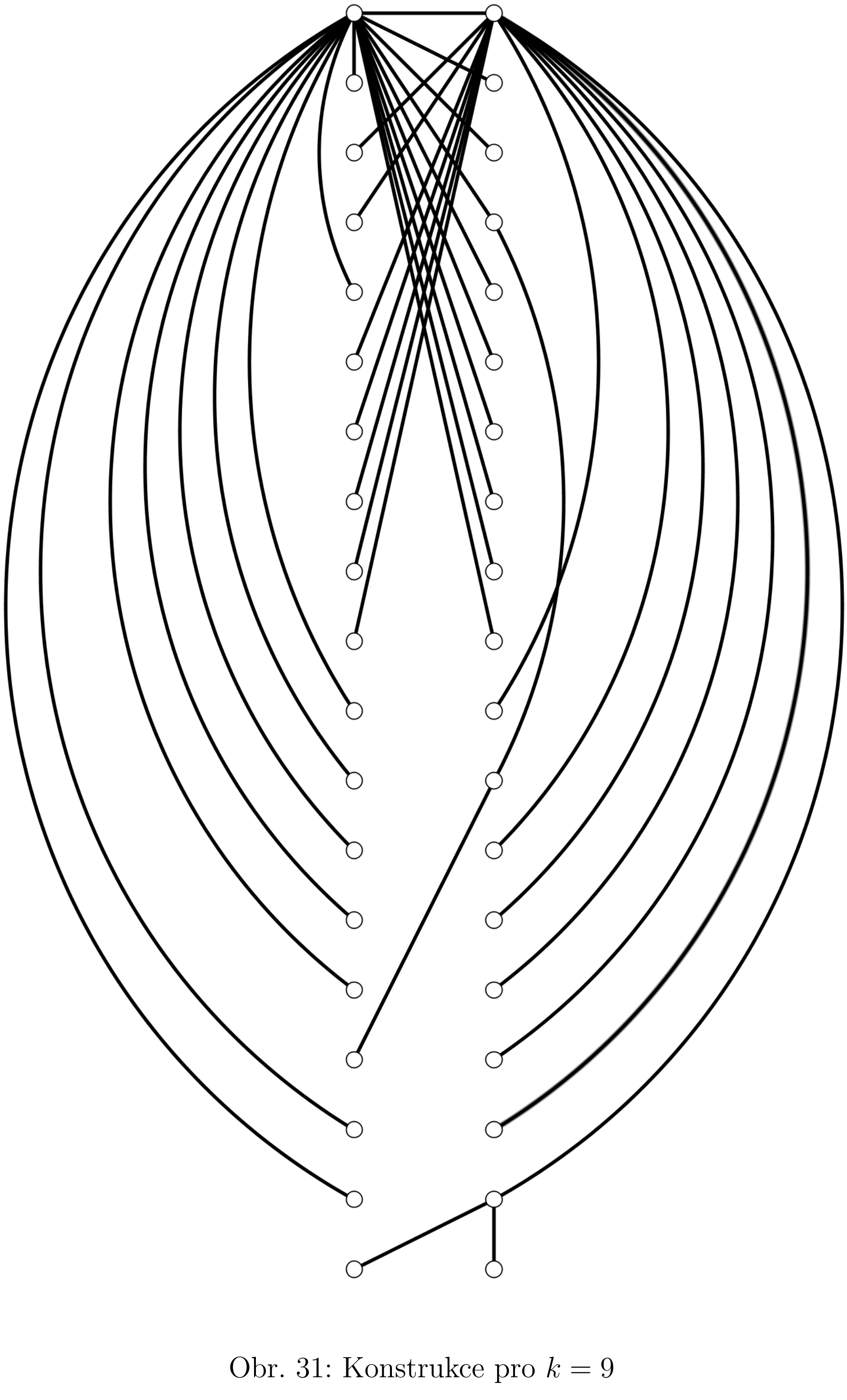


Obr. 29: Konstrukce pro $k = 8$

- Nechť je $k \geq 7$ a $k = 2q+1$ (k je liché). Potom 3–housenka H $(2, 2, 2k+1, 2k-3, 3)$ obsahuje čisté hrany $0_0, x_0$, kde $x = k+1, k+2, k+3, \dots, 3q+1, 3q+2, 3q+4, 3q+5, \dots, 2k-2, 2k-1$ délek $k, k-1, k-2, \dots, q+2, q+1, q-1, q-2, \dots, 3, 2$, dále obsahuje hrany $(0_0, 1_0), (0_0, q_0)$ délek $1, q$.
  H obsahuje cestu $(0_1, (2k-1)_1, (2k)_1)$ s hranami délek $2, 1$ a hranu $(3_1, (k+2)_1)$ délky $k-1$ a hrany $(0_1, y_1)$, kde $y = k+1, k+3, k+4, \dots, 2k-3, 2k-2$ délek $k, k-2, k-3, \dots, 4, 3$.
  Dále H obsahuje smíšené hrany $(0_0, z_1)$, kde $z = 0, 1, 2, \dots, k-1, k$ délek $0, 1, 2, \dots, k-1, k$, dále obsahuje $(0_1, w_0)$, kde $w = 2, 3, 4, \dots, q-2, q-1, q+1, q+2, \dots, k-1, k$ délek $2k-1, 2k-2, 2k-3, \dots, 3q+5, 3q+4, 3q+2, 3q+1, \dots, k+2, k+1$. Nakonec obsahuje hrany $((2q+3)_1, (3q+3)_0), ((2k-1)_1, (2k)_0)$ délek $3q+3, 2k$.



Obr. 30: Konstrukce pro $k = 7$



Obr. 31: Konstrukce pro $k = 9$

Snadno ověříme, že popsané hrany jsou skutečně hrany 3–housenky H $(2,2,2k+1,2k-3,3)$ (vrchol 0_0 má stupeň $2k+1$, vrchol 0_1 má stupeň $2k-3$, vrchol $(2k-1)_1$ má stupeň 3, vrcholy 1_1 a $(k+1)_1$ jsou zbylé vrcholy pro $k=2q$ sudé a vrcholy $3_1,(2k+2)_1$ jsou zbylé vrcholy páteře pro $k=2q+1$ liché). Tudíž má H smíšené ohodnocení pro každé $k \geq 3$.

□

4.6. Věta *Každá* 3*–housenka* $(n,n-4,3,2,2)$*,* $(2,n,n-4,3,2)$ *a* $(2,2,n,n-4,3)$ *faktorizuje kompletní graf* K_{2n} *pro každé liché* n*,* $n \geq 7$*.*

Důkaz Přímo vyplývá z Vět 4.3, 4.4 a 4.5 a Věty 3.15

□

5 Závěr

V kapitole 4 jsme dokázali, že platí:

5.1. Věta *Každá* 3*–housenka* $(n, n-4, 3, 2, 2)$, $(2, n, n-4, 3, 2)$ *a* $(2, 2, n, n-4, 3)$ *faktorizuje kompletní graf* K_{2n} *pro každé liché* n*,* $n \geq 7$*.*

Cílem této práce bylo nalézt alespoň jednu nekonečnou třídu 3–housenek, které faktorizují kompletní graf K_{2n}. Cíl byl splněn, máme tři nekonečné třídy 3–housenek, které faktorizují K_{2n}.

Nemůžeme se však zbavit dojmu, že výsledek práce je podstatně užší, než jsme se původně domnívali. Tato menší obecnost výsledku je zapříčiněna tím, že původní důkazy byly výrazně rozsáhlejší a složitější, k jejich zjednodušení došlo až několik týdnů před odevzdáním práce.

Všimneme si, že všechny zkoumané 3–housenky mají vrchol stupně n a 3, dále graf indukovaný na vrcholech stupně alespoň 3 je cesta délky 2.

Přirozeným pokračováním této práce proto bude:

- výzkum 3–housenek s vrcholy stupně n a 3, kde podgraf indukovaný na vrcholech stupně alespoň 3 je cesta délky 2 ovšem s permutovanými vrcholy tak, že vzniknou 3–housenky neisomorfní s housenkami uvedenými v této práci.
- výzkum 3–housenek s vrcholy stupně n a 3, kde podgraf indukovaný na vrcholech stupně alespoň 3 není cesta délky 2.
- výzkum 3–housenek s vrcholem stupně n a dalšími dvěma vrcholy stupně alespoň 4.
- výzkum 3–housenek bez vrcholu stupně n.

Tím by byl završen výzkum všech 3–housenek $[r, s, t, 2, 2]$, kde $n \geq r \geq s \geq t \geq 3$, pro n liché. V podstatě totožný výzkum by se týkal také 3–housenek řádu $2n$ pro n sudé.

Předběžným cílem, mé budoucí diplomové práce by měla být úplná charakterizace 3–housenek s vrcholy stupně n a 3, tedy housenky typu $[n, n-4, 3, 2, 2]$ pro n liché.

6 Reference

[1] Eldergill, P.: *Decompositions of the complete graph with an even number of vertices.* M.Sc. Thesis, McMaster University, Hamilton (1997)

[2] Fronček, D.: *Cyclic decompositions of complete graphs into spanning trees.* Discussiones Mathematicae Graph Theory, 24, No.2, 345–353 (2004)

[3] Fronček, D.: *Bi-cyclic decompositions of complete graphs into spanning trees.* Discrete Math., **307**, 1317–1322 (2007)

[4] Fronček, D.: *Úvod do teorie grafů.* Slezská univerzita v Opavě, Opava (1999)

[5] Fronček, D., Kovář, P., Kovářová, T., Kubesa, M.: *Factorizations of complete graphs into caterpillars of diameter 5.* Discrete Math, **310**, 537–556 (2010)

[6] Fronček, D., Kovář, P., Kubesa, M.: *Factorizations of complete graphs into trees with at most four non-leave vertices.*

[7] Fronček, D., Kubesa, M.: *Factorizations of complete graphs into spanning trees.* Congressus Numerantium, **154**, 125–134 (2002)

[8] Gallian, J.A.: *A dynamic survey of graph labeling.* Electronic Journal of Combinatorics, DS 6 (2009)

[9] Kovářová, T.: *Spanning Tree Factorizations of Complete Graphs, Ph.D. Thesis.* VŠB – Technical University of Ostrava (2004)

[10] Kubesa, M.: *Factorizations of complete graphs into caterpillars of diameter four and five.* Ph.D. Thesis, VŠB – Technical University of Ostrava (2004)

[11] Rosa, A.: *On certain valuations of the vertices of a graph.* Theory of Graphs (Intl. Symp. Rome 1966), Gordon and Breach, Dunod, Paris, 349–355 (1967)