TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE LOS CONCEPTOS DE ANÁLISIS COMBINATORIO Y PROBABILIDAD, EN EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS DE SANTA ROSA DE CABAL, RISARALDA AÑO 2016

JAIRO GERMÁN CELEMÍN RÍOS

Trabajo de grado para optar el título de
MAGISTER EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
LÍNEA DE ESTADÍSTICA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
MAESTRÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
PEREIRA, COLOMBIA
2017

TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DE LOS CONCEPTOS DE ANÁLISIS COMBINATORIO Y PROBABILIDAD, EN EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS DE SANTA ROSA DE CABAL, RISARALDA AÑO 2016

JAIRO GERMÁN CELEMÍN RÍOS

Director

MSc. JOSÉ RUBIEL BEDOYA SÁNCHEZ

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

MAESTRÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PEREIRA, COLOMBIA

2017

NOTA DE ACEPTACIÓN

FIRMA DEL JURADO

FIRMA DEL JURADO

FIRMA DEL DIRECTOR

Pereira, Abril de 2017

DEDICATORIA

A DIOS POR SU INMENSA MARAVILLA

A mi madre y mi padre Jairo QEPD por sus motivaciones, ayudas y orientaciones durante toda mi vida.

A mi esposa Claudia, quien es mi motivación permanente para el logro de los proyectos.

A mis hijos por su acompañamiento.

A mis hermanos por su gratitud.

A la rectora Nancy por su apoyo incondicional y comprensión para el logro de la investigación.

A mi compañero, amigo, JOSÉ RUBIEL SÁNCHEZ, por su acompañamiento y motivación, sin él este trabajo no fuera una realidad transfinitas gracias.

Resumen

La presente tesis tiene como objetivo analizar la Transposición Didáctica que se hace de los conceptos de análisis combinatorio y probabilidad, en la Educación Básica secundaria y Media en la Institución Educativa Francisco José de Caldas del Municipio de Santa Rosa de Cabal, Risaralda. Se analizan algunos elementos que sustentan teóricamente las ideas planteadas desde el año 1980 por Yves Chevallard, acerca de la transposición didáctica, que es vista como una transformación de un contenido del saber sabio (saber científico) a una versión comprensible para la enseñanza denominada saber a enseñar, la cual a su vez sufre una serie de transformaciones hasta lograr un conocimiento llamado objeto de enseñanza. El tipo de investigación implementada es la mixta, cuyo propósito es determinar aquellos factores que inciden en la transposición didáctica de los conceptos de análisis combinatorio y probabilidad, en el proceso de enseñanza. Esta metodología busca conocer situaciones y actitudes predominantes a través de la descripción de las actividades y métodos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, para ellos se utilizarán técnicas estadísticas cuantitativas y cualitativas.

Palabras claves: análisis combinatorio, probabilidad, transposición didáctica, saber sabio, objeto de enseñanza, saber a enseñar.

Abstract

DIDACTIC TRANSPOSITION OF CONCEPTS
OF COMBINATION AND PROBABILITY ANALYSIS,
IN BASIC EDUCATION AND MEDIA
OF THE EDUCATIONAL INSTITUTION FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
OF SANTA ROSA DE CABAL, RISARALDA YEAR 2016

The present thesis aims to analyze the didactic transposition of the concepts of combinatorial and probability analysis in secondary and secondary education in the Francisco José de Caldas Educational Institution of the Municipality of Santa Rosa de Cabal, Risaralda. It analyzes some elements that theoretically support the ideas put forward since 1980 by Yves Chevallard, about the didactic transposition, which is seen as a transformation from a content of wise knowledge (scientific knowledge) to a comprehensible version for teaching called know to Teaching, which in turn undergoes a series of transformations until achieving a knowledge called object of teaching. The type of research implemented is the mixed one, whose purpose is to determine those factors that influence the didactic transposition of the concepts of combinatorial analysis and probability, in the teaching process. This methodology seeks to know prevailing situations and attitudes through the description of the activities and methods in the teaching and learning process, for which quantitative and qualitative statistical techniques will be used.

Keywords : Combinatorial analysis, probability, didactic transposition, Know wise, Subject of instruction, Know how to teach.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ÍNDICE DE TABLAS

CAPÍTULO 1

1 Marco de referencia de la investigación

1.1 Antecedentes

En el tema de transposición didáctica en estadística se adelantan trabajos de investigación a nivel de maestría y doctorado, cabe destacar algunos de ellos:

1.1.1 Nacionales

Según Jorge Florez, (Florez H, 2012)**,** El propósito de este estudio fue mejorar el rendimiento de los estudiantes en la enseñanza de la probabilidad aplicando la transposición didáctica. Los participantes fueron 20 estudiantes registrados en la asignatura de Investigación Cuantitativa, del programa de Maestría en Enseñanza de la Física. El procedimiento seguido durante la investigación fue el siguiente: se receptó la prueba de entrada, luego se enseñó la unidad de probabilidad utilizando la transposición didáctica y finalmente se receptó la prueba de salida. Los resultados muestran que los estudiantes mejoraron notablemente su rendimiento y que el uso de la transposición didáctica es parte ese logro.

El aprendizaje de la unidad de Probabilidad, en un curso de Estadística para los estudiantes del programa de Maestría en Enseñanza de la Física, presenta serias dificultades a los estudiantes, al momento de resolver problemas. Entre los factores que pueden mencionarse están: (1) las concepciones alternativas que impiden la comprensión del concepto de probabilidad y sus reglas; por ejemplo, la dificultad para determinar si dos eventos son independientes (Serrado, Cardeñoso & Azcarate, 2005); (2) la utilización de conceptos, símbolos y gráficos matemáticos que aunque son familiares para el estudiante en el dominio de la Lógica Matemática, su transferencia al dominio de la Probabilidad se ve limitada por el aprendizaje superficial que ellos realizan; (3) la enseñanza de los conceptos y reglas de la probabilidad, desde la perspectiva del “saber sabio” y no desde la perspectiva del “saber enseñado”; no permite a los estudiantes comprender el concepto de probabilidad y sus conceptos relacionados. De este estudio cabe resaltar la importancia de la transposición didáctica, este último factor implica, que el profesor para que los estudiantes comprendan los conceptos y reglas de la probabilidad, tiene que transformar el conocimiento científico (“saber sabio”) en una forma de conocimiento (“saber enseñado”) que sea accesible a ellos.

b. Aristizabal Zuluaga Diana

Hace una propuesta metodológica aplicando guías de estudio con el apoyo de herramientas tecnológicas, con el fin de aproximar a los estudiantes a los conceptos propios de la combinatoria y la probabilidad. La población objeto fueron 127 estudiantes de grados décimo y once de la Institución Educativa La piedad de la ciudad de Medellín (Antioquia Colombia), y el colegio Cumbres de Envigado (Antioquia Colombia). Afirma la autora que “el uso de material concreto y la realización de actividades prácticas y cotidianas que involucran el contexto cercano de los estudiantes les facilitó aproximarse a razonamientos matemáticos que al ser formalizados fueron asimilados en forma adecuada y pertinente”.

Para Aristizábal, los estudiantes tienen dificultades para entender la combinatoria, los profesores tienen gran dificultad para enseñarla de manera comprensiva y duradera. Esta dificultad está asociada a varios factores: No hay mucha investigación en este campo que oriente a los profesores; no hay muchos recursos didácticos para apoyar la enseñanza de la combinatoria; los libros de texto que se usan para enseñar estadística dan mayor importancia al procedimiento que a la comprensión, y el acercamiento exploratorio es reducido. Teniendo en cuenta lo anterior es importante implementar dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la combinatoria y probabilidades todos los elementos didácticos y metodológicos que permitan cumplir con los estándares establecidos por el MEN y a su vez que favorezcan aprendizajes duraderos y significativos en los estudiantes (Aristizabal zuluaga, Diana Patricia, 2012).

1.1.2 Internacionales

a. Argentina Buenos Aires

Eva Sacco (Sacco) de la Universidad de Buenos Aires desarrolló una propuesta de transposición didáctica para la enseñanza de la Estadística utilizando un software de distribución libre, en la cual se realizó un diagnóstico de la situación en la enseñanza de la probabilidad a nivel universitario. Según el diagnóstico en el enfoque teórico los estudiantes muestran una gran dificultad por el abuso y uso del lenguaje matemático, ante estas situaciones los estudiantes pueden deducir más fácilmente estimaciones a partir del enfoque práctico, se ven más motivados e interesados por el desarrollo de los temas propuestos. El conocimiento recibido es mucho más significativo con el uso de software de libre distribución. La didáctica de la estadística es una de las cuentas pendientes de la didáctica de la matemática. Mediante una acertada transposición didáctica y empleando un enfoque aplicado se observa un mejor rendimiento de los estudiantes y su interés por el desarrollo de los temas.

b. España Andalucia

Según Juán Jesús Ortíz de Hanaro (Hanaro, 2002) en su trabajo doctoral donde analiza los libros de texto de estadística publicados durante la vigencia de los cuestionarios de:

1º de BUP (Bachillerato Unificado y Polivalente) (18-IV-1.975), en que la tendencia era retrasar la enseñanza de estos temas el mayor tiempo posible. El supuesto era que para asimilar el concepto de probabilidad era necesario adquirir la noción de proporcionalidad y poseer razonamiento combinatorio, lo que no se conseguía hasta el período de las operaciones formales. En la actualidad se ha producido un cambio importante en la enseñanza de la probabilidad, donde han influido diversos autores, entre ellos Fischbein, Green y Shaughnessy, quienes defienden que la enseñanza de la probabilidad se puede y se debe iniciar en edades mucho más tempranas, mediante una aproximación más intuitiva. El cambio propuesto no se refiere sólo a los contenidos, sino a la metodología de enseñanza, que debe basarse en la experimentación y simulación de fenómenos aleatorios y huir de una formalidad excesiva. Pensamos que este trabajo constituye un primer avance en el estudio del significado que de los conceptos probabilísticos se incluye en los libros de texto de secundaria. Más concretamente, se analiza una muestra de libros de texto de primer curso de bachillerato publicados en el período de vigencia de los cuestionarios oficiales previos a la actual reforma educativa, lo que contribuirá a la caracterización del significado de estos conceptos en esta época. Este análisis permite identificar puntos críticos que deberán tenerse en cuenta en la elaboración de los nuevos materiales curriculares para la enseñanza de la probabilidad en estos niveles.

c. España

Navarra – Pelayo - Batanero y Godino (V. Navarro-Pelayo, C. Bataner y J. D. Godino , 1996) . En el estudio realizado por estos autores diseñan un cuestionario para indagar los efectos de las variables de tarea en las respuestas de los alumnos cuando resuelven problemas de combinatoria. En este trabajo se trata de proporcionar algunas respuestas a las siguientes preguntas: ¿Qué papel juega la Combinatoria en Probabilidad y en Matemática Discreta? ¿Es la capacidad combinatoria sólo un instrumento matemático o es un componente fundamental del razonamiento lógico? ¿Hay variables de tarea que afectan a los procedimientos y errores de los alumnos al resolver los problemas combinatorios? ¿Cómo deberíamos considerar estas variables en la enseñanza y evaluación?. Se presenta, asimismo, un cuestionario para evaluar el razonamiento combinatorio y los resultados obtenidos al aplicarlo a una muestra de 720 alumnos de 14 y 15 años. Esta información puede ser útil a profesores e investigadores en Educación Matemática interesados por el análisis combinatorio.

Para ello, en primer lugar se caracterizan las variables de tarea con el fin de seleccionar una muestra representativa de estas. En segundo lugar se estudia y clasifica el modelo combinatorio implícito en el enunciado de los problemas combinatorios, esto lo hacen de acuerdo a la clasificación de Dubois (1984, citado por Navarro-Pelayo y otros, 1996; pág. 3-5) quien clasifica las configuraciones combinatorias en tres modelos: selección, la cual se asocia al concepto de muestreo cuyas palabras claves son, elegir, tomar, escoger, sacar; colocación, que se asocia con la idea de función y las palabras claves son colocar, asignar, introducir, y partición, asociado a la idea de partición de un conjunto y sus palabras claves pueden ser dividir, separar, repartir (Rosemberg, 2015).

1.2 Transposición didáctica

A continuación, se presentan algunos elementos que sustentan teóricamente este trabajo, fundamentados principalmente en las ideas planteadas desde el año 1980 por Yves Chevallard.

En este sentido, se aborda el concepto de transposición didáctica y los elementos presentes en ésta, la contradicción antiguo/nuevo como motor del proceso de enseñanza y el tiempo de enseñanza en relación con el de aprendizaje. Se abordarán conceptos relacionados con la transposición didáctica como el saber sabio, erudito o científico, el saber a enseñar y el saber enseñado. La transposición didáctica es vista como una transformación de un contenido del saber sabio (saber científico) a una versión comprensible para la enseñanza denominada saber a enseñar, la cual a su vez sufre una serie de transformaciones hasta lograr un conocimiento llamado objeto de enseñanza.

“Un contenido del saber enseñable al ser adaptado por la transposición didáctica para convertirse en un saber a enseñar, sufre un conjunto de transformaciones y adaptaciones que lo hacen apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El proceso que transforma un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado Transposición didáctica” (Yves, 2005, p. 45).

Hoy día la mayor parte de los investigadores en didáctica están de acuerdo de atribuir la paternidad del concepto de transposición didáctica a Michel Verret (1975). En su capítulo III de su obra, él define la didáctica como “la transmisión de aquellos que saben a aquellos que no saben. De aquellos que han aprendido a aquellos que aprenden” (Gómez Mendoza, 2005).

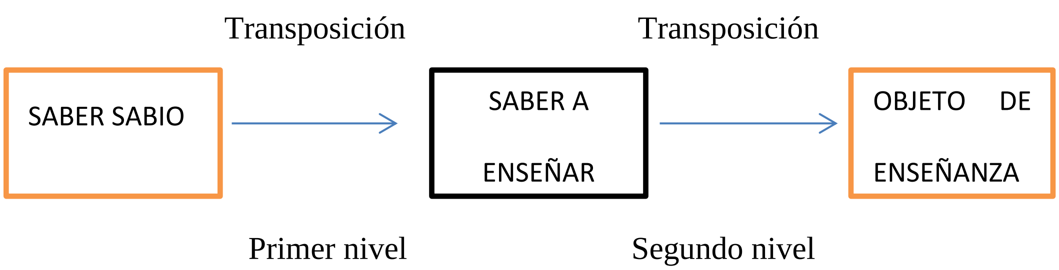


Ilustración 1 Transposición didáctica

“Los sistemas didácticos corresponden a la relación ternaria entre: estudiantes, conocimiento y docente, aquí también se encuentra la transposición didáctica” (Yves, 2005).

Al conjunto de los sistemas didácticos, Chevallard los denomina sistema de enseñanza. Algo importante que cabe resaltar es que estos sistemas didácticos sufren un envejecimiento moral y un envejecimiento biológico.

Edison de Faria, (2014) en *el envejecimiento biológico* se da un distanciamiento en los sistemas de enseñanza con relación al avance científico. Es aquí en donde el conocimiento que pretendemos llevar al aula de clase, se halla alejado del conocimiento sabio, es decir, el avance en las teorías científicas es mucho más rápido, que el avance del saber a enseñar y por supuesto que el saber enseñado.

Envejecimiento Moral: Es un distanciamiento a los cambios sociales. Lo que se enseña en la escuela minimiza el rol del maestro debido a la trivialización del conocimiento.

De otro lado el saber enseñado establecido en el sistema de enseñanza como lo llama Chevallard, requiere la aprobación de una comunidad científica. El didacta francés Chevallard llama *noosfera,* ese conglomerado de influencias que inciden en la selección de los contenidos, que harán parte de los programas escolares y que determinan el funcionamiento del proceso didáctico. Hacen parte de este concepto: docentes, medios de comunicación, la clase política, comunidades científicas, escritores de textos didactizables, especialistas de la disciplina que militan alrededor de su enseñanza. *La noosfera* se compone principalmente de representantes del sistema de enseñanza y de representantes de la sociedad; *La noosfera* es entonces "la esfera de personas que piensan" para retomar la expresión del autor.

1.2.1 Vigilancia epistemológica

Dada la transposición didáctica, esta genera un distanciamiento con respecto al saber sabio, sea por las adaptaciones o transformaciones que se hacen, por el envejecimiento biológico y/o moral, o por factores sociales que integran la noosfera. Chevallard sugiere asumir una actitud crítica relativa a estos modos del saber y sus transformaciones. Descubre entonces que, del objeto de saber al objeto de enseñanza, la distancia es, con mucha frecuencia, inmensa. Es la acción examinadora que hace un control o seguimiento académico, en el saber que se enseña en las escuelas garantizando que no se desvíe del conocimiento sabio o erudito. Evitando desviaciones generadas por la transposición didáctica, y cumplir con los estándares de competencias establecidos por los agentes educativos gubernamentales.

Yves, (2005) sostiene que un conocimiento sabio debe sufrir transformaciones y adaptaciones, para volverlo en una versión didáctica del mismo. Se produce entonces un saber enseñado separado de los orígenes históricos, descontextualizado, despersonalizado, separado de las esferas del saber sabio. Es así como Chevallard y Brousseau sugieren que en esta serie de adaptaciones y transformaciones de objetos saber a objetos de enseñanza deben ser sometidos a una "vigilancia epistemológica". (Yves, 2005).

1.3 Análisis combinatorio

El análisis combinatorio estudia las distintas formas de agrupar y ordenar los elementos de un conjunto, sin tener en cuenta la naturaleza de estos elementos. Los problemas de arreglos y combinaciones pueden parecer aburridos y quizá, se piense que no tienen utilidad, siendo los teoremas del análisis combinatorio la base del cálculo de la probabilidad. El análisis combinatorio tiene sus aplicaciones en el diseño y funcionamiento de la tecnología computacional así como también en las ciencias. El origen del análisis combinatorio se le atribuye a los trabajos de BLAISE PASCAL (1596-1650) y PIERRE FERMAT (1601-1665) que fundamentan el cálculo de probabilidades. LEIBNIZ (1646-1716) quien publicó en 1665 "Disertatio de Arte Combinatoria". El mayor impulsor de esta teoría fue BERNOULLI, que incluye en sus escritos una teoría general de permutaciones y combinaciones.

La probabilidad data sus orígenes al siglo XVI, sus comienzos fueron en las aplicaciones en los juegos de azar, con el objeto de desarrollar estrategias de apuestas, y por consiguiente esto daba cierto realce y poder a los gobernantes de la época. A algunos algebristas italianos del renacimiento como **Lucas Pacioli, Girolamo Cardano**(1520), **Niccolo Tartaglia** se deben las primeras consideraciones matemáticas sobre los juegos de azar y las apuestas, otros aportes fueron realizados por:

Huygens (1657) El cálculo del juego de azar (primer libro de probabilidad)

Arnould (1662) : Lógica de Port- Royal : aparece la palabra probabilidad

Bayes – D´Alembert . Euler De Moivre : La curva normal

Borel- Pearson- Galtón- Tchebycheff – Poncaré-Kolmogoroff : Axiomática de la probabilidad.

Quetelet (1796-1891): Estadística y probabilidad.

Laplace (1812): Teoría Analítica de las probabilidades.

Pascal- Fermat (1654) Problemas de dados: Teoría de la probabilidad.

En los tiempos modernos, la teoría de probabilidades es de mucha aplicación por parte de entidades gubernamentales, ingenierías, ciencias de la educación, ciencias sociales, ciencias agropecuarias, compañías de inversión, bancos, empresas de seguros, en la toma de decisiones, en la planificación de estrategias y entre otras. La probabilidad se encarga de los arreglos y combinaciones que determinan el número de formas diferentes en que un acontecimiento puede suceder. En la probabilidad es necesario saber "contar" el número de resultados de un experimento o contar el número de resultados favorables en un evento dado. Para ello se emplean los métodos de conteo, los cuales se basan en dos principios fundamentales: "Principio de Adición" y "Principio de Multiplicación", los cuales se soportan en los diagramas de árbol.

El diagrama de árbol fue una forma de conteo utilizada en la etapa inicial del desarrollo de las primeras civilizaciones. Permite determinar los resultados generados por un fenómeno, a través del bosquejo de las ramas del mismo. Este gráfico da origen a dos principios: "Principio de adición y Principio de la Multiplicación".

1.3.1 Técnicas de conteo

En muchas situaciones la clave para la solución de un problema de probabilidad consiste en llevar a cabo algún tipo de conteo y por tanto el éxito o fracaso en la solución depende de lo bien o mal que se haga el conteo. Principio de multiplicación "suponga que una primera acción puede concluir de $\boldsymbol{n_1}$ formas diferentes; una segunda acción puede concluir de $\boldsymbol{n_2}$ formas diferentes y así sucesivamente, hasta llegar a una acción k que puede concluir de $\boldsymbol{n_k}$ formas diferentes; entonces, las k acciones pueden concluir conjuntamente de $\boldsymbol{n_1 \,.\, n_2 \,.\, n_3 \ldots n_k}$, formas diferentes" (Lincoln L., Estadística para las ciencias administrativas, 1993).

1.3.1.1 Principio de adición

> "suponga que una primera acción puede concluir de $\boldsymbol{n_1}$ formas diferentes; una segunda acción puede concluir de $\boldsymbol{n_2}$ formas diferentes y así sucesivamente, hasta llegar a una acción k que puede concluir de $\boldsymbol{n_k}$ formas diferentes; entonces, si sólo una de estas k acciones se puede realizar, entonces el número de formas como puede concluir la primera o la segunda,…, o la acción k está dada por $\boldsymbol{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k}$. (Lincoln L., Estadística para las ciencias administrativas, 2005)

1.3.1.2 Principio de la Multiplicación: muestras ordenadas con repetición

Se obtienen cuando cada observación puede darse tantas veces como sea posible, bien porque la unidad observada se retorna a la población o porque hay un número grande de unidades que poseen la misma medida y el orden en que suceden tales observaciones es de importancia. Este tipo de muestra se llama n-upla (dupla, trípla, cuádrupla entre otras). El número de observaciones ordenadas con repetición está dada por:

$$N^n$$

N: Número de elementos distintos disponibles (población)

n: Número de elementos escogidos (muestra)

1.3.1.3 Muestras ordenadas sin repetición

Resulta cuando cada observación sólo se da una vez porque cada unidad una vez observada no se retorna a la población. Este tipo de muestras se llaman Permutaciones.

N : Número de elementos distintos disponibles (población)

n : Número de elementos escogidos de la muestra

$$\text{NPn} = \frac{N!}{\left(\quad N - n \right)!}$$

1.3.1.4 Muestras no ordenadas sin repetición

Se obtienen cuando cada observación se da sólo una vez y el orden en que aparecen no es de importancia. Este tipo de muestra se llama combinación.

$$\binom{N}{\text{n}} = \text{NCn} = \frac{N!}{(N - n)!\, n!}$$

N : Número de elementos disponibles

n : Número de elementos escogidos

1.3.2 La probabilidad y los juegos de azar

La probabilidad matemática tiene sus orígenes en los juegos de azar, principalmente los juegos con dados y cartas, muy populares desde tiempos antiguos. Los primeros estudios “científicos” sobre fenómenos aleatorios se centraban en dos problemas: contabilizar el número de posibles resultados de lanzar un dado varias veces.

Distribuir las ganancias entre jugadores cuando el juego se interrumpía antes de finalizar, conocido como el ‘problema del reparto de apuestas. Una respuesta al primer problema se puede encontrar en el poema De Vetula, de Richard de Fournival (1200– 1250), donde afirma "correctamente que si se lanzan tres dados hay 216 combinaciones posibles y calcula correctamente los diferentes valores para la suma de los tres dados". Aunque ahora puede parecer una cuestión trivial, en aquella época no lo era, y otros autores erraron al intentar resolverla, generalmente porque no tenían en cuenta las posibles permutaciones de una misma combinación. (Lincoln L., Estadística para las ciencias administrativas, 2005)

CAPITULO 2

2 Diseño de la investigación

2.1 Planteamiento del problema

Los lineamientos curriculares(1998) y estándares básicos de competencias en matemáticas(2006) del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, establecen cinco pensamientos en matemáticas, en nuestra investigación el interés se centra en el pensamiento aleatorio:

> "Este tipo de pensamiento, llamado también probabilístico o estocástico, ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar. El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria. Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la

utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos." (Ministerio de Educación Nacional. Colombia, 2006).

El documento propone la enseñanza de los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo desde los niveles de educación básica primaria hasta la educación media; sin explicar la forma como el docente debe realizar la selección de los temas adecuados y profundizar en estos conceptos a medida que los estudiantes se promueven de un nivel a otro; es de aclarar que el documento presenta coherencia vertical y horizontal para cada estándar, sin embargo se nota una falencia didáctica en la enseñanza de estos conceptos. Según los antecedentes citados los problemas fundamentales se centran en dificultades al resolver problemas por desconocimiento de los conceptos de probabilidad y sus reglas, el análisis combinatorio, dificultad en el abuso y uso del lenguaje matemático, no hay investigaciones en este campo de la estadística que oriente de forma adecuada a los docentes frente a estos componentes, esto nos permite formular las siguientes preguntas de investigación:

Formulación del problema

¿Qué aspectos se ven alterados en el proceso que se da al pasar del saber sabio, al saber a enseñar y de éste al saber aprendido?

¿Cuáles son los factores que inciden en la transposición didáctica de los conceptos de análisis combinatorio y probabilidad en la institución educativa Francisco José de Caldas?

2.2 Delimitación población

La Institución educativa Francisco José de Caldas es una entidad del sector público, ubicada en el municipio de Santa Rosa de Cabal departamento de Risaralda, cuenta en el año 2016 con 921 estudiantes en su sede centro, distribuidos en 25 grupos, con modalidades en formación Académica, Electrónica y Computación, cuenta con una planta de 27 docentes, entre éstos 7 imparten las áreas de matemáticas, geometría y estadística desde los grados sextos hasta undécimo; su modelo pedagógico adoptado es el Socio constructivista (con didáctica de aprendizaje significativo donde se potencian las competencias básicas, respetando los ritmos de aprendizaje), el área de matemáticas ha implementado el enfoque heurístico cuyo fundamento se centra en la resolución de problemas y formulación de conjeturas.

2.3 Objetivos de la investigación

2.3.1 Objetivo general

Analizar la transposición didáctica que se hace de los conceptos de análisis combinatorio y probabilidad, en la Institución Educativa Francisco José de Caldas del Municipio de Santa Rosa de Cabal, Risaralda.

2.3.2 Objetivos específicos

Analizar el origen histórico y la evolución conceptual del análisis combinatorio y la probabilidad.

Describir la transposición externa entre el saber sabio y el saber a enseñar en el análisis combinatorio y la probabilidad.

Identificar la transposición interna que acontece con el docente y el estudiante en el aula de clase.

Identificar los conocimientos adquiridos por los estudiantes sobre los conceptos de análisis combinatorio y probabilidad.

2.4 Metodología

La presente investigación es de carácter Mixto, cuyo propósito es determinar aquellos factores que inciden en la transposición didáctica de los conceptos de análisis combinatorio y probabilidad, en el proceso de enseñanza. Esta metodología busca conocer situaciones y actitudes predominantes a través de la descripción de las actividades y métodos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, para ellos se utilizarán técnicas estadísticas cuantitativas y cualitativas.

2.4.1 Población

La población objeto de estudio son los estudiantes y docentes de la Institución Educativa Francisco José de Caldas en el año 2016, conformada por 7 profesores encargados de orientar el área de matemáticas, y 921 estudiantes en la sede principal, distribuidos de la siguiente manera:

GRADO	**ESTUDIANTES**
SEXTO	179
SEPTIMO	190
OCTAVO	152
NOVENO	152
DECIMO	126
UNDECIMO	122
TOTAL	**921**

Tabla 2.1 Estudiantes Grados sexto a undécimo

2.4.2 Instrumentos de recolección de información

2.4.2.1 Cuestionario de conocimientos

Con el objetivo de medir el grado de conocimiento de los estudiantes en los temas de técnicas de conteo y probabilidad, se diseñaron tres test con 12 y 10 preguntas respectivamente, el tipo de pregunta fue seleccionada de acuerdo a los estándares básicos de competencias en matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional para el pensamiento aleatorio y sistemas de datos; con un tipo de pregunta de selección múltiple, asignándole a cada pregunta correcta el valor correspondiente de una unidad sobre el total de preguntas establecidas en cada test, se anexo una hoja en ciertos test para que los estudiantes justificaron su respuesta.

2.4.2.2 Entrevista

En el caso de los docentes se trabajó con la entrevista, se contemplaron 15 preguntas donde se interrogó por aspectos como: el enfoque teórico que emplea para enseñar el concepto de técnicas de conteo y probabilidad, las estrategias didácticas que emplea en la enseñanza de la probabilidad y técnicas de conteo, herramientas tecnológicas en el desarrollo de problemas de aplicación, dificultades que ha identificado en la enseñanza de las técnicas de conteo y probabilidad, bibliografía que emplea el docente para la adecuación de los temas y entre otras.

2.4.2.3 Formato de análisis de contenidos de libros

2.4.3 Documentación de la investigación

Con el fin de lograr los objetivos propuestos establecidos en la investigación se realizó la revisión de literatura y bibliografía: en esta fase se trabajó con aspectos históricos de la teoría combinatoria y la teoría de la probabilidad, aspectos teóricos de la transposición didáctica, estándares básicos de aprendizaje para Matemáticas propuestos por el MEN, lineamientos curriculares y el plan de estudios de la institución;

2.4.4 Diseño muestral

Para la construcción del marco muestral, se trabajó con la base de datos del SIMAT (Sistema de matrícula Nacional), el muestreo implementado en esta investigación está compuesto por subgrupos bien definidos, llamados ***estratos,*** donde cada estrato se considera como una subpoblación, en cada estrato se aplica el *muestreo aleatorio simple* (MAS) sin reemplazo, por lo que el diseño implementado es el MUESTREO ESTRATIFICADO ALEATORIO SIMPLE (MEA). Este tipo de muestreo tiene como característica de que su eficiencia en los estimadores es mucho mejor que las realizadas en el *muestreo aleatorio simple* (MAS); la estratificación se realizó de acuerdo a los distintos niveles establecidos por el Ministerio de Educación Nacional: Estrato 1: sextos y séptimos, Estrato 2: octavo y noveno, Estrato 3: décimo y undécimo. El objetivo era medir el grado de conocimiento que presentaban los estudiantes con los temas de técnicas de conteo y probabilidad en la solución de problemas prácticos.

2.4.4.1 Prueba piloto

Con el objetivo de estimar el tamaño muestral para la investigación se llevó a cabo una prueba piloto con asignación igual en cada estrato, tomando tamaños $n_1 = n_2 = n_3 = 10$. Mediante esta prueba se validó también el instrumento de medida que corresponde a un test escrito con preguntas tipo selección múltiple. Se estableció un tiempo de 60 minutos para la aplicación del test, y se observó si éste era el tiempo más adecuado para la aplicación de las pruebas, una vez se estimará el tamaño de muestra para cada uno de los estratos; las preguntas establecidas en el test se revisaron con el objetivo de que hallan sido formuladas acertadamente. Esta prueba previamente establecida, nos permite medir la calidad y confiabilidad de los datos, en las estimaciones que se hagan con respecto al tamaño de muestra y algunos parámetros objetivos de la investigación.

2.4.4.2 Tamaño de muestra

Una vez aplicado y validado el instrumento se obtuvo la varianza de cada estrato y entre los estratos, con el objetivo de estimar el tamaño de muestra general. Trabajando con un error del 2,5% y una confiabilidad del 95% en la estimación del promedio en la prueba de conocimientos, se obtuvo los siguientes resultados:

Estrato	$\boldsymbol{N_h}$	**Pesos** $\boldsymbol{W_h}$	**Varianzas** $\boldsymbol{s_h^2}$	**Tamaño muestra** $\boldsymbol{n_h}$
1	387	0,4143	297,84	70
2	308	0,3298	209,503	54
3	239	0,2559	239,898	45
N	**934**			**169**

Tabla 2.2 Tamaño de subpoblaciones

Los tamaños de muestra para cada uno de los estratos se asignaron a través de una afijación proporcional, dando como resultado:

Estratos Grados	Número de estudiantes n_h
$6° \; y \; 7°$	70
$8° \; y \; 9°$	54
$10° \; y \; 11°$	45
Total	169

Tabla 2.3 Estratos y tamaños de Muestra

Con respecto al instrumento de la entrevista aplicada a los docentes de la Institución Educativa, no se requirió implementar ningún tipo de muestreo probabilístico, se estableció con la totalidad de los maestros correspondiente a 7 docentes, buscando identificar aspectos metodológicos, didácticos, epistemológicos e históricos de los conceptos de técnicas de conteo y probabilidad, el enfoque trabajado en este caso es el cualitativo que se basa en métodos de recolección de datos no estandarizados, ni completamente predeterminados. No se efectúa una medición numérica, por lo cual el análisis no es estadístico. El proceso de indagación es más flexible y se mueve entre las respuestas y el desarrollo de la teoría. Su propósito consiste en "reconstruir" la realidad, tal como la observan los autores de un sistema social previamente definido. A menudo se llama holístico, porque se precia de considerar el "todo" sin reducirlo al estudio de sus partes (Hernández Sampieri, 1998). No hay manipulación ni estimulación con respecto a la realidad[1]

2.4.5 Recolección de la información

Para hacer la recolección de la información se desplazan los educandos hacia el laboratorio de física de la institución educativa Francisco José de Caldas, donde los cuatro estudiantes encargados de la logística, ayudan a organizarlos y a entregarles los cuestionarios, especificando que el tiempo para resolverlos es de 45 minutos. Es importante tener en cuenta que es un tiempo promedio, dándonos una idea del tiempo real para la aplicación de éstos, una vez definido el tamaño de muestra para cada estrato. La selección de los estudiantes en cada uno de los estratos, se realizó a través del *muestreo aleatorio simple* (MAS). Haciendo uso de las listas oficiales de la institución se enumeraron todos los estudiantes desde el grado sexto hasta el grado undécimo del 1 al 921 y se procedió a seleccionar cada uno de ellos en los estratos establecidos. Inicialmente 10 estudiantes por cada estrato, a cada uno se le facilitó una calculadora y una hoja adicional para que realizará el análisis de cada una de las preguntas y además para que escribiera las razones y los procesos por las cuales seleccionó sus respuestas.

[1] Corbetta, 2003

2.4.6 Análisis de textos escolares

Para analizar los textos escolares empleados por los docentes y estudiantes de la Institución Educativa Francisco José de Caldas, se trabajó con base en los estándares básicos de competencias y el plan de estudios del área de matemáticas; se hizo un análisis de contenido enfocado a elementos epistemológicos, históricos y conceptuales relacionados con los conceptos de combinatoria y probabilidad. Tomando una muestra de dos textos por cada estrato.

2.4.7 Base de datos

La base de datos fue construida con base a la información suministrada en los test, aplicados en las distintas subpoblaciones correspondiente a 169 estudiantes, la entrevista realizada a 7 docentes que orientan la asignatura de matemáticas, con preguntas orientadas bajo el enfoque del pensamiento aleatorio y sistemas de datos.

2.4.8 Procesamiento y análisis de la información

Para la construcción de la base de datos se utilizó el paquete ofimático de Microsoft office Excel® 2010, con la información aportada por cada uno de los test aplicados a los estudiantes de los distintos estratos. El análisis estadístico de esta información se realizó con el software SPSS® Statistics versión 20, y el software INFOSTAT® versión 20151, actualización 17-06-2015, en la primera etapa se trabajó el Análisis exploratorio de datos (AED), estimación de la media poblacional, estimación de la media dentro de cada estrato y entre los estratos, luego se procedió a realizar el análisis confirmatorio, estableciendo para cada estrato el tamaño de muestra y estimando para cada subpoblación un intervalo de confianza al 95%, bajo el supuesto que los estimadores se distribuyan normalmente.

2.4.9 Muestreo estratificado aleatorio simple (MEAS) y estimadores

Una de las características que tiene el muestreo estratificado aleatorio, es considerar cada estrato como una subpoblación y realizar, en primera instancia, estimaciones acerca de los parámetros correspondientes a cada una de esas subpoblaciones. Una vez realizada éstas se procede a combinarlas para obtener las estimaciones globales de los parámetros de interés (Ospina Botero, 2001). El *Muestreo Aleatorio Estratificado*, denominado también *muestreo aleatorio restringido*, es un método que permite una selección más eficiente que el obtenido mediante el *muestreo aleatorio simple*, en especial, cuando la característica que se investiga es de gran variabilidad, lo cual, implica un tamaño muestral relativamente grande, en comparación con el *muestreo aleatorio estratificado*. En una muestra aleatoria estratificada, la población a investigar se divide en grupos relativamente homogéneos con relación a la característica de estudio. Los estratos pueden o no estar compuestos del mismo número de unidades, por tal razón la fracción de muestreo puede variar de un estrato a otro. Al conformar los estratos, lo primero que se debe considerar, siempre que sea posible, es la característica de interés principal, que guarde relación con los objetivos de la investigación, para lo cual deben elaborarse estratos que generen la mayor homogeneidad posible. Un plan de muestreo es óptimo, cuando se minimiza la desviación estándar del estrato. Mientras más estratos se establezcan más homogéneos serán. (Ciro Martinez, 2012).

Notación

$N_h = Número\ total\ de\ elementos$

$n_h = Tamaño\ de\ la\ muestra$

$W_h = \frac{N_h}{N} = ponderación\ (peso) del\ estrato$

$$\frac{n_h}{N_h} = Fracción\ de\ muestreo$$

$$n = \sum_{h=1}^{H} n_h$$

Afijación de la muestra

Cuando los tamaños de los estratos son diferentes, es común darle a todas las unidades en la población la misma probabilidad de formar parte de la muestra. Para que esto se cumpla, es necesario que el tamaño de muestra correspondiente a cada estrato, sea proporcional al tamaño de dicho estrato. Esta técnica nos permite determinar el tamaño óptimo de la muestra, así como los estimados puntuales y límites de confianza para el promedio, razón y proporciones en conglomerados. Estos tamaños de muestra se reparten en la misma proporción que las unidades en la población; es decir, el peso relativo dado por el número de unidades en cada estrato en relación al total de elementos de la población, debe ser igual al obtenido en la muestra.

2.12 $$n_h = nW_h$$

Esta asignación se conoce como afijación proporcional.

Estimación de la media poblacional

Un estimador insesgado de la media poblacional $\bar{Y}$ esta dado por la siguiente ecuación

2.13 $$\bar{y}_{est} = \sum_{h=1}^{H} W_h\ \overline{y_h}$$

Como las muestras de cada estrato son independientes, la varianza del estimador de la media poblacional está dada por

2.14 $$VAR[\bar{y}_{est}] = \sum_{h=1}^{H} \mathrm{W}_h^2 \; VAR[\bar{y}_h]$$

2.15 $$donde \qquad VAR[\bar{y}_h] = \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right)\frac{S_h^2}{n_h}$$

Un estimador insesgado para $VAR[\bar{y}_h]$, se obtiene reemplazando las varianzas verdaderas S_h^2 , por sus correspondientes estimadores s_h^2.

2.16 $$var[\bar{y}_h] = \left(1 - \frac{n_h}{N_h}\right)\frac{s_h^2}{n_h}$$

El error estándar de estimación está dado por

2.17 $$EE[\bar{y}_{est}] = \sqrt{VAR[\bar{y}_{est}]}$$

Un estimador insesgado de $VAR[\bar{y}_{est}]$ es

2.18 $$var[\bar{y}_{est}] = \sum_{h=1}^{H} \frac{W_h^2 . s_h^2}{n_h} - \sum_{h=1}^{H} \frac{W_h s_h^2}{N}$$

Donde todos los términos son conocidos. El error estándar se estima con

2.19 $$ee[\bar{y}_{est}] = \sqrt{var[\bar{y}_{est}]}$$

Intervalos de confianza

Bajo el supuesto de que los estimadores se distribuyen normalmente, los intervalos de confianza de $100(1-\alpha)\%$ para la media en cada estrato y la media poblacional se pueden establecer como $\bar{y}_h \pm t_{n-1}\; ee[\bar{y}_{est}]$ y $\bar{y}_{est} \pm t_{n-1}\; ee[\bar{y}_{est}]$, donde t_{n-1} es el $100(1-\alpha)\%$ percentil de la distribución t con $n-1$ grados de libertad. (Ospina Botero, 2001).

CAPÍTULO 3

3 ANÁLISIS DE LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA

3.1 Saber sabio

Una versión primitiva de lo que hoy conocemos como dados, cuya existencia se remonta, por lo menos, 3000 años antes de Cristo y por ello han estado presentes en muchas culturas y épocas de la historia. (Calva Sánchez, Luís Enrique, 2005) son los astrágalos, instrumentos del azar construidos con huesos del talón de algún animal como el caballo, los cuales estaban conformados de tal manera que al ser lanzados sobre una superficie uniforme se pudieran obtener cuatro resultados; la peor tirada era llamada perro, tenía un valor de 1, la cara opuesta era llamada Venus, que tenía un valor de 6 puntos y era la mejor tirada. Algunas miradas sobre los elementos que aportaron diferentes autores acerca de la probabilidad se muestran a continuación

3.1.1 Girolamo Cardano

Ilustración 2 Girolamo Cardano

Girolamo Cardano (1501 – 1576), en sus escritos no enuncia el concepto de probabilidad, lo maneja desde el vocablo igualdad. Como ejemplo la propuesta 1: “La igualdad se encontrará si lanzamos un dado y tratamos de obtener un número impar o un número par”. El dado tiene seis caras, cada lado está marcado con los números enteros 1, 2, 3, 4, 5 y 6. La mitad de los números son pares y la otra mitad son impares, por lo anterior resulta lógico pensar que, si el dado no está cargado para ninguna de sus caras, la *igualdad* que plantea Cardano es cierta, es decir, existe la misma probabilidad de obtener un número impar o uno par. (Luís Enrique Calva Sánchez, 2005).

3.1.2 Blaise Pascal

Ilustración 3 Blaise Pascal

Blaise Pascal (1623 – 1662), la formulación del problema planteado por Pascal, básicamente el si Dios existe o no, como un problema de decisión sin experimentación: ya que no se puede aceptar como evidencia ni los milagros ni los testimonios ajenos, que ya supondrían la fe sería la siguiente: decidir entre dos posibles cursos de acción: vivir de forma piadosa a_1 o vivir de forma mundana a_2 . Hay dos posibles estados de la Naturaleza: Dios existe θ_1 o Dios no existe θ_2. Las utilidades correspondientes vendrían dadas por la tabla

	θ_1	θ_2
a_1	u_{11}	u_{12}
a_2	u_{21}	u_{22}

Tabla 3.1 Utilidades

En primer lugar, Pascal establece el siguiente orden en las utilidades: $u_{11} > u_{22} \sim u_{22} > u_{21}$. Un simple argumento, que equivale al del criterio de dominancia, implica que a_1 domina a_2, lo que, en palabras de Pascal, nos conduciría a apostar por la existencia de Dios. Sin embargo, un libertino nos diría que, si Dios no existe, la vida mundana es preferible a la piadosa, es decir $u_{22} > u_{12}$, con lo cual no hay dominancia entre ambas alternativas. Pascal recurre entonces al criterio de maximizar la esperanza de utilidad. Para ello necesita especificar las probabilidades de los dos estados de la Naturaleza, $p_1 = Pr\{\theta_1\}$, $p_2 = \Pr\{\theta_2\} = 1 - p_1$. Pascal, como bien sabemos, no habla en términos de probabilidad sino de apuestas. Comienza con el caso $p_1 = p_2 = 1/2$, y como argumenta que a es mucho mayor que las otras tres utilidades, entonces la esperanza de utilidad de elegir u_{11} es mayor que la de elegir a_2. Como la hipótesis de equiprobabilidad no parece plausible, Pascal invoca, en un pasaje algo confuso, nuevas premisas que equivalen a que, aunque la probabilidad de la existencia de Dios sea muy pequeña (infinitesimal), el orden de infinitud de la utilidad u_{11} es tan grande que siempre $E[a_1; P] > E[a_2; P]$, por lo que, finalmente concluye, la apuesta en favor de la existencia de Dios siempre debe hacerse (Girón, 1994).

3.1.3 Galilieo Galilei

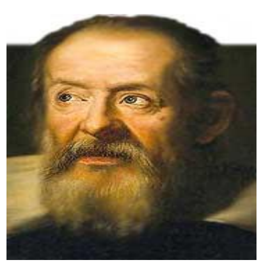


Ilustración 4 Galileo Galilei

Ya alrededor de 1615 Galileo Galilei estudiaba el problema de los posibles resultados de lanzar los dados. Los estudios de Galileo se enfocan a los juegos, en particular aquellos donde se emplean dados. Al lanzar los dados, se apuesta a obtener cierta combinación con dos o más dados; De esta forma apostaban algunas personas en la época en la época de Galileo, y fue por eso que él estudio las posibilidades de combinaciones. Para hacerlo contabilizó los casos en que se obtenía cierta combinación y los comparó con el total de casos. Con ello Galileo inicia a buscar formas o técnicas para el de todos los posibles casos resultantes de lanzar uno, dos o tres dados. Galileo Explica por qué.

"[…] pero si nosotros arrojamos el segundo dado, que también tiene otras seis caras, junto con el primero, debemos hacer 36 tiradas diferentes entre sí puesto que cada una del primer dado puede emparejarse con cualquiera del segundo[…]"[2]

[…] y si añadimos un tercer dado, como cada una de sus 6 caras se puede emparejar con una de sus 36 tiradas de los otros dos dados, tendremos que las tiradas de tres daos serán 6 veces 36, es decir 216, todas diferentes entre sí[…][3]"

Los apostadores pensaban que algunos números eran más fáciles de obtener que otros, pero no sabían por qué. Galileo mostró con tres dados y de una manera clara la causa de este fenómeno numérico. Para obtener por suma un 2 necesariamente debemos conseguir un doble uno al lanzar los dados, pero para otros casos existen más combinaciones. Como se ilustra en la siguiente tabla las combinaciones que se producen.

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
No Combinación	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Tabla 3.2 Lanzamientos dados

[2] Sopra le scoperte dei dadi(Sobre las tiradas de dados)

Así, se puede observar que hay sumas que son más fáciles de obtener que otras. Las más difíciles de obtener son 2 y 12 pues sólo hay una combinación que produce a cada una de ellas. La suma más sencilla de obtener es 7, pues es resultado de 6 combinaciones. (Calva Sánchez, Luís Enrique, 2005).

3.1.4 Pierre Fermat

Ilustración 5 Pierre Fermat

En el siglo XVII se acostumbraba intercambiar ideas y descubrimientos por correspondencia. Entre estos se encontraban Pierre Fermat (1601-1665) y Blaise Pascal(1623-1662). Estos grandes matemáticos lograron solucionar el problema de la división relacionado con los juegos de azar. Este problema ya era conocido años atrás en el siglo XVI Giobattista Francesco Peverone propuso una solución. Textualmente la solución de Peverone es:

"[…] al que ha ganado siete le faltan tres, igualmente al que ha ganado nueve de diez le falta uno, la progresión de tres es seis, la progresión de uno es uno; por lo tanto, dividiendo el depósito en siete partes, seis le tocan al segundo y una parte al primero[…]"[3].

La solución anterior es falsa pero muy próxima a la correcta. Un pequeño error fue lo que hizo que Peverone no haya pasado a la historia como el que lograra encontrar la solución al

[3] De la obra de Peverone intitulada "Dos breves y fáciles tratados, el uno de aritmética, el otro de geometría, en los que están contenidas algunas cosas nuevas, divertidas y útiles, tanto para gentilhombres como para artesanos"[3]

problema de la división. Para ver cuál es la respuesta correcta se recopilo el siguiente escrito Fermat. La propuesta consiste en contar todas las posibles combinaciones de resultados que se pueden dar entre los dos jugadores en caso de seguir con las partidas, contar cuántas ganaría A y en cuántas B y, basados en esto, calcular un proporción. Supongamos el caso donde son diez las partidas a ganar. A tiene ganadas nueve mientras que B sólo siete. Por ejemplo, una posible solución es que A gane la siguiente partida y finalice el juego, pues llegaría a diez partidas ganadas, o que B gane una partida y luego A finalice el juego. No es difícil ver que con un máximo de tres partidas jugadas tendremos un ganador;   los resultados de las posibles partidas.

Primera partida	**A**	**A**	**A**	**A**	**B**	**B**	**B**	**B**
Segunda Partida	**A**	**A**	**B**	**B**	**A**	**A**	**b**	**B**
Tercera Partida	**A**	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**	**A**	**B**
Ganador	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	**B**

Tabla 3.3   Resultados de posibles partidas

La solución presentada por Fermat fue discutida en una carta por Pascal, quien argumentaba, que no todas las posibles combinaciones eran reales, por ejemplo la combinación "A, A, B" no tiene sentido real puesto que si A gana una partida inmediatamente finaliza el juego, y no tiene sentido ver quien gana las dos siguientes. Además propone como ejemplo, para demostrar que el método de Fermat no es correcto, el caso de tres jugadores, A, B y C. En su ejemplo. A necesita una partida para ganar mientras que B y C necesitan dos, respectivamente. Pascal siguiendo el método de Fermat, Le dan 19 combinaciones con triunfo para A, 7 para B y 7 para C.

Hoy en día algunos opinan que Pascal no entendía el procedimiento de Fermat y es por eso que argumentaba en contra de dicha solución, pues tenía otra forma de llegar al resultado correcto(que dicho de paso, no expone en la carta, quizás debido al resentimiento que sentía al verse superado en su propia área por alguien que ni siquiera era un matemático de formación, Fermat no estudió matemáticas sino leyes, pero tenía una gran capacidad para los cálculos que algunos lo consideraban uno de los más grandes genios del siglo XVII) (Calva Sánchez, Luís Enrique, 2005).

Como es de suponer Fermat defiende el método y responde a Pascal:

"[…] no encuentro más que 17 combinaciones para el primero y 5 para cada uno de los otros dos; pues cuando dice usted, que la combinación acc es buena para el primero y para el tercero, parece no recordar que todo lo que se hace después de que uno de los jugadores ha ganado, ya no sirve para nada. Puesto que esta combinación ha hecho ganar el primero desde la primera partida, ¿qué importa que el tercero gane dos a continuación ya que, aunque ganase treinta, todo eso sería superfluo? […]"[4]

Fermat argumentaba que el hecho de escribir las combinaciones de las tres partidas sólo es para facilitar el conteo de posibilidades. La respuesta que da Fermat, que es 17 de 27 para el jugador A, y 5 de 27 para cada uno de B y C, es la correcta. Pascal también había obtenido dicha solución, pero con otro método.

3.1.5 Combinatoria

El problema de saber por qué algunos eventos suceden con mayor frecuencia o menor frecuencia, da origen a una actitud recurrente, la de contar. Cardano, Fermat, Galileo, Pascal todos coincidieron en ello. Las técnicas desarrolladas por estos, da origen a una nueva área de las

[4]Fermat a Pascal, viernes 25 de septiembre de 1654.

matemáticas, ***La combinatoria***, que es un conjunto de técnicas enfocadas a los problemas sobre saber contar las distintas combinaciones que, sometidas a unas u otras condiciones, se pueden formar con objetos dados. (Calva Sánchez, Luís Enrique, 2005)

3.1.6 Enfoques Teóricos de la probabilidad

3.1.6.1 Enfoque clásico: Regla de Laplace (1812)

"La teoría del azar consiste en reducir todos los acontecimientos del mismo tipo a un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, que estos sean tales que nos dejen igualmente Indecisos acerca de su existencia" ***Laplace*** (Gregoria Mateos, 2002)**.**

El enfoque clásico permite determinar los valores de la probabilidad antes de ser observado el experimento, conocida también como enfoque a priori.

Galileo, Pascal, Cardano y Fermat demostraron por qué algunos eventos ocurrían con mayor frecuencia que otros. Son los experimentos de los juegos de azar que dan origen a la primera fórmula para el cálculo de probabilidades:

$$P(\text{"ocurrencia de un evento"}) = \frac{Casos\ favorables\ al\ evento}{Casos\ totales}$$

Esta fórmula fue utilizada de forma empírica por más de un siglo. Hasta principios del siglo XIX Pierre Simón de Laplace, en su "Ensayo filosófico sobre probabilidades", sintetizó todo lo de probabilidad y la enunció. Esta fórmula se conoce como fórmula de probabilidad clásica o fórmula de Laplace (Calva Sánchez, Luís Enrique, 2005).

Objeciones a la definición clásica:

- El espacio muestral ha de ser finito.
- Sólo es aplicable en el caso de resultados elementales equiprobables.
- El concepto de equiprobabilidad se basa, en esencia, en el concepto de probabilidad que queremos definir.
- Hay que especificar muy bien las distintas alternativas en los resultados del experimento aleatorio. (Román Román).

Esta definición de probabilidad de un suceso A, establecido “como el cociente entre el número de casos favorables a que ocurra dicho suceso y el número de casos posibles, bajo el supuesto de que todos los casos sean igualmente probables”. Desde un punto de vista formal, esta definición es incorrecta, introduce el término definido en la definición, y, atendiendo a un punto de vista práctico, sólo es aplicable a los casos de “equiprobabilidad”, dejando al margen muchos casos de interés. Además si el número de resultados posibles fuera infinito, esta definición sería inadecuada.

Sin embargo, en un gran número de aplicaciones es imposible determinar las probabilidades de los sucesos por la definición establecida en el enfoque frecuentista, repitiendo el experimento un número “suficiente” de veces. En tales casos, la única alternativa que nos queda es usar la definición clásica como una hipótesis de trabajo, y aceptar esta hipótesis si las consecuencias observables validan la experiencia, y rechazarla en otro caso.

Por tanto esta definición no permite la construcción y desarrollo de una teoría matemática de la probabilidad, lo que justifica el rechazo que tuvo durante mucho tiempo, y la necesidad de encontrar una definición satisfactoria. (Jimenéz Saavedra, 2000).

3.1.6.2 Enfoque frecuencial o probabilidad frecuencial

Este enfoque conocido también como a posteriori o empírico, la probabilidad es determinada a partir de la proporción de veces que ocurre un evento favorable con cierto número de experimentos; se requiere de la recopilación de datos y la observación. (Leslie, 2014). La teoría frecuentista está apoyado por la ley empírica del azar (Teorema de Bernoulli), publicada en 1713 en su obra póstuma "*Ars Conjectandi*".

"Cuando el número de realizaciones de un experimento aleatorio crece, la frecuencia relativa del suceso asociado se va acercando cada vez más y más hacia un valor".[5]

La probabilidad según *Von Mises* (1926). *Von Mises* introduce el concepto de "colectivo" para caracterizar el concepto de frecuencia relativa; por colectivo da entender una sucesión de un número grande de observaciones o de experimentos, conduciéndonos cada uno de éstos a un resultado numérico determinado y verificando esta sucesión de resultados las siguientes condiciones: Aleatoriedad y existencia del límite de frecuencias relativas.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_A = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

La asignación de probabilidades de acuerdo con el comportamiento a largo plazo en los experimentos es conocida como probabilidad frecuentista o teoría frecuentista.

Objeciones a la definición frecuentista

Las principales críticas a esta definición se refieren a su irrelevancia en la realidad. Ya que en la realidad no puede asegurarse la existencia de una sucesión ilimitada de repeticiones idénticas de un experimento, nunca podrá saberse si existe una probabilidad (el límite de frecuencias, cuánto vale (no hay una indicación clara del número de pruebas que debe realizarse para obtener la probabilidad de un suceso) o si el valor de una probabilidad es correcto o no.

---

[5] Natividad Jimenéz Saavedra, La axiomática de Kolmogorov, pág 186

Otro de los aspectos a tener en cuenta en esta definición se refiere a su alcance. Aunque está definición cubre una gran parte de problemas prácticos, no puede aplicarse a situaciones en las que no pueda realizarse un gran número de pruebas. Hay que indicar no obstante, que por su base empírica, esta concepción está ampliamente aceptada en ciencias experimentales.

Entre el enfoque clásico y la teoría frecuentista existe una relación. Si el número de ensayos que se realizan para obtener la probabilidad con la teoría frecuentista crece indefinidamente, la probabilidad calculada para el evento es la misma que la que se calcula mediante la fórmula del enfoque clásico. Esta idea ya la había expresado James Bernoulli. La principal objeción hecha a la teoría de *Von Mises* es la imposibilidad de construir, por medio de una fórmula matemática, una sucesión $\{x_i\}$, siendo x_i , un resultado numérico, en la que la probabilidad éste comprendida entre cero y uno, teniendo en cuenta que esta probabilidad ha de ser la misma para cualquier otra sucesión obtenida a partir de ésta mediante una transformación de las consideradas por *Von Mises*. Wald en 1937, resolvió el problema considerando numerables clases de transformaciones. E. Tornier introduce una axiomática frecuentista tomando como elementos sucesiones y considerando en ellas, como conjuntos básicos, los cilindros con segmento inicial fijo. Considera la probabilidad definida sobre un algebra de Boole que contenga a los cilindros básicos, como una función completamente aditiva en (0,1), introduce un axioma de continuidad y concreta que la clase aditiva considerada es mínima, ya que ésta cumple con los axiomas. (Grupo de investigación Enumed.net)

3.1.6.3 Teoría de la medida

Desde la Teoría de la medida Borel (1898): La probabilidad se puede manejar como una Función de conjunto σ - aditiva :

Una función $\mu : C \to R$ se dice σ-aditiva sí y sólo sí

a) $\mu(\phi) = 0$

b) Para todo sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C$ tal que $A_i \cap A_j = \phi \; \forall i \neq j$

con $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in C$ es $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

En este sentido la probabilidad es una medida tal que la medida del espacio total es uno.

3.1.6.4 Enfoque Axiomático de Kolmogorov (1933)

La definición axiomática de Kolmogorov, surge a partir de la acumulación de diferentes hechos y del desarrollo de otras disciplinas científicas y matemáticas.

La teoría axiomática inicia de las propiedades fundamentales de la probabilidad, que surge de las definiciones frecuentista y clásica.

Sea Ω una colección de elementos, llamados sucesos elementales y sea F un conjunto de subconjuntos de Ω; a los elementos del conjunto F se les llama “sucesos aleatorios”. F es un algebra de conjuntos.

I. F contiene al conjunto ϕ

II. A cada conjunto A de F, se le asigna un número real no negativo P(A). Este número P(A) se llama “probabilidad de suceso A”

III. $P(\Omega) = 1$

IV. Si A y B son disjuntos, entonces $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Un sistema de conjuntos de F, con una asignación definida de números $P(A)$, que satisfaga las condiciones I, II, III y IV se llama *algebra de probabilidad*.

Notas de Kolmogorov

Un sistema de conjuntos se llama álgebra si la suma, y la diferencia de dos conjuntos del sistema también pertenecen al mismo sistema. Por A+ B se entiende el conjunto compuesto por los elementos de Ω contenidos en A o B, o bien en A y B al mismo tiempo; y, finalmente por A*(B*) se entiende el conjunto de los elementos no contenidos en A (o en B). (Jimenéz Saavedra, 2000)

Consecuentemente, la definición axiomática Kolmogorov no descarta las definiciones de frecuentista y clásica, sino más bien las valida y les confiere una forma más precisa.

Al par (Ω, A), donde A ⊂ P(Ω) es una σ-álgebra de subconjuntos de A, se le denomina espacio medible o probabilizable. A los elementos de A se les denomina conjuntos medibles.

Sea (Ω, A) un espacio medible: Definimos una función P que va a ser una medida normada sobre A, mediante una aplicación de A en R que cumple con los siguientes axiomas:

1. Axioma de suceso seguro

   P(Ω) = 1

2. Axioma de no negatividad $\forall A \in$ A

   $\forall A \in \mathrm{A} \quad es\ \mathrm{P(A)} \geq 0$

3. Axioma de aditividad o $\sigma - aditividad\ o\ aditividad\ numerable$

Para toda sucesión $\{A_n\}_{n\in N} \subset \mathrm{A}$ tal que $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall \quad i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Así la probabilidad P(A) denota la probabilidad de A.

Es de las definiciones más simples, y de hecho, la menos controvertida ya que se basa en un conjunto de axiomas que establecen los requisitos mínimos para dar el concepto de probabilidad. La principal ventaja de esta definición es que permite llegar a un desarrollo riguroso de la Teoría de la Probabilidad y, por otra parte la definición es tan general que permite incorporar las distintas interpretaciones de la probabilidad (enfoque clásico, frecuentista y geométrico).

El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria. En la educación básica y media en relación con el cálculo de probabilidades, el *enfoque clásico o a priori* es el más implementado en la enseñanza de éste concepto, en menor intensidad se trabaja con el enfoque frecuentista o teoría frecuentista, el enfoque axiomático se maneja muy superficialmente, y en ningún caso se realizan las objeciones correspondientes a cada enfoque con sus fortalezas y debilidades.

3.2 Saber a enseñar

El saber a enseñar se ve reflejado en los estándares básicos de competencias en matemáticas, lineamientos curriculares, plan de área de matemáticas y los textos guías empleados por los docentes.

3.2.1 Estándares curriculares y planes de área

La selección de contenidos en el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, ha sido el resultado de investigaciones en educación estadística en la educación básica primaria y media, a nivel nacional e internacional, los cuales son adaptados de acuerdo a los estándares básicos de competencias en matemáticas, establecidos para los distintos niveles por el Ministerio de Educación Nacional. Estas competencias en el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, hacen parte de lo que todo estudiante debe saber al finalizar cada ciclo, las cuales son evaluadas a través de las pruebas externas (Pruebas saber) por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior ICFES. Es de anotar que estas competencias quedan enmarcadas dentro de los sistemas lineamientos curriculares que especifican los propósitos del pensamiento aleatorio y de datos (MEN 2006). Si realizamos una lectura a los estándares básicos de competencias en matemáticas establecidos por el MEN, para la educación básica primaria y media, éstos no indican el enfoque que se debe tener en cuenta en la enseñanza de la probabilidad; a partir del año 2017 con los Derechos Básico de Aprendizaje (DBA), se establece la competencia y el componente, y aún no se menciona al enseñar la probabilidad como direccionar éste concepto, en el marco de los distintos enfoques, los DBA son una herramienta que permite orientar a padres de familia, docentes y demás miembros de la comunidad sobre las habilidades y uso de los saberes que deben construir los estudiantes en cada uno de los grados, debemos priorizar a través de estas herramientas de los DBA en los contenidos que se requieren para la enseñanza del concepto de la probabilidad, y escribir los enfoques correspondientes que son requisito indispensable en el aprendizaje del concepto de probabilidad, en el plan de área de la institución en ninguno de sus componentes se visualiza un enfoque en particular.

3.2.2 Análisis de textos

En el análisis correspondiente de textos, se diseñó un formato evaluando características con aspectos como: lectura motivacional, reseña histórica de los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo, ejes temáticos, propiedades de la probabilidad, definición de probabilidad y enfoque teórico, diagramas de árbol, técnicas de conteo, relación con los estándares básicos de competencias, incorporación de las TIC en la aplicación de problemas de contexto y enfoque metodológico.

Análisis de texto

Grado	Elementos a revisar	Aspectos Relevantes
A=10	Manejo de lectura introductoria Motivacional	Al iniciar la unidad el texto presenta un párrafo dedicado a la economía.
	Reseñas Históricas de los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo	El texto Presenta sólo una imagen del matemático ruso Andrei Nkolaevich. No se evidencia alguna reseña histórica de los conceptos a trabajar en la unidad.
	Ejes temáticos	Cálculo de Probabilidades, maneja un enfoque clásico o a priori, enfoque frecuentista o a posteriori, experimento aleatorio, eventos, espacio muestral, técnicas de conteo : principio de la multiplicación , permutaciones , combinaciones,
	Propiedades de la probabilidad Definición probabilidad	No se evidencian las propiedades básicas de la probabilidad. Se trabaja el concepto de probabilidad bajo un enfoque clásico.
	Empleo de diagramas de árbol, para la resolución de problemas de probabilidad	Sólo presentan tres ejemplos de diagramas de árbol. No hay ejemplos prácticos resueltos donde se aplique el concepto de probabilidad
	Ejemplos y problemas propuestos	El texto guía presenta sólo dos ejemplos modelo para el cálculo de probabilidades, adicional propone un taller con 12 ejercicios de aplicación de las probabilidades, de técnicas de conteo hay 12 ejercicios a desarrollar.
	Aplicación de la estadística en otras áreas del conocimiento	No se evidencia una aplicación concreta de la estadística en un área específica del conocimiento.
	Relación de los contenidos con los estándares	Se encuentran los ejes temáticos relacionados con los estándares de matemáticas, pero no profundiza verticalmente.
	Secciones en el texto	Estos ejes temáticos se trabajan como última unidad académica. Corresponde a la unidad 7 “Estadística y Probabilidad”
	Uso de TIC	No hay referencias de aplicación de tecnologías, manejo de la calculadora, software, multimedia para reforzar aprendizajes (simuladores, presentaciones, juegos) es deficiente.
		Metodología tradicional, no hay situaciones problemáticas, experimentales, planteamiento de proyectos de aula. Ausencia de una evaluación

	Enfoque metodológico	diagnóstica(conducta de entrada). Ausencia de pruebas tipo saber, no hay propuestas para evidenciar el conocimiento y la aplicación de las competencias. El modelo de pruebas saber no es aplicado con el estilo de competencia en matemáticas actual.

Tabla 3.4 Análisis texto 10

No Libro	**Aspectos evaluar**	**Aspectos Relevantes**
A=11	Manejo de lectura introductoria Motivacional	La lectura motivacional que el texto presenta está relacionado con un párrafo dedicado a la economía de igual forma que la presentación para el grado décimo, al finalizar la unidad se detalla una lectura en el consumo cultural.
	Reseñas Históricas de los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo	El texto Presenta una imagen del matemático francés Blaise Pascal. No se evidencia alguna reseña histórica de profundización acerca de los conceptos a trabajar en la unidad.
	Ejes temáticos	Cálculo de Probabilidades, maneja un enfoque clásico o a priori, enfoque frecuentista o a posteriori, experimento aleatorio, experimento determinista, espacio muestra l, evento, técnicas de conteo : principio de la multiplicación , permutaciones , combinaciones,
	Propiedades de la probabilidad	Se evidencian propiedades de la probabilidad de eventos: La probabilidad de un evento está en el intervalo [0,1] La probabilidad de un evento seguro es 1 La probabilidad de un evento imposible es cero Si los eventos A y B son mutuamente excluyentes, entones, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Si los eventos A y B no son mutuamente excluyentes, entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ La probabilidad de que no suceda A es : $P'(A) = 1 - P(A)$
	Empleo de diagramas de árbol, para la resolución de problemas de probabilidad	La unidad presenta dos ejemplos de diagramas de árbol. Estos diagramas de árbol no se emplean para el cálculo de probabilidades.

	Ejemplos y problemas propuestos	El texto guía presenta sólo seis ejemplos modelos para el cálculo de probabilidades, adicional propone un taller con 6 ejercicios de aplicación de probabilidades, actividades de técnicas de conteo plantean 13 ejercicios a desarrollar. Al final de los conceptos se debe trabajar un taller correspondiente a probabilidad y técnicas de conteo.
	Aplicación de la estadística en otras áreas del conocimiento	No se evidencia una aplicación concreta de la estadística en un área específica del conocimiento.
	Relación de los contenidos con los estándares	Se encuentran los ejes temáticos relacionados con los estándares de matemáticas, concuerdan con lo propuesto para el grado undécimo.
	Secciones en el texto	Estos ejes temáticos se proponen en el texto como última unidad académica. Corresponde a la unidad 7 “Estadística y Probabilidad”
	Uso de las TIC	No hay referencias de aplicación de tecnologías, manejo de la calculadora, software, La multimedia para reforzar aprendizajes (simuladores, presentaciones, juegos) es deficiente.
	Enfoque metodológico	Metodología tradicional, no hay situaciones problemáticas, experimentales, planteamiento de proyectos de aula. Ausencia de una evaluación diagnóstica(conducta de entrada). Pruebas de evaluación no hay propuestas para evidenciar el conocimiento y la aplicación de las competencias. El modelo de pruebas saber no es aplicado con el estilo de competencia en matemáticas actual

Tabla 3.5 Análisis de texto 11

No Libro	**Aspectos evaluar**	**Aspectos Relevantes**
A= 6	Manejo de lectura introductoria Motivacional	Lectura introductoria “El bicentenario de los datos”. La independencia
	Reseñas Históricas de los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo	Propone el autor una lectura histórica acerca de una biografía de un estadístico Simeón Poisson. No hace alusión a los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo en la unidad.
	Ejes temáticos	Probabilidad, experimento aleatorio, espacio muestral, evento, conteo, técnicas de conteo, Principio de la multiplicación, diagramas de árbol,

		permutaciones, combinaciones, regla de Laplace.
	Propiedades de la probabilidad	En el texto no se evidencian las propiedades de la probabilidad. El enfoque que se maneja con el concepto de la probabilidad es el clásico.
	Empleo de diagramas de árbol, para la resolución de problemas de probabilidad	Se trabajan seis ejemplos pero no se visualiza su aplicación en el cálculo de las probabilidades. Los ejemplos de diagrama de árbol
	Ejemplos y problemas propuestos	El autor ilustra tres ejemplos para aplicar el concepto de probabilidad. Para el caso del espacio muestral propone un ejemplo; establece para trabajar un taller con cinco actividades correspondiente al espacio muestral. En el manejo del concepto de diagramas de árbol trata 4 ejemplos. Para desarrollar tiene actividades con siete preguntas para le principio de la multiplicación. En el caso de las permutaciones y combinaciones se manejan cuatro ejemplos; como actividades para las permutaciones y combinaciones establecen 11 puntos. En cuanto al manejo del concepto de la probabilidad a partir de la regla de Laplace el autor propone tres ejemplos. Actividades ocho para el concepto de probabilidad.
	Aplicación de la estadística en otras áreas del conocimiento	Presenta una lectura donde justifica lo que aprendió el estudiante “La cantidad de usuarios que entran a Facebook”. No se evidencia aplicaciones acerca de la probabilidad.
	Relación de los contenidos con los estándares	No hay claridad acerca de las competencias en el texto, con los estándares básicos de competencias en matemáticas del MEN.
	Secciones en el texto	Los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo se abordan a partir de la última unidad del texto.
	Uso de TIC	El texto no presenta aplicaciones informáticas para el manejo de los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo
	Enfoque metodológico	Metodología tradicional, no hay situaciones problemáticas, experimentales, planteamiento de proyectos de aula. Ausencia de una evaluación diagnóstica (conducta de entrada). Pruebas de evaluación no hay propuestas para evidenciar el conocimiento y la aplicación de las competencias. El modelo de pruebas saber no es aplicado con el estilo de competencia en matemáticas actual.

Tabla 3.6 Análisis de texto sexto

No Libro	**Aspectos evaluar**	**Aspectos Relevantes**
A=7	Manejo de lectura introductoria Motivacional	Lectura El Bicentenario de los datos. “Un periódico que circuló en la época de la independencia”
	Reseñas Históricas de los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo	El texto no Presenta ninguna reseña histórica acerca de los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo; tampoco maneja alguna biografía acerca de algún autor que haya realizado aportes a la probabilidad.
	Ejes temáticos	Conceptos fundamentales, técnicas de conteo, principio de la multiplicación, permutaciones, combinaciones.
	Propiedades de la probabilidad Definición probabilidad	Se evidencian algunas propiedades básicas de la probabilidad. “ La probabilidad de que el evento vacío o imposible ocurra es 0 y la probabilidad de que el evento seguro ocurra es 1” “La probabilidad de ocurrencia de un evento se puede considerar como una medida de incertidumbre.” “ A mayor probabilidad de ocurrencia se tiene mayor confianza en el posible resultado” Se trabaja el concepto de probabilidad bajo un enfoque clásico.
	Empleo de diagramas de árbol, para la resolución de problemas de probabilidad	No se evidencian ejemplos correspondientes a los diagramas de árbol. No hay una explicación clara acerca del concepto de espacio muestral y diagramas de árbol. De técnicas de conteo principio de la multiplicación hay un ejemplo donde no se muestra claramente el proceso en general de esta técnica de conteo. En cuanto a las permutaciones y combinaciones ilustra cuatro ejemplos. Para el manejo del concepto de probabilidad bajo el enfoque clásico muestra sólo dos ejemplos.
	Ejemplos y problemas propuestos	El autor propone Actividad 1 con seis ejercicios de técnicas de conteo; Actividad 2 nueve ejercicios de probabilidad.
	Aplicación de la estadística en otras áreas del conocimiento	No se evidencia una aplicación concreta de la estadística en un área específica del conocimiento.
		Se encuentran los ejes temáticos relacionados con

	Relación de los contenidos con los estándares	los estándares de matemáticas, pero no profundiza verticalmente.
	Secciones en el texto	Estos ejes temáticos se trabajan como última unidad académica. Corresponde a la unidad 7 “Estadística y Probabilidad”
	Uso de TIC	No hay referencias de aplicación de tecnologías, manejo de la calculadora, software La multimedia para reforzar aprendizajes (simuladores, presentaciones, juegos) es deficiente.
	Enfoque metodológico	Metodología tradicional, no hay situaciones problemáticas, experimentales, planteamiento de proyectos de aula. Ausencia de una evaluación diagnóstica (conducta de entrada). Pruebas de evaluación no hay propuestas para evidenciar el conocimiento y la aplicación de las competencias. El modelo de pruebas saber no es aplicado con el estilo de competencia en matemáticas actual.

Tabla 3.7 Análisis de texto grado séptimo

No Libro	**Aspectos evaluar**	**Aspectos Relevantes**
A=8	Manejo de lectura introductoria Motivacional	El texto no presenta lectura introductoria motivacional, acerca de los conceptos de los conceptos de técnicas de conteo y probabilidad
	Reseñas Históricas de los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo	Se visualiza una referencia histórica correspondiente a Pierre Fermat, y sus aportes al análisis combinatorio.
	Ejes temáticos	Conceptos básicos: Conjunto, complemento, experimento aleatorio, punto muestral, espacio muestral, suceso aleatorio, sucesos mutuamente excluyentes, análisis combinatorio: principio fundamental del conteo, formas de conteo, permutaciones, factorial, variaciones, combinaciones.
	Definición probabilidad	El texto no hace referencia al concepto de probabilidad. Sólo la teoría del análisis combinatorio.

	Empleo de diagramas de árbol, para la resolución de problemas de probabilidad	El texto presenta dos diagramas de árbol muy elementales, como ilustración para el cálculo del principio de la multiplicación.
	Ejemplos y problemas propuestos	El autor presenta 8 ejemplos de técnicas de conteo; propone un taller con 12 ejercicios.
	Aplicación de la estadística en otras áreas del conocimiento	No se evidencia una aplicación concreta de estos temas en un área específica del conocimiento.
	Relación de los contenidos con los estándares	No se encuentran los ejes temáticos relacionados con los estándares de matemáticas.
	Secciones en el texto	Estos ejes temáticos se trabajan en la unidad 9 académica. "Conteo" de diez unidades que contiene el texto.
	Uso de TIC	No hay referencias de aplicación de tecnologías, manejo de la calculadora, software La multimedia para reforzar aprendizajes (simuladores, presentaciones, juegos) es deficiente.
	Enfoque metodológico	Metodología tradicional, no hay situaciones problemáticas, experimentales, planteamiento de proyectos de aula. Ausencia de una evaluación diagnóstica(conducta de entrada). Pruebas de evaluación no hay propuestas para evidenciar el conocimiento y la aplicación de las competencias. El modelo de pruebas saber no es aplicado con el estilo de competencia en matemáticas actual.

Tabla 3.8 Análisis de texto grado octavo

No Libro	**Aspectos evaluar**	**Aspectos Relevantes**
A=9	Manejo de lectura introductoria Motivacional	Al iniciar la unidad el texto presenta un párrafo dedicado a la economía.
	Reseñas Históricas de los conceptos de probabilidad y técnicas	El texto Presenta sólo una imagen del matemático ruso Andrei Nkolaevich. No se evidencia alguna reseña histórica de los conceptos a trabajar en la

	de conteo	unidad.
	Ejes temáticos	Cálculo de Probabilidades, maneja un enfoque clásico o a priori, experimento aleatorio, eventos, espacio muestral, técnicas de conteo : principio de la multiplicación , permutaciones , combinaciones,
	Propiedades de la probabilidad Definición probabilidad	No se evidencian las propiedades básicas de la probabilidad. Se trabaja el concepto de probabilidad bajo un enfoque clásico.
	Empleo de diagramas de árbol, para la resolución de problemas de probabilidad	Sólo presentan tres ejemplos de diagramas de árbol. No hay ejemplos prácticos resueltos donde se aplique el concepto de probabilidad
	Ejemplos y problemas propuestos	El texto guía presenta sólo dos ejemplos modelo para el cálculo de probabilidades, adicional propone un taller con 12 ejercicios de aplicación de las probabilidades, de técnicas de conteo hay 12 ejercicios a desarrollar.
	Aplicación de la estadística en otras áreas del conocimiento	No se evidencia una aplicación concreta de la estadística en un área específica del conocimiento.
	Relación de los contenidos con los estándares	Se encuentran los ejes temáticos relacionados con los estándares de matemáticas, pero no profundiza verticalmente.
	Secciones en el texto	Estos ejes temáticos se trabajan como última unidad académica. Corresponde a la unidad 7 “Estadística y Probabilidad”
	Uso de TIC	No hay referencias de aplicación de tecnologías, manejo de la calculadora, software La multimedia para reforzar aprendizajes (simuladores, presentaciones, juegos) es deficiente.
	Enfoque metodológico	Metodología tradicional, no hay situaciones problemáticas, experimentales, planteamiento de proyectos de aula. Ausencia de una evaluación diagnóstica(conducta de entrada). Pruebas de evaluación no hay propuestas para evidenciar el conocimiento y la aplicación de las competencias. El modelo de pruebas saber no es aplicado con el estilo de competencia en matemáticas actual.

Tabla 3.9 Análisis de Texto grado noveno

El análisis de texto realizado para los distintos niveles, permite caracterizar lo difícil y complejo que es el proceso de enseñanza y aprendizaje del conocimiento de técnicas de conteo y probabilidad. Puesto que cada texto presenta sus propios conceptos, metodologías y enfoques teóricos, y en algunos casos no se tienen en cuenta aspectos relevantes del saber sabio, los textos de la institución no están actualizados técnicamente, la metodología tradicional predomina, ausencia de proyectos de aula, las aplicaciones de situaciones problemáticas que incorporen el uso y aplicación de las TIC no están programadas en los textos, para la enseñanza del concepto de técnicas de conteo y probabilidad. Los textos manejan el enfoque clásico sin tener en cuenta en algunos casos propiedades y los distintos conceptos de probabilidad con sus objeciones correspondientes. Los ejercicios propuestos son muy reducidos y no se ve su aplicabilidad dentro del entorno escolar. Algunos textos no están diseñados de acuerdo a los lineamientos curriculares, donde evidencien los cinco pensamientos en matemáticas, en especial el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos. El uso de una terminología y definiciones deficientes, inciden en una adaptación del conocimiento y comprensión por parte de los estudiantes y del mismo docente, es necesario que los estudiantes conozcan las ventajas y limitaciones de cada una de las definiciones, adicional al contexto de aplicación de la probabilidad. Esto hace que la transformación del conocimiento científico al saber enseñar sufra una serie de rupturas, que hacen eco en el proceso de enseñanza y comprensión del concepto de probabilidad. Los saberes que se originan de la transposición didáctica están alejados de sus orígenes y de la historia que los originó (Yves, 2005).

Desde los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias en matemáticas establecidos por el Ministerio de Educación Nacional, como derroteros para ser implementados en los distintos niveles de la educación básica primaria y media, en el plan de área de matemáticas; una cuestión es el currículo escrito y otra es la manera como los docentes lo interpretan, a través de los libros de texto empleados. Estos libros son el resultado de *una transposición didáctica* (Yves, 2005), es decir la adaptación o transformación del conocimiento matemático formal a un conocimiento matemático para ser enseñado. En la enseñanza de las técnicas de conteo y la probabilidad, el mismo texto contribuye a la formación del propio docente. (Gómez Torres Emilse, 2013). Es de resaltar que los textos utilizados por los docentes son el discurso escolar que a diario se da en clase, algo esencial en la construcción del conocimiento matemático es el lenguaje empleado, en algunos casos los textos presentan falencias en el lenguaje escrito, tablas y gráficas. Son importantes las relaciones lógicas implícitas que enlazan los elementos del discurso. Los textos no diferencian entre las distintas definiciones que hay de probabilidad; los libros textos que existen en la biblioteca en un 80% están diseñados bajo metodologías de la década de los 90 y no se visualiza claramente las estándares básicos de competencias establecidos por el Ministerio de Educación Nacional. Los conceptos de probabilidad presentan un vocabulario bajo en los textos. Otro aspecto importante en el análisis de los textos, es el uso de las herramientas del análisis combinatorio, sin embargo no hay un vocabulario claro y sin distinciones sobre la notación y uso de estos, a pesar de ser utilizados para la resolución de problemas de probabilidad; la noción de probabilidad tienen preferencia por el enfoque clásico en unas editoriales y por el enfoque frecuentista para otras.

3.3 Saber enseñado (saber aprendido)

Una vez realizadas las adaptaciones pertinentes al conocimiento sabio, y transformado en un conocimiento denominado saber a enseñar, este se transfiere a los estudiantes para convertirse en saberes enseñados. La transposición didáctica tiene un peso especial, porque se trata de la fidelidad. En lo didáctico es clave asumir el concepto de transposición didáctica. De acuerdo a la teoría, los saberes que son objeto de la transposición didáctica con cierta frecuencia tienden a suspender su vida en la comunidad científica sabia, el saber que se va a enseñar se presenta mediante los textos de saber. Estos tienen como característica seguir un orden lógico en la presentación de los saberes. Todo el discurso tiene un principio y un fin y opera por un encadenamiento lógico de razonamientos. Un hecho fundamental: la coherencia lógica no garantiza el aprendizaje. Chevallard agrega que es necesario una vigilancia epistemológica que aluda a la atenta mirada que debe haber respecto a la brecha existente entre el saber académico y el saber que se va a enseñar, es un aspecto fundamental que debe tener en cuenta el docente en el momento de realizar el proceso de enseñanza aprendizaje con los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo.

En la comunicación (elemento de la transposición didáctica) se parte de un saber académico que pasa por diversas etapas en el que es formateado, y se corre el riesgo de que este saber llegue tergiversado al destinatario (Nieves, 2001).

La primera información para analizar el saber aprendido, es la correspondiente a las pruebas escritas realizadas a los estudiantes.

3.3.1 Resultados prueba de conocimientos de los estudiantes

3.3.1.1 Estimación de puntajes promedios

Estratos	n	Media	Desviación típica	Coeficiente de variación CV	Intervalo de confianza para la media al 95%		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	**Límite superior**		
6° - 7°	70	**32,69**	17,27	52,78	**29,04**	**36,35**	0,0	81,82
8° - 9°	54	**35,93**	19,85	17,47	**32,42**	**39,43**	0,0	90,00
10° - 11°	45	**36,11**	15,49	15,49	**32,03**	**40,19**	0,0	75,00
Total	169	**34,63**	17,83	1,37120	**32,46**	**36,81**	0,0	90,00

Tabla 3.10 Análisis de promedios entre estratos

La tabla 3.9 presenta el resumen estadístico correspondiente a las pruebas de conocimiento escritas, sobre técnicas de conteo y probabilidad aplicadas a estudiantes. De acuerdo a las estimaciones realizadas, al 95% de confiabilidad, el promedio del puntaje de las pruebas de conocimiento se encuentra entre 32,46% y 36,81%, lo que nos indica un desempeño bajo en el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, resultado que se manifiesta en todos los estratos analizados.

Los resultados obtenidos en las pruebas aplicadas a los estudiantes en los diferentes estratos, no alcanzan un nivel de desempeño básico. Sus conocimientos en el tema de técnicas de conteo y probabilidad muestra un desempeño bajo en la solución de problemas de contexto.

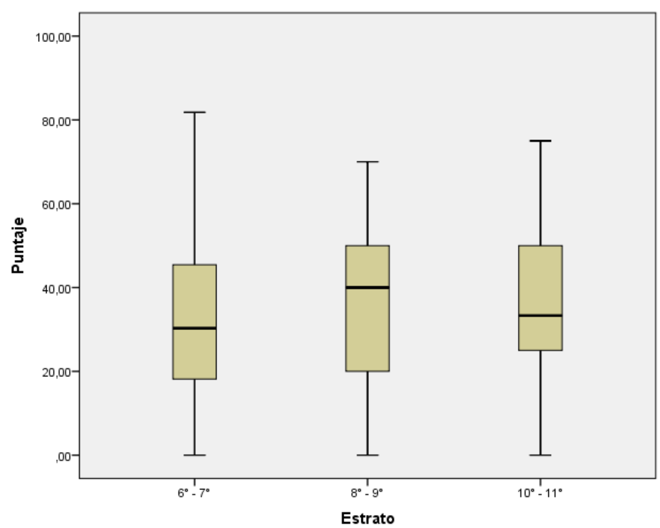


Ilustración 6 Diagrama de cajas y bigotes

El gráfico muestra que las pruebas obtenidas en los distintos estratos son homogéneas con resultados inferiores al 50%, mostrando un desempeño bajo en las pruebas realizadas. Se observa mayor variabilidad en el estrato de 8 – 9, en cuanto a los puntajes obtenidos.

3.3.1.2 Análisis de varianza

Para comparar los promedios entre los diferentes estratos se utilizó un análisis de varianza, para lo cual se hizo necesario verificar los supuestos del análisis, a saber: normalidad y homocedasticidad en cada estrato.

Iniciamos con el proceso de contrastar la hipótesis, de que los datos se distribuyen de forma normal, lo cual se verificó a través de los gráficos Q-Q plot

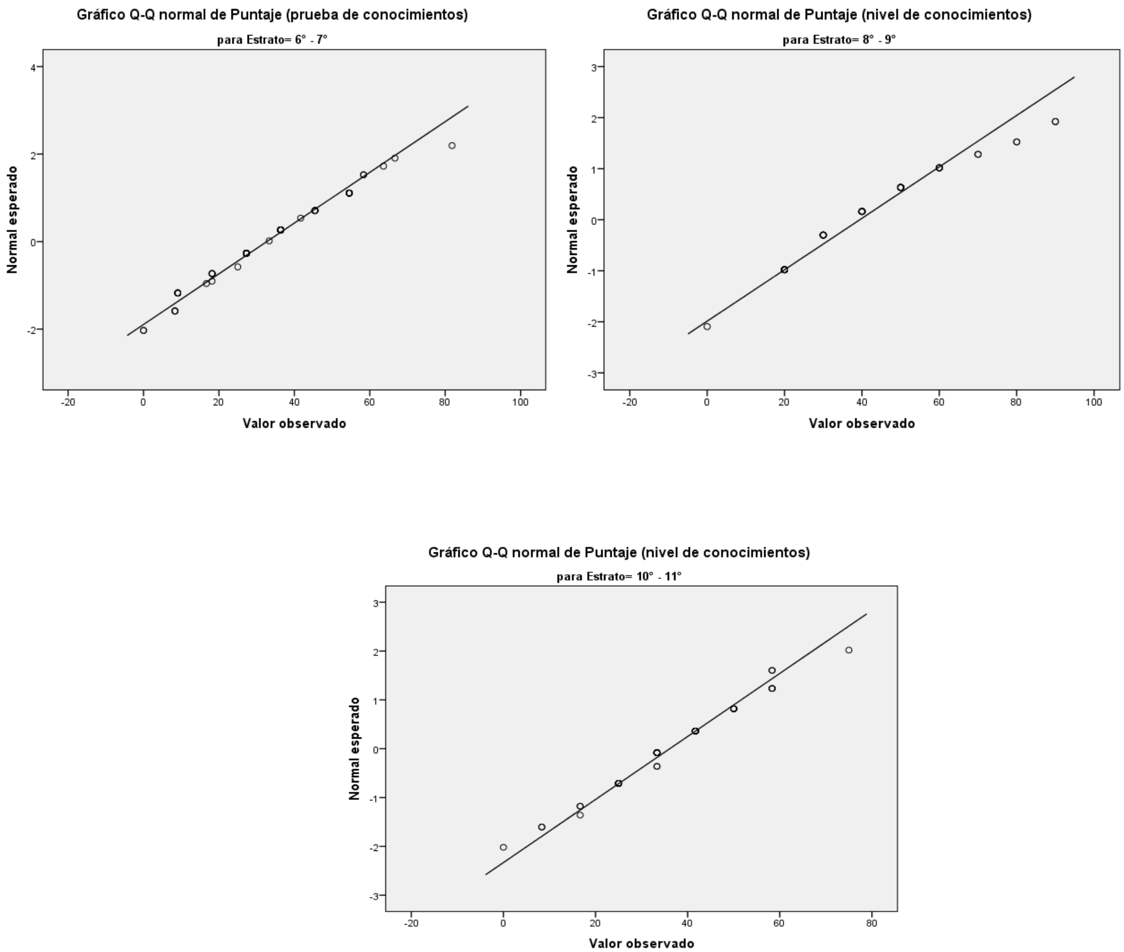


Ilustración 7 Gráficos Q-Q plot

Los gráficos de los distintos estratos muestran una relación cercana a una recta, sugiriendo que los datos proceden de una distribución Normal, adicionalmente al realizar la prueba de Shapiro Wilk se acepta la hipótesis de normalidad (p valor = 0,09).

Continuamos con la revisión de la prueba de homogeneidad (homocedasticidad) de varianzas, entre los distintos estratos o niveles propuestos, realizada a través del estadístico de Levene, indicando que no hay evidencias suficientes que manifiesten diferencias significativas entre las varianzas de los estratos.

Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
,688	2	166	,504

Tabla 3.11 Prueba de homogeneidad de varianzas estratos

Como los supuestos se cumplen satisfactoriamente, se procede a realizar el ANOVA

	Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	451,900	2	225,950	,889	,413
Intra-grupos	42208,310	166	254,267		
Total	42660,210	168			

Tabla 3.12 Anova de un factor

El resultado anterior (P valor = 0,413) indica que no existen diferencias significativas entre los puntajes promedios de los diferentes estratos analizados, es decir, que los niveles de desempeño de los estudiantes es el mismo en todos los grados, correspondiente a un nivel de desempeño bajo.

3.3.1.3 Asociación de variables

Para reforzar el resultado anterior, se realizó un análisis de tablas de contingencia, utilizando la variable estrato y el resultado de la prueba de conocimientos clasificado por niveles de desempeño: bajo, mínimo y satisfactorio o avanzado

Tabla de contingencia Estrato * Desempeño

			Niveles de Desempeño			Total
			Bajo	**Mínimo**	**Satisfactorio o avanzado**	
Estrato	6° - 7°	Recuento	20	37	13	70
		% dentro de Estrato	28,6%	52,9%	18,6%	100,0%
	8° - 9°	Recuento	16	33	5	54
		% dentro de Estrato	29,6%	61,1%	9,3%	100,0%
	10° - 11°	Recuento	15	24	6	45
		% dentro de Estrato	33,3%	53,3%	13,3%	100,0%
Total		Recuento	51	94	24	169
		% dentro de Estrato	30,2%	55,6%	14,2%	100,0%

Tabla 3.13 Tabla de contingencia

De acuerdo a la información suministrada en la tabla 3.17, el 30,2% de los estudiantes queda dentro el nivel desempeño bajo, el 55,6% se encuentra clasificado en el nivel de desempeño mínimo, en el nivel satisfactorio y avanzado el 14,2%. Se deduce que el nivel de desempeño de los estudiantes con mayor porcentaje corresponde al desempeño mínimo. La prueba Chi cuadrado para analizar la asociación entre las variables estrato y nivel de desempeño, confirma que no hay asociación entre las variables (p valor = 0,638), es decir los niveles de desempeño son independientes del grado que esté cursando el estudiante.

3.3.1.4 Análisis de respuestas a la prueba de conocimientos

Las celdas coloreadas corresponden a las preguntas acertadas, número de estudiantes y porcentaje de éstos en los distintos estratos.

		Nivel Escolar					
		6 – 7		8 – 9		10 - 11	
		Recuento	% del N de la columna	Recuento	% del N de la columna	Recuento	% del N de la columna
P1	A	8	11,4%	25	46,3%	3	6,7%
	B	33	47,1%	14	25,9%	3	6,7%
	C	28	40,0%	10	18,5%	2	4,4%
	D	1	1,4%	5	9,3%	37	82,2%
	Total	70	100,0%	54	100,0%	45	100,0%
P2	A	23	32,9%	6	11,1%	1	2,2%
	B	13	18,6%	38	70,4%	1	2,2%
	C	12	17,1%	7	13,0%	38	84,4%
	D	21	30,0%	3	5,6%	5	11,1%
	NR	1	1,4%	0	0,0%	0	0,0%
	Total	70	100,0%	54	100,0%	45	100,0%
P3	A	13	18,6%	8	14,8%	3	6,7%
	B	45	64,3%	10	18,5%	36	80,0%
	C	2	2,9%	0	0,0%	1	2,2%
	D	10	14,3%	35	64,8%	5	11,1%
	NR	0	0,0%	1	1,9%	0	0,0%
	Total	70	100,0%	54	100,0%	45	100,0%
P4	A	18	25,7%	32	59,3%	11	24,4%
	B	16	22,9%	2	3,7%	18	40,0%
	C	12	17,1%	1	1,9%	7	15,6%
	D	21	30,0%	19	35,2%	8	17,8%
	NR	3	4,3%	0	0,0%	1	2,2%
	Total	70		54		45	
P5	A	14	20,0%	13	24,1%	3	6,7%
	B	6	8,6%	35	64,8%	18	40,0%
	C	16	22,9%	3	5,6%	10	22,2%
	D	33	47,1%	3	5,6%	10	22,2%
	NR	1	1,4%	0	0,0%	4	8,9%
	Total	70		54		45	
	A	18	25,7%	16	29,6%	2	4,4%

P6	B	23	32,9%	16	29,6%	36	80,0%
	C	12	17,1%	14	25,9%	3	6,7%
	D	17	24,3%	8	14,8%	2	4,4%
	NR	0	0,0%	0	0,0%	2	4,4%
	Total	70		54		45	
P7	A	34	48,6%	3	5,6%	4	8,9%
	B	9	12,9%	16	29,6%	13	28,9%
	C	12	17,1%	20	37,0%	9	20,0%
	D	14	20,0%	15	27,8%	16	35,6%
	NR	1	1,4%	0	0,0%	3	6,7%
	Total	70		54		45	
P8	A	16	22,9%	6	11,1%	32	71,1%
	B	20	28,6%	36	66,7%	3	6,7%
	C	6	8,6%	6	11,1%	5	11,1%
	D	26	37,1%	6	11,1%	3	6,7%
	NR	2	2,9%	0	0,0%	2	4,4%
	Total	70		54		45	
P9	A	18	25,7%	25	46,3%	11	24,4%
	B	14	20,0%	5	9,3%	4	8,9%
	C	16	22,9%	12	22,2%	14	31,1%
	D	19	27,1%	12	22,2%	13	28,9%
	NR	3	4,3%	0	0,0%	3	6,7%
	Total	70		54		45	
P10	A	13	18,6%	4	7,4%	4	8,9%
	B	16	22,9%	8	14,8%	15	33,3%
	C	25	35,7%	38	70,4%	9	20,0%
	D	12	17,1%	4	7,4%	9	20,0%
	NR	4	5,7%	0	0,0%	8	17,8%
	Total	70		54		45	
P11		0	0,0%	54	100,0%	0	0,0%
	A	37	52,9%	0	0,0%	13	28,9%
	B	12	17,1%	0	0,0%	11	24,4%
	C	10	14,3%	0	0,0%	10	22,2%
	D	6	8,6%	0	0,0%	3	6,7%
	NR	5	7,1%	0	0,0%	8	17,8%
	Total	70		54		45	

Tabla 3.14 Análisis de pruebas escritas por estratos

De acuerdo a la información presentada en la tabla 3.14, el nivel de desempeño de los estudiantes en los distintos niveles corresponde a un nivel de desempeño bajo, esto nos sugiere que existen dificultades en competencias de razonamiento, interpretación y representación, comunicación, formulación y ejecución y resolución; desde este contexto teórico se puede decir que estas capacidades que integran los conocimientos como potencialidades, habilidades, destrezas, prácticas y acciones, manifestadas a través de los desempeños, podemos reconocerlas como un saber hacer, en situaciones concretas y contextos específicos, a través de situaciones problemáticas vivenciales. Las competencias en este sentido se construyen, se desarrollan y evolucionan permanentemente de acuerdo con las vivencias y aprendizajes. Se analizó que las situaciones de representación gráfica, ayudó a que los estudiantes realicen un manejo más adecuado del concepto de probabilidad, se detecta que el uso y aplicación de las técnicas de conteo les dificulta al momento del análisis y resolución de problemas; se evidencia un grado de dificultad en el entendimiento de los componentes de probabilidad y técnicas de conteo, que son las categorías conceptuales sobre las cuales se realizan los desempeños en estadística, a través de situaciones problematizadoras y acciones que se relacionan con el contexto de los estudiantes. El porcentaje de estudiantes al responder las preguntas de probabilidad se refleja en la ilustración 8, se encuentra un alto porcentaje de desconocimiento del uso y aplicación del concepto de probabilidad en la resolución de problemas, en los distintos estratos. El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría probabilidades y la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la teoría combinatoria, muchas decisiones en situaciones problemáticas de contexto requieren de la capacidad de análisis y entendimiento de los conceptos.

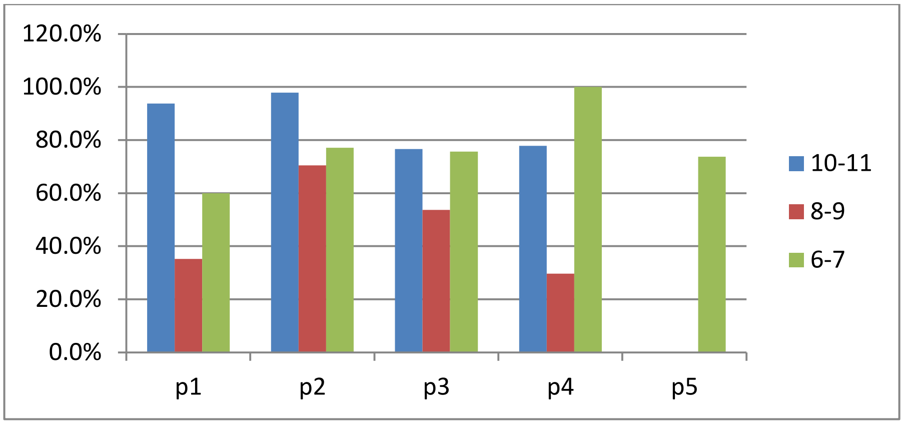


Ilustración 8 Porcentaje no acertado en las preguntas relacionadas con probabilidad

Las preguntas correspondientes a las técnicas de conteo no acertadas por parte de los estudiantes en el cuestionario formulado, se muestran en la ilustración 9, un alto porcentaje marca el desconocimiento de los estudiantes frente a estas herramientas del análisis combinatorio. Se puede marcar un mayor porcentaje en los estudiantes de los grados 6 – 7, en el uso, aplicación en la solución de las preguntas propuestas en el cuestionario.

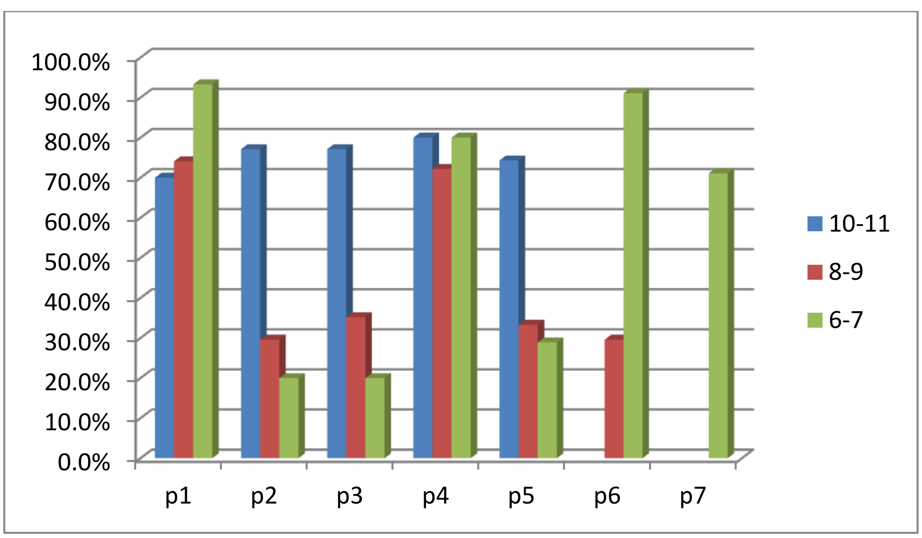


Ilustración 9 Porcentaje no acertado en las preguntas relacionadas con técnicas de conteo

Para complementar el análisis anterior, se solicitó a 10 estudiantes de cada estrato justificar la respuesta que había señalado como correcta, lo cual se resume a continuación:

CONCEPTO DE PROBABILIDAD GRADOS SEXTO SÉPTIMO				
P1	**P3**	**P4**	**P6**	**P11**
• La mayoría respondió al azar (7 de 10) • Contar los casos favorables observando las caras del dado (2 de 10)	• Al azar • El dardo sólo tiene un letra “g” • Porque al tirar el dardo sólo tiene una oportunidad • La escogí porque la ruleta tiene 8 divisiones. • Utilice la calculadora • Todas las respondí al azar • La respondí por lógica • Porque hay 8 y hay una “g”	• La selección la hice al azar • Utilice la calculadora • Creo que es el orden perfecto • Creo que es esa Que cada uno se reparte su posición.	• Al azar • No sabía • Todo lo respondí al azar • Porque lo hice con calculadora • Porque hay mínima probabilidad • Hay 4% de probabilidad • Porque el dado tiene 12 partes y de 36 • Porque esos números son mayores que nueve	• 10/12 observé • No sé • Porque sí • Al azar • Es la opción más posible • Es la correcta • Pinochazo • Por intuición • Porque sabía • Me parece la más lógica

CONCEPTO DE TÉCNICAS DE CONTEO GRADOS SEXTO SÉPTIMO					
P2	**P5**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**
• Al azar • Tiene muchas formas • No la sabía • Porque se pueden hacer muchas combinaciones • La hice a cálculo • Tache la B	• Por lógica • Por factorial • Al azar • Creo que si es la correcta • Si multiplicamos los estudiantes a la vez da el resultado	• Porque la hice con la calculadora • Porque hay mínima probabilidad • Al azar • Porque sabía	• Al azar • No entendí • Por intuición • Es la más indicada • Porque sume y ese es el número	• La hice con calculadora • Al azar • Porque sabía • Porque sí • Porque nos dice que no se repite	• Al azar • Me parece la más lógica • Es la correcta La hice con calculadora

no sabía • Porque creo que es • Utilice calculadora • Curiosidad • Me están ofreciendo dos sabores				• Sabía la respuesta	

CONCEPTO DE PROBABILIDAD GRADOS OCTAVO,NOVENO,DÉCIMO Y UNDÉCIMO TÉCNICAS DE CONTEO				
P1	**P2**	**P3**	**P7**	**P10**
• Compare los factores y las probabilidades de cada uno y dio 340 • Al Azar	• Utilice el cálculo de probabilidades y el resultado fue 2598960 • Aplique combinatoria •	• Realice los cálculos y el resultado de formas de escoger a los dos representantes	• Esa fue la probabilidad	• Por calculadora

CONCEPTO DE PROBABILIDAD GRADOS OCTAVO,NOVENO, DÉCIMO Y UNDÉCIMO TÉCNICAS DE CONTEO				
P4	**P5**	**P6**	**P8**	**P9**
• Por calculadora • La moneda tiene dos lados al lanzarla da 2/4 • Al azar	• Por conveniencia • Hice el cálculo y ese fue el resultado • Al azar • Utilice calculadora	• Porque calcule • Realice el cálculo y me dio ese resultado • Al azar • Lo hice con calculadora	• Porque calcule • Las probabilidades son 12/14 • Al azar • Lo hice con calculadora	• Por conveniencia • Me dio este resultado 3/36 • Al azar • Lo hice con calculadora

Al realizar una descripción de las respuestas dadas por los estudiantes al contestar las preguntas correspondientes al test aplicado, se observa que la mayoría responde sus preguntas al azar, por intuición, por conveniencia, no se evidencia la presencia de un conocimiento saber aprendido significativo, el manejo de estas herramientas estadísticas son deficientes, el lenguaje numérico y simbólico empleado por los estudiantes se manifiesta con falencias conceptuales. Un grupo pequeño de estudiantes maneja el concepto de probabilidad y combinatoria por medio de la intuición, y aplica heurísticas propias que llevan a la solución aproximada de problemas de contexto planteados, las cuales producen sesgos en las conclusiones obtenidas, la incorporación del uso de las TIC (calculadora) es otro factor que incide en los resultados propuestos y seleccionados por los estudiantes, no manejan de forma adecuada este recurso tecnológico, no reconocen las diferencias existentes en el uso de los enfoques de la probabilidad y las técnicas del análisis combinatorio.

El manejo de las operaciones combinatorias, más que ser algoritmos de cálculo de probabilidades en espacios probabilísticos complejos, son el camino de la comprensión de los fenómenos del azar, siendo estas un componente fundamental de pensamiento formal que opera mediante combinaciones de las posibilidades que descubre. (Batanero, 2001)

3.3.1.5 Análisis de la entrevista de los docentes

La entrevista se aplicó a la totalidad de los docentes del área de matemáticas, se pudo evidenciar heterogeneidad en los docentes, con características de formación disciplinar distintas, egresados de universidades como la Universidad Tecnológica de Pereira, Universidad Antonio Nariño, Universidad Libre, Universidad Luis Amigo, y Universidad del Tolima, con título otorgado en : Licenciado en matemáticas y Física, Ingeniería Financiera y licenciado en Pedagogía Reeducativa, es de acotar que la formación en el área de estadística de los licenciados en matemáticas y en ingenierías en las distintas universidades, tiene una intensidad horaria menor en comparación con otras asignaturas dentro del plan de estudios. La fundamentación teórica que maneja el docente de los conceptos de técnicas de conteo y probabilidad, está de acuerdo a su investigación, formación e interpretación de los mismos que realiza de forma autodidacta. Aunque los docentes cuentan con la habilidad para transmitir los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo, aún no se involucran mucho en establecer consultas a nivel de los diferentes enfoques del concepto de probabilidad y el origen de las técnicas de conteo, esto se evidencia cuando al preguntar ¿Qué enfoque teórico maneja en la enseñanza de la probabilidad? Se obtuvieron respuestas como: “No lo tengo presente”, “No responde nada”, “Sin presición”. La estadística a pesar de contar con una axiomática satisfactoria, es quizás la única rama de las matemáticas donde prosiguen hoy día las discusiones sobre la interpretación de los conceptos básicos. Los problemas filosóficos que la axiomatización no ha resuelto se refieren a las posibilidades de aplicación de los conceptos estadísticos y la interpretación de los mismos en diferentes circunstancias.

Si el docente no es consciente de la problemática, difícilmente podrá comprender las dificultades de los estudiantes, quienes necesitan materializar en ejemplos concretos los conceptos y modelos matemáticos. (Batanero, 2001)

La intensidad horaria en la enseñanza de la estadística y la probabilidad no es la más acorde para el desarrollo de los distintos ejes temáticos, los docentes manifestaron sobre el tiempo y el momento de enseñanza de los conceptos de probabilidad y combinatoria que: “Todavía no dedico tiempo, por cuanto ese tema está al final de la programación del nivel”, “Se tiene programado para el último período”, “Sólo en el primer período”, “Por lo regular se desarrolla al final del período académico”. Las dificultades que visualizan los docentes frente a la enseñanza de la probabilidad y técnicas de conteo, la evidencian en la lectura e interpretación del enunciado. Generalmente se dejan estos componentes (ejes temáticos) para el cuarto período, y no se logra dar continuidad en la transmisión de los conceptos. Los textos que emplean los docentes de la institución educativa, como bibliografía son los que se encuentran en la biblioteca de la institución, hecho que se manifiesta en frases como: "Sólo se utilizan los libros de la biblioteca del colegio", "Mencionan el nombre del texto utilizado y que se encuentra en la biblioteca". Las herramientas tecnológicas para el desarrollo de aplicaciones son muy deficientes, en cuanto al uso de software y equipos de cómputo, en este aspecto algunos docentes responden "Ninguna", "sólo excel", "Ninguna hasta el momento". La estadística se maneja como un eje temático, más no como un área de las matemáticas. Se puede resaltar que algunos docentes no han visto formalmente estos conceptos, y si los conocen es de forma empírica, hecho que no los prepara suficientemente para enseñarlos y transmitirlo a los estudiantes. La actitud frente a la enseñanza de la estadística y probabilidad no es la más eficiente, esto, por el mismo grado de desconocimiento del propio lenguaje y notación simbólica de la probabilidad y técnicas de conteo. En la planeación realizada por los docentes, no hay criterios claros frente a las competencias en los distintos niveles, en cuanto a cuales se deben alcanzar a corto, mediano o largo plazo. Sólo se evalúa a corto plazo, y no se logra establecer si han desarrollado un pensamiento estadístico que se plasme en su lógica cotidiana. Otro aspecto importante es que hace falta adaptar el currículo a los lineamientos curriculares, y estándares básicos de competencias en matemáticas y DBA establecidos por el Ministerio de Educación Nacional, enmarcados en el plan de mejoramiento de la calidad, por ende no se ejerce un control para su cumplimiento. Adicional a estas falencias que se presentan en la institución, se deben incorporar las TIC a la enseñanza de la estadística y la probabilidad, sugieren el uso de simuladores que ayudan a la construcción del pensamiento estadístico. No se muestra dentro de las estrategias pedagógicas, un proyecto de aula que permita al estudiante programar y organizar los procesos de enseñanza que se desarrollan, y los aplique en contexto y sean útiles en su vida cotidiana.

4 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

4.1 CONCLUSIONES

I. Los enfoques teóricos de los conceptos de probabilidad y análisis combinatorio considerados como saberes sabios, sufren un distanciamiento al ser seleccionados como objetos de enseñanza, por razones de transformaciones y adaptaciones teóricas e interpretaciones, que se plasman en los textos de trabajo que presentan las editoriales, el saber sabio sufre una despersonalización al ser socializado. Estas categorías conceptuales seleccionadas como objetos de enseñanza y que se adaptan como un saber a enseñar, presentan información teórica muy superficial, sin establecer las objeciones y características de los distintos enfoques de la teoría de la probabilidad.

II. Una vez establecidas las bases teóricas desde los estándares de competencias y los lineamientos curriculares de matemáticas, que el docente lleva al aula de clase y enseña a sus estudiantes, estos conceptos no reflejan aprendizajes significativos en los estudiantes, por diversos factores que influyen en el sistema didáctico, entre los cuales se destacaron la falta de claridad en los enfoques del concepto de probabilidad, la desactualización bibliográfica y la ausencia del uso de las tic en las prácticas de aula.

III. Los distintos enfoques y conceptos empleados en la enseñanza de la probabilidad y el análisis combinatorio, se mantienen inmutables, estos se han enseñado y llevado al aula clase con las mismas características. No se incorpora el uso de nuevas tecnologías para la simulación de procesos naturales donde se muestre el concepto de probabilidad bajo los distintos enfoques.

IV. El paso del saber sabio al saber enseñado permite articular el análisis epistemológico con el análisis didáctico. Reconocer la transposición didáctica permite participar en el funcionamiento didáctico, evitando un envejecimiento de los conceptos y que estos sufran un estancamiento en los avances científicos.

V. El nivel de conocimiento de los estudiantes en temas de técnicas de conteo y probabilidad es bastante deficiente sin importar el grado que cursan. Se observan problemas de apropiación de los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo, el uso inadecuado de la terminología, la falta de comprensión de término abstractos, deficiencias en capacidades operativas y de cálculo, dificultad para aplicar los conceptos de probabilidad y técnicas de conteo en la solución de problemas de contexto.

VI. El uso de textos por parte de docentes y estudiantes, no actualizados con las pedagogías y metodologías modernas, ni adaptados a los estándares básicos de competencias, lineamientos curriculares, ni la incorporación de las TIC en la enseñanza de la probabilidad, generan un envejecimiento biológico y moral de estos conceptos.

4.2 RECOMENDACIONES

1. Plantear ante el consejo académico, la propuesta de intensificar en dos horas semanales la enseñanza de la estadística dentro del plan de estudios de la Institución Educativa Francisco José de Caldas, en la educación Básica secundaria y Media, justificando la importancia que tiene la estadística y la probabilidad dentro del contexto social, y el rol que juega en el campo de la investigación.

2. Proponer a nivel del Ministerio de Educación Nacional y Secretarias de educación departamental y municipal, capacitación continua a los docentes en el área de estadística, manejo de software especializado como SPSS, INFOSTAT, MINITAB, R y entre otros, para fortalecer la enseñanza de la estadística y la probabilidad, e incorporar el uso de estas tecnologías y software especializado estadístico, en la solución de problemas transversales en áreas de estudio como las ciencias sociales, ciencias biológicas, español y literatura, matemáticas, educación física y entre otras.

3. Crear semilleros de investigación a nivel de secundaria, de tal manera que motiven a los estudiantes, el interés y el estudio de la estadística y la probabilidad, a partir de problemas sociales y de contexto.

4. Motivar los docentes del área de matemáticas en la aplicación de nuevas didácticas para la enseñanza de la probabilidad y técnicas de conteo.

5. Dar a conocer a los docentes la importancia de la transposición didáctica, en el proceso de adaptaciones y/o transformaciones que se hacen al conocimiento para transmitirlo y llevarlo al aula de clase, para que este saber aprendido por los estudiantes sea significativo.

REFERENCIAS

Calva Sánchez, Luís Enrique. (Noviembre de 2005). *Consideraciones sobre algunos conceptos básicos de probabilidad.* Obtenido de http://lya.fciencias.unam.mx/lars/tesis/luisecs.pdf

Calva Sánchez, Luís Enrique. (Noviembre de 2005). *Consiideraciones básicas de probabilidad.* Obtenido de http://lya.fciencias.unam.mx/lars/tesis/luisecs.pdf

Ciro Martinez, B. (2012). *Estadística y Muestreo, Décima tercera edcición.* Bogota,D.C: Editor Géminis Ltda.

Cuernavaca. (04de04de2008). *Matemáticas discretas.* Obtenido de http://campus.cva.itesm.mx/nazira/Tc1003/PDF/Apuntes/0600%20Tc1003_Analisis_Combinatorio.pdf

De Groot, M. H. (1988). *Probabilidad y estadística.* Wesley Iberoam.

Edison de Faria. (2014). *Centro de Investigaciones Matemáticas.* Recuperado el 15 de 03 de 2015, de http://www.ucr.ac.cr/edefaria

Florez H, J. (2012). La enseñanza de la probabilidad: Del saber sabio al saber enseñado. *Asociación Colombiana para la Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología. EDUCyT*.

Girón, F. J. (10 de 05 de 1994). *www.matematica.ciens.ucv.ve.* Obtenido de Historia de las Matemáticas: www.matematica.ciens.ucv.ve/modelos/descargas/HISTORIADELAMATEMATICA_1994_00_00_05.PDF

Gómez Mendoza, M. A. (2005). Latransposición Didáctica: Historia de un concepto. *Revista Latinoamericana de Estudios Eduativos*, 84.

Gómez Torres Emilse, J. J. (2013). El lenguaje de la probabilidad en los libroas de texto d ela educación primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 75-91.

Grupo de investigación Enumed.net . (s.f.). *Enumed.net.* Obtenido de Enciclopedia Virtual: http://www.eumed.net/libros-gratis/2008b/405/Probabilidad%20frecuencialista.htm

Hanaro, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto.* Andalucia: Servicio de reprografía Universidad Nueva Granada.

Hernández Sampieri, R. (1998). *Metodología de la Investigación.* México: McGrawHill.

Jimenéz Saavedra, N. (2000). La axiomática de Kolmogorov, Fundamento de la Teoría de la probabilidad. *ISSN 0212- 3096 No 43-44*, 185-190. Obtenido de http://www.matematica.ciens.ucv.ve/modelos/Descargas/Articulo37.pdf

Leslie, D. D. (04 de Diceimbre de 2014). *Enfoque clásico y empírico de la probabilidad.* Obtenido de https://prezi.com/iau2wydwgy5d/enfoque-clasico-y-empirico-de-la-probabilidad/

Lincoln L., C. (1993). *Estadística para las ciencias administrativas.* Long Beach California.

Lincoln L., C. (2005). *Estadística para las ciencias administrativas.* México: MC. GRAW HILL.

Lincoln L., C. (2005). *Estadística para las ciencias administrativas.* México: MC. GRAW HILL.

Luís Enrique Calva Sánchez. (Noviembre de 2005). *Consiideraciones básicas de probabilidad.* Obtenido de http://lya.fciencias.unam.mx/lars/tesis/luisecs.pdf

MEN, Ministerio de Educación Nacional. (Mayo de 2006). *Mineducación.gov.co.* Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional. Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* Bogotá.

Nieves, E. M. (2001). Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial. *Voces y silencios: Revista Latinoamericana de Educación Vol 2 No. Especial*.

Ospina Botero, D. (2001). *Introducción al muestreo.* Bogotá,D.C, Colombia: UNIBIBLOS, Universidad Nacional de Colombia.

Pablo Salinero Ruiz. (04 de 04 de 2015). *Historia de la probabilidad.* Obtenido de https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/.../salinero_probabilidad.pdf

Román Román, P. (s.f.). *Estaística descriptiva e introducción a la probabilidad.* Obtenido de www.x.edu.uy/inet/kolmogorov.pdf

Sacco, E. (s.f.).

Tecnológico Monterrey. (04 de 04 de 2008). *campus monterrey.* Obtenido de http://campus.cva.itesm.mx/nazira

Verret, M. (1975). *Le temps des études* . Paris: Honore Champion.

Yves, C. (2005). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

ANEXO 1. ENTREVISTA A DOCENTES

1	Tiempo en horas que dedica al eje temático de técnicas de conteo y probabilidad durante el período académico	
2	La implementación de una hora semanal en la enseñanza del análisis combinatorio y probabilidad en la Institución ayudará en el desempeño de los estudiantes en matemáticas y pruebas externas	
3	¿Qué enfoque maneja en la enseñanza de la probabilidad?	
4	Enseña primero probabilidad y luego técnicas de conteo	
5	¿Qué dificultades ha identificado en la enseñanza de las técnicas de conteo y la probabilidad(resolución-operacional, razonamiento, comunicación)?	
6	Maneja que estrategias didácticas en la enseñanza de las técnicas de conteo y la probabilidad	
7	Trabaja los conceptos de análisis combinatorio y probabilidad a partir de problemas prácticos de contexto donde el estudiante asimile y comprenda la importancia de estos	
8	Qué referencia bibliográfica adicional a la empleada, recomienda para complementar la enseñanza del análisis combinatorio y la probabilidad a los estudiantes.	
9	Que herramienta tecnológica emplea para el desarrollo de problemas de aplicación.	
10	Durante el año lectivo enseña el análisis combinatorio y la probabilidad al finalizar el cuarto periodo.	
11	Enseña a los estudiantes los conceptos de experimento aleatorio y la diferencia entre el azar y lo aleatorio, lo determinístico y no determinístico. La importancia de las técnicas de conteo	
12	En la enseñanza del análisis combinatorio que ejes temáticos desarrolla con los estudiantes	
13	Cuando trabaja con el concepto de probabilidad lo enfoca bajo la teoría de conjuntos	
14	Conoce los estándares de matemáticos para el grado en el cual imparte estadística y probabilidad	

ANEXO 2. CUESTIONARIO GRADOS DÉCIMO Y UNDÉCIMO

	ANEXO 2. INSTITUCIÓN EDUCATIVA FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS Resolución de Aprobación Nº 0495 de marzo 19 de 2.013 por medio de la cual se modifica la Resolución 01159 de septiembre de 2007 por la cual se aprueban unos estudios a la Institución Educativa "Francisco José de Caldas" NIT 891.401.155-7 DANE 166682001297 Cr 12 Cl 7 ESQUINA TELS: 3641063, 3643880 SANTA ROSA DE CABAL RISARALDA	Página
	Prueba de Estadística Grados : 10-11 **Tema : análisis Combinatorio y Probabilidad**	

1 Hallar el espacio muestral del lanzamiento de 3 monedas.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 3 monedas se obtengan al menos dos caras?

a. 4/8 b. 2/2 c. 3/8 d. 1/3

3. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 3 monedas se obtengan al menos 1 sello?

a. 7/8 b. 9/24 c. 3/6 d. 2/78.

4. En una clase de 35 estudiantes se desea elegir un comité de 5 estudiantes. Cuántas formas diferentes se pueden presentar?

a. 325492 b. 324632 c.205412 d. 32456

5. Luego de lanzar dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma 5 o 3.

a. 6/30 b. 5/36 c. 4/30 d. 6/36

6. Al lanzar 2 dados. Calcula la probabilidad de que la suma sea 7. No puede haber dos números iguales sumados.

a. 5/36 b. 4/30 c. 6/36 d. 6/30

7. Se tienen 6 envases que contienen pinturas de distintos colores, ¿de cuántas formas se pueden mezclar los 6 colores?

a. 420 b. 720 c. 520 d. 620

8. Si utilizamos 27 letras y 10 dígitos. Cuál es el número de placas que se pueden fabricar cuya parte inicia : A____ ____ 3 ___ ___

a. 27x10^2 b. 27^2x10^2
c. (27^2x10^2) d. 27^3x10

9. Con los dígitos 1,2,3,4,5,6,7,8. ¿Cuántos números de 8 dígitos se pueden presentar?

a. 40320 b. 14515 c. 50321 d. 45201

Un grupo de 7 hombres y 5 mujeres forma un comité de 2 mujeres y 3 hombres.

10. ¿Cómo se puede formar si en el grupo pueden pertenecer cualquier hombre y mujer?

a. 270 b. 540 c. 1020 d. 350

11. Un hombre determinado debe estar incluido en el grupo

a. 100 b. 150 c. 200 d. 350

12. Dos mujeres específicas no deben pertenecer al grupo

a. 105 b. 200 c. 520 d. 1200

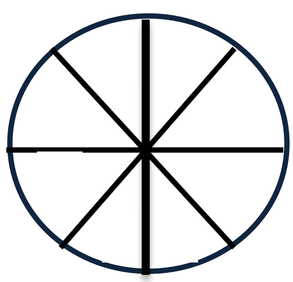
ANEXO 3. CUESTIONARIO GRADOS SEXTO Y SÉPTIMO

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS Resolución de Aprobación Nº 0495 de marzo 19 de 2.013 por medio de la cual se modifica la Resolución 01159 de septiembre de 2007 por la cual se aprueban unos estudios a la Institución Educativa "Francisco José de Caldas" NIT 891.401.155-7 DANE 166682001297 Cr 12 Cl 7 ESQUINA TELS: 3641063, 3643880 SANTA ROSA DE CABAL RISARALDA	Página
	Prueba de Estadística Grados : 6-7 **Tema : análisis Combinatorio y Probabilidad**	

1. Calcular la probabilidad de que, al lanzar un dado al aire, salga un número par.
   a. 4/6 b. 2/6 c. 3/6 d. 5/6

2. Determina las posibles formas en que Catalina puede combinar su cono de dos sabores, sabiendo que la heladería ofrece: vainilla, chocolate, arequipe, fresa y limón.
   a. 2 b. 8 c. 6 d. 10

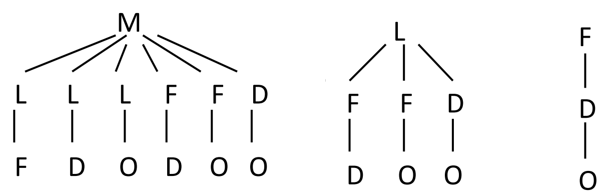
3. si se lanza un dardo a la figura, ¿Cuál es la probabilidad de que este se introduzca en el sector g?



a. 3/8 b. 1/8 c. 5/8 d 8/8

4. un entrenador de atletismo está conformando un grupo de atletas que representará al colegio en la final de un intercolegiado. Para ello, debe escoger 3 de 5 muy buenos atletas, Marta (M), Lorena (L), Francisco (F), David (D), Orlando (O).

¿Cuál es la probabilidad de que Francisco y Lorena pertenezcan al grupo seleccionado por el entrenador?



5. Jorge, Camila, Sebastián, Luisa y Marcos están esperando la ruta escolar en el mismo paradero. ¿En cuántos ordenes distintos pueden subir al bus escolar?

a. 54 b. 80 c.120 d.20

6. Se lanza un par de dados al aire y se observa la suma de los dos resultados, ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea mayor que nueve?

a. 4/36 b. 12/36 c. 8/36 d. 6/36

7. ¿De cuántas maneras pueden 10 personas sentarse en una banca si solo hay 3 puestos disponibles?

a.75 b.150 c.100 d.120

8. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas es posible escribir con los números 2, 3, 4, 5 y 6?

a.120 b.60 c.140 d.100

9. En un parqueadero hay que registrar cada carro. El registro es un número de cinco cifras que no puede repetirse, la cantidad total de registros se puede calcular mediante la operación:

a.10x9x8x7x6   b.10x10x10x10

c.10x10x9x8   d.5x6x7x8x9

10. En una comida hay 28 hombres y 32 mujeres. De ellos 16 hombres han comido carne, y el resto ha comido pescado. Si se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que sea hombre

a.28/60   b.32/60   c.40/60   d.16/60

11. Se hace girar una ruleta que está dividida en sectores de igual tamaño, los sectores están enumerados de 1 a 12. Halla la probabilidad de que la flecha indique un número impar.

a. 4/12   b. 10/12   c.6/12   d.12/12

12. En una bolsa hay 5 balotas rojas, 6 azules, 4 verdes y 3 naranjas. ¿De qué color es más probable que salga una bola de la bolsa?

a. Azules   b. Rojas   c. Verdes   d. Naranjas

ANEXO 4. CUESTIONARIO GRADOS OCTAVOS Y NOVENOS

	INSTITUCIÓN EDUCATIVA FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS Resolución de Aprobación Nº 0495 de marzo 19 de 2.013 por medio de la cual se modifica la Resolución 01159 de septiembre de 2007 por la cual se aprueban unos estudios a la Institución Educativa "Francisco José de Caldas" NIT 891.401.155-7 DANE 166682001297 Cr 12 Cl 7 ESQUINA TELS: 3641063, 3643880 SANTA ROSA DE CABAL RISARALDA	Página
	Prueba de Estadística Grados : 8-9 **Tema : análisis Combinatorio y Probabilidad**	

1. ¿De cuántas formas se puede construir una placa de automóvil, que consta de tres letras del alfabeto y tres números? Nota considerar 26 letras.

a. 236 b. 17576000 c. 340000 d. 123

2. Se quiere formar un número de tres cifras en el cual ninguna de sus cifras se repita. ¿Cuántos números distintos se pueden construir?
   a. 720 b. 340 c. 620 d. 150

3. De una baraja de 52 cartas se escogen cinco. ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir las cinco cartas?
   a. 345.678 b. 2.598.960

   c. 234.500 d. 456.000

4. Para escoger dos representantes ante el consejo directivo del colegio se tienen cuatro candidatos. ¿De cuántas formas se pueden escoger los dos representantes?
   a. 4 b. 7 c. 5 d. 6

5. Se lanzan simultáneamente dos monedas, hallar la probabilidad de que se obtengan dos caras.
   a. 2/4 b. 3/5 c. 7/8 d. ¼

6. Sea una urna que contiene 3 bolas rojas, 5 blancas y 4 azules, hallar la probabilidad de que al sacar una bola esta sea: roja
   a. 5/12 b. 3/12 c. 6/12 d. 8/12

7. Se lanzan dos dados halle la probabilidad de que la suma sea 7
   a. 6/36 b. 4/36 c. 1/36 d. 5/36

8. Se presenta a un curso 12 hombres y mujeres. ¿Cuántos grupos de 3 hombres y 5 mujeres podrían ganar el concurso?
   a. 55440 b. 12340 c.730 d. 252

9. Se hace girar una ruleta que está dividida en sectores de igual tamaño, los sectores están enumerados de 1 a 20. Halla la probabilidad de que la flecha indique un número impar.

   a. 12/20 b. 10/20 c. 12/14 d. 15/20

10. Se lanza un par de dados al aire y se observa la suma de los dos resultados, ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea mayor que diez?
   a. 3/36 b. 5/36 c. 6/36 d. 4/6

11. Se tienen 5 envases que contienen pinturas de distintos colores, ¿de cuántas formas se pueden mezclar los 5 colores?

   a. 130 b. 150 c. 120 d. 180