UNA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE INFINITO MEDIADO POR LAS TIC EN GRADO DÉCIMO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA NUESTRA SEÑORA DEL ROSARIO DEL MUNICIPIO DE BELÉN DE UMBRÍA

Autor:

JAMES RODRÍGUEZ OSSA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

PEREIRA 2017

UNA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE INFINITO MEDIADO POR LAS TIC EN GRADO DÉCIMO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA NUESTRA SEÑORA DEL ROSARIO DEL MUNICIPIO DE BELÉN DE UMBRÍA

Autor:

JAMES RODRÍGUEZ OSSA

Asesor:

JOSÉ RODRIGO GONZÁLEZ GRANADA, Ph.D

Documento presentado como requisito para optar al título de:

Magíster en Enseñanza de las Matemáticas

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

PEREIRA 2017

Nota de aceptación

Jurado

Jurado

Jurado

Pereira, febrero 2017

A Daiana por su apoyo y comprensión.

Mi Paulina por el tiempo que no compartí contigo.

A mi madre por sus oraciones.

AGRADECIMIENTOS

Al doctor José Rodrigo González Granada por su colaboración, dedicación en este proyecto de investigación y por su apoyo desde el comienzo de la maestría, con sus aportes como director de esta a todos los estudiantes que ingresamos en este proceso, su motivación nos impulso a trabajar muy duro en la consecución de este objetivo de ser magister en la enseñanza de la matemática. Profesor José Rodrigo mi aprecio y admiración.

Al doctor Oscar Fernández Sánchez por sus aportes a los temas tratados en sus seminarios que me ayudaron a formular y desarrollar mi trabajo de investigación.

Un agradecimiento muy especial a la Gobernación de Risaralda por darme la oportunidad de estar en este tan magnífico proyecto que iniciaron con los docentes de este hermoso Departamento y esperando que continúen con este.

Para la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario que sin ella no podía haber realizado este proyecto de investigación, a las directivas y docentes que me apoyaron en este proyecto, a todos y cada uno de los estudiantes que participaron en cada una de las fases de esta investigación muchas gracias.

El suscrito, Doctor **José Rodrigo González Granada**, director y profesor de la Maestría en Enseñanza de las Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira (UTP).

Certifica:

Que la presente investigación titulada: *Una didáctica para el aprendizaje del concepto de infinito mediado por las tic en grado décimo de la institución educativa nuestra señora del rosario del municipio de belén de umbría*, ha sido realizada bajo su dirección por el licenciado en Matemáticas y Computación **James Rodríguez Ossa**, y constituye su trabajo de grado para optar al título de Magister en Enseñanza de la Matemática, en la línea de Educación Matemática.

Así, se espera que tenga efectos oportunos ante la Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Tecnológica de Pereira el día ____ del mes de ______________ del año 2017.

____

José Rodrigo González Granada. Ph.D

RESUMEN

El aprendizaje del concepto de infinito, mediado por las TIC y bajo una ingeniería didáctica, ha sido el objetivo de esta investigación. Donde la ingeniería didáctica con sus diferentes fases mostró un camino para la comprensión de este concepto que ha sido para muchos matemáticos en la historia un verdadero conflicto en su comprensión y manejo en los diferentes pensamientos matemáticos. A continuación se pude observar el proceso utilizado en esta investigación, donde la implementación de una secuencia didáctica evidenció un aprendizaje significativo del concepto de infinito y su manejo en diferentes contextos en estudiantes de grado décimo de la modalidad académica de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario Del Municipio de Belén de Umbría.

Palabras claves: Infinito, ingeniería didáctica, secuencia didáctica, TIC y aprendizaje.

ABSTRACT

The learning of infinity concept, mediated by the TIC and under a didactic engineering, has been the main objective on this investigation. In which the didactic engineering with its different phases showed a path for this concept comprehension that has been a real conflict for many mathematicians in the history by its comprehension, and management in the different mathematical thoughts. Then the implemented process in this investigation can be observed in which the implementation of a didactic sequence evidenced a significative learning of the infinity concept and its management in different contexts in tenth grade students in the academic modality in the Nuestra Señora del Rosario institution in the municipality of Belén de Umbría.

Keywords: Infinity, didactic engineering, didactic sequence, TIC and learning

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

La educación media técnica se ve supeditada a libros escolares sin la suficiente temática sobre el concepto de *infinito*. Los estándares básicos de competencias en Matemáticas y los derechos básicos de aprendizaje en Matemáticas no vislumbran un camino hacia el aprendizaje y comprensión de dicho concepto, además la enseñanza del concepto en la educación media solo hace referencia al infinito potencial, dejando de lado el concepto de infinito actual.

Es de aclarar que teniendo en cuenta que este concepto es muy utilizado en temas como: decimal periódico, número irracional, número real, sucesión, serie, asíntota, dominio y rango de una función, límites infinitos, límites en el infinito, entre otros utilizados tanto en educación media técnica como en los estudios de pregrado donde está la cátedra de matemáticas. Al respecto Belmonte, J. L., & Sierra, M. (2011) plantean que:

> *La incorporación del concepto de infinito al currículo y los textos escolares (un tema que aún falta por desarrollar en la literatura científica sobre historia de la Educación Matemática), presenta una singularidad frente a cualquier otro: no se define ni se acompaña de manual de uso alguno. A pesar de su ubicuidad desde edades tempranas, en que se ocupa para representar la numerosidad de un conjunto, hasta la finalización del bachillerato, donde se considera más o menos formalmente la idea de límite, no es fácil hallar referencias explícitas sobre su significado en un contexto educativo. Es decir, durante más de diez años en el aprendizaje de las matemáticas de un individuo, el infinito desempeña un papel exclusivamente simbólico o bien, sólo como sinónimo de muy grande o muy pequeño. (P. 141).*

Se pretende con esta propuesta que los estudiantes comprendan el concepto de infinito mediante las *Secuencias Didácticas propuestas por Brousseau (1986)*, estructuradas bajo una ingeniería didáctica, y que los jóvenes al terminar el proceso reconozcan la importancia de este concepto y los aportes matemáticos y filosóficos que los grandes pensadores han realizado con el paso de los años.

1. PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Teniendo como base los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas se observa que el concepto de infinito no es visible en éstos, de igual modo no se tiene una secuencia curricular para su enseñanza. Los textos escolares que se utilizan en la básica secundaria y media tampoco son de ayuda para trabajar con los estudiantes este tema, así lo afirma Peñalva (1996) "*en relación a la práctica educativa, se considera que la importancia de la investigación, ya realizada, se puede sintetizar en los siguientes puntos: El tratamiento que se da en los libros de texto de matemáticas de la educación secundaria a los conjuntos infinitos… ". (p. 2)*

Al hacer referencia al concepto de infinito es posible encontrar textos sobre investigaciones que lo han tenido como objeto de estudio desde distintas concepciones y marcos teóricos tales es el caso de Garbin (2003); Giraldo (2005) "El Infinito en Nuestra Escuela"; Montoro & Scheuer (2006); Crespo Crespo (2006) y Lestón (2008), en ellos se identifican y analizan, dificultades y obstáculos a los que se enfrentan los estudiantes cuando trabajan con este concepto en el aula, ya que en los textos dirigidos a básica secundaria y media se aborda el tema sólo con la definición del concepto de infinito potencial, como se muestra en la Tabla No. 1 referente a la revisión bibliográfica del concepto de infinito en algunos de los siguientes textos escolares de la biblioteca de la institución educativa Nuestra señora del Rosario, revisión realizada en el año 2016:

Tabla No. 1 Revisión bibliográfica del concepto de Infinito en los Textos Escolares			
N°	**Texto**	**Grado**	**Concepto**
1	Matemáticas 2000	6	No tiene concepto.
2	Aritmética y geometría I	6	Es aquel conjunto que tiene un número indeterminado de elementos, por lo tanto, no se pueden contar.
3	Alfa 6	6	No tiene definición.
4	Matemáticas constructivas 6	6	Un conjunto es infinito, cuando no es posible acabar el proceso de enumerar sus elementos.
5	Dimensión matemática 6	6	Ejemplo: x es un número par. El conjunto es infinito.
6	Los caminos del saber. Matemáticas 6	6	Es un conjunto que está formado por un número indeterminado de elementos, por tanto, no se puede contar.
7	Matemáticas 2000 7	7	No tiene definición
8	Alfa 7	7	No tiene definición.
9	Matemática constructiva 7	7	No tiene definición.
10	Matemática moderna estructurada 3		No tiene definición.
11	Aritmética y geometría II	7	No tiene definición.
12	Matemática constructiva 8	8	No tiene definición.

13	Alfa 8	8	No tiene definición.
14	Dimensión matemática 8	8	No tiene definición.
15	Algebra y geometría I	8	No tiene definición.
16	Elementos de matemática 9	9	Solo realiza una pregunta sobre conjuntos infinitos.
17	Matemática moderna estructurada 4	9	Un conjunto, sin embargo, puede tener un número infinito de elementos. Intuitivamente: un conjunto es infinito si no es finito.
18	Alfa 9	9	No tiene definición.
19	Matemática constructiva 9	9	No tiene definición.
20	Matemática moderna estructurada 5	10	No tiene definición.
21	Matemática con tecnología aplicada	10	No tiene definición.
22	Dimensión matemática 10	10	No tiene definición.
23	Nueva matemática constructiva	10	No tiene definición.
24	Alfa 10	10	No tiene definición.
25	Serie matemática	10	No tiene definición.

	progresiva		
26	Nuevas Matemáticas Trigonometría Geometría y Estadística	10	No tiene definición.
27	Nuevas matemáticas Cálculo Estadística		No tiene definición.
28	Matemática moderna estructurada 6	11	Los conjuntos pueden tener cualquier número de elementos. Intuitivamente entendemos que un conjunto es finito si consta de cierto número de elementos distintos, es decir, si al contar los diferentes elementos del conjunto, el proceso de contar puede acabar. En caso contrario decimos que el conjunto es infinito.
29	Alfa 11	11	No tiene definición.
30	Fundamentos de matemática universitaria		Un ejemplo de un conjunto infinito es el conjunto de todos los enteros positivos 1, 2, 3, 4, 5, …
31	Matemáticas fundamentales		Cuando los elementos de dos conjuntos están en correspondencia uno a uno, se dice que los dos conjuntos tienen el mismo número de elementos.
32	Matemáticas sin barreras		No tiene definición.

Fuente: Producción propia - año 2016

Mientras que en los textos antes mencionados se encuentra el concepto de infinito solo potencial y dejan a un lado la definición y trabajo con el infinito actual, ya que es un tema que necesita cierto nivel de abstracción para la formación académica de los estudiantes en la básica secundaria y en la media, y más aún si se tiene en cuenta que el pre saber del tema es sólo la definición de un concepto, por tanto, el problema que aquí se presenta radica en los obstáculos epistemológicos, convirtiéndose en una limitación que afecta la capacidad del estudiante en su construcción de conocimiento, lo que hace que no se lleve a cabo el aprendizaje de manera adecuada, según Gaston Bachelard (Bar-sur-Aube, 27 de junio de 1884-Paris, 16 de Octubre de 1962, fue un filósofo (epistemólogo), poeta, físico, profesor y crítico literario) uno de los obstáculos principales, radica en la experiencia básica o conocimientos previos y es el obstáculo epistemológico que aquí se evidencia.

En una prueba realizada (Ver **Anexo A**) a una muestra de la población objeto se identificó que algunos de los estudiantes de grado once de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario, solo reconocen el concepto de infinito potencial y no el de infinito actual, teniendo en cuenta que este último es el más utilizado y necesario en temas como: dominio y rango de una función, límites infinitos, límites en el infinito y demás temas del análisis matemático. Por ello, es necesario el diseño de un material que se aproxime más a la temática de interés, de forma didáctica y secuencial, con el fin de lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes de los temas en cuestión, teniendo en cuenta para ello los saberes previos al momento de abordar los temas y su complejidad.

Teniendo en cuenta la importancia que tiene la educación matemática en lo que se refiere a una educación de calidad, es fundamental contar entonces con las herramientas necesarias, tanto físicas como tecnológicas y lograr la mayor utilidad de las mismas; de otro modo no sería posible cumplir con las expectativas y se obtendría sólo un nivel muy básico de aprendizaje, por ello, si se habla del aprendizaje de las matemáticas y en especial del pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos en el concepto de infinito se hace indispensable contar con una *secuencia temática* que permita abordar los temas y conceptos de forma adecuada, utilizando herramientas y elementos tecnológicos y prácticos que le permitan al estudiante interactuar y asociar las temáticas tratadas en el contexto de la vida diaria.

Al realizar este ejercicio facilita la interiorización en los estudiantes de los conceptos de forma práctica, encontrando una utilidad lógica a los conocimientos adquiridos, logrando la aprehensión esperada del concepto. Es precisamente esta necesidad la que se devela aquí y por la cual se hace preciso diseñar una estrategia didáctica para el aprendizaje del concepto de infinito mediado por las TIC en Educación Media. Al respecto Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., & Hecklein, M. (2006) afirman que:

> *La construcción del conocimiento no es un proceso continuo, surge de desequilibrios, rupturas con conocimientos anteriores, reconstrucciones. Para G. Bachelard el conocimiento científico no se desarrolla en un proceso continuo, sino que resulta del rechazo de formas previas de conocimiento que se constituyen en obstáculos epistemológicos. Las dificultades en el aprendizaje matemático resultan de formas de conocimiento que han sido durante cierto tiempo coherentes y efectivas en los contextos culturales o escolares encontrados por los estudiantes. Bachelard planteó la noción de obstáculo epistemológico para explicar la aparición de errores. Dicho concepto no se refiere a las dificultades desorganizadas o derivadas de la ausencia de conocimiento, sino a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos (p. 10)* .

Con lo anterior se tiene la existencia de un obstáculo epistemológico al momento de generar aprendizaje significativo en los estudiantes con respecto al tema: infinito. Por lo cual se hace necesario tomar medidas que proporcionen una solución a dicha situación, por esta razón, se realiza esta investigación, en ella se parte de un diagnóstico preliminar, para identificar las falencias de manera clara y puntual, analizarlas, evaluarlas y de este modo obtener las herramientas pertinentes para realizar el diseño de una estrategia didáctica para la enseñanza del concepto de infinito mediado por las TIC en Educación Media de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario, la cual se ajusta a las necesidades que se identifiquen en el análisis realizado.

La estrategia que aquí se propone, consiste en el diseño de unas *Secuencias Didácticas* que proporcione un acercamiento al concepto de infinito por medio de actividades didácticas y el uso activo de las TIC, lo que les va a permitir un mayor nivel de aprendizaje de la temática en cuestión y además se propiciará una *secuencia curricular*, que es lo que hasta el momento evidencia que está generando un vacío en el aprendizaje.

1.1.Pregunta de investigación:

¿Cómo implementar estrategias didácticas para el aprendizaje del concepto de infinito mediado por las TIC en grado décimo de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario de Belén de Umbría?

2. OBJETIVOS

2.1.Objetivo General.

Implementar estrategias didácticas para el aprendizaje y comprensión del concepto de infinito mediado por las TIC en grado décimo de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario de Belén de Umbría.

2.2.Objetivos Específicos.

- Identificar el estado actual del concepto de infinito en los estudiantes por medio de un diagnóstico que permita determinar las falencias.

- Definir una secuencia didáctica del concepto de infinito adecuada para ser aplicada a los estudiantes.

- Implementar un diseño temático secuencial para el aprendizaje del concepto infinito mediado por las TIC con estrategias didácticas de enseñanza.

- Divulgar los resultados.

3. JUSTIFICACIÓN

En esta investigación se busca evidenciar la necesidad que existe con respecto al aprendizaje del concepto de infinito y la pertinencia de diseñar una estrategia didáctica para la enseñanza de éste, mediado por las TIC en el grado décimo, en este caso particular de la institución educativa Nuestra Señora del Rosario, ya que se identifica que no hay una secuencia curricular adecuada para el aprendizaje de dicho concepto.

