

Dr. Amalija Žakelj

Procesi učenja z vidika učnih težav učencev pri matematiki

Izvirni znanstveni članek

UDK: 37.091.3:82

POVZETEK

V uvodu pišemo o procesih učenja matematike: o razvoju matematičnih pojmov, o številskih in prostorskih predstavah, o branju in razumevanju besedila idr. Osrednji del prispevka namenjamo raziskavi, s katero smo ugotovili, da se opredeljevanje procesov učenja, ki so povezani z učnimi težavami učencev pri matematiki, statistično značilno ne razlikuje med učitelji razrednega pouka in učitelji matematike. Oboji kot procese učenja, pri katerih se najpogosteje pojavljajo učne težave pri učenju matematike, izpostavljajo razvoj številskih predstav, razvoj matematičnih pojmov, logično sklepanje ter branje in razumevanje besedila. Vsi procesi učenja, ki so jih učitelji ocenili kot procese učenja, ki najbolj ovirajo učenje, imajo dokaj izenačene povprečne ocene glede stopnje zahtevnosti, in sicer od 2,6 do 2,8, kar je zelo blizu oceni *zelo otežuje učenje*.

Ključne besede: matematika, procesi učenja, razvoj številskih predstav, branje in razumevanje besedila, ovire pri učenju matematike

Processes of Learning with Regard to Students' Learning Difficulties in Mathematics

Original scientific article

UDK: 37.091.3:82

ABSTRACT

In the introduction, we write about the process of learning mathematics: the development of mathematical concepts, numerical and spatial imagery on reading and understanding of texts, etc. The central part of the paper is devoted to the study, in which we find that identifying the learning processes associated with learning difficulties of students in mathematics, is not statistically significantly different between primary school teachers and teachers of mathematics. Both groups expose the development of numerical concepts, logical reasoning, and reading and understanding the text as the ones with which difficulties in learning mathematics appear the most frequently. All the processes of learning that the

teachers assessed as the ones that represent the greatest barriers to learning have a fairly uniform average estimates of the degree of complexity, ranging from 2.6 to 2.8, which is very close to the estimate *makes learning very difficult*.

Key words: mathematics, learning processes, development of numeric conception, reading and text comprehension, barriers to learning mathematics

Uvod

Na učno uspešnost posameznika vplivajo notranji dejavniki, ki izvirajo iz učenca, kot tudi dejavniki pouka in zunanji dejavniki na ravni šole ali zunaj šol (Magajna et al. 2008; Žakelj 2013). Pomembni so efektivno okolje, tisto, ki na posameznika vpliva, posameznikove prirojene dispozicije, njegov dosedanji razvoj in izkušnje.

Prav tako pa je pomembno, kako učenec dejavnike učnega okolja dojema in v skladu s tem zgradi svoj odziv nanje. Marentič Požarnik (2000) poudarja, da v skladu s kognitivnim pojmovanjem niso pomembni samo dejavniki učne uspešnosti kot taki, zlasti zunanji, tisti v učnem okolju. Na način učenja ne vplivajo okoliščine same po sebi, ampak kako jih učenec doživlja. V isti situaciji različni učenci različno reagirajo.

Notranji dejavniki izvirajo iz učenca in se nanašajo na kognitivne, emocionalne in socialne značilnosti učenca: umske sposobnosti, razvojna stopnja, nivo, struktura in razvite sposobnosti (številске, količinske in prostorske predstave, abstraktno mišljenje, logično sklepanje, besedne sposobnosti, spominske sposobnosti ...), kognitivni stil funkcioniranja, sprejemanja in predelovanja informacij, prav tako učne navade, spretnosti in metode učenja ter motiviranost za učenje, vedenjski dejavniki (hiperaktivno, nemirno vedenje idr.), sodelovanje z vrstniki idr.

Procesi učenja matematike

Pouk matematike je namenjen graditvi pojmov in povezav, spoznavanju ter učenju postopkov, ki posamezniku omogočajo vključitev v sistem (matematičnih) idej in posledično vključitev v kulturo, v kateri živimo. Osnovnošolski pouk matematike obravnava temeljne in za vsakogar pomembne matematične pojme, in to na načine, ki so usklajeni z otrokovim kognitivnim razvojem, s sposobnostmi, z osebnostnimi značilnostmi in z njegovim življenjskim okoljem (npr. narava kot vir za matematično ustvarjanje in raziskovanje).

Učenci se matematiko učijo skozi različne *procese učenja*: razvoj matematičnih pojmov, razvoj številskih in prostorskih predstav, logično sklepanje, branje in razumevanje besedila, uporaba strategij pri reševanju problemov, izvajanje algoritmov in uporaba formul, pisno matematično izražanje, ustno matematično izražanje idr.

Številске sposobnosti vključujejo razumevanje številskih simbolov ter znakov za različne operacije, razumevanje pojma količina, razumevanje številskih operacij,

spodobnost za branje in pisanje matematičnih simbolov, razumevanje številskih odnosov (Kavaš 2002, v Žakelj 2004). Na začetku šolanja se primanjkljaji učencev z učnimi težavami pri matematiki najpogosteje kažejo prav pri razvoju številskih predstav in obvladovanju računskih operacij. Pri reševanju aritmetičnih nalog je za boljše razumevanje in odpravljanje težav potrebno upoštevati različne spoznavne procese, ki so aktivni pri reševanju aritmetičnih nalog. Caramaza in McClosky (1987, v Kavkler 2002) sta oblikovala model treh stopenj, težave pri učencih lahko nastopijo v katerem koli delu tega procesa: a) predelovanje in povezovanje računskih znakov in besed v ustrezno aritmetično operacijo; b) priklic korakov določenega računskega postopka; c) priklic aritmetičnih dejstev iz spomina.

Prostorska predstavljalivost pomeni razumevanje geometrijskih pojmov in prostorskih odnosov, sposobnost orientacije v ravnini in prostoru. Znaki za težave pri prostorski orientaciji so npr.: učenec se slabo znajde na listu in na tabli, napačno zapisuje večmestna števila, napačno postavlja decimalne vejice, pri pisnem računanju začne pisati na napačni strani, netočno podpisuje števila, zaradi težav z orientacijo na številski osi lahko nastopijo tudi težave pri usvajanju pozitivnih in negativnih števil. *Če ima učenec težave s prostorskimi odnosi, mu lahko pomagajo dejavnosti, kot so: razvrščanje predmetov v enostavno tabelo, ki jo lahko narišemo tudi na tla; učitelj lahko učence spodbudi k izdelavi lastnih didaktičnih pripomočkov, k urjenju tehnike branja in pisanja, k risanju risb oz. skic, pripravi delovnega prostora, k učenju po korakih, k življenjskemu ponazarjanju problemov, k organizaciji zapisov idr.*

Predpogoj za učenje pojmov je po Gagneju (1985) učenje *razlikovanja* (sadje razlikujemo po barvi, geometrijske like po obliki ...). Učencem je potrebno zagotoviti raznolike čutne izkušnje, pridobljene iz narave ali s ponazorili; gre za obliko zaznavnega (perceptivnega) učenja, za zmožnost ugotavljanja tudi manjših razlik v dražljajih ter za prepoznavanje in razvrščanje predmetov in pojavov na tej osnovi. Če pojem obvladamo, ga znamo tudi prepoznati.

Za usvajanje matematičnih pojmov so ključne *reprezentacije pojmov*. Chapman (2001, v Hodnik Čadež 2003) poudarja, da reprezentacije omogočajo učencem, da komunicirajo na matematičen način, da modelirajo in interpretirajo realen, socialen in matematičen kontekst ter da raziskujejo in interpretirajo pomen matematičnih pojmov, relacij in procedur. Reprezentacije oz. načini učenčevega ravnanja z njimi omogočajo tudi spremljanje in ocenjevanje učenčevega napredovanja v matematičnem znanju. Bruner (1966, v Hodnik Čadež 2014) je z zaporedjem uporabe reprezentacij pri obravnavi matematičnih pojmov (najprej enaktivna, nato ikonična in nazadnje simbolična) opredelil tudi potek razvoja matematičnih pojmov pri učencu. Raziskave kažejo, da so bolj kot zaporedje reprezentacij pomembne relacije med reprezentacijami določenega matematičnega pojma (Chapman 2001) oz. fleksibilno prehajanje med različnimi reprezentacijami.

Reprezentirati pojem pomeni generirati primere, predstavo. Simbolična reprezentacija je zunanje napisana ali izgovorjena. Mentalna reprezentacija pa se

nanaša na interne sheme. Tako npr. ko govorimo o Pitagorovem izreku, nekomu pride na misel pravokotni trikotnik, drugemu algebraično zapisan izrek. Biti uspešen v matematiki pomeni imeti bogato mentalno reprezentacijo pojma. Tako lahko človek zgradi enega ali več mentalnih reprezentacij za isti matematični pojem. Če pride do integracije le-teh v eno samo reprezentacijo, je ta proces integracije povezan z abstrakcijo. Za fleksibilno rabo pojma je potrebno fleksibilno prehajanje med različnimi reprezentacijami. Zato je pomembno, da navajamo učence k rabi več reprezentacij in poudarjamo prehod med njimi. Reprezentacija je bogata, če vsebuje veliko povezanih vidikov tega pojma. Če ima premalo teh elementov, se to pokaže pri reševanju problemov. Najmanjša sprememba v strukturi problema ali celo v formulaciji le-tega namreč blokira reševanje. Zato je pomembno, da učitelj od samega začetka uvaja učence v rabo več reprezentacij, uvaja vizualizacijo, predpostavlanje, domnevanje, odkrivanje, translacijo (proces prehajanja med reprezentacijami), sintetiziranje, modeliranje, preverjanje idr.

Pojmov se ne učimo, temveč jih pridobivamo. V naši kognitivni strukturi sta navzoči dve celici: definicija pojma in pojmovna predstava. Pridobivanje pojmov pomeni oblikovanje pojmovnih predstav in pridobivanje besednega izraza oz. poimenovanja.

Primer: Učenec si zgradi pojmovno predstavo o krožnici na podlagi izkušenj, ki pa je lahko nepopolna ali napačna. Krožnico si npr. predstavlja kot sklenjeno krivuljo ali množico točk na sklenjeni krivulji. Njegova celica pojmovne predstave je polna, celica definicije pa prazna. Kasneje pri pouku v osnovni šoli sliši definicijo krožnice: »Krožnica je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od središča krožnice. Ta razdalja je polmer krožnice.« Če v tej situaciji pri učencu nastopi kognitivni konflikt in učenec ni zadovoljen s pojmovno predstavo, ki jo ima, lahko nastopi sprememba, dopolnitev pojmovne predstave. Ni pa nujno. Lahko napolni celico z definicijo, pri uporabi pa še vedno misli na krožnico kot na sklenjeno krivuljo (celica pojmovne predstave in celica definicije sta ločeni).

Tvorba pojmovne predstave je zelo pomembna, kajti pri reševanju problemov pogosteje uporabljamo pojmovno predstavo kot definicijo (Žakelj 2004). Pojmovna predstava je lahko precej drugačna od definicije. Učitelji pričakujejo, da se celica pojmovne predstave napolni kasneje in popolnoma kontrolirano tako, da je ekvivalentna z definicijo. Vendar se to ne zgodi vedno. Učenec se lahko definicijo nauči na pamet, celica pojmovne predstave pa ostane prazna ali napolnjena z napačnimi predstavami. Zato znati definicijo na pamet še ne pomeni razumeti pojem. Žakelj (2004) navaja, da je 77 % učencev osmega razreda, ki so sodelovali v raziskavi *Razumevanje matematičnih pojmov v osnovni šoli*, pravilno odgovorilo na vprašanje *Kdaj sta dve količini premo sorazmerni*, vendar pa je le 44 % učencev pravilno navedlo primere premo sorazmernih količin. Celica pojmovne predstave je bila pri teh učencih prazna ali pa napolnjena z napačnimi predstavami.

Učenje pojmov brez prave priložnosti, da obstoječe napačne pojmovne predstave popravimo oz. dopolnimo, vodi v učenje brez razumevanja, v učenje z memoriranjem, brez oblikovanja novih mrežnih povezav v konceptualno mrežo

znanja. Pri učenju novih matematičnih pojmov (Rugelj 1996) so poleg razvojne stopnje učenca pomembni tudi učiteljevo posredovanje novih pojmov, spodbujanje procesov, ki nastajajo pri matematičnem mišljenju. Za poučevanje učencev, zlasti v osnovni šoli, sta zelo pomembna tudi poznavanje kognitivnega razvoja učencev, kot je npr. poznavanje miselnih sposobnosti učencev, ki so potrebne za razumevanje določene učne snovi, ter vedenje o načinih za spodbujanje teh sposobnosti (Piciga 1995).

Procesi učenja, skozi katere učenci gradijo matematiko, vzporedno z učenjem matematike pa jih tudi razvijajo, so tudi slušno razumevanje, govorno sporočanje, *bralno razumevanje in pisno sporočanje*. Tudi snovalci posodobljenega učnega načrta za matematiko (Žakelj et al. 2011) so v učnem načrtu zapisali cilje, namenjene razvoju bralne pismenosti (npr. učenci/učenke razvijajo bralne zmožnosti: bralno razumevanje, odnos do branja, interes za branje; pridobivajo izkušnje z branjem za razumevanje, samostojno oblikujejo vprašanja in cilje raziskovanja, izpisujejo bistvene trditve; razpravljajo o potrebnih in zadostnih podatkih v nalogi; analizirajo, izpisujejo podatke ter povezujejo podatke v besedilu; ob branju matematičnega besedila razvijajo bralne strategije). Pri reševanju besedilnih nalog učenci/učenke prevajajo besedilne naloge v različne sheme (enačbe, diagrame, formule, algebrske izraze, geometrijske konstrukcije itd.), dano matematično pravilo, definicijo uporabljajo na besedni in simbolni ravni.

Poučevanje učencev z učnimi težavami je izziv tako za učence kot za učitelje in starše. Pri tem se zastavlja vprašanje usposobljenosti strokovnih delavcev za uspešno obravnavo učencev z učnimi težavami. Žakelj in Valenčič Zuljan (2014) v raziskavi *Učenci z učnimi težavami pri matematiki* ugotavljata, da učitelji razrednega pouka višje ocenjujejo svojo usposobljenost za izvajanje različnih oblik pomoči učencem z učnimi težavami kot učitelji matematike (npr. pri prilagajanju priprave na pouk, pri prilagajanju obravnave učne snovi, pri prilagajanju načinov utrjevanja znanja ter pri preverjanju in ocenjevanju znanja, z omogočanjem uporabe primernih učnih pripomočkov: žepno računalno, številski trak).

Po drugi strani pa učitelji matematike statistično značilno pogosteje kot učitelji razrednega pouka povezujejo učne težave s čustvenimi težavami učenca (strah pred neuspehom, potrto, občutek nemoči), s pomanjkljivimi učnimi in delovnimi navadami, z nizko motivacijo za šolsko delo, s šibkimi spodbudami za šolsko delo, s hiperaktivnim vedenjem in s socialno ogroženostjo. Podobno tudi Magajna et al. (2008) ugotavljajo, da so učitelji pri prepoznavanju učnih težav zelo pozorni na elementarna področja učenja: branje in pisanje, učenje računskih postopkov ter na vedenjske značilnosti učenca (npr. delovne navade, pozornost pri pouku, vedenjske motnje). Učne težave na enem področju pogosto pomenijo oviro tudi na drugem. Kot pojasnjuje Magajna (2013, v Poznič Cvetko 2013), je način pojavljanja težav pri branju in matematiki povezan tudi z značilnostmi posameznega jezika in sociokulturnega sistema. Tako se pri raziskovanju področja učnih težav po njenih

navedbah čedalje bolj uveljavlja multiperspektivni pristop, ki težav pri matematiki in pismenosti ne obravnava ločeno.

Pri opredeljevanju vsebin, pri katerih imajo učenci učne težave, je raziskava (Žakelj 2013) pokazala, da učitelji razrednega pouka ter strokovni delavci šolske svetovalne službe statistično pomembno pogosteje zaznavajo učne težave pri seštevanju in odštevanju s prehodom kot učitelji matematike. Učitelji matematike ter strokovni delavci šolske svetovalne službe pa statistično pomembno pogosteje zaznavajo učne težave pri geometriji, reševanju matematičnih problemov ter pri besedilnih nalogah.

Podobno dokument *Matematično izobraževanje v Evropi* (2012), v katerem so predstavljeni pogledi nacionalnih evropskih politik in primerjalna analiza poučevanja matematike v Evropi, navaja podatke o problematičnih predmetnih vsebinah in spretnostih. Na Irskem, v Litvi, Romuniji in Sloveniji, denimo, so bila kot pogosta težavna področja za učence prepoznana algebra, matematično sporazumevanje in kontekstualno reševanje problemov. Podatki iz raziskave *Evaluation on Mathematics* (Matematično izobraževanje v Evropi 2012) kažejo, da so danski učitelji sporazumevanje, učenje z reševanjem problemov in kontekstualno razumevanje matematike prepoznali kot najtežje uresničljive cilje.

Empirična raziskava

Na šolsko uspešnost učenca vplivajo različni dejavniki: kognitivni, socialni in emocionalni dejavniki, domače in šolsko okolje idr. Pomembno vlogo pri šolskih dejavnikih imajo tako organizacija pouka kot učiteljeva ravnanja pri poučevanju. Z empirično raziskavo smo raziskali procese učenja, ki učence najpogosteje ovirajo pri učenju matematike. Postavili smo si raziskovalni vprašanji:

1. Kateri procesi učenja po presoji učiteljev razrednega pouka in učiteljev matematike ovirajo učence pri učenju matematike?
2. Ali med učitelji razrednega pouka in učitelji matematike obstajajo razlike glede presoje procesov učenja, ki učence ovirajo pri učenju matematike?

Metodologija

Vzorec

V vzorec je bilo vključenih 266 strokovnih delavcev šol, od tega 181 učiteljev razrednega pouka in 85 učiteljev matematike.

Opis merskih instrumentov

Uporabili smo anketni vprašalnik, s katerim so anketiranci ocenjevali procese učenja, ki učence ovirajo pri učenju matematike. Izmed predlaganih procesov učenja so jih anketiranci lahko izbrali največ sedem. Izbrane možnosti so ocenili na tristopenjski deskriptivni lestvici: 1 – malo otežujejo, 2 – srednje otežujejo, 3 – zelo otežujejo.

Obdelava podatkov

Podatke anketnih vprašalnikov smo statistično obdelali v skladu z nameni in predvidevanji raziskave s pomočjo orodja R for Windows. Za obdelavo podatkov smo uporabili:

- frekvenčno porazdelitev za prikaz odgovorov na zaprta vprašanja,
- Mann-Whitneyjev test vsote rangov za ugotavljanje razlik med skupinama učiteljev: razredni učitelji, učitelji matematike.

Rezultati

Procesi učenja, ki učence najpogosteje ovirajo pri učenju matematike

Pregled povprečij rangov pokaže, da so tako učitelji razrednega pouka kot učitelji matematike najpogosteje izbirali naslednje procese učenja, ki učence ovirajo pri učenju matematike: razvoj številskih predstav (R razredni učitelj 116,3; R predmetni učitelj 116,3), branje in razumevanje besedila (R razredni učitelj 105,4; R predmetni učitelj 105,4), logično sklepanje (R razredni učitelj 89,9; R predmetni učitelj 102,1), razvoj matematičnih pojmov (R razredni učitelj 93, 9; R predmetni učitelj 89,2), uporabo strategij pri reševanju problemov (R razredni učitelj 83,2; R predmetni učitelj 91,5) ter razvoj prostorskih predstav (R razredni učitelj 75,3; R predmetni učitelj 76,0).

Deleži učiteljev, ki so posamezne procese ocenili z oceno 3 (*zelo otežujejo učenje*), so: razvoj številskih predstav (83 % učiteljev razrednega pouka in 83 % učiteljev matematike), branje in razumevanje besedila (70 % učiteljev razrednega pouka in 69 % učiteljev matematike), razvoj matematičnih pojmov (76 % učiteljev razrednega pouka in 60 % učiteljev matematike), logično sklepanje (61 % učiteljev razrednega pouka in 76 % učiteljev matematike), razvoj prostorskih predstav (51 % učiteljev razrednega pouka in 53 % učiteljev matematike), razvoj algebrskih predstav (57 % učiteljev razrednega pouka in 69 % učiteljev matematike), uporaba strategij pri reševanju problemov (61 % učiteljev razrednega pouka in 72 % učiteljev matematike).

Preglednica 1: Števila (n) in strukturni odstotki ($F\%$) učiteljev o presoji, kateri procesi učenja ovirajo učence pri učenju matematike

Procesi učenja	Skupina	malo otežujejo $f_1\%$	srednje otežujejo $f_2\%$	zelo otežujejo $f_3\%$	M	n	F %
razvoj matematičnih pojmov	razredni učitelj	8,5	24,8	66,7	2,6	130	72,0
	učitelj mat.	5,5	34,5	60,0	2,5	55	65,4
razvoj prostorskih predstav	razredni učitelj	9,1	39,4	51,5	2,4	99	54,6
	učitelj mat.	9,8	37,2	52,9	2,4	51	60,7
razvoj številskih predstav	razredni učitelj	7,2	9,6	83,2	2,8	167	92,9
	učitelj mat.	7,7	9,2	83,1	2,8	65	77,3
učenje algoritmov ter formul	razredni učitelj	10,5	50,0	39,5	2,3	76	42,0
	učitelj mat.	15,1	39,4	45,5	2,3	33	39,3
logično sklepanje	razredni učitelj	6,1	32,1	61,8	2,6	131	72,3
	učitelj mat.	7,3	16,4	76,4	2,7	55	65,4
zapisovanje matematičnih simbolov	razredni učitelj	7,3	39,0	53,7	2,5	82	45,3
	učitelj mat.	11,1	37,0	51,9	2,4	27	32,0
razvoj algebrskih predstav	razredni učitelj	6,4	35,9	57,7	2,5	78	43,0
	učitelj mat.	2,8	27,8	69,4	2,7	36	42,8
branje in razumevanje besedila	razredni učitelj	11,0	18,6	70,3	2,6	145	80,0
	učitelj mat.	6,2	24,6	69,2	2,6	65	77,3
pisno matematično izražanje	razredni učitelj	7,7	43,6	48,7	2,4	78	43,0
	učitelj mat.	8,0	48,0	44,0	2,4	25	30,0
ustno matematično izražanje	razredni učitelj	9,5	51,4	39,2	2,3	74	40,8
	učitelj mat.	8,3	62,5	29,2	2,2	24	28,5
uporaba strategij pri reševanju problemov	razredni učitelj	5,7	32,5	61,8	2,6	123	67,9
	učitelj mat.	6,4	21,3	72,3	2,7	47	66,0
grafično-motorične spretnosti	razredni učitelj	21,3	46,1	32,6	2,1	89	49,1
	učitelj mat.	14,8	51,9	33,3	2,2	27	32,0

Legenda:

n – število učiteljev, ki so izbrali posamezno področje

$F\%$ – odstotek učiteljev, ki so izbrali posamezno področje

$f_1\%$ – odstotek učiteljev, ki so izbrano področje ocenili na lestvici z 1

$f_2\%$ – odstotek učiteljev, ki so izbrano področje ocenili na lestvici z 2

$f_3\%$ – odstotek učiteljev, ki so izbrano področje ocenili na lestvici s 3

M – aritmetična sredina odgovorov učiteljev (odgovori so na lestvici: 1 – malo otežujejo, 2 – srednje otežujejo, 3 – zelo otežujejo)

Kako močno posamezni procesi ovirajo učenje, povedo tudi aritmetične sredine. Po mnenju učiteljev razrednega pouka: razvoj številskih predstav ($M = 2,8$), sledijo razvoj matematičnih pojmov ($M = 2,6$), logično sklepanje ($M = 2,6$), branje in razumevanje besedila ($M = 2,6$) ter uporaba strategij pri reševanju problemov ($M = 2,6$). Procesu učenja, ki po mnenju učiteljev matematike najbolj otežujejo učenje, pa so: razvoj številskih predstav ($M = 2,8$), sledijo logično sklepanje ($M = 2,7$),

razvoj algebrskih predstav ($M = 2,7$), uporaba strategij pri reševanju problemov ($M = 2,7$) ter branje in razumevanje besedila ($M = 2,6$). Vsi procesi učenja, ki so jih učitelji ocenili kot procese učenja, ki najbolj ovirajo učenje, imajo dokaj izenačene povprečne ocene glede stopnje zahtevnosti, in sicer od 2,6 do 2,8, to pa je zelo blizu *zelo otežujejo učenje*.

Kot je razvidno iz preglednice 1, so učitelji kot potencialno oviro pri učenju najmanj pogosto izbrali ustno matematično izražanje (28 % učiteljev matematike in 40,8 % učiteljev razrednega pouka), sledijo učenje algoritmov (42 % učiteljev razrednega pouka, 39 % učiteljev matematike), pisno matematično izražanje (43 % učiteljev razrednega pouka, 30 % učiteljev matematike), grafično-motorične spretnosti (32,6 % učiteljev razrednega pouka, 33,3 % učiteljev matematike). Glede na aritmetične sredine odgovorov so to procesi učenja, ki srednje otežujejo učenje: učenje algoritmov ($M = 2,3$ učitelji razrednega pouka in $M = 2,3$ učitelji matematike), ustno matematično izražanje ($M = 2,3$ učitelji razrednega pouka in $M = 2,2$ učitelji matematike), pisno matematično izražanje ($M = 2,4$ učitelji razrednega pouka in $M = 2,4$ učitelji matematike) ter grafično-motorične spretnosti ($M = 2,1$ učitelji razrednega pouka in $M = 2,2$ učitelji matematike).

Razlike med učitelji matematike in učitelji razrednega pouka pri opredeljevanju procesov učenja, ki učencem povzročajo težave pri učenju matematike

Opredeljevanje procesov učenja, ki so povezani z učnimi težavami učencev, se statistično značilno ne razlikuje med učitelji razrednega pouka in učitelji matematike. Oboji kot procese učenja, pri katerih se najpogosteje pojavljajo učne težave pri učenju matematike, izpostavljajo razvoj številskih predstav, razvoj matematičnih pojmov, logično sklepanje ter branje in razumevanje besedila. Malo večjo razliko beležimo le pri logičnem sklepanju, ki ga učitelji matematike nekoliko bolj izpostavljajo kot potencialno oviro ($p = 0,09$; $R = 89,9$ učitelji razrednega pouka; $R = 102,2$ učitelji matematike; $M = 2,3$ učitelji razrednega pouka, $M = 2,6$ učitelji matematike)

Preglednica 2: Izid Mann-Whitneyjevega testa vsote rangov razlik v mnenjih učiteljev glede procesov učenja, s katerimi so povezane učne težave

Procesi učenja	Skupina	n	F %	M	SD	R	W	P
razvoj matematičnih pojmov	razredni učitelj	129	72,0	2,6	0,6	93,9	3727,5	0,52
	učitelj mat.	55	65,4	2,5	0,6	89,2		
razvoj prostorskih predstav	razredni učitelj	99	54,6	2,4	0,7	75,3	2500,5	0,92
	učitelj mat.	51	60,7	2,4	0,7	76,0		
razvoj številskih predstav	razredni učitelj	167	92,9	2,8	0,6	116,6	5440	0,97
	učitelj mat.	65	77,3	2,8	0,6	116,3		
učenje algoritmov ter formul	razredni učitelj	76	42,0	2,3	0,6	54,6	1222	0,82
	učitelj mat.	33	39,3	2,3	0,7	56,0		
logično sklepanje	razredni učitelj	131	72,3	2,6	0,6	89,9	3127	0,09
	učitelj mat.	55	65,4	2,7	0,6	102,1		

Procesi učenja	Skupina	n	F %	M	SD	R	W	P
zapisovanje matematičnih simbolov	razredni učitelj	82	45,3	2,5	0,6	55,5	1145	0,77
	učitelj mat.	27	32,0	2,4	0,7	53,6		
razvoj algebrskih predstav	razredni učitelj	78	43,0	2,5	0,6	55,2	1228	0,21
	učitelj mat.	36	42,8	2,7	0,5	62,4		
branje in razumevanje besedila	razredni učitelj	145	80,0	2,6	0,7	105,4	4691	0,95
	učitelj mat.	65	77,3	2,6	0,6	105,8		
pisno matematično izražanje	razredni učitelj	78	43,0	2,4	0,6	52,6	1019	0,71
	učitelj mat.	25	30,0	2,4	0,6	50,2		
ustno matematično izražanje	razredni učitelj	74	40,8	2,3	0,6	50,5	962,5	0,49
	učitelj mat.	24	28,5	2,2	0,6	46,4		
uporaba strategij pri reševanju problemov	razredni učitelj	123	67,9	2,6	0,6	83,2	2610,5	0,25
	učitelj mat.	47	66,0	2,7	0,6	91,5		
grafično-motorične spretnosti	razredni učitelj	89	49,1	2,1	0,7	57,8	1141,5	0,67
	učitelj mat.	27	32,0	2,2	0,7	60,7		

Legenda:

n – število učiteljev, ki so izbrali posamezno področje

F % – odstotek učiteljev, ki so izbrali posamezno področje

M – aritmetična sredina odgovorov učiteljev (odgovori so na lestvici: 1 – malo otežujejo, 2 – srednje otežujejo, 3 – zelo otežujejo)

SD – standardna deviacija

R – povprečni rang

W – Mann-Whitneyjev test vsote rangov

P – tveganje pri zaključevanju o statistični pomembnosti razlik (razlika je statistično pomembna – $P < 0,05$)

Glede na delež učiteljev pri izbiri procesov ugotovljamo še razliko pri grafično-motoričnih spretnostih in pri algebrskih predstavah. 49 % učiteljev razrednega pouka je med prvimi sedmimi procesi izbralo tudi grafično-motorične spretnosti, pri čemer jih je 33 % odgovorilo, da zelo ovirajo učenje. 43 % učiteljev matematike je med prvimi sedmimi procesi izbralo tudi razvoj algebrskih predstav, pri čemer jih je 69 % odgovorilo, da le-te zelo ovirajo učenje. Sicer je največ učiteljev tako razrednega pouka kot tudi učiteljev matematike izbralo razvoj številskih predstav, oboji s povprečno oceno $M = 2,8$ (*zelo ovirajo učenje*) ter branje in razumevanje besedila, prav tako oboji s povprečno oceno $M = 2,6$, ki je blizu oceni *zelo ovirajo učenje*. Podobno so tako učitelji razrednega pouka kot učitelji matematike izbrali ustno matematično izražanje (40 % učiteljev razrednega pouka in 28 % učiteljev matematike) kot proces učenja, ki po njihovi presoji najmanj ovira učenje matematike, sledijo učenje algoritmov in pisno matematično izražanje.

Interpretacija

Rezultati raziskave kažejo, da so si učitelji razrednega pouka in učitelji matematike v presoji pri opredeljevanju ovir dokaj enotni. Oboji kot potencialne

ovire uspešnemu učenju matematike izpostavljajo razvoj številskih predstav, branje in razumevanje besedila, razvoj matematičnih pojmov, logično sklepanje in tudi razvoj algebrskih predstav. Omenjeni procesi so kognitivno zahtevni in za učenje matematike pomembni. Po drugi strani pa nas rezultati opozarjajo, da se težave, prepoznane že na razredni stopnji, nadaljujejo tudi na predmetni stopnji.

Težave z *razvojem številskih predstav* je izrazilo 92,9 % učiteljev razrednega pouka in 77,3 % učiteljev matematike, od tega velika večina z oceno *zelo otežujejo učenje*. Težave z uporabo strategij reševanja problemov pa je izrazilo 77 % učiteljev razrednega pouka in 66 % učiteljev matematike. Tudi rezultati drugih raziskav (npr. Vukovic et al. 2013; Matematično izobraževanje v Evropi 2012; Magajna et al. 2008), ki so proučevali učne težave učencev z različnih perspektiv in razlogov, pogosto kot težavna področja izpostavljajo *učenje računskih spretnosti, razvoj številskih predstav in reševanje aritmetičnih problemov*. Vzroke za težave pri razvoju številskih predstav Vukovic et al. (2013) povezujejo tudi s strahom pred matematiko. Ugotovili so, da anksioznost bolj negativno vpliva na učenje računskih spretnosti, na razvoj številskih predstav in na reševanje aritmetičnih problemov, kot na reševanje geometrijskih problemov. Prav tako Kmetič (2013, v Poznič Cvetko 2013) opozarja, da se na razredni stopnji pogosto zatakne pri številskih predstavah. Pri manjših številih se otrok vsakokrat s štetjem prepriča, ali ima prav, pri večjih številih pa si s štetjem ne more pomagati, zato mora usvojiti številске predstave. Posledično, če ima učenec šibke številске predstave, se tako pojavijo tudi težave pri računskih operacijah, še posebej pri odštevanju. Ugotovitve raziskave, da so razvoj in razumevanje matematičnih pojmov, razvoj številskih predstav, branje in razumevanje besedila procesi učenja, pri katerih imajo učenci najpogostejše učne težave, so konsistentni z izidi raziskave, v kateri Žakelj (2013) ugotavlja, da največ učiteljev zaznava učne težave učencev pri poštevanju, pri seštevanju in odštevanju s prehodom, pri količinah/merskih enotah/pretvarjanju, reševanju matematičnih problemov ter pri besedilnih nalogah. To so vsebine, ki jih učenci usvajajo skozi prej omenjene procese učenja in jim, kot kažejo rezultati te raziskave, pogosto zelo otežujejo učenje.

Težave z *razvojem matematičnih pojmov* je izrazilo 72 % učiteljev razrednega pouka in 65 % učiteljev matematike, od tega velika večina z oceno *zelo otežujejo učenje*. Omenjeni izidi se skladajo z rezultati raziskav (Žakelj 2004; Rugelj 1996; Nacionalno preverjanje znanja 2011, 2012, 2013).

Avtorji poročil Nacionalnega preverjanja znanja za obdobje od leta 2010 do leta 2013 poudarjajo, da so učenci dokaj uspešni pri izvajanju rutinskih postopkov, uporabi ustreznih strategij reševanja znanih problemov, težave pa imajo pri reševanju nalog iz prostorske geometrije, ki so povezane z razumevanjem geometrijskih pojmov in odnosov med geometrijskimi elementi, pri reševanju življenjskih problemov, ki so povezani z razumevanjem odstotkov. Nevralgične točke učencev navajajo tudi pri razumevanju pojmov iz verjetnosti, pri številskih

predstavah (npr. težave pri razumevanju negativnih števil), pri pretvarjanju količin idr.

Učenje z razumevanjem pomeni, da ima učenec priložnost dopolniti ali spremeniti nepopolne ali napačne pojmovne predstave, zato učitelj ustvarja raznolike situacije in izzive. Npr. učenčeva nepopolna pojmovna predstava o premo sorazmernih količinah je lahko: »Količini sta premo sorazmerni, če se z večanjem ene večja tudi druga.« Situacija, ki lahko sproži kognitivni konflikt, je npr. soočanje s situacijami, pri katerih se vzporedno z večanjem prve količine večja druga s kvadratno rastjo, nato z eksponentno rastjo idr. Učenec spozna, da večanje druge količine lahko poteka na različne načine in da večanje druge količine ni zadosten pogoj za premo sorazmerni količini. To v njem sproži kognitivni konflikt in ustvari priložnost za spreminjanje nepopolnih/napačnih pojmovnih predstav.

Težave z *branjem in razumevanjem besedila* je izrazilo 80 % učiteljev razrednega pouka in 77 % učiteljev matematike. Vzroki učnih težav so lahko tudi primanjkljaji na področju jezika ter slabše razvite perceptivne zmožnosti. Pečjak in Gradišar (2002) ugotavljata, da se motivacija za branje zmanjša ob prehodu z nižje na višjo stopnjo osnovne šole (okrog 10. leta starosti), ko se pri učencih začne adolescenca. Na bralno motivacijo neugodno vplivajo tudi dejavniki šolskega okolja, npr. večji razredi, večji poudarek na zunanji motivaciji in ocenah, preveč frontalnega pouka. Za učence z učnimi težavami so pri besedilnih nalogah pomembna: jasnost navodil oz. oblikovanje vprašanj, primerna velikost besedila, ustrezní razmik med vrsticami, ustrezna pisava, ki je enostavna, označevanje nalog in preglednost med njimi, jasna navodila, krajša, poudarjena glavna misel ali ključni pojmi. Izogibamo se večstopenjskim navodilom, oblikovanju strukturiranih navodil, pri daljših nalogah, naj bo več krajših, enostavnih povedi; poudarjena glavna misel ali ključni pojem; v enem stavku naj ne bo več podatkov in vprašanj; vprašanja ne postavljamo v obliki odvisnega stavka; izpustimo besedilo, ki je za rešitev naloge nepomembno idr.

Težave pri razvoju *algebrskih predstav* je izpostavilo 43 % učiteljev matematike, od teh pa jih je kar 69,4 % izrazilo, da le-te zelo močno ovirajo učenje matematike. Dostikrat se začetne naloge pri algebri delajo hitro in ni časa, da bi učenci dojeli smisel, da bi videli izraz kot matematični objekt. Geeno (1982, v Žakelj 2004) je ugotovil, da reševanje problemov spremljajo nesistematične napake, ki kažejo na pomanjkanje znanja strukturalnih lastnosti algebre. Učenci ne znajo poenostaviti najpreprostejših izrazov. Učijo se procedur, namesto da bi skušali razumeti strukturo. Pogoste napake: $37x - 4$ skrčijo v izraz $33x$; $2xy - 2y$ skrčijo v izraz x . Učence zmede, zakaj je $2a + a + 15 = 3a + 15$, medtem ko $a + a + 2a$ pa ni $3a \cdot 2$. Ali pa: Če v $a \cdot b$ zamenjam a z $(-a)$ je to $-a \cdot b$, če pa v $a \cdot b$ zamenjam b z $(-b)$, pa to ni $a \cdot b$.

Težave so povezane z razumevanjem strukture, ki jo spremlja še jezik simbolov. Po Skempu (1986, v Žakelj 2004) imajo simboli, s katerimi označujemo pojme, lahko enako površinsko strukturo (npr. $2x$, 24 , dx) in različno globinsko strukturo

(dvakrat x , štiriindvajset, diferencial ...). Če npr. učenec izraz $(2x + 3)/x$ krajša z x , pomeni, da ne razume globlje strukture. Problem je lahko že dejstvo, da en simbol včasih označuje različne pojme (npr. p je premica ali p kot spremenljivka v izrazu $2p + 2$), vendar pa v danem kontekstu moramo vedeti, za katere koncepte gre. Razumevanje globinske strukture pojma pomeni pojem razumeti na abstraktnem nivoju. Zato bi morala biti uvedba simbolizma zadnja stopnja pri učenju pojma. Šele takrat, ko je pojem usvojen na nivoju opisa, prepoznavanja, uvedemo simbolni zapis.

Na težave pri razvoju algebrskih predstav opozarjajo tudi rezultati nacionalnega preverjanja znanja iz matematike (Nacionalno preverjanje znanja 2011, 2012, 2013). Iz analiz dosežkov učencev razberemo, da se težave učencev pri razvoju algebrskih predstav kažejo pri posploševanju, pri poenostavljanju algebrskih izrazov, pri zapisovanju algebrskih izrazov, pri iskanju vrednosti le-teh idr. Pri tem pa avtorji poročil navajajo velike težave tudi z zapisovanjem in uporabo matematičnih simbolov. Tako so v priporočilih posebej zapisali, da svetujejo, da učitelji posebno pozornost namenijo pravilnim zapisom rešitev in ugotovitev ter uporabi korektne matematične simbolike (Nacionalno preverjanje znanja 2013).

Procesi učenja, ki po presoji tako učiteljev razrednega pouka kot učiteljev matematike najmanj ovirajo učenje matematike, so *ustno matematično izražanje* (40 % učiteljev razrednega pouka in 28 % učiteljev matematike), sledijo *učenje algoritmov* in *pisno matematično izražanje*. Pisno matematično izražanje ter učenje algoritmov sta procesa učenja, ki sta pri pouku matematike v slovenski šoli precej poudarjena, učitelji jima tradicionalno namenijo veliko časa, kar posledično pomeni, da učenci te težave lažje omilijo, zato jih učitelji ne izpostavljajo kot najmočnejše ovire pri učenju. Po drugi strani pa učitelji, glede na izkušnje, dajejo ustnemu izkazovanju matematičnega znanja bistveno manjšo težo kot pisnemu (tudi nacionalno preverjanje znanja je pri matematiki le pisno) in tudi pri opredeljevanju ovir so ustno izražanje matematičnega znanja izbrali kot proces učenja, ki potencialno najmanj ovira učenje. V ozadju lahko domnevamo, da so učenci redkeje soočeni s situacijami, kjer je potrebno znanje verbalizirati na ravni ustne komunikacije, ter da učitelji posvečajo manj pozornosti ustni komunikaciji tako z vidika učenčeve aktivnosti kot tudi z vidika učnih težav. Odsotnost jezika in komunikacije pri pouku matematike seveda ni dobra za razvoj pojmovnih predstav. Z individualnim besednim izražanjem ali v skupinski komunikaciji učenci osmišljujejo svoj izkustveni svet in gradijo globlje razumevanje. Dobro vodena diskusija pelje do kognitivnega in pojmovnega rekonstruiranja, pri čemer pa se mora subjektivno znanje stalno preverjati z objektivnim.

Da lahko šola učinkovito izvaja ustrezne ukrepe pomoči, je potrebno učne težave učencev pravočasno prepoznati, odkriti vzroke in značilnosti učnih težav. Ko težave prepoznamo, predvidimo ukrepe pomoči glede na metodične in didaktične pristope in organizacijo dela pri pouku. Zgodaj odkrite težave in načrtovanje ustreznih oblik pomoči lahko v veliki meri pomagajo pri nadaljnjem otrokovem

razvoju na intelektualnem in socialnem področju. Clement Morrison (2008) loči dve ravni prilagoditev:

- minimalna raven, ki vključuje dodaten čas za dokončanje nalog, dodatno razlago vsebine v manjši skupini, uporabo konkretnih pripomočkov, prilagajanje podajanja navodil, krajše in strukturirane naloge, manj nalog itd.;
- zmerna raven, kjer se učencem prilagajajo učni cilji, denimo različna stopnja zahtevnosti bralnega gradiva, matematičnih nalog, motoričnih dejavnosti itd.

Pri učencih z učnimi težavami najpogosteje uporabljamo prilagoditve na minimalni ravni. Včasih tudi prilagoditve ne zadoščajo, zato je treba učencem ponuditi tudi ustrezno količino pomoči in opor, npr. učne pripomočke.

Tudi Williams (2008) opozarja na pravočasno odzivanje na različne potrebe učencev in poudarja, da sta prvi dve leti šolanja temelj za nadaljnje učenje matematike. Prepoznavanje težav na tej stopnji lahko prepreči, da bi se otroci oprijeli neprimernih strategij, si utrdili napačne predstave in pojme, kar lahko vodi v dolgoročne ovire pri učenju. Otroci, pri katerih tako tveganje obstaja, morajo biti obravnavani posebej, že s preventivnimi predšolskimi programi. Zgodnje ukrepanje med drugim prepreči razvoj tesnobe, saj ta pri starejših učencih spada med pomembne dejavnike neuspešnosti.

Zaključek

Z raziskavo smo zbrali in analizirali mnenja učiteljev o procesih učenja, ki učencem pri učenju matematike povzročajo največ težav. Glede na visoko stopnjo ujemanja med učitelji matematike in razrednimi učitelji pri presoji procesov učenja, ki učencem povzročajo težave, bi lahko sklepali, da so učitelji na izbrane procese zelo pozorni, da jih opredeljujejo kot ključne za uspešno učenje matematike po vsej vertikali osnovne šole.

Na osnovi rezultatov raziskave predlagamo nadaljevanje razvojno-raziskovalnega dela na področju dela z učenci z učnimi težavami pri matematiki. Pobude se nanašajo na odkrivanje in odpravljanje vzrokov za učne težave učencev, na prilagajanja učnih metod za povečanje odgovornosti in motivacije za učenje ter na spodbujanje formativnega spremljanja in pravočasnega odzivanja na potrebe učencev, spodbujanje veščin samoregulacijskega učenja in metakognitivnih strategij, ki jih strokovnjaki uvrščajo med temeljne veščine 21. stoletja (Instance in Dumont 2013).

Amalija Žakelj, PhD

Processes of Learning with Regard to Students' Learning Difficulties in Mathematics

Students learn mathematics through a variety of learning processes: the development of mathematical concepts, the development of numerical and spatial concepts, logical reasoning, reading and comprehension, use of strategies in problem solving, implementation of algorithms, written mathematical expression, oral mathematical expression, etc.

For the acquisition of mathematical concepts *representation of conceptions* is of key importance. To represent a concept means to generate examples, ideas. The symbolic conception is externally written or pronounced, and mental conception is related to internal schemes. *Numerical skills* include understanding of numerical symbols and characters for different operations, understanding of numerical operations, ability to read and write mathematical symbols, understanding numerical relations (Kavaš 2002, taken from Žakelj 2004). *Spatial imagination* means understanding geometric concepts and spatial relationships, ability of orientation in the plane and in space. The development of reading literacy means reading comprehension, attitude toward reading, reading strategies, etc.

In the empirical study, we investigated the processes of learning that for students, according to the judgements of primary school teachers and those of mathematics teachers, appear to be the most common barriers to learning mathematics. From the list of proposed learning processes: the development of mathematical concepts, the development of spatial concepts, development of numerical conceptions, learning algorithms and formulas, logical reasoning, writing mathematical symbols, the development of algebraic ideas/conceptions, reading and comprehension of texts, written mathematical expression, oral mathematical expression, the use of strategies in solving problems, graphical-motor skills, the survey respondents could choose a maximum of seven items and they evaluated them on a three-point descriptive scale as: 1 – makes learning a little difficult, 2 – makes learning medium difficult, 3 – makes learning very difficult.

The identification of learning processes *that are associated with pupils' learning difficulties* is not statistically significantly different between primary teachers and teachers of mathematics. Most teachers, both, primary teachers and mathematics teachers, selected the ability to develop numerical conception, both with an average rating of $M = 2.8$ as *greatly hinder learning*, as well as reading and understanding of text, also both groups of teachers with an average rating of $M = 2.6$, which is close to the estimation of *greatly hinder learning*. This is followed by logical reasoning (maths teachers: $M = 2.7$; class teachers $M = 2.6$), the development of mathematical concepts (primary teachers: $M = 2.6$), the development of algebraic

ideas (teachers of mathematics: $M = 2.7$); the use of strategies to solve problems (maths teachers: $M = 2.7$; primary teachers: $M = 2.6$).

The percentages of teachers who with a large majority rated individual processes on the scale as – makes learning very difficult are as follows: *development of numerical conceptions* (92.9% of primary teachers and 77.3% of mathematics teachers); *development of mathematical concepts* (72% of primary teachers and 65% of mathematics teachers), *reading and text comprehension* (80% of primary teachers and 77% of mathematics teachers).

The learning processes which according to the judgement of both primary teachers and mathematics teachers *hinder the learning of mathematics the least* are *oral mathematical expression* (40% of primary teachers and 28% of mathematics teachers), and learning algorithms as well as written mathematical expressions.

Researchers Vukovic et. al. (2013) also explain the reasons for the difficulties in developing numerical conceptions with the fear of mathematics. They found that anxiety has a more negative impact on the learning of numeracy, on the development of numerical imagination, and on solving arithmetic problems, than on solving geometric problems. The causes of learning difficulties may also be explained with deficits in language and less developed perceptive abilities.

For schools to be able to efficiently implement appropriate assistance measures it is necessary to timely identify the students' learning difficulties and to detect the causes and characteristics of learning difficulties. When the difficulties are recognized, assistance measures can be planned according to the methodical and didactic approaches and to the organization of work in the classroom. Early identified difficulties and the planning of appropriate forms of assistance can greatly help in further children's development as well as in the intellectual and social area.

Also Williams (2008) draws attention to timely response to the diverse needs of students and stresses that the first two years of schooling are the foundation for further learning of mathematics. Identifying problems at this stage prevents children to cling to inappropriate strategies, strengthen their misconceptions and concepts, which can lead to long-term barriers to learning. Children, with whom such risks exist, must be treated separately, as early as through preventive preschool programmes. Early action, inter alia, prevents the development of anxiety, which for older students is a very important factor of failure.

With the study we collected and analysed teachers' opinions about the processes of learning that cause pupils major obstacles in learning mathematics. Given the high degree of correlation between mathematics teachers and primary teachers in assessing the processes of learning, which cause pupils problems, it might be concluded that teachers are very attentive to selected processes, and that they define them as the key to successful learning of mathematics along the whole vertical of basic school.

LITERATURA

- Chapman, J. O. 2001. Teachers' Self-representations in Teaching Mathematics. *Mathematics Teacher Education*. 13: 289–294.
- Clement Morrison, A. 2008. Prilagoditev za učence s posebnimi potrebami. V *Razvoj inkluzivne vzgoje in izobraževanja – izbrana poglavja v pomoč šolskim timom*, (ur.) Marija Kavkler et al. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.
- Gagne, R. M. 1985. *The conditions of learning and theory of instruction*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Hodnik Čadež, Tatjana. 2003. Pomen modela reprezentacijskih preslikav za učenje računskih algoritmov. *Didactica Slovenica*. 18 (1): 3–22.
- Hodnik Čadež, Tatjana. 2014. Reprezentiranje matematičnih pojmov pri pouku matematike na razredni stopnji. V *Učne težave pri matematiki in slovenščini – izziv za učitelje in učence*, (ur.) Amalija Žakelj. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo (in print).
- Instance, D., Dumont, H. 2013. Smernice za učna okolja v 21. stoletju. V *O naravi učenja*, (ur.) S. Sentočnik. Ljubljana: ZRSS.
- Kavkler, Marija. 2002. Kako otroci rešujejo osnovne aritmetične probleme. V *Specifične učne težave otrok in mladostnikov: prepoznavanje, razumevanje, pomoč*, (ur.) Nataša Končnik - Goršič, M. Kavkler, 157–171. Ljubljana: Svetovalni center za otroke, mladostnike in starše.
- Kresal Sterniša, Barbka, Plevnik, Tatjana, ur. 2012. *Matematično izobraževanje v Evropi: skupni izzivi in nacionalne politike (Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies)*. Ljubljana: Ministrstvo za izobraževanje, znanost, kulturo in šport.
- Magajna, Lidija, Pečjak, Sonja, Peklaj, Cirila, Čačinovič Vogrinčič, Gabi,regar Golobič, Ksenija, Kavkler, Marija, Tancig, S. 2008. *Učne težave v osnovni šoli. Problemi, perspektive, priporočila*. Ljubljana: Zavod Republike Slovenije za šolstvo.
- Marentič Požarnik, Barica. 2000. *Psihologija učenja in pouka*. Ljubljana: DZS.
- Nacionalno preverjanje znanja*. 2011. Letno poročilo o izvedbi v šolskem letu 2010/2011. Ljubljana: Državni izpitni center.
- Nacionalno preverjanje znanja*. 2012. Letno poročilo o izvedbi v šolskem letu 2011/2012. Ljubljana: Državni izpitni center.
- Nacionalno preverjanje znanja*. 2013. Letno poročilo o izvedbi v šolskem letu 2012/2013. Ljubljana: Državni izpitni center.
- Pečjak, Sonja, Gradišar, A. 2002. *Bralne učne strategije*. Ljubljana: ZRSS.
- Peklaj, Cirila. 2012. *Učenci z učnimi težavami v šoli in kaj lahko stori učitelj*. 1. izd. Ljubljana: Znanstvena založba Filozofske fakultete.
- Piciga, Darja. 1995. *Od razvojne psihologije k drugačnemu učenju in poučevanju*. Nova Gorica: Educa.
- Poznič Cvetko, S. 2013. Učne težave pri matematiki in slovenščini je treba obravnavati skupaj <http://www.zrss.si/utmis2013/files/UTMIS2013-Prispevek-STA.pdf> (Pridobljeno 2. 1. 2014)
- Rugelj, Marina. 1996. *Konstrukcija novih matematičnih pojmov*. Doktorsko delo. Univerza v Ljubljani. Filozofska fakulteta.

Vukovic Rose K., Kieffer Michael J., Bailey Sean P., Harari, Rachel R. 2013. Mathematics anxiety in young children: Concurrent and longitudinal associations with mathematical performance. *Contemporary Educational Psychology*. 38: 1–10.

Williams, P. 2008. Independent Review of Mathematics Teaching in Early Years Settings and Primary Schools: Final Report. London: DCSF: <http://publications.teachernet.gov.uk/eOrderingDownload/Williams%20Mathematics>. (Pridobljeno 11. 1. 2014)

Žakelj, Amalija, Prinčič Röhler, Alica, Perat, Zvonko, Lipovec, Alenka, Vršič, Vesna, Repovž, Boštjan, Senekovič, Jožef, Bregar Umek, Zdenka. 2011. *Učni načrt, Program osnovna šola, Matematika*. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo. http://www.mizs.gov.si/fileadmin/mizs.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf. (Pridobljeno 15. 12. 2013).

Žakelj, Amalija. 2013. Pristopi učiteljev pri oblikah pomoči učencem z učnimi težavami pri matematiki (Teaching strategies for helping students with difficulties in learning mathematics). *Revija za elementarno izobraževanje*, 6 (1): 5–25.

Žakelj, Amalija. 2004. *Procesno-didaktični pristop in razumevanje matematičnih pojmov v osnovni šoli*. Doktorsko delo. Univerza v Ljubljani.

Žakelj, Amalija, Valenčič Zuljan, Milena. 2014. *Učenci z učnimi težavami pri matematiki*. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo (in print).