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, que son la guía de la educación matemática en Colombia, nos encontramos que éstos sólo trabajan el concepto de infinito explícitamente, así lo muestran los siguientes estándares con sus respectivos pensamientos matemáticos:

- **Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos,** para grado octavo a noveno: *"Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales"* que en este caso ya han pasado 7 años del proceso de enseñanza para los niños y no se ha definido conceptualmente este tema de infinito actual.
- **En el pensamiento numérico y sistemas numéricos,** para grado de décimo a undécimo se tienen los siguientes estándares: "*Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos*".
- **Pensamiento métrico y sistemas de medidas** en este se tiene: "*Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición"*.
- **Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos**: "*Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos"*.

Estos estándares no invitan al estudiante a trabajar con el concepto de infinito actual, como se mencionó antes, sólo realizan aproximaciones en determinadas ocasiones, pero el concepto no se tiene presente en estos documentos tan importantes para la educación Colombiana.

Ahora bien, en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) encontramos que solo para los grados décimos y undécimos se manejan los siguientes:

- Grado 10: El primer DBA dice: *"Reconoce que no todos los números son racionales, es decir, no todos los números se pueden escribir como una fracción de enteros a/b".*
- Para el mismo grado el segundo DBA dice: *"Comprende el concepto de límite de una sucesión"*.
- Para grado undécimo se tienen los siguientes DBA: *"El primero dice: Comprende que entre cualesquiera dos números reales hay infinitos números reales".*
- Para el mismo grado el séptimo DBA reza: *"analiza algebraicamente funciones racionales y encuentra su dominio y sus asíntotas"*.

En este documento se continúa trabajando con aproximaciones a una cantidad determinada, tales como límites, sucesiones, entre otros temas matemáticos, pero no se tiene uno o varios DBA que nos indique el trabajo con el concepto de infinito actual.

Con el diseño y la propuesta de una estrategia didáctica para el aprendizaje del concepto de infinito mediado por las TIC en grado décimo, se podrá lograr un nivel más alto de asimilación de dicha temática y por lo tanto, unos mejores resultados al momento de evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes, tanto en pruebas internas como externas de la institución educativa Nuestra Señora del Rosario del municipio de Belén de Umbría

Son claves los apuntes de Bustos (2013) cuando afirma:

> *Actualmente hay una nueva realidad educativa que de acuerdo a Meneses (2007) existen diferentes elementos implicados como son la concepción educativa, el modelo metodológico, el rol de profesor y el estudiante y las estrategias de trabajo. Estos ámbitos forman una realidad sistémica y que se desarrollan en un contexto social, en una situación tecnológica determinada, con una dinámica y nivel de participación concreto, desarrollando patrones de interacción determinados. De todos estos elementos el referido a los estudiantes es evidente, puesto que ellos*

ya tienen un manejo de las nuevas TIC lo que configura una nueva forma de aprender en la escuela. (p. 23)

El aprendizaje significativo del concepto de infinito constituye entonces en uno de los mayores desafíos de la educación actual en el campo de las matemáticas, esto se evidencia en las investigaciones realizadas igualmente sobre el concepto de infinito, como lo dice Waldegg (1986): "*Circunstancias escolares mediocres e intuiciones equívocas, contribuyen a que la cuestión del infinito sea uno de los obstáculos más difíciles de superar en la enseñanza de las matemáticas; esta situación hace crisis en el momento de iniciar el aprendizaje del cálculo*" (p. 3)

Es trascendental igualmente incluir el desarrollo de herramientas didácticas como las TIC, ya que se convierte en una propuesta que permite llegar al estudiante de forma directa y motivante, para que éste a su vez construya su conocimiento.

4. ESTADO DEL ARTE

Las investigaciones y trabajos realizados sobre el aprendizaje del concepto de infinito en la educación media son pocos, como se muestra a continuación. Los trabajos que se encuentran se dedican más a temas específicos como los límites y la geometría, que es un campo muy utilizado para el aprendizaje del concepto de infinito, aunque reiteramos son escasas como se observa a continuación.

Para hablar de estas investigaciones se inicia con los aportes de Giraldo (2006) quien en su trabajo sobre el *Infinito en nuestra escuela* aborda la falta de la temática del concepto de infinito que presentan los libros de matemáticas en básica secundaria y media y da unas pautas para que los docentes trabajen este tema.

Uno de los libros que ha trabajado el infinito y su enseñanza es el propuesto por ARRIGO. Gianfranco. D'AMORE. Bruno & SBARAGLI. Silvia. (2011) denominado *Infinitos. Historia, filosofía y didáctica del infinito matemático*. Esta obra abarca un gran recorrido histórico en el descubrimiento de este concepto, iniciando desde la escuela jónica, hasta llegar a George Cantor. Realizando también un trabajo muy importante sobre los obstáculos epistemológicos de este concepto, también mostrando otras investigaciones realizadas en este tema.

Otra de las investigaciones realizadas en Colombia sobre el infinito es la de Lestón, P., & Crespo, C. (2010). retomadas en las memorias del 11o encuentro colombiano de matemática educativa denominado *El infinito matemático: la escuela, Cantor y Bolzano.* En este trabajo se plantean las concepciones de los estudiantes que transitan del colegio a la Universidad. En ella se evidencia que se quiere trabajar desde el colegio y determinar qué concepciones han desarrollado los estudiantes sobre el concepto de infinito, y confrontar las ideas que surgen cuando habla del infinito en lo muy grande o lo muy pequeño.

El trabajo de investigación realizado por Lestón & Crespo (2010), tiene como preámbulo:

… que el infinito matemático en la época de Bolzano y Cantor provocó negación e incluso rechazo por parte de la comunidad matemática. En esta investigación se presenta el análisis de parte de los trabajos de Cantor y Bolzano, buscando obtener algunas ideas que permitan organizar un instrumento de indagación para comprender la manera en que los estudiantes de los últimos años de la carrera de profesorado de matemática entienden las caracterizaciones del infinito dadas por Bolzano y Cantor y su naturaleza, y la presencia y problemática del infinito matemático en el aula. (p. 879)

En la investigación realizada por D´Amore & otros (2016) llamada *El sentido del infinito* se trata el tema en cuestión de la siguiente manera:

Se entiende por "estimación" «el resultado de un proceso (consciente o inconsciente) que tiende a determinar el valor desconocido de una cantidad o de una magnitud» (Pellegrino, 1999) ¿Qué sucede si tal valor desconocido es infinito? ¿Existe un "sentido del infinito", así como existe un "sentido del número"? Si existe, ¿cómo se configura? Si no existe, ¿por qué? ¿Se logra dar un sentido intuitivo a la diferencia entre el infinito numerable y el continuo? En esta investigación se dan respuestas a estas y a otras preguntas, analizando el comportamiento de diversos sujetos, desde adolescentes hasta adultos, desde matemáticos expertos hasta personas de cultura no específica en matemática. La investigación, efectuada en Colombia, Italia y Suiza, ofrece un vasto panorama con pocas diferencias relevantes entre los diferentes países. (p. 1)

En la tesis doctoral de Belmonte (2009) denominado *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinitoen estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y Universidad*, se pretende en ésta comprender cómo se implanta la noción de infinito en la mente y cómo evoluciona dicha noción sometida a un proceso de enseñanza y aprendizaje. En esta investigación también se busca el origen y evolución epistemológicos que ponen en evidencia las dificultades para establecer y asumir por la comunidad científica y por la tradición filosófica en general, el carácter *actual del concepto infinito*.

Belmonte (20019) afirma: *"Sólo Cantor y algunos colegas condescendientes fueron* *capaces de incorporar de manera definitiva al corpus científico una noción que, aunque elegante, supone un reto al conocimiento intuitivo por las contradicciones que supone frente a los postulados finitistas tan firmemente arraigados a las estructuras cognitivas" (*p. 407).

El trabajo de investigación realizado por Garbin Dall'Alba, S., & Azcárate, C. (2002), llamado *Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 año*s, nace de la preocupación en las dificultades del aprendizaje y de la enseñanza de los conceptos matemáticos en el bachillerato, en los cursos preuniversitarios y en los primeros de la universidad, esta investigación que, desde el punto de vista de las concepciones de los alumnos y alumnas, indaga y examina los motivos que hacen de la problemática de un concepto matemático, un tema para explicar y comprender.

En esta investigación se desea mostrar la conveniencia e importancia de haber distinguido los términos *inconsistencia* e *incoherencia*. Entre otras cosas, los tipos y el origen de incoherencias que se observaron en las categorías de coherencia establecidas y que permitieron identificar un diferente grado en la profundidad de las inconsistencias directas o del grado de construcción o presencia del concepto de infinito actual en los estudiantes. Tal como lo mencionan los autores en el siguiente apartado:

> *Teniendo en cuenta la distinción mencionada, se han podido clasificar tres tipos de alumnos: alumno coherente y consistente, alumno coherente pero inconsistente y alumno incoherente. Es decir, en problemas de divisibilidad infinita en que está presente la noción de infinito actual, los alumnos pueden mantener respuestas coherentes y consistentes, coherentes pero inconsistentes o, dependiendo de la representación del problema, pueden dar una respuesta consistente o no con el concepto, que puede ser coherente o no con otra representación del mismo problema. (p. 100)*

Igualmente en la tesis doctoral realizada por Lestón (2016) reporta una investigación acerca del infinito y su presencia en el discurso matemático escolar. Se realiza desde el marco teórico de la socioepistemología, que entiende la construcción del conocimiento matemático como el resultado de acciones situadas en un escenario particular que se analizan de manera sistémica. Y afirma: *"Y tiene por objetivo analizar los resultados: por un lado, detectar las* *características que tienen el infinito que está presente en el discurso matemático escolar de la escuela media; y por otro, analizar cuáles son las construcciones que del infinito se hacen en la formación docente*" (p. 173)

El trabajo de grado realizado por Gil (2016) para optar al título de Magíster en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira, denominado: *El género literario del cuento como estrategia didáctica para abordar el concepto de infinito en el grado 11-3 de la institución educativa Sor María Juliana del municipio de Cartago (Valle del Cauca)*, presenta de manera novedosa la comprensión del concepto de infinito por medio del género literario en este caso el cuento, donde *"el autor escribe un cuento y a partir de éste empieza un trabajo guiado con los estudiantes con una duración de tres sesiones. La investigación presenta buenos resultados en la comprensión de este concepto y nos muestra en sus conclusiones que esta forma de trabajar el infinito cumplió con los objetivos previstos en esta"*. (pp. 67-68)

Estos trabajos de investigación que se han analizado, son algunos que están encaminados directamente a estudiantes de secundaria, además van enfocados a estudiantes universitarios para ser profesores de matemáticas, lo que permite evidenciar escasez en los materiales para estudiar este concepto, tanto en básica primaria como en secundaria.

Trabajos realizados con una ingeniería didáctica

En el trabajo realizado por Aguirre & Camacho (2001) presentan una situación didáctica para introducir el concepto de límite infinito en el curso de Matemáticas I del nivel de enseñanza superior en las carreras de Ingeniería del Sistema Tecnológico. Allí se recogen aspectos como: *"Donde los estudiantes realizan continuamente concepciones poco confiables en los procesos algorítmicos en la que subyace la división por cero. Plantean un análisis preliminar para el* *diseño de una situación didáctica usando la Ingeniería didáctica como metodología*” (p. 237)

De otro lado en la investigación realizado por Gutiérrez (2009) para optar al título de Maestría en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, ella busca saber si el alumno es capaz de construir el concepto de convergencia de una serie numérica infinita, sin usar cálculo diferencial e integral, así como el decir que debido a que se ha hecho cambios en los programas de estudio a nivel bachillerato, y ella se pregunta *¿Qué tan viable sería introducir este objeto matemático a nivel de enseñanza en el nivel medio superior?*

Al respecto Gutiérrez (2009) plantea:

> *En este proyecto de grado se diseñó una ingeniería didáctica, en la que se contempla un panorama visual y aritmético. Para su aplicación se tiene que hacer una familiarización con el graficador Graphmatica para el ambiente Windows, donde los estudiantes puedan observar las características comunes de las gráficas y así hacer conclusiones pertinentes a nuestra hipótesis. (p. vi)*

5. MARCO TEÓRICO

«La enseñanza de la matemática debe dirigirse hacia dos objetivos que le son propios: el sentido del rigor lógico y la noción de infinito». D'Amore (1996)

El infinito es un concepto muy utilizado por el común de las personas, pero usualmente nadie se detiene a pensar sobre él. Existen muchas concepciones contradictorias sobre el tema, ideas relacionadas con el infinito, actualidad y potencialidad, existencia del continuo, distintos tamaños de infinito, lo muy grande y lo muy pequeño, Dios, el todo, entre otros; y se hace necesario determinar su significado.

El concepto de infinito se ha utilizado para expresar algo inmenso, desmedido, que no es posible contar. Ahora sabemos que el universo no tiene 200.000 millones de galaxias, sino que hay más de 2 billones. Esto es 10 veces más de lo que se creía hace unos 20 años. Según investigación liderada por el profesor Christopher Conselice (2004) de la Universidad de Nottingham se afirma que: "*El número de galaxias en el universo es una cuestión fundamental en la astronomía y perturba la mente que más del 90 por ciento de las galaxias en el cosmos aún no se hayan estudiado*" (Párr. 7), pero este número de galaxias es muy grande y éste está asociado al infinito.

Pero el infinito es un concepto más profundo que va más allá de lo "*muy grande*" y de la posibilidad que tiene el ser humano de cuantificarlo, tomar el infinito simplemente como algo ilimitado ha provocado grandes confusiones a lo largo de la historia y por lo mismo ha sido objeto de numerosas investigaciones.

5.1.El infinito

Desde los tiempos de la antigua Grecia el concepto de infinito está presente en la humanidad y ha traído innumerables cuestionamientos a lo largo de su desarrollo y descubrimiento.

Los pitagóricos como lo afirman ARRIGO. Gianfranco. D´AMORE. Bruno. SBARAGLI. Silvia (2011) se inicia con Pitágoras de Samos (580 - 504) deseaban expresar todo el universo solo a través de los números naturales o sus relaciones (por tanto, racionales), sin embargo esta teoría cae cuando encuentran la existencia de magnitudes inconmesurables. Los Pitagóricos se escandalizaron cuando trataron de relacionar la diagonal de un cuadrado de un lado utilizando su famoso teorema de Pitágoras y se dieron cuenta que el resultado era la raíz de dos, por primera vez surgió un número inconmensurable. De este proceso concluyeron que "*las líneas eran divisibles hasta el infinito y por lo tanto se demostraba que era imposible formar una línea con un número determinable de puntos. La idea de irracional e infinito persiguió a los pitagóricos, hasta el punto de enviar a matar a cualquiera de sus seguidores que revelara este proceso*". (pp. 17 -19)

Otro de los griegos presentes con el concepto de infinito y su lógica es como lo describe González A. J (s.f.):

> *Zenón de Elea (-490, -420 aprox), que con sus paradojas inquietó a muchos filósofos de su época, una de ellas es: "Zenón argumentaba que nada ni nadie podría recorrer completamente un segmento de recta AB, esto es, saliendo de A nadie podría llegar a B. pues primero tendría que recorrer* $\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{AB}}{2}$*, después* $\mathrm{AD} = \frac{3\mathrm{AC}}{2}$*, luego* $\mathrm{AE} = \frac{7\mathrm{AD}}{6}$*, y así infinitas dicotomías que no permitirán recorrer la totalidad del segmento. (p. 2)*

Tal como se evidencia en la Ilustración No. 1 "Paradoja de Zenón" en donde no se puede llegar al punto B iniciando desde el punto A

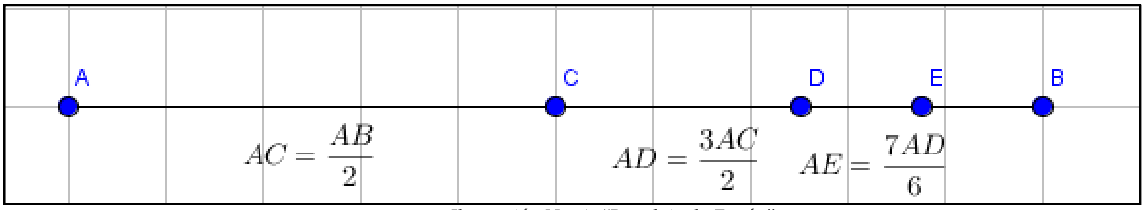


Ilustración No. 1. “Paradoja de Zenón”
Fuente: Producción propia

En el sitio web de EcuRed podemos encontrar que: “Los razonamientos de Zenón, forman el primer intento del pensamiento infinitesimal, que solo fueron desarrolladas a fondo aproximadamente dos mil años después por Gottfried Wilhelm Leibniz en 1672 e Isaac Newton 1669. (párr. 16)

Pero tal como lo afirma Álvarez (2009): “*fue Eudoxo de Cnidos (-400, -350), discípulo de Platón y contemporáneo de Aristóteles quien hizo “el primer uso "racional" del infinito en las matemáticas. Eudoxo postuló que «toda magnitud finita puede ser agotada mediante la sustracción de una cantidad determinada*» (párr. 6)”.

En el sitio web de Astronomía encontr Uno de los aportes más importantes es sobre “la teoría de las proporciones y el método exhaustivo con Euclides de Alejandría (-325, -265) en geometría, esto lo llevó a ser el padre del cálculo integral”. Tiene la más antigua solución a los números irracionales, que no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros.

Según Belmonte (2011) menciona que para “Aristóteles (-384, -322) “*el infinito no es aquello fuera de lo cual no hay nada, sino aquello fuera de lo cual siempre hay algo”*. Aristóteles se dio cuenta que no era fácil rechazar o aceptar la existencia del infinito ya que ambas decisiones engendraron sus propias paradojas. Para eludir este dilema, diferenció dos tipos de infinito, el *infinito potencial* y el *infinito actual*” (p. 3)

Xirau, R. (2000) plantea que así el infinito para Aristóteles es concebido como una línea recta a la cual se le podrán insertar nuevos puntos, o como un triángulo al cual se le puede extender incesantemente sus lados. *"El infinito Aristotélico nunca es en acto, puesto que siempre podemos añadir algo en potencia"*. (p. 124)

Aristóteles en su Libro III de Física afirma que negar la existencia del infinito actual y permitir sólo el infinito potencial no produce ningún obstáculo para los matemáticos.

Válido mencionar igualmente los apuntes de IsaacNewton (1643-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) que con sus aportes en el cálculo diferencial, trabajaron con cantidades infinitamente pequeñas. Al respecto Ruíz A. (s.f.) afirma lo siguiente:

> *Los métodos infinitesimales eran el nudo teórico al que buscaban dar una respuesta tanto Newton como Leibniz. De hecho, se trata de la noción de límite. Estos matemáticos obtuvieron sus resultados, métodos, aplicaciones, usando esa noción de una manera intuitiva, física, geométrica, mecánica. Como veremos, un tratamiento más riguroso se desarrollaría muchas décadas después.* (p. 281)

De otro lado Bolzano (2005) comienza analizando atentamente las insuficiencias de las definiciones anteriores del concepto de infinito. El primer objetivo es la noción de infinito potencial de los matemáticos. Para estos el infinito potencial no es una magnitud infinita individual, constante, sino una magnitud variable. Para lo que Bolzano planteó: *"Un simple concepto, una simple representación de magnitud … que comprende un conjunto infinito… en magnitudes distintas"(p.3)*. Bolzano define que un conjunto infinito es equipotente con uno de sus subconjuntos propios y demuestra que dos intervalos compactos cualesquiera en R son equipotentes.

Es pertinente referenciar los aportes de Bellón (s.f.) que en su texto *Cantor, el conquistador del infinito* retomando las investigaciones de Bolzano muestra que los resultados más importantes sobre el concepto de infinito se puede recoger que la puesta en correspondencia biunívoca (biyección) de un conjunto con una de sus partes propias (subconjunto propio) y el reconocimiento de esta propiedad como propiedad característica de los conjuntos infinitos.

En el blog de Euclides59 se recogen algunos planteamientos que sintetizan lo que se ha venido tratando de argumentar:

> George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845, 1918) el constructor de la teoría de los conjuntos, un genio que estuvo adelantado para su tiempo. En este apartado dedicaremos un espacio a las nociones que dieron paso al gran constructo de la teoría de conjuntos.

***Conjunto**: Una colección en un todo de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, bien definidos y llamados los elementos del conjunto. Tales objetos pueden ser objetos físicos, materiales, abstracciones matemáticas, entre otros. Un ejemplo de conjunto son los números, este puede ser limitado (entre 1 y 30), o puede contener todos los números naturales, cuya cantidad es infinita. Estos conjuntos poseen reglas que los rigen.*

- ∞ *Dos conjuntos A y B son equivalentes si es posible ponerlos, por una cierta ley, en una relación mutua tal que a cada elemento de uno de ellos corresponde un elemento, y sólo uno, del otro. (George Cantor)".*
- ∞ *Si uno de los dos conjuntos posee más elementos que el otro se considera mayor.*

***Conjuntos Infinitos**: Cantor define un conjunto infinito como: Es posible encontrar un subconjunto propio del mismo que tenga la misma cardinalidad que el conjunto original. Sea N el conjunto de los números naturales,* $\mathrm{N} = \{1,2,3,4,5,...\}$, *el cual es un conjunto infinito. Para verificar esta afirmación es necesario encontrar un subconjunto propio y construir una biyección entre ambos. En este caso, consideremos el conjunto de los naturales impares* $\mathrm{T} = \{1,3,5,7,9,...\}$,*El conjunto T es subconjunto propio de N, y la regla de asignación* $n \rightarrow 2n - 1$ *es una biyección:* $\left\{\begin{matrix} N \leftrightarrow T \\ 1 \leftrightarrow 1 \\ 2 \leftrightarrow 3 \\ 3 \leftrightarrow 5 \\ 4 \leftrightarrow 7 \\ . \quad . \\ . \quad . \\ . \quad . \end{matrix}\right\}$

Biyección: relación uno a uno.

***Conjuntos numerables**: Un conjunto T es numerable cuando entre este conjunto y el conjunto de los números naturales se puede establecer una biyección. De este modo el conjunto T tiene la misma cantidad de elementos que el conjunto de los números naturales. De esta forma Cantor demostró que el conjunto de los números enteros también es numerable y con el conjunto de los números racionales procedió de forma similar haciendo la siguiente relación (con números naturales y enteros). (Euclides59, -s.f.- párr 15)*

Sea $\frac{p}{q}$ un racional y tanto p como q son números naturales y además para que no sean racionales iguales p y q deben ser primos entre sí. Ahora se tomó el plano cartesiano, se establece la unidad y se cubre el plano con una malla que son formados por la paralelas a los dos ejes en la distancia 1, 2, 3, etc.,los puntos de tal malla representan siempre un par de númerosenteros, una x y una y. Tomando y como numerador, x como denominador de un racional, los puntos del plano representanpues el conjunto de los números racionales. Estos resultados representan el conjunto de los números racionales. La Ilustración 2representa dicha secuencia.

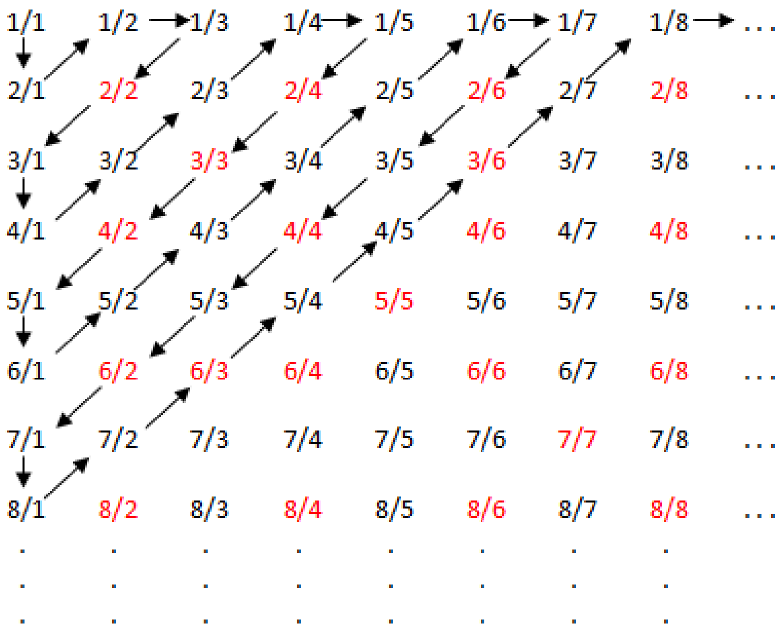


Ilustración No. 2 "Secuencia números racionales"
Fuente: Producción propia

Al respecto Bellón (s.f.) plantea que: "Otro conjunto numerable son los números algebraicos, donde se presentan los números irracionales y estos son soluciones a ecuaciones más generales" (p. 361).

La ecuación más general es:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}\,x + a_0 = 0$$

Donde los coeficientes a_p son números naturales. Ahora introduciremos la idea de la "altura" de una ecuación algebraica denotada como altura (h), se define con la siguiente expresión:

$$(n-1) + \sum_{p=0}^{p=n} [a_p]$$

Cantor demuestra que existe una cantidad finita de ecuaciones con igual altura h, entonces es posible ordenar las ecuaciones algebraicas con su altura, iniciando con ecuaciones de altura h = 1. Dentro de los grupos de ecuaciones con la misma altura se pueden formar subgrupos de ecuaciones que tienen el mismo grado, y entre estos subgrupos, si fuese necesario, se pueden ordenar las ecuaciones una vez más por sus coeficientes, colocando como primera aquella que tiene el mayor primer coeficiente. Si en tal caso se tienen dos con el mismo primer coeficiente, estas se ordenan de acuerdo con su segundo coeficiente, y así sucesivamente. Procediendo de esta manera las ecuaciones algebraicas se pueden ordenar en forma unívoca, lo que es equivalente a decir: el conjunto de las ecuaciones algebraicas es numerable.

Al respecto Bellón (1945) propone que:

Cada ecuación algebraica puede tener una o más raíces reales, pero ninguna puede tener más raíces que su grado, y por consiguiente su altura. De suerte que las raíces se pueden también ordenar. Si se conviene en que cada número algebraico que se obtiene de esta manera se suprime al presentarse por segunda vez, eliminando así toda repetición, se tiene, pues, un conjunto ordenado de los números algebraicos, en el cual a cada número algebraico corresponde un lugar bien definido y se puede decir que el conjunto de los números algebraicos es también numerable. (p. 362)

Retomando las definiciones según el sitio web de Euclides59 la información se puede complementar así:

> **Números transfinitos:** Paraeste aparte se debe tener claro algunos conceptos y uno de ellos es de cardinal de un conjunto. Dado un conjunto A, a él y a cualquiera de los conjuntos equipotentes con él se le asignará un objeto matemático "Tamaño" llamado cardinal o potenciade A, y que escribiremos: $card(A)$ ó $|A|$. (Euclides59, s.f. párrafo 20)

Ahora bien, dos conjuntos son equipotentes si y sólo si tienen el mismo cardinal, esto es: $A{\sim}B \Leftrightarrow |A| = |B|$

Ahora los conjuntos infinitos numerables son todos aquellos equipotentes a N, es decir, cualquier conjunto infinito que pueda ponerse en biyección con el conjunto de los naturales, se dice numerable. Se tiene que el cardinal de los naturales, los pares, los impares, entre otros, es el mismo y por tanto numerables. A dicho cardinal ***Cantor*** "lo representó con el símbolo ***aleph sub cero***. Entonces, ***aleph sub cero*** representa el cardinal de los conjuntos infinitos numerables y es, como se verá, el primero del sistema que llamó Cantor de los **números transfinitos**. $|N| = \aleph_0$ y este es el primer infinito de ***Cantor"*** *(párr. 22)*

Desde el sitio web *Neoteo* podemos recoger aspectos como:

> *David Hilbert (1862, 1943) El gran matemático alemán. Se le reconoce mundialmente como uno de los matemáticos más influyentes del siglo XIX y principios del XX, y ha contribuido a las matemáticas desarrollando conceptos como la teoría de invariantes, la axiomatización de la geometría y la noción de espacio de Hilbert, uno de los fundamentos del análisis funcional. (párr 2)*

Parte de su trabajo se relacionó con la *teoría de conjunto*s y los *números transfinitos* de Cantor, explicando algunas de las paradojas del infinito. Para explicar los conceptos relacionados con el infinito, *Hilbert utilizaba a menudo el ejemplo de un hotel muy especial, uno que contaba con infinitas habitaciones. Hilbert imaginó un hotel con infinitas habitaciones numeradas 1, 2, 3, 4… y así hasta el infinito. Imaginemos que una noche de tormenta llega al hotel de infinitas habitaciones un viajero con evidentes intenciones de alojarse en él, pero se encuentra con un cartel en la puerta que avisa que está completo. De todos modos, decide entrar y ver si hay alguna posibilidad de pasar la noche resguardado de la lluvia. Rápidamente, la recepcionista "posiblemente una matemática consumada" encuentra una solución: le pide al cliente de la habitación 1 que se cambie a la 2, al de la 2 que pase a la 3, y así sucesivamente. Cuando todos los huéspedes se han movido de habitación, la primera queda disponible para el recién llegado. Uno podría preguntarse qué ocurrió con el huésped que se encontraba en el último cuarto, ya que en un hotel convencional se hubiese quedado sin lugar. Sin embargo, en el* ***Gran Hotel de Hilbert*** *no hay algo así como "último cuarto", por lo que ese problema no existe. El infinito siempre admite "un lugar más" al final. (párr 4))*

Este mecanismo de correr a los huéspedes hacia los cuartos con números más grandes puede aplicarse todas las veces que sea necesario para alojar cualquier número extra de huéspedes. Si llegasen 5, 37 o 58.904 huéspedes, bastaría con desplazar ese número de cuartos a cada una de las personas alojadas y asunto resuelto. Pero ¿*Qué pasaría si al hotel, ya completo, llegasen infinitos huéspedes más*?

Hilbert (2009) contaba que un día estando su hotel lleno con infinitos huéspedes llegó el representante de una agencia de viajes con un problema. Tenía una excursión compuesta por *infinitos turistas* que necesitaban hospedarse esa noche en el hotel y así se lo planteó a la astuta recepcionista. No podía recurrir al truco anterior, ya que los huéspedes a desplazar nunca hubiesen terminado de recorrer los infinitamente largos pasillos del hotel para llegar a sus nuevas habitaciones. Sin embargo, pudo resolver el problema. Para ello, pidió a todos los huéspedes que se mudaran a la habitación correspondiente al resultado de multiplicar por 2 el número de su habitación actual. De esa forma todos los huéspedes se mudaron a una habitación par, y las infinitas habitaciones impares quedaron libres. Así, los infinitos turistas pudieron alojarse sin problemas.

Así planteado, parecería que el hotel no puede llenarse nunca. Imaginemos por un momento que al Gran Hotel llegasen infinitos autobuses con infinitos pasajeros cada uno. ¿Podríamos alojarlos en un hotel que "*solo*" tuviese infinitas habitaciones? El problema exigió que la inteligente recepcionista demorase un par de segundos en encontrar una solución. Se arrimó al intercomunicadory le pidió a todos los huéspedes que se encontraban en una habitación cuyo número fuese primo (números solo divisibles por sí mismos o por la unidad), o alguna potencia de éstos, que calculase el resultado de elevar el número 2 a la potencia correspondiente al número de la habitación en la que se encontraban y se cambiase a esa habitación. Esto provocó alguno que otro revuelo entre los huéspedes, pero finalmente todos los implicados en el cambio llegaron a su nueva habitación.

Hecho esto, la recepcionista sonrió con aires de suficiencia *y* asignó a cada uno de los autobuses un número primo (distinto de 1), asignó a cada uno de los turistas de cada una de las excursiones un número impar. Hizo que cada uno de los nuevos pasajeros calculase el número de habitación que le correspondía, elevando el número primo correspondiente a su autobús al número impar que le tocó. Dado que existe una cantidad infinito de números primos, y un número infinito de números impares, se logró hospedar a un número infinito de infinitos huéspedes dentro de un hotel que "solo" tiene un número infinito de habitaciones. (Hilbert, s.f. párr. 6, 7 - 8)

Se dará una mirada al concepto de infinito en los números complejos:

Infinito en el Campo Complejo: se define un campo como: El cuerpo en el cual la operación de multiplicación es conmutativa, se denomina campo.

Un número complejo es un número de la forma $x + \boldsymbol{i}y$ donde x e y son números reales, $\boldsymbol{i}$ es la unidad imaginaria que geométricamente indica la rotación en $\frac{\pi}{2}$, este conjunto se simboliza con la letra $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} = \{\mathrm{x} + \boldsymbol{i}\mathrm{y}: \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{i}^2 = -\boldsymbol{i}\},$$

Es decir es el conjunto de las parejas ordenadas reales (x, y), con la propiedad de que

$$i^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = -1$$

Es decir todo elemento de $\mathbb{C}$, digamos $\mathbb{Z}$, tiene la forma:

$$x = \Re ez \; ; \qquad y = \Im mz; \qquad z = \Re ez + \boldsymbol{i}\Im mz$$

Los números complejos $\mathbb{C}$, se pueden complementar con un punto en el infinito, que va a corresponder al número complejo ∞.

El conjunto $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ lo denominamos el conjunto extendido de los complejos. Para una visualización del plano complejo extendido $\bar{\mathbb{C}}$, llevamos a cabo una construcción geométrica, denominada la proyección estereográfica.

En el plano $\mathbb{R}^3$ con sistema de coordenadas $O\xi_1$ y $O\xi_2$ de tal forma que estos coincidan con los ejes $\Re ez$ e $\Im mz$ del plano complejo $\mathbb{C}$. Se construye una esfera Γ de radio $\frac{1}{2}$ con centro en el punto $(0,0,\frac{1}{2})$, además esta esfera Γ es tangente en su origen al plano complejo.

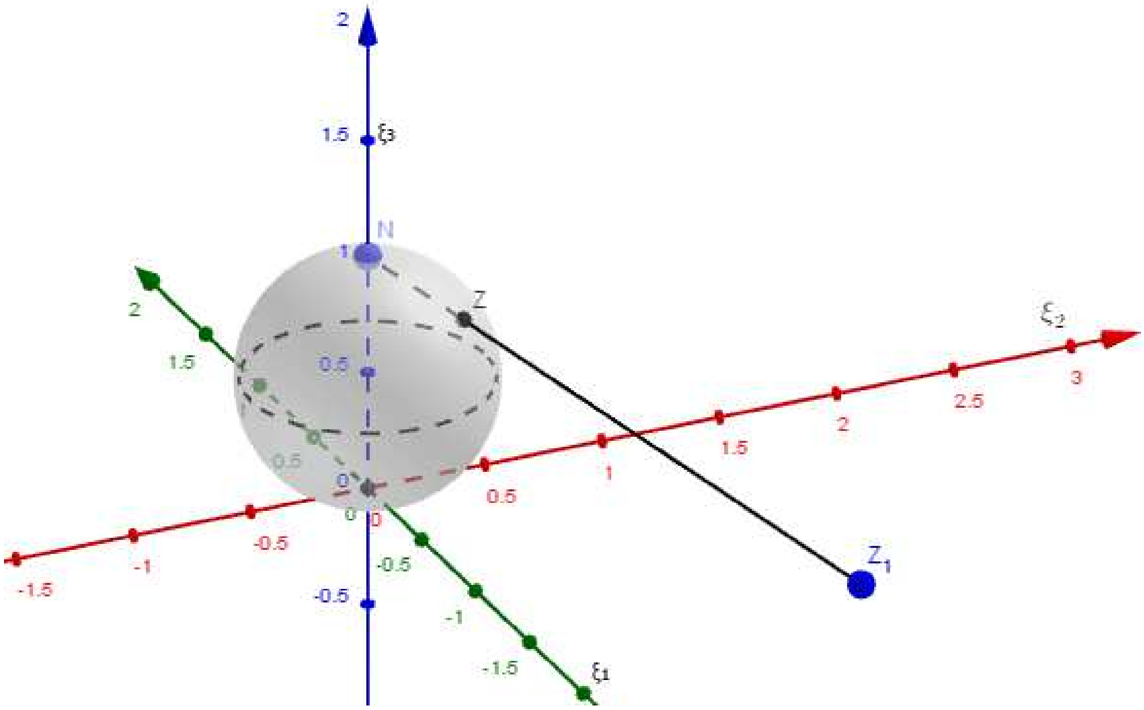


Ilustración No 3 ·"Proyección Estereográfica"
Fuente: González, Mesa & Martínez (2009), p. 43

González, Mesa & Martínez (2009) plantean que: "Los puntos $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Gamma$, cumplen con la condición: $\xi_1^2 + \xi_2^2 = \xi_3(1 - \xi_3)$. El punto *(0,0,1)* se designa por N y se va a unir este punto con el plano complejo $\mathbb{C}$, por medio de rayos que tocan la esfera en el punto $z_1 = \Re ez + \boldsymbol{i}\Im mz = x + \boldsymbol{i}y$. Con esta construcción todos los puntos de la esfera a excepción del punto N, se proyectarán en el plano complejo $\mathbb{C}$. Así se ha creado una relación entre el conjunto $\mathbb{C}$ y $\Gamma \setminus \{N\}$, $z_1 \leftrightarrow z$. Esta relación es biyectiva" (p. 43).

Además agregan que: "*Si se condiciona a que* $z = \infty \leftrightarrow N$*, entonces se va a tener una relación biyectiva entre* $\overline{\mathbb{C}}$ *y* Γ *. Esta correlación es llamada la proyección estereográfica. La esfera* Γ *en este caso es la esfera de Riemann. Para hallar la relación entre el punto* z_1 *y* z*, se utiliza el hecho de que los puntos coordenados cumplen con la ecuación de la esfera". (pp. 43, 44).*

Ahora veamos la definición sobre el concepto de infinito según Real Academia Española

RAE

1. *adj. Que no tiene ni puede tener fin ni término.*
2. *adj. Muy numeroso o enorme.*
3. *m. Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad. La calle se perdía en el infinito.*
4. *m.En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.*
5. *m. Mat. Valor mayor que cualquier cantidad asignable.*
6. *m. Mat. Signo (∞) con que se expresa el* ***infinito.***
7. *adv. Infinita o excesivamente.*

Según la Real Academia de la Lengua plantea que *"adj= (adjetivo), m= (nombre masculino), avd.= (adverbio), Mat= (matemáticas)"*

Es decir que desde esta misma dependencia sólo se encuentra el infinito potencial, esto implica que se tiene solo la noción de este infinito, dejando a un lado el infinito actual.

5.2.Teoría de las Situaciones Didácticas.

Enseñar matemáticas demanda conocimientos matemáticos específicos, construir situaciones de enseñanza y llevar adelante procesos de interacción entre los alumnos y alguna situación específica que les permita la apropiación de los conocimientos, descubra su organización interna y la forma de utilizar dichos conocimientos en la solución de problemas variados. Es aquí donde está la importancia que posee la teoría que desarrolló Brousseau, ya que posibilita la explicación de los momentos importantes que se presentan en la clase de matemáticas. Esos momentos son definidos como situaciones y al adentrarse en el desarrollo de la teoría, se irán reconociendo esas situaciones en relación con las experiencias dentro del aula, desde un posicionamiento como estudiante o como docente.

La teoría de situaciones está sustentada en una concepción constructivista *"en el sentido* *piagetiano del aprendizaje”*, concepción que es caracterizado por Brousseau (1986) de esta manera: *“El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.*” (p. 3)

- **Situaciones didácticas y a-didácticas.**

El rol fundamental que esta teoría otorga a la “**situación**” en la construcción del conocimiento se ve reflejado en la descripción que hace de ella Brousseau (1999), citado por Panizza:

> *Hemos llamado “situación” a un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina a un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable. Algunas de estas “situaciones” requieren de la adquisición “anterior” de todos los conocimientos y esquemas necesarios, pero hay otras que ofrecen una posibilidad al sujeto para construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso “genético*. (p. 43)

Es pertinente igualmente hacer la conceptualización con la definición de los principales componentes de esta teoría, para ello recogemos los planteamientos descritos por el Gómez M (s.f.) quien complementa diciendo:

- **Contrato didáctico**: es lo que espera el alumno del profesor y viceversa (las expectativas que se tienen). Es la relación entre el alumno y el profesor a la hora de enseñar un saber concreto.

- **Situación Didáctica:**es el conjunto de relaciones que se establecen de manera implícita o explícita entre un grupo de alumnos, un contexto o medio (que puede tener instrumentos o materiales) con la finalidad de que los alumnos se apropien de un aprendizaje, es decir que reconstruyan ese conocimiento, que cada aprendizaje le permite solucionar una situación particular.

- **Situación A-Didáctica:**este momento es donde el docente se quita de la situación y logra que el alumno acoja el problema como propio, motivado por el problema y no por satisfacer el deseo del profesor y sin que este intervenga directamente en la situación. Logrado esto, tenemos ahora la devolución de la situación al estudiante. En esta fase no desaparece la intención de que el estudiante aprenda algo. La situación a-didáctica maneja varios aspectos como:

  a) La necesidad de los conocimientos: la situación se establece de forma que el conocimiento al que va dirigido, sea el requerido para la resolución, en el sentido de que la situación no puede ser dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende generar.
  b) La no intervención del maestro en relación al saber: se debe saber la importancia y el significado de la no intervención del profesor en la situación a-didáctica. De éste se desprende el concepto de devolución desarrollado por Brousseau (1998, cap. V), citado por Panizza: *"La devolución es el acto por el cual el enseñante hace aceptar al alumno la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia" (p. 8)*

- **Variable didáctica**: las situaciones didácticas son objetos teóricos cuyo propósito es estudiar el conjunto de condiciones y relaciones propias de un conocimiento bien determinado. Algunas de esas condiciones pueden cambiar a voluntad del profesor, y constituyen una variable didáctica cuando según los valores que toman modifican las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento necesario para resolver la situación.

- **Tipos de situaciones didácticas:** se tiene tres tipos de situaciones que son:

  a) Situaciones de acción: Son las relaciones entre el estudiante y un medio (material o simbólico), solo necesita la puesta en marcha de conocimientos implícitos por parte del estudiante, afrontando el problema de forma individual.

b) Situación de formulación: un estudiante (o grupo de estudiantes) que opera como emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro estudiante (o grupo de estudiantes) que funciona como receptor y que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) con base al conocimiento contenido en el mensaje. El objetivo es la comunicación de informes entre estudiantes.

c) Situación de validación: dos estudiantes (o grupos de estudiantes) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de *"sancionarlas"*, es decir ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas y oponer otras aserciones. El trabajo es convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. (Panizza - 2003. p. 11)

Se debe tener presente al comienzo de una situación, es el criterio que se tiene al identificar una situación particular como de un tipo o de otro, hay que tener claro que una situación es de acción cuando lo que se requiere de los estudiantes es que pongan en juego medios de acción; la de formulación es el carácter de la necesidad que posee la formulación de un mensaje; las de validación requieren necesariamente no sólo la formulación sino también la validación de juicios por parte de los estudiantes.

Si la situación requiere que los estudiantes actúen, se trata de una situación de acción, aunque los estudiantes intercambien información en el momento de realizar la prueba, pero el hecho que los estudiantes espontáneamente formulen la situación, esta situación no se considera como una formulación. Al respecto Panizza (2003) plantea que "En las situaciones de acción se validan acciones, en las situaciones de formulación se validan mensajes; en las situaciones de validación se validan afirmaciones” (p. 13).

No es una ley seguir las situaciones en el orden de acción, formulación y validación, si bien una situación de validación supone la formulación de una aserción y la formulación de una aserción supone una acción interiorizada, eso no significa que haya que pasar anteriormente por fases a-didácticas de acción y de formulación.

- **La situación de Institucionalización**: este concepto definido por Brousseau (1994) y citado por Panizza, M. (2003) como:

  La consideración “oficial” del objeto de enseñanza por parte del estudiante y del aprendizaje del estudiante por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización. Esta situación complementa la devolución y define las relaciones que pueden tener los comportamientos o las producciones “libres” del estudiante con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico. Los comportamientos o las producciones “libres” del estudiante durante las fases a-didácticas de aprendizaje son constitutivos del sentido de los conocimientos que los estudiantes construyen. En este proceso de institucionalización se deben sacar conclusiones a partir de lo producido por los estudiantes, se debe recapitular, sistematizar, ordenar, vincular lo que se produjo en diferentes momentos del desarrollo de la secuencia didáctica (pp. 3 -11)

5.3.Ingeniería Didáctica

Michèle Artigue (1995) plantea que: “La noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico” (p. 33)

En los años ochenta esta visión se percibe como el medio de abordar dos cuestiones cruciales, dado el estado de desarrollo de la didáctica de las matemáticas en la época:

- Las relaciones entre la investigación y la acción en el sistema de enseñanza.
- El papel que conviene hacerle tomar a las "realizaciones didácticas" en clase, dentro de las metodologías de la investigación en didáctica.

Estas preocupaciones se manifiestan, por ejemplo, en el texto que preparó Chevallard para la Segunda Escuela de Verano en Didáctica de las Matemáticas que se celebró en *New Orléans* en 1982 (Chevallard, 1982). Allí escribió, de forma notoria, con respecto al primer punto: "*Definir el problema de la ingeniería didáctica es definir, en su relación con el desarrollo actual y el porvenir de la didáctica de las matemáticas,* ***el problema de la acción*** *y de los* ***medios*** *para la acción,* ***sobre el sistema de enseñanza".*** (p. 28).

En realidad el término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje, conforme mencionó Douady (1996, p. 241) citado por De Faría (s.f.) como:

> *… el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase*."(p. 33)

Artigue (1998, p. 40) distingue varias dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas:

- ∞ Dimensión epistemológica: asociada a las características del saber puesto en funcionamiento.
- ∞ Dimensión cognitiva: asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.
- ∞ Dimensión didáctica: asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

5.3.1. La ingeniería didáctica como modelo de investigación de los procesos didácticos.

Como modelo de investigación en educación, la ingeniería didáctica surge en los años ochenta como respuesta a las exigencias de asignar una función efectiva a las investigaciones educativas. La importancia de esta metodología de investigación en educación matemática, se evidencia en el alto impacto de los trabajos realizados en Francia por investigadores como Guy Brousseau (1998, 2004) y Régine Douady (1984) en la didáctica de las matemáticas. Las investigaciones que usan esta metodología se pueden clasificar en tres grandes tipos:

I. Las que tienen como sustento la enseñanza pero que no se ciñen a contenidos específicos, como las de Marilier, Robert y Tenaud (1987), sobre el aprendizaje de métodos y el trabajo en grupo. O trabajos como los de Bloch (2002) sobre la teoría de las situaciones didácticas y de la transposición didáctica de Yves Chevallard (1985, 1986).

II. Las que apuntan al dominio para-matemático, donde las nociones como ecuación y demostración, entre otras, guardan un estatus de herramienta en la enseñanza (Yves Chevallard, 1982).

III. Las que consideran la elaboración de génesis artificiales para un concepto matemático determinado como las de Brousseau (2002 y 2004).

El proceso experimental de la ingeniería didáctica : Artigue & otros (1995), distinguen cuatro fases:

1. **Fase de análisis preliminar.** En la que se busca profundizar sobre: el análisis

epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza; el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos; el análisis de las concepciones, de las dificultades y de los obstáculos que determinan su evaluación y, finalmente, de las restricciones donde se va a situar la acción didáctica. Michel Artigue y otros (1995) destacan que *"los estudios preliminares tan solo mantienen su calidad de preliminares en su primer nivel de elaboración" (p.34).* Posteriormente van tomando distintos lugares y funciones en la investigación.

2. Fase de concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas.

En la que se busca identificar las variables macro y micro didácticas relacionadas con el estudio y el tipo de actividad propuesta a los estudiantes. *"El análisis a priori, se convierte en un análisis de control de significado"comprende una parte descriptiva y una predictiva, centradas en las características de las situación diseñada y que se pretende presentar en la clase a los estudiantes". El análisis micro didáctico se obtiene fundamentalmente mediante el análisis de las tareas"(Artigue, 1995, p. 45).*

3. Fase de experimentación. En la que se ejecutan los diseños y se recogen los datos que informan sobre los fenómenos identificados en el análisis *a priori.*

4. Fase de análisis *a posteriori* y evaluación. Se basa en el conjunto de datos recogidos en la experimentación. El análisis se fundamenta en un *análisis de contenido* de los datos obtenidos en la implementación para la confrontación con el análisis *a priori.*

Calderón (2005) plantea que:

La noción de tarea que se construye desde este modelo de investigación, se constituye como un sistema propuesto para el desarrollo de los aprendizajes de los estudiantes, que se articula en los niveles macro (curricular y didáctico) y micro (de la interacción con el conocimiento y con los interlocutores del aula), niveles que se han de tener en cuenta en los respectivos análisis. (212)

5.4. Las TIC como herramienta para el aprendizaje

La adaptación del entorno educativo a las nuevas tecnologías y el uso adecuado que se le dé a éstas es un desafío; de nada sirve tener los elementos, sino se utilizan de manera productiva y ajustados a las necesidades de cada área. Las TIC han de vislumbrar nuevos métodos de aprendizaje didáctico. Recordemos que la innovación tecnológica muestra al mundo un nuevo horizonte de conocimientos y un sinnúmero de ventanas al futuro que llevan al perfeccionamiento de las estrategias y de los medios necesarios, que van de la mano de un acompañamiento adecuado, para llevar a cabo un aprendizaje significativo y satisfactorio.

Área (2004) en su texto sobre los ordenadores en la educación secundaria: del MS-Dos a Internet plantea:

> *Las TIC en la enseñanza no tienen efectos mágicos. Ningún profesor por el mero hecho de introducir ordenadores en su docencia puede creer que, de forma casi automática, provocará que sus alumnos aprendan más, mejor y que además, estén motivados. Esto es una forma de utopismo o fe pedagógica sobre el potencial de las máquinas digitales sin suficiente fundamento racional. Hoy en día, sabemos que los ordenadores son objetos o herramientas que adquieren su potencialidad pedagógica en función del tipo de actividades y decisiones metodológicas realizadas por los docentes. Lo relevante para la innovación pedagógica de la práctica docente, en consecuencia, es el planteamiento y método de enseñanza desarrollado y el proceso de aprendizaje que dicho método promueve en los alumnos, no las características de la tecnología utilizada. (pp. 30 -35)*

5.5. GeoGebra

La investigación está mediada por las TIC, en este caso se apoyará en el software GeoGebra que es una herramienta virtual, de gran ayuda para esta época donde los estudiantes son nativos digitales.

¿Qué Es Geogebra? Según el GeoGebra Work Tema (s.f.) se plantea que este software es:

> *… un programa dinámico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para la educación en todos los niveles. Combina dinámicamente, geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización en tablas y planillasy hojas de datos dinámicamente vinculadas. GeoGebra es en su origen la tesis de Markus Hohenwarter, con el objeto de crear una calculadora de uso libre para trabajar el Álgebra y la Geometría. Fue un proyecto*

que se inició en el 2001 en un curso de Matemática en la Universidad de Salzburgo (Austria). Actualmente, GeoGebra continúa su desarrollo en la Universidad de Boca Ratón, Florida Atlantic University (USA). Pero no se debe olvidar que GeoGebra está diseñado con mentalidad colaborativa. Desde la página oficial se dispone de acceso a ayudas, recursos, foros y Wikis que usuarios de todo el mundo mantienen en constante renovación. (párr. 13)

Veamos ahora algunas formas de trabajar con la aplicación *GeoGebra*: esta herramienta permite abordar la geometría desde una forma dinámica e interactiva, que les ayude a los estudiantes a visualizar contenidos matemáticos que son complicados de afrontar desde un dibujo estático. También permite realizar construcciones de manera fácil y rápida, con un trazado exacto y real, que además, revelarán las relaciones existentes entre la figura construida; también permitirá la transformación dinámica de los objetos que la componen. Debido a estas dos características el profesorado y el alumnado pueden acercarse a GeoGebra de varias maneras, no excluyentes entre sí pero que a menudo están relacionadas con el nivel de capacitación que se tenga del programa.

- **Herramienta del profesor:**
  Se pueden utilizar construcciones ya creadas por otras personas o las propias para:

∞ Crear materiales educativos estáticos (imágenes, protocolos de construcción) o dinámicos (demostraciones dinámicas locales, applets en páginas web), que sirvan de apoyo a las explicaciones de la materia.

∞ Crear actividades para que los niños, niñas y adolescentes manipulen dichas construcciones y así deduzcan relaciones, propiedades y resultados a partir de la observación directa.

- **Herramienta del estudiante:**

∞ Manipular construcciones realizadas por otras personas y deducir relaciones, resultados y propiedades de los objetos que intervienen.

∞ Para realizar construcciones desde cero, ya sean dirigidas o abiertas, de resolución o de investigación” (GeoGebra - s.f. párr 14 - 18)

6. DISEÑO METODOLÓGICO

6.1. Tipo de Investigación

El tipo de investigación realizada es de tipo cualitativa, ya que se observa a un grupo de estudiantes que presentan determinadas falencias con respecto al aprendizaje del tema, en este caso infinito, allí se recopila información de la situación actual, se analiza la información obtenida y se plantea una propuesta que permita dar respuesta a la pregunta de investigación.

6.1.1. Investigación Cualitativa

Según Rodríguez, G. Gregorio; Gil F., Javier y García J., Eduardo (1999) este tipo de investigación "*Sitúa al investigador en el mundo empírico y determina las actividades que tendrá que realizar para poder alcanzar el objetivo propuesto*" (p. 3).

Además los mismos autores agregan:

> *La investigación cualitativa, se plantea, por un lado, que observadores competentes y cualificados pueden informar con objetividad, claridad y precisión acerca de sus propias observaciones del mundo social, así como de las experiencias de los demás. Por otro, los investigadores se aproximan a un sujeto real, un individuo real, que está presente en el mundo y que puede, en cierta medida, ofrecernos información sobre sus propias experiencias, opiniones, valores…etc. Por medio de un conjunto de técnicas o métodos como las entrevistas, las historias de vida, el estudio de caso o el análisis documental, el investigador puede fundir sus observaciones con las observaciones aportadas por los otros*. (p.3)

6.1.2. Metodología de investigación

La metodología a utilizar en esta investigación es cualitativa, porque se va a realizar un estudio cuyo objetivo es conocer la situación y actitudes predominantes a través de la descripción de las actividades, objetos y procesos que se utilizan para el aprendizaje del tema infinito en la población estudiantil seleccionada, lo cual no se podría describir, agrupar y analizar de la manera que se requiere con otro medio de observación. Cuatro fases fundamentales en el proceso de investigación cualitativa: Preparatoria, Trabajo de Campo, Analítica, Informativa.

6.2.Herramientas Metodológicas

Para el diseño y aplicación de la secuencia no estructurada a los miembros de la muestra seleccionada para detectar el nivel de comprensión del concepto de infinito al finalizar cada secuencia didáctica implementada se utilizó como herramienta la recolección de registros escritos de la evaluación de la misma.

6.3.Población

La población impactada correspondió a la institución Educativa Nuestra Señora del Rosario del Municipio de Belén de Umbría Risaralda, institución de carácter público, la muestra para esta investigación correspondió a los estudiantes del grado 10-3, los cuales están entre los 15 y 17 años de edad. En este centro educativo para el grado décimo en la modalidad académica se da una intensidad horaria de 4 horas semanales en la asignatura de trigonometría, se eligió este grupo ya que los otros dos pertenecen a modalidades de ventas y programación, además poseen una cantidad menor de horas semanales para esta asignatura y para implementar la secuencia didáctica mediada por las TIC. Adicionalmente nos encontramos en este grupo dos estudiantes con discapacidades como:

- Síndrome de Marfan
- SV-Baja visión
- Trastorno del comportamiento social en la niñez no especificado
- Ritmos de aprendizaje moderado

6.4.Plan de investigación

Se trabajó bajo las fases de la metodología de la ingeniería didáctica, con un nivel de micro-ingeniería, donde el tema central es el aprendizaje del infinito en el aula mediado por las TIC.

Se tuvo como base las cuatro fases de la metodología de la ingeniería didáctica propuesto por Faría (2006)

1. Primera fase: Análisis preliminares.

2. Segunda fase: Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.

3. Tercera fase: Experimentación.

4. Fase de análisis a posteriori y evaluación.

Sugiere el mismo autor que en cada en estas fases se proceda a realizar:

- *Estudio preliminar de las dimensiones epistémico – ecológica, cognitiva – afectiva e instruccional.*
- *Diseño de la trayectoria didáctica, selección de los problemas, secuenciación y análisis a priori de las mismas, con indicación de los comportamientos esperados de los estudiantes y de la planificación de intervenciones controladas del docente.*
- *Implementación de la trayectoria didáctica, observación de las interacciones entre personas y recursos y evaluación de los aprendizajes logrados.*
- *Evaluación o análisis retrospectivo, que se sigue de un contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación También se reflexiona sobre las normas que condicionan el proceso instruccional y sobre la idoneidad didáctica. (P.3)*

6.5.FASE 1: Análisis preliminar

El análisis preliminar considera tres dimensiones fundamentales (Artigue, 1998)

- La dimensión epistemológica asociada a las características del saber matemático en juego.
- La dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza.
- La dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

6.5.1. Análisis histórico epistemológico del concepto de infinito

Desde los antiguos griegos hubo gran preocupación por éste tema, quienes intentaron inútilmente comprenderlo, hubo especulaciones que los llevaba a conclusiones contradictorias y paradójicas. ARRIGO, D´amore & Sbaragli (2011) resumen y hacen un recorrido a las diferentes escuelas que retoman el concepto de infinito a través de la historia:

Escuela jónica: *fundada por Tales de Mileto, él identifica el origen de todas las cosas "arjé" el agua, ya que en su postura todo tiene un estado de humedad como base de la naturaleza y a este estado retornan todas las cosas. Se inicia con Tales de Mileto ya que uno de sus discípulos Anaximandro de Mileto quien considera que el "arjé" es algo cualitativamente indefinido (hecho que recuerda la idea de indeterminación), eterno, sin límites. De él se dice que creó una nueva palabra el ápeiron, traducido como "sin límites". Ahora nos podemos preguntar ¿Qué era el ápeiron para Anaximandro?, ¿A qué quería llegar con este concepto? La fascinación y entendimiento por este concepto está desde tiempos inmemorables.*

Escuela pitagórica: *Pitágoras considerado un finitista. Él quería representar todo el universo con números naturales o sus relaciones (números racionales) y es cuando encuentran la existencia de magnitudes inconmensurables, esto cambia todo lo que tenían hasta el momento, e incluso en su más famoso teorema donde nacen los números irracionales. En este momento los pitagóricos debían mantener en secreto tal hallazgo en su matemática finitista, pero esto no fue* *posible ya que según cuenta la historia el señor Hipaso de Metaponto dio a luz pública tal descubrimiento el cual pagó con su propia vida. Cómo no pensar que Pitágoras vivió un calvario con el concepto de infinito en su mundo finito, un problema que trato de esconder, pero este concepto afloraría como su teorema (pp. 14 -15)*

Zenón de Elea: es pertinente recoger aquí sus famosas paradojas, célebres por sus argumentos, las cuales utilizaba para contradecir a los pitagóricos sobre las magnitudes inconmensurables, este hombre que manejó en sus paradojas la divisibilidad infinita, e introdujo a los pensadores de su época una nueva cuestión matemática, la del infinito.

*Recordemos la paradoja de Aquiles y la tortuga, "Se trata del gran Aquiles, que le dará una ventaja de 100 metros a la tortuga en una carrera. Se da la señal de salida y empezamos a suponer que cada corredor empieza a correr a cierta velocidad constante (uno muy rápido y otro muy lento). Después de determinado tiempo, Aquiles ha recorrido 100 metros, llevándolo al punto de partida de la tortuga. Durante este tiempo, la tortuga ha avanzado una distancia mucho más corta, por ejemplo, 10 metros. Aquiles deberá recorrer durante un tiempo para alcanzar el punto en donde estaba la tortuga cuando el partió desde sus 100 metros. Para ese entonces, la tortuga ya habrá avanzado un poco más, demostrando que cada vez que Aquiles alcanza el estado anterior de la tortuga, ésta ya se habrá movido. Por lo tanto, Aquiles nunca puede superar a la tortuga. Repitiendo el argumento se puede ver fácilmente que la tortuga siempre estará delante. (*Arrigo, D´amore & Sbaragli -2011-, *p. 12)*

El éxito para Zenón radica, que para los antiguos griegos la suma de un número infinito de segmentos puede solamente ser un segmento infinito; la idea de que dicha suma pueda ser finita estaba más allá de su alcance conceptual. Problemática que continúo por muchos más años.

Aristóteles: La idea del infinito también fue rechazada por Aristóteles y los escolásticos, basados en las mismas contradicciones que el concepto de infinito generaba. Al respecto Ortiz (1994) plantea:

Uno de los típicos argumentos esgrimido en contra del infinito era el conocido como la «aniquilación de los números», según este argumento los números finitos serían absorbidos por *los números infinitos, es decir, para todo número finito a,* $a + \infty = {}^{\circ}$ *y de esta forma los números infinitos aniquilaban a los números finitos. Aristóteles trató de enfrentar el problema del infinito a través de dos representaciones, dos concepciones complementarias y cuya interacción dialéctica ha influido el propio desarrollo de la matemática. En el tercer libro de su obra Física, Aristóteles distingue dos tipos de infinito; el infinito como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y el infinito como una totalidad completa. El primero es el infinito potencial y el segundo el infinito actual. (p. 61)*

Wallace (2013) amplía el concepto y afirma con respecto a Aristóteles:

Aristóteles sentía disgusto ante el desorden causado por un concepto nuevo. La prohibición del infinito actual fue percibida por mucho tiempo como un verdadero dogma durante muchos años. Para algunos matemáticos griegos otorgar a las cantidades infinitas por lo menos una existencia abstracta o teórica permitió que usaran las técnicas que eran extraordinariamente parecidas al cálculo diferencial e integral; tan parecidas que, en retrospectiva, es sorprendente que el cálculo tardará mil setecientos años en ser inventado. Pero, una gran razón por la que tardó tantos años fue la penumbra metafísica a la que Aristóteles, con su concepto de potencialidad, había desterrado el ∞, y que servía para legitimar la alergia de las matemáticas a un concepto que de todos modos nunca podría tratar. (p. 210)

Euclides: para él, según lo plantean Arrigo, D´amore & Sbaragli (2011) propone que solo el infinito era en potencia y no acto, una postura muy Aristotélica, sólo se refería al infinito y no lo nombraba en sus libros, una de sus frases "*el todo es mayor que las partes"(p. 3)* frase que eligió seguramente para eliminar los conjuntos infinitos. Es claro entonces que incluso en nuestra época se continúa encontrando una problemática muy grande con el concepto de infinito.

Arquímedes: Realizaba subdivisiones en formas geométricas en infinitesimales y en infinitas secciones, llegando a resultados extraordinarios. No dándole importancia al concepto de infinito, pero sí al menos trabajando con él.

Por esta época Lévy (2001) plantea que no se puede dejar atrás los matemáticos árabes y en especial: **Th$\bar{a}$bit ibn Qurra:** el cual presenta su postura en torno al concepto y afirma que: “quien operó con conjuntos infinitos y tuvo gran fascinación por éstos. Un infinito no puede ser mayor que un infinito, una de las declaraciones de Th$\bar{a}$bit en un manuscrito que fue traducido.

De trabajos realizados en el tema de infinito es la primera vez que se tiene conocimiento en la que se realiza una auténtica aritmética del infinito a partir de las propiedades aritméticas del número. De este tema solo se produciría una formulación matemática coherente sino mil años después de Th$\bar{a}$bit, con los trabajos de George Cantor y su teoría de transfinitos. Para Th$\bar{a}$bit es del todo evidente que *“hay un número infinito”* y que se trata ciertamente de un infinito actual.

Th$\bar{a}$bit replica que es perfectamente posible dar sentido matemático a una relación de orden. La proeza operatoria de Th$\bar{a}$bit consiste, por hablar en términos modernos, en definir la “igualdad” de dos conjuntos infinitos (el de los números pares e impares) por su equipotencia, al respecto Lévy (2001) plantea: el conjunto infinito de los números pares “es igual” al conjunto de los impares, porque a cada número par se le puede asociar un número impar y recíprocamente.

Lévy (2001) al afirmar que el infinito de los enteros es “doble” que el infinito de los enteros pares, Th$\bar{a}$bit invalida el célebre argumento en discusión (hay ciertamente un infinito más grande que otro infinito). Los enteros de la forma $3p$, que tiene la misma infinitud que los enteros de la forma $3p+1$ y que los de la forma $3p+2$, lo cual permite dividir el conjunto de los enteros, $\ldots$ hasta un infinito igual a un $n-$é$simo$ del infinito de los enteros. Th$\bar{a}$bit no llega, al hacerlo, a poner en tela de juicio el axioma según el cual “el todo es mayor que cualquiera de sus partes”. Para Th$\bar{a}$bit ibn Qurra fue una proeza desde su época haber llegado a trabajar con el infinito y realizar operaciones aritméticas con estos”(p. 17)

Este famoso matemático árabe operó con el infinito pero no logró dar un razonamiento a este concepto, que continúa siendo un enigma para los matemáticos.

Galileo: para este matemático el infinito actual está presente en sus trabajos, las líneas, así como los objetos concretos que se encuentran en la naturaleza, están formadas por un continuo (infinito actual) de partes pequeñas a voluntad pero medibles. A este gran matemático su geometría lo lleva a concluir que el todo no es mayor que una de sus partes. Este matemático también realiza una correspondencia biunívoca entre los números naturales y su correspondiente cuadrado, un avance muy significativo para su época, empezar a refutar a los grandes matemáticos griegos.

En este momento de la historia de la matemática, se sigue viendo el problema del infinito no sólo en potencia sino en acto.

Leibniz: uno de los matemáticos más grandes de la historia y un luchador incansable por trabajar con el concepto de infinito citado por Burbage & Chouchán (2002) afirman:

> *Yo estoy a favor del infinito actual de tal manera, que en lugar de admitir que la naturaleza le aborrece, como se dice vulgarmente, yo sostengo que es afectada por él por todas partes, para mejor resaltar las perfecciones de su autor. Así es que yo creo que no hay ninguna parte de la naturaleza que no sea, yo no digo divisible, sino actualmente dividida, y por consecuencia, la menor partícula debe ser considerada como un mundo lleno de una infinitud de criaturas diferentes. (p. 26)*

Descartes: él logra ver la geometría de otra forma, expresándola en un lenguaje algebraico, a cada punto geométrico le corresponde un punto en plano y a cada recta le corresponde una ecuación. Ahora establecida una correspondencia entre la recta y al ecuación, siendo infinitas las parejas de números reales que satisfacen esta última, también deben de ser infinitos los puntos de las rectas. A pesar de esto Descartes continuaba siendo un finitista y escribe:

> *[…] Entonces no aceptaremos nunca participar en discusiones sobre el infinito. De hecho, puesto que somos finitos, sería absurdo que estableciésemos consideración alguna sobre el tema y tratásemos así de hacerlo finito y dominarlo. En consecuencia, no nos ocuparemos de responder a aquellos que se preguntan si, teniendo una línea infinita, la mitad también sería infinita; o si el número infinito es par o impar, o a quienes hacen preguntas por el estilo: ya que en torno a estos temas, parecen que deban reflexionar solo aquellos que consideran infinita su propia mente. (Arrigo, Dàmore & Sbaragli (2011), pp. 64 -65)*

Descartes, utiliza el infinito al menos intuitivamente para resolver problemas de sus trabajos matemáticos.

Bolzano: este teólogo y matemático checo fue el primero en tratar de fundamentar la noción de infinito actual, en su obra póstuma Paradojas del infinito (1851), defendió la existencia de un infinito actual y enfatizó que el concepto de equivalencia entre dos conjuntos era aplicable tanto a conjuntos finitos como infinitos. Bolzano aceptó como algo normal que los conjuntos infinitos fueran equivalentes a una parte de ellos mismos. Esta definición del infinito fue utilizada posteriormente por Cantor y Dedekind.

Bolzano trabaja con La comparación y el establecimiento de un “orden” entre conjuntos infinitos es el punto de partida para definir una aritmética del infinito, sin embargo, este proyecto entraña una de las principales paradojas identificadas por Bolzano:

> *Cuando dos conjuntos son infinitos, pueden estar en una relación tal que es posible acoplar cada miembro del primer conjunto con algún miembro del segundo de tal manera que, por una parte, ningún elemento de los conjuntos quede sin acoplarse, y por otra parte, ninguno de ellos aparezca en dos o más acoplamientos* (...). *(Waldeg - 1996-, p. 5)*

La obra de George Cantor: para recoger sus planteamientos Leston (s.f) plantea:

Al igual que casi todo el mundo, durante más de dos milenios los matemáticos no han sabido a ciencia cierta qué pensar del infinito. Varias paradojas ideadas por los pensadores griegos y medievales les habían convencido de que acerca del infinito no se podía reflexionar impunemente. Así estaban las cosas en los años 70 del siglo pasado cuando George Cantor develó la matemática transfinita, rama de las matemáticas que aparentemente resolvía todas las paradojas que planteaba el infinito. Cantor, en su obra, demostraba que existían números infinitos, que los había de distinto tamaño y que podían utilizarse para medir la extensión de conjuntos infinitos. *(p.37)*

A finales del siglo XIX, Cantor desarrolla una teoría formal sobre el infinito actual. Todos los argumentos dados, señala Cantor, en contra del infinito han sido insensatos, ya que han tratado la aritmética de los números infinitos como una extensión de la aritmética de los números finitos. Uno de los objetivos de su obra *Grundlagen*era demostrar que no había ninguna razón para aceptar las viejas ideas en contra del infinito actual.

Si los conjuntos infinitos se comportan de manera diferente a los conjuntos finitos no quiere decir que estos sean inconsistentes, sino que obedecen a una aritmética diferente.

Cantor demostró, contra la famosa aniquilación de lo finito por lo infinito, que los números infinitos eran susceptibles de ser modificados por los números finitos. Así, la distinción de $+ 1$ demostraba dentro de la teoría de los números transfinitos, que los números finitos podían ser sumados a los números infinitos sin ser *aniquilados*, (Dauben, p. 121). También rechazó la distinción aristotélica entre infinito actual e infinito potencial, ya que todo infinito potencial presupone la existencia de un infinito actual.

George Cantor fue el creador de la teoría de conjuntos transfinitos y, siguiendo los pasos de Bolzano, consideró que la idea de una biyección sería el principio básico para comparar conjuntos infinitos. Si existe una biyección entre dos conjuntos, podemos decir que dichos conjuntos son equipotentes o tienen la misma potencia. El término de potencia de un conjunto dio paso al término de *número cardinal*.

Bolzano introdujo las siguientes definiciones de conjunto infinito: *Un conjunto no vacío A es finito si para algún entero positivo n, A es equipotente* $a = \{1,2, \ldots \ldots, n\}$*; de otra forma A es infinito. Un conjunto A es infinito si existe un subconjunto propio B de A equipotente a A; en cualquier otro caso A es finito.* (Moore, p. 22). Cantor y Dedekind utilizaron esta definición reflexiva del infinito: Cantor (1878): *Un conjunto finito es uno cuya potencia es un entero positivo. Para tal conjunto todo subconjunto propio tiene una potencia menor, mientras que un conjunto infinito A tiene la misma potencia que algún subconjunto propio de A.* (Implícitamente dio estas propiedades cuando demostró que $R\ y\ R^n$ tenían la misma potencia).

Cantor (1882): afirmó que: *por un conjunto finito entendemos un conjunto M, el cual surge a partir de un elemento original a través de la adición sucesiva de nuevos elementos de tal forma que el elemento original puede ser obtenido a partir de M eliminando sucesivamente los elementos añadidos en el orden reverso*.

Esta es la primera definición explícita de un conjunto finito dada por Cantor.

Cantor (1883), retomando la obra *Grundlagen (s.f.)*: *Mientras que un conjunto finito siempre retiene el mismo número ordinal, independientemente de la forma en que estén ordenados sus elementos, un conjunto infinito puede ser reordenado de tal forma que tenga más de un ordinal*.

Cantor definió que dos conjuntos tienen el mismo número de elementos si existía una correspondencia biunívoca entre los miembros de ambos conjuntos; a diferencia de Bolzano, quien concluyó que la existencia de una correspondencia entre dos conjuntos infinitos A y B no justificaba la inferencia de su igualdad, con respecto a la multiplicidad de sus miembros, "*La razón por la cual la definición de Cantor y sus consecuencias han sido aceptadas no es porque estén, ciertamente, más cerca del uso común sino más bien porque son más útiles para la matemática. Aún hoy en día tendemos a pensar que existen más números naturales que números pares*". (Wang, s.f. p. 70).

Cantor (1883) citado por Abhandlungen (s.f.) consideraba tres contextos donde surge el concepto de infinito actual:

> *primero cuando es realizado en la forma más completa, en un ser independiente de otro mundo, en Dios, al cual llamó el Infinito Absoluto o simplemente Absoluto; segundo cuando ocurre en lo contingente, en el mundo físico; tercero cuando la mente lo aprehende en abstracto como una magnitud matemática, número, o tipo de orden. Quiero hacer un claro contraste entre el Absoluto y lo que yo llamo Transfinito, es decir, los infinitos actuales de las dos últimas clases, los cuales están claramente limitados, sujetos a nuevas extensiones y por lo tanto relacionados con lo finito. (p. 378).*

El Infinito Absoluto es el Absoluto, por definición lo imposible de alcanzar: lo inalcanzable. El grado máximo de independencia, autonomía y completitud. En la categoría de Infinito Absoluto o Absoluto entran Dios, el último ordinal y la clase **V** de todos los conjuntos. Para Cantor desentrañar el infinito absoluto era una labor mística: la búsqueda de Dios. Más recientemente, Gaisi Takeuti definía de la siguiente manera su trabajo sobre Teoría de Conjuntos: «Tratamos de obtener una descripción exacta de los pensamientos de una mente infinita» (Rucker, p.) Para Cantor, tanto el infinito actual de la matemática como el infinito físico actual constituían lo *Transfinito*, donde, a diferencia del infinito absoluto, inalcanzable, existían una infinitud de infinitos: los cuales están claramente limitados, sujetos a nuevas extensiones, y por lo tanto relacionados con lo finito.

El infinito es un concepto muy utilizado por el común de las personas, pero usualmente nadie se detiene a pensar sobre él. Existen muchas concepciones contradictorias sobre el tema, son numerosas las ideas relacionadas con el infinito, actualidad y potencialidad, existencia del continuo, distintos tamaños de infinito, lo muy grande y lo muy pequeño, Dios, el todo, entre otros; y se hace necesario determinar su significado. El concepto de infinito se ha utilizado para expresar algo inmenso, desmedido, que no es posible contar, pero el infinito es un concepto más profundo va más allá de lo “muy grande” y de la posibilidad que tiene el ser humano de cuantificarlo, tomar el infinito simplemente como algo ilimitado ha provocado grandes confusiones a lo largo de la historia y por lo mismo ha sido objeto de numerosas investigaciones.

Donde la noción intuitiva va primero, los estudiantes de secundaria creen que los naturales tienen más cantidad que todos los números pares.

Kurt Gödel: al respecto Ortiz (1994) refiere de este autor que sus teoremas de la incompletitud y lo sustenta así:

> *el primero de los cuales establece que ninguna teoría finitamente axiomatizable y capaz de derivar los postulados de Peano (esto es, abarcar un nivel mínimo de complejidad) es a la vez consistente y completa.*
>
> *La Hipótesis del Continuo de Cantor dice que el número cardinal del continuo* $\boldsymbol{c}$*,*$2^{\aleph_0}$*, (del conjunto de los números reales) es* $_1$ *, el menor cardinal no numerable. El cardinal* $\boldsymbol{c}$ *o* $2^{\aleph_0}$ *no estaba definido de ninguna forma tal que se identificara con un alef y Cantor supuso que correspondía al primer ordinal de la segunda clase,* $\aleph_1$*.*
>
> *La hipótesis generalizada del continuo dice que para todo número cardinal infinito* $\aleph_\alpha$ *,* $2\aleph_\alpha = \aleph_{\alpha+1}$ *El número cardinal de la colección de todos los subconjuntos de un conjunto de cardinalidad* $\aleph_\alpha$ *es el menor número cardinal mayor que* $\aleph_\alpha$ *. El caso de la hipótesis del continuo es el caso particular:* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$*.*
>
> *En 1940 Kurt Gödel demostró que la Hipótesis del Continuo es consistente en la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Es decir, a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel no podemos probar que la cardinalidad del continuo* $\mathbf{c} \neq \aleph_1$*. La demostración de Gödel se basa en la construcción de un universo posible en el cual todos los axiomas del sistema de Zermelo-Fraenkel eran satisfechos y en el cual la cardinalidad del conjunto de partes de* ω*, cardinalidad de*$P(\omega) = \aleph_2$ *o* $\aleph_\omega$ *. Este universo L, es el universo de los conjuntos constructibles.*
>
> *En 1963, Paul Cohen probó que la negación de la Hipótesis del Continuo es consistente con el sistema de Zermelo-Fraenkel. Por medio del método de forcing, Cohen construyó varios universos posibles en los cuales todos los axiomas del sistema Zermelo-Fraenkel fueran satisfechos y la cardinalidad de* $P(\omega) = \aleph_2$ *o* $\aleph_\omega$ *o cualquier otro alef.*
>
> *De esta forma, la existencia de estos universos posibles traía como consecuencia la independencia de la Hipótesis del Continuo de los axiomas de Zermelo-Fraenkel.*

Hilbert, al presentar el problema de la cardinalidad del continuo, suponía que la teoría de conjuntos formalizada por Zermelo-Fraenkel, era suficientemente fuerte para decidir sobre este problema. Es difícil saber si el mismo Hilbert hubiese considerado los resultados de Gödel y Cohen como solución al problema.

Por su parte Gödel pensaba que el significado de la Hipótesis del Continuo era independiente de cualquier sistema formal de axiomas y que la prueba de su independencia sólo demostraba la debilidad de estos axiomas, Para Gödel estaba claro que la Hipótesis del Continuo era verdadera o falsa, y el problema consistía en construir un sistema formal para decidir cuál era el caso. (Ortiz- 1994-, pp. 77-78)

6.5.2. Análisis Cognitivo

Lupiáñez, Gómez, & Marín (2005). plantean que *"en el análisis cognitivo el profesor estudiará un tópico matemático desde la perspectiva de que va a ser objeto de aprendizaje; se trata de analizarlo a efectos de su comprensión por los escolares de secundaria*" (p.2).

6.5.2.1. Análisis de la tarea.

Se propuso una tarea a 30 estudiantes de grado undécimo (Ver Anexo B) para determinar el grado de comprensión del concepto de infinito, tanto potencial como actual en dos instituciones educativas del municipio de Belén de Umbría (Risaralda). La tarea consta de siete preguntas para las cuales se pretende caracterizar lo siguiente:

Pregunta 1: detectar si los estudiantes tienen presente que los racionales tienen una representación decimal infinita o solamente conciben una aproximación, esto basado en el pensamiento numérico y los sistemas numéricos.

Las conceptualizaciones relativas a los números reales implican la aritmetización de procesos infinitos, y por ende, la construcción de las nociones de inconmensurabilidad, irracionalidad, *completitud. Igualmente, este paso de los números racionales a los números reales requieren del uso y comprensión de diferentes tipos de representaciones numéricas, sobre todo, las relativas a los números irracionales, tanto por medio de decimales infinitos como de símbolos algebraicos. (MEN - 2003 -, p 60).*

Pregunta 2: se pretende conocer si los estudiantes son capaces de indicar por sí mismos si la expresión decimal 0.999…corresponde a 1.

Como se observa, los presupuestos teóricos, las técnicas utilizadas y finalmente la axiomática, llevan a un copamiento total de la recta por los elementos del conjunto numérico. Pero este es, en el fondo, un acto discriminatorio; es una manera de expulsar los infinitesimales y los transfinitos por una vía jurídica. Para entender un poco se analizará un ejemplo esclarecedor. Es un hecho elemental que el número 0.999999... y el 1, coinciden. La demostración parece sencilla:

Tomemos $x = 0{,}999999$ ... $10x = 9{,}999999$ ...Y restémoslos

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 9{,}999999 \\ -x & = & 0{,}999999 \\ 9x & = & 9{,}000000 \end{array}$$

Obteniendo $= \frac{9}{9} = 1$[25]

Pregunta 3: que los estudiantes puedan detectar la diferencia entre infinito potencial e infinito actual, en este caso con dos segmentos de diferente medida, así: *"es la importancia de diferenciar la representación del objeto, del objeto matemático. Los objetos matemáticos tienen un significado más abstracto que los objetos físicos"* (*Dall'Alba, S. G. - s.f. -p.5).*

Es decir que cada segmento posee una cantidad infinita de puntos.

Pregunta 4: Tratan de detectar hasta qué punto y en diferentes contextos, los alumnos aceptan que el todo puede tener la misma cantidad de elementos que una parte cuando se trata de conjuntos infinitos. El ejercicio propuesto trata de divisibilidad infinita, esta consiste en una versión de la primera paradoja de Zenón de la división, en un contexto geométrico para que ellos puedan realizar las diferentes iteraciones para hallar un número pedido. La cual corresponde a una serie geométrica convergente ya que se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 < \frac{1}{2} < 1$$

Pregunta 5: Llevar a los estudiantes a una aproximación del concepto inicial de límite, donde ellos con aproximaciones muy cercanas a cero de la función$f(x) = \frac{1}{x}; x \neq 0$; por la izquierda y por la derecha reconozcan que los resultados son cantidades muy grandes positivas o negativas.

Pregunta 6: La relación anterior es una biyección, pues a cada natural le corresponde un y sólo un número natural par (el suyo) y a cada número natural par le corresponde un y sólo un número natural. Gracias a esta biyección podemos emparejar los números de ambos conjuntos, por lo que se puede decir que ambos conjuntos numéricos son equipotentes, es decir, que tienen la misma cantidad de elementos.

Pregunta 7: En este punto cada estudiante dará su concepto sobre infinito, donde este es el resultado de un proceso de muchos años en la escuela y el colegio, además determinar en las preguntas anteriores donde se presenta o está el concepto de infinito.

6.5.2.2.Análisis de la información

Al realizar el análisis de la tarea propuesta a 30 estudiantes de grado undécimo se obtuvieron los siguientes resultados:

Pregunta 1: Dadas las siguientes fracciones elige una y escriba la expresión decimal que le corresponde:

a) $\frac{20}{3}, \frac{20}{6}, \frac{20}{9}, \frac{20}{12}, \frac{20}{15}, \frac{20}{18}$

b) ¿Qué puedes concluir con el resultado obtenido?

Para esta pregunta se tiene que él $33,\underline{333}\,\%$ de los estudiantes reconocen que una fracción como $\frac{20}{3}$ puede tener infinitas cifras decimales periódicos, los demás tienen algunas nociones o no lo realizan.

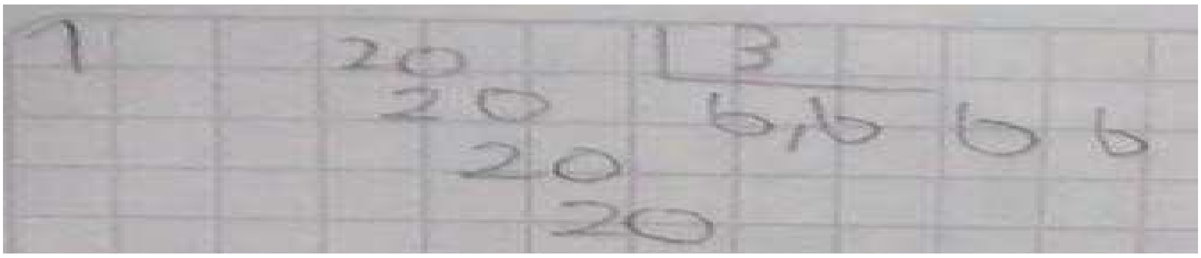


Ilustración No. 4 Respuesta pregunta 1, estudiante 3.

Fuente: Producción propia

- **Estudiante 3**. En este caso el estudiante no termina el procedimiento de la división, él no indica con puntos suspensivos que continúa el proceso, ni tampoco colocando un guión encima del cociente para determinar qué es un número decimal con infinitas cifras decimales, el alumno determina por su propia cuenta que el procedimiento termina en ese momento.

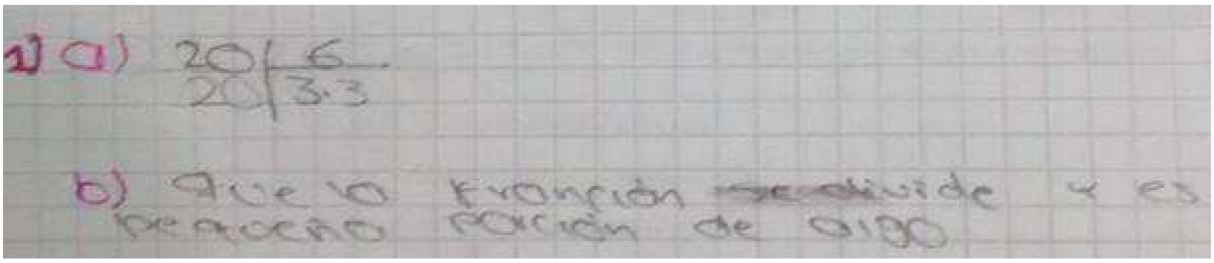


Ilustración No. 5 Respuesta pregunta 1, estudiante 12.

Fuente: Producción propia

- **Estudiante 12**. Como se ve en la ilustración 3, el alumno inicia el proceso y da por terminado el algoritmo, no precisa si la división continúa. En este caso el alumno tiene en su concepción que el procedimiento termina en ese momento. En la respuesta para el literal b) el estudiante reconoce que la fracción se divide y que se vuelve pequeña.

Es de aclarar que:

> *A las categorías de respuestas detectadas anteriormente a partir de problemas de divisibilidad infinita (Fischbein, Tirosh y Hess, 1979; Núñez, 1994: el proceso termina; el proceso es infinito; el proceso termina pero en la teoría no; y los que no contestan), nosotras agregamos una categoría formada por las respuestas de un grupo de alumnos que, para fundamentarlas, no consideran el proceso de división infinito implicado en la cuestión: «el proceso de división finito o infinito no determina la respuesta del alumno.* (Dall'Alba, S. G. - s.f. p. 88)

Pregunta 2: ¿Qué otra representación puede darse al número $0,9\underline{99}$? En esta pregunta $43,\underline{333}\,\%$ de los estudiantes lo relacionan con el número 1, el $21,\underline{212}\,\%$ lo relaciona con la expresión $\frac{9}{9}$, el $16,\underline{666}\,\%$ lo relaciona con $0,999999999$, el resto de estudiantes con expresiones diferentes.

Pregunta 3: Dados dos segmentos quien tiene más, igual o menos puntos. El $26,\underline{666}\,\%$ de los estudiantes reconoce que estos segmentos tienen igual cantidad de puntos, el $56,\underline{666}\,\%$ de la población afirma que el segmento $\overline{CD}$ tiene más puntos y el $16,\underline{666}\,\%$ responde que el segmento $\overline{AB}$ tiene más puntos.

Pregunta 4: un padre dejó en su testamento la siguiente condición para dar a cada uno de sus hijos la herencia que le corresponderá. "Hijos míos a cada uno de vosotros os tocará una porción de la herencia de la siguiente manera: Al mayor de todos la mitad de la parcela, al siguiente en edad la mitad de lo que quedó, al siguiente la mitad de lo que quedó y así sucesivamente. Sabiendo que el padre tenía una cantidad muy grande de hijos. ¿Cuál será el área total de la parcela que deja en herencia el padre? ¿Qué porción de terreno le corresponde al sexto hijo? Solo el $3,\underline{333}\,\%$ de la población que realizó la tarea, en este caso solo un estudiante comprendió la división sucesiva de un segmento, se observa que hay un obstáculo epistemológico sobre el concepto de infinito y que para temas más complejos tendrán la dificultad de comprenderlos.

> *Por su parte, la noción de infinito como totalidad fue ampliamente desarrollada en la geometría al dividir un segmento de recta en un número infinito de puntos y el infinito actual de los infinitesimales sirvió de soporte heurístico para la posterior formalización del cálculo infinitesimal.* (Ortiz - 1994 -, pp. 61 -62).

- ∞ Estudiante 16. No calcula el área de un cuadrado, lo confunde con el procedimiento para hallar el perímetro y tampoco realiza la división para calcular el área que le corresponde al sexto hijo.

Ilustración No. 6 Respuesta pregunta 4, estudiante 16.

Fuente: Producción propia

Pregunta 5: realizar la gráfica de la siguiente función $y = \frac{1}{x}$, complete la siguiente tabla de valores. En este caso el *30%* de los estudiantes respondió acertadamente, en las demás respuestas los estudiantes no reconocen el proceso de crecimiento o decrecimiento de una función.

Pregunta 6: ¿Cuántos números pares e impares hay en los números naturales? En esta pregunta el $76,\underline{666}\ \%$ de los estudiantes reconocen que en los números naturales pares e impares se tiene una cantidad infinita de números, pero no reconocen que tienen la misma cantidad de elementos.

Pregunta 7: ¿Qué entiende usted por infinito? En las preguntas anteriores ¿En cuáles de ellas se ha visto reflejado el concepto de infinito? Los estudiantes solo tienen el concepto de infinito potencial “*Es decir, durante más de diez años en el aprendizaje de las matemáticas de un individuo, el infinito desempeña un papel exclusivamente simbólico o bien sólo como sinónimo de muy grande o muy pequeño”.(Belmonte, J. L., & Sierra, M. -2011-, p.141)*

- **Estudiante 22.** En este caso el estudiante solo reconoce el infinito potencial. En algunos sujetos más jóvenes aparece clara la idea de “infinito” como sinónimo de “número grandísimo” (D`amore & otros - 2006- , p. 14)

Ilustración No. 7 Respuesta pregunta 7, estudiante 22.

Fuente: Producción propia

6.5.2.3.Conclusiones del análisis cognitivo.

De los resultados obtenidos a la prueba realizada a 30 estudiantes, se tiene que estos reconocen el infinito potencial, en la mayoría de los casos como una secuencia que nunca termina, tanto en números como en segmentos. Tienen la noción intuitiva del concepto de infinito que han venido repitiendo a lo largo de la vida escolar, es necesario trabajar una secuencia didáctica mediada por las TIC, en este caso con el software *GeoGebra*, para que los estudiantes comprendan el concepto de infinito actual y que este sea un base fundamental para iniciar los conceptos de cálculo infinitesimal.

Debido a los resultados obtenidos en la fase preliminar, esta investigación busca que los estudiantes construyan este objeto matemático por medio de representaciones numéricas, gráficas y mediadas por las TIC, “por medio de un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de situaciones didácticas” (De Faria -2006-, p.2)

6.5.3. Análisis didáctico.

En este apartado de la ingeniería didáctica se realizó una prueba a tres docentes para determinar el grado de enseñanza del concepto de infinito en estudiantes de básica secundaria y media (Anexo B). Este proceso se llevó a cabo en dos momentos, una prueba que realizaron tanto docentes como estudiantes y una entrevista a docente.

> *Teniendo presente que la complejidad de estos conceptos hace que los docentes abandonen su enseñanza en muchos casos, o en otros, se dediquen únicamente a una explicación teórica, que el alumno no comprende; y una enumeración de propiedades y características. Este tipo de enseñanza impide luego la correcta comprensión de otros conceptos como la idea de límite, variación, derivada, función continua, y otros concernientes al campo del Análisis Matemático, que se basan en los anteriores. (Lestón, P., & Aires, B. -2009-, p. 35)*

Esta prueba arrojó la siguiente información:

- **Pregunta 1**. Docente 1. Eligió la fracción $\frac{20}{6}$ donde realizó la división y su resultado es $3,\underline{3}$ el docente reconoce que tiene una cifra decimal infinita y adiciona que es periódico puro aduciendo que el 3 se repite infinitas veces en las cifras decimales, el docente reconoce este proceso y lo resuelve de forma correcta.
- **Pregunta 1**. Docente 2. Eligió la fracción $\frac{20}{3}$ da como resultado $6,\underline{6}$ y dice que es periódico puro, reconociendo el proceso de la división.
- **Pregunta 1.** Docente 3. Trabaja con la fracción $\frac{20}{3}$ y presenta el resultado como $6,6666$ y no especifica si es un número periódico con el guión encima o colocando puntos suspensivos, lo que realiza es determinar que es un número decimal periódico puro.
- **Pregunta 2**. Docente 1. Al realizar un procedimiento matemático determina que es 1, reconoce la aproximación de un número en un contexto determinado.

- **Pregunta 2**. Docente 2. Solo da el resultado de 1.
- **Pregunta 2.** Docente 3. Después de un procedimiento matemático de cómo resultado lo mismo que se le preguntó, en este caso no reconoce que el número se puede aproximar a uno.
- **Pregunta 3.** Docente 1. Responde que los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$ son proporcionales, acá se tiene que el docente no reconoce que los segmento tienen la misma cantidad de puntos, evidenciando un error por parte del docente.
- **Pregunta 3.** Docente 2. Que tienen igual número de puntos. Tiene presente la correspondencia que se hace, y en este caso entre dos segmentos.
- **Pregunta 3**. Docente 3. Reconoce que los segmentos tienen la misma cantidad de puntos, evidenciando que realiza la correspondencia entre conjuntos, en este caso con segmentos.
- **Pregunta 4**. Docente 1. El área de la parcela es $1Km^2$. Para el literal b de esta misma pregunta el docente no determina correctamente la porción de tierra que le corresponde al sexto hijo, responde $H6 = \frac{x}{6}$ siendo x el área del terreno $H6 = \frac{1}{6} \Rightarrow 0{,}1\overline{6}$, evidenciando un mal procedimiento al repartir la porción del terreno.
- **Pregunta 4**. Docente 2. El área de la parcela es $1Km^2$. Para el literal b responde $\frac{1}{64}$.
- **Pregunta 4.** Docente 3. El área de la parcela la realiza adecuadamente, lo mismo que el porcentaje que le corresponde al sexto hijo.
- **Pregunta 5.** Docente 1. La gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es una hipérbola. La función es simétrica respecto al origen de coordenadas, es decreciente proporcionalidad inversa.
- **Pregunta 5**. Docente 2. Mientras más pequeña sea x la grande es la gráfica.
- **Pregunta 5**. Docente 3. No realiza la gráfica de la función, reconoce la aproximación que sucede cuando un valor se aproxima a una determinada función, tanto positiva como negativa.
- **Pregunta 6.** Docente 1. En el conjunto de los números naturales, hay infinitos números pares e impares.
- **Pregunta 6.** Docente 2. Infinitos.
- **Pregunta 6.** Docente 3. Reconoce que se tienen infinitos números pares e impares, pero no realiza una comparación o correspondencia entre estos dos conjuntos numéricos.
- **Pregunta 7**. Docente 1. Infinito es que algo no termina. Al literal b respondió en todo el

taller se vio reflejado el concepto de ∞.

- **Pregunta 7.** Docente 2. Que no tiene fin. Al literal b respondió en el ejercicio 6.
- **Pregunta 7**. Docente 3. El docente reconoce solo el infinito potencial en su definición, mostrando que tienen el infinito asociado a elementos que crecen sin parar.

Al realizar el análisis a esta prueba desarrollada por docentes se tiene que:

- En la pregunta 1 el docente tres no simboliza el procedimiento realizado con puntos suspensivos o colocando encima de las cifras decimales el guión que determina que las cifras continúan indefinidamente.
- En la pregunta 2 no relaciona el número con la aproximación que se le puede realizar este, mostrando una falencia en la resolución de este tipo de ejercicios.
- En la pregunta 3 el docente 1 no tiene claro que los dos segmentos tienen la misma cantidad de puntos, esto se evidencia también en los estudiantes generando un problema de enseñanza aprendizaje, no realiza la correspondencia entre dos conjuntos en este caso dos segmentos.
- En la pregunta 4 se observa que el docente 1 no realiza las divisiones sucesivas de un segmento sino que divide el área del terreno entre los 6 hijos, dando a cada hijo una parte igual de este, cosa que no es, ya que a este hijo le toca una porción más pequeña, mostrando una falencia en el procedimiento.
- En la pregunta 5 ninguno de los dos primeros docentes responden concretamente la pregunta, realizan una descripción de la gráfica pero no del comportamiento de la variable "x", ya el docente 3 reconoce los cambios que le suceden a dicha variable en los extremos, mostrando un manejo del tema.
- Con la pregunta 6 los docentes reconocen la infinidad de los conjuntos y subconjunto, pero no realizan una correspondencia entre dichos conjuntos.
- En la pregunta 7 los docentes como los estudiantes solo definen el infinito potencial, palabras textuales de un docente "es que algo no termina" o "que no tiene fin", "algo que no tiene fin" como se ve los docentes tienen la noción intuitiva del infinito potencial, esta es la forma de enseñar el concepto de infinito de forma metafórica "muy grande" donde esto podría generar una mala formación del concepto matemático. La ambigüedad del

lenguaje hace que el concepto de infinito sea vago e intuitivo y esto se parece muy poco a la idea matemática del infinito como unidad total.

Definición de infinito D1

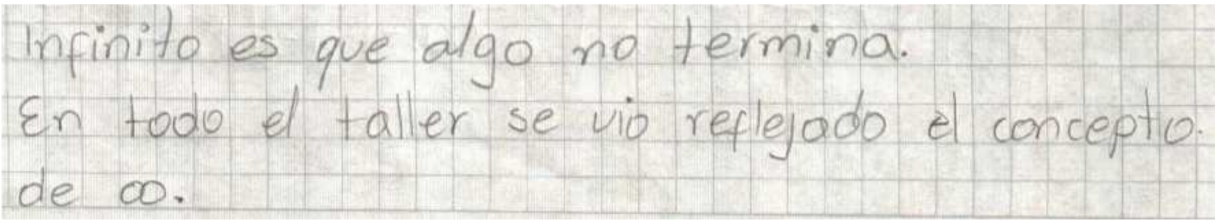

Infinito es que algo no termina.
En todo el taller se vio reflejado el concepto de ∞.

Ilustración No. 8 Respuesta pregunta 7, docente 1.

Fuente: Producción propia

Definición de infinito D2

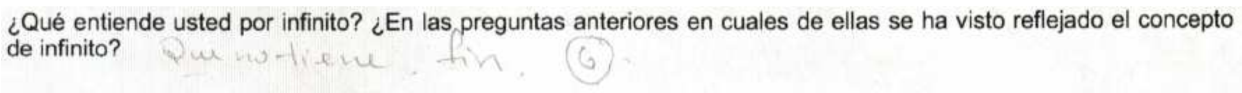

¿Qué entiende usted por infinito? ¿En las preguntas anteriores en cuales de ellas se ha visto reflejado el concepto de infinito? Que no tiene fin. 6.

Ilustración No. 9 Respuesta pregunta 7, docente 2.

Fuente: Producción propia

Definición de infinito D3

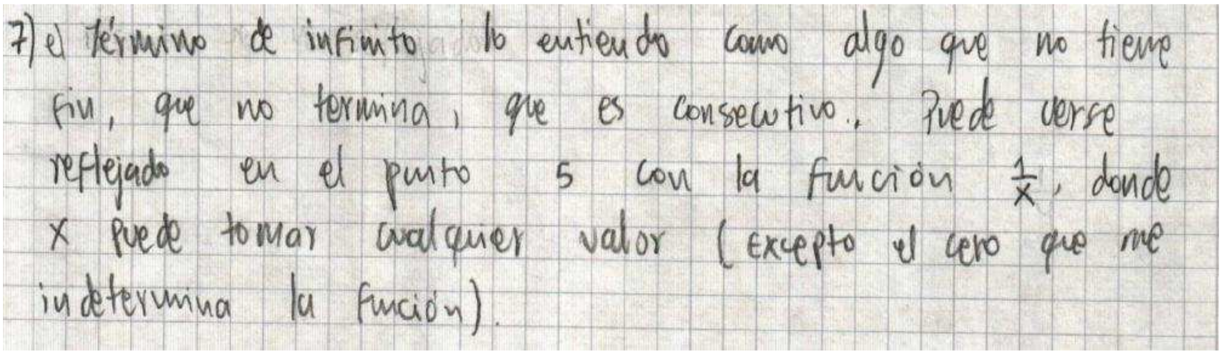

7) el término de infinito lo entiendo como algo que no tiene fin, que no termina, que es consecutivo. Puede verse reflejado en el punto 5 con la función $\frac{1}{x}$, donde x puede tomar cualquier valor (excepto el cero que me indetermina la función).

Ilustración No. 10 Respuesta pregunta 7, estudiante 3.

Fuente: Producción propia

En una entrevista realizada al docente tres sobre algunas cuestiones de la enseñanza del concepto de infinito se le pregunta:

- ¿Cuándo trabaja con el tema de conjuntos como define este y como lo clasifica?

  R/ El tema de conjuntos sería como una agrupación de elementos iguales, podríamos decirlo así, ¿Cómo se clasifican? pues lo clasificamos como conjuntos universales, unitarios y conjuntos vacíos.

- ¿Cuándo trabaja con funciones que presentan indeterminaciones, cómo maneja este concepto con los estudiantes?

  R/ Bueno las indeterminaciones las manejamos como aquellas funciones en las cuales el denominador se me hace cero, presentando un vacío o un hueco, por decirlo así y al estudiante se le dice que se tome valores diferentes al cero entonces por la derecha y por la izquierda e para poder representar bien la gráfica.

- ¿Si un estudiante en clase le pregunta quién de estos conjuntos tiene más elementos: Toda la arena de las playas del planeta tierra, las estrellas del universo o las divisiones sucesivas entre 2 que se pueden hacer a un segmento?

  R/ Bueno entonces en esa pregunta le diría lo que es la arena en la playa y las estrellas de la galaxia se podrían trabajar de la misma manera porque son elementos infinitos, cuando hablamos de una división llega el momento en que se parte tanto que ya va a desaparecer o sea que va tener como un fin.

6.5.3.1. Conclusiones análisis didáctico:

El docente continúa con la idea intuitiva de infinito potencial, no reconoce que hay números tan grandes que pueden confundirse con un infinito potencial, pero que siguen siendo un número, tampoco tiene la noción, por ejemplo un docente percibe que hay más elementos en toda la arena de la playa que en las divisiones sucesivas que se le pueden realizar a un segmento. Esto muestra que se tienen una falencia en la enseñanza del concepto de infinito por parte de los docentes.

6.6.FASE 2: Fase de concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas

Con el análisis a priori de una prueba que previamente se le realizó a 27 estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario del Municipio de Belén de Umbría (Risaralda) (Anexo C), se desea conocer qué tanto comprenden los estudiantes el concepto de infinito tanto potencial como actual, esto con una situación a-didáctica, donde el estudiante debe reconocer en diferentes contextos o actividades el infinito potencial como actual.

La actividad propuesta deseaba conocer las dificultades o destrezas que presentan los educandos con el concepto de infinito, para Moreno & Waldegg (1991)

> *Uno de los conflictos a los que se enfrenta un estudiante cuando comienza a tratar con conjuntos infinitos es aceptar que el todo puede ser igual a una de sus partes. En la raíz del conflicto se haya la experiencia cotidiana en la que evidentemente el todo siempre es mayor que cualquiera de sus partes. Esta experiencia determinará el esquema conceptual que genera el individuo.(Belmonte, J. L., & Sierra, M. -2011, p. 154)*

Las siguientes son las categorías para la actividad propuesta que se aplicó a los 27 estudiantes de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario:

- ∞ Comparación y equivalencia de conjuntos continuos.
- ∞ Divisibilidad indefinida.
- ∞ Conceptualización del concepto de infinito.
- ∞ Geometría.

La tarea buscaba determinar en qué medida los estudiantes pueden comparar dos conjuntos infinitos, la divisibilidad indefinida para un segmento determinado, la iteración entre números decimales y naturales. Del punto 1 de la actividad se tiene que:

1. Imagina el siguiente juego entre dos personas. Cada una dice, cuando es su turno, un número. Gana aquél que diga el número más grande.

   a) ¿Preferirías ser tú el que comienza el juego?, ¿Por qué?

Se tiene que 10 estudiantes respondieron de forma incorrecta ya que aducen de empezar primero y sabiendo que los números son infinitos se perdería dicho juego, ya que el contendor sabrá qué número decir, a esta misma pregunta 14 estudiantes respondieron de forma correcta, suponiendo que conocen la infinitud de los números y 4 estudiantes no respondieron la tarea.

   b) ¿Cuánto durará el juego?, ¿Por qué?

Solo el $7,\underline{407}\%$ de la muestra reconoce que el juego es demasiado corto ya que solo durarán dos turnos y ganara el segundo, además el $66,\underline{6}\ \%$ de los estudiantes dan tiempos para realizar el juego superiores a 4 minutos. Con esta pregunta se necesitaba que los estudiantes reconozcan la infinitud de los números naturales que siempre que se diga un número siempre habrá uno mayor.

2. Considera un número natural cualquiera; lo divides entre dos; el resultado lo vuelves a dividir entre dos; y de nuevo lo divides entre dos y así sucesivamente. ¿Qué resultado se

obtendrá al final?, ¿Por qué?

Ahora solo el $14,\underline{814}\,\%$ de la muestra encuestada aproxima el valor a cero. En esta pregunta está presente el mismo concepto matemático, el infinito actual, y los problemas son de divisibilidad infinita.

El $48,\underline{148}\,\%$ no reconoce que la divisibilidad infinita de un segmento definido tiende a cero. El $18,\underline{518}\,\%$ de los estudiantes al realizar esta divisibilidad infinita tiene alguna noción sobre el proceso que se debe hacer.

3. ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que contendrá más números? $\{1,2,3,4,\ldots\}$ *ó* $\{1,3,5,7,\ldots\}$? ¿Por qué?

Esta pregunta determina el conocimiento de conjunto infinitos actual donde se pone en correspondencia biunívoca entre los números naturales con los números impares en este caso ambos tendrán la misma cantidad de elementos, se evidencia que ningún estudiante reconoce esta noción y solo piensan en el infinito potencial.

4. Si tienes un conjunto de hilos Ilustración 9, donde la longitud de cada hilo es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto al otro, obtendrás un hilo más largo:
   ¿Cuánto medirá este nuevo hilo cuando hayas reunido todos los hilos?
   a) 2 Metros
   b) 3 Metros
   c) Infinito
   d) Una cantidad tan grande que no se puede medir.

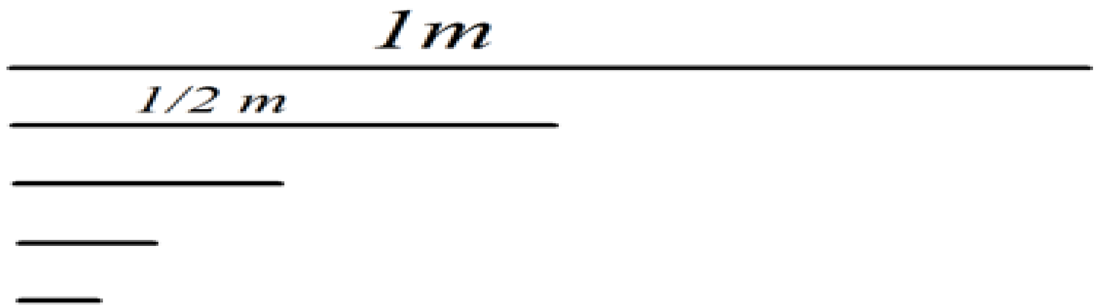


Ilustración No. 11 “ Hilos”

Fuente: Producción propia

Un $48,\underline{148}\ \%$ de los estudiantes de la muestra realizan el proceso de aproximación adecuado para dar la respuesta correcta, contrasta con un porcentaje igual de estudiantes que no reconocen la aproximación de segmentos a un determinado número.

5. Observa estas dos sucesiones de números:

$$\boldsymbol{A}: 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \ldots$$

$$\boldsymbol{B}: 4, \quad 8, \quad 12, \quad 16, \quad 20, \quad 24, \quad 28, \ldots$$

Que continúan indefinidamente. ¿Cuál de las siguientes respuestas es la correcta?

a) La ***A*** alcanzará el valor más grande.

b) La ***B*** alcanzará el valor más grande.

c) Las dos alcanzarán un valor tan grande como queramos.

d) Otra respuesta. Dila.

Se tiene que un $59,\underline{259}\ \%$ realiza el proceso de manera correcta y que un $37,\underline{037}\ \%$ tiene la noción de resolver bien el ejercicio propuesto.

6. ¿Existe algún número entre $2,\overline{9}\ y$ 3?

a) Si. Escribe alguno

b) No. ¿Por qué?

Los estudiantes no reconocen la igualdad entre $2,\overline{9}\ y\ 3$ en este punto ningún estudiante reconoce esta relación.

7. ¿Qué entendemos por infinito? Puedes dar la respuesta en una frase o en un dibujo

La gran mayoría de estudiantes solo reconocen el infinito potencial se tiene un $77,\underline{7}\ \%$ lo reconocen así y un $18,\underline{518}\ \%$ tienen un concepto cercano al infinito potencial.

Al realizar el análisis de los resultados de las pruebas que los estudiantes resolvieron se nota la clara evidencia de que los jóvenes en edad escolar entre los 15 y 17 años de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario solo reconocen el infinito potencial y solo cuando se tiene conjuntos numéricos como los naturales, pero desconocen qué los conjuntos numéricos, como los naturales y los números impares, tienen la misma cantidad de elementos y no realizan una biyección de elementos de ambos conjuntos.

Al final de la fase II se le aplica la siguiente entrevista a uno de los estudiantes que realizó el proceso de esta fase.

A las preguntas:

- ¿Qué puedes concluir cuando se comparan dos conjuntos como: los números naturales y los números impares?
  R/ Los naturales tienen mayor cantidad de números y los impares no.
- ¿Al realizar divisiones sucesivas entre dos a un segmento que sucede con este segmento?
  R/ Se divide en pequeñas partes.
- Al relacionar el segmento entre cero y uno con todas sus cifras decimales, con los números naturales ¿Quién tendrá más elementos?
  R/ Los números naturales.

- ∞ Al comparar conjuntos como: la arena de la playa, las estrellas del universo o las divisiones sucesivas que se le pueden hacer a un segmento, ¿Cuál cree que tiene más elementos?

  R/ Todas son infinitas.

Al realizar el respectivo análisis a las respuestas del estudiante se tiene que:

- ∞ En la primera pregunta se tiene que el estudiante tiene una noción intuitiva del concepto de infinito potencial muy arraigado, lo que nos indica que el estudiante debe mejorar la comprensión de este concepto.
- ∞ Para la segunda pregunta el estudiante reconoce que este proceso continúa, pero no identifica que tiene otro infinito diferente al que conoce.
- ∞ La pregunta tres, el estudiante desconoce totalmente el infinito actual.
- ∞ En la última pregunta el estudiante muestra que desconoce cuando un conjunto es finito o infinito, mostrando un sinónimo entre conjuntos muy grandes finitos y conjuntos infinitos.

Teniendo presente lo encontrado en el planteamiento de problema de esta investigación los estudiantes solo reconocen el infinito potencial tal y como lo muestran los textos escolares de matemáticas de los diferentes grados que reposan en la biblioteca da la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario (tabla 1), dando viabilidad para continuar con esta investigación y dejando una preocupación y es el contenido que le dan los textos escolares a la definición de concepto de infinito y no solamente la definición, además no se tiene una temática propuesta por estos textos para la comprensión de este concepto, el cual será trabajara en grado once en temas como: sucesiones, series, límites entre otros temas matemáticos.

6.7.FASE 3. Fase de experimentación.

Corresponde a la fase en la que se ejecutan los diseños y se recogen los datos que informan sobre los fenómenos identificados en el análisis *a priori.*

En la ejecución de la secuencia didáctica llevada a cabo en tres sesiones cada una con una duración de 4 horas semanales con el grado 10-3 de la modalidad académica de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario del municipio de Belén de Umbría (Anexo D) y donde estos resultados arrojan un avance importante en la comprensión del concepto de infinito mediado por las TIC, en el cual *"es primordial la motivación con el ordenador (Mot-ord) cuando el estudiante muestra un alto interés por los ordenadores y encuentra que el aprendizaje con ellos es agradable, cuando reconoce que el ordenador le permite más libertad para la experimentación de nuevas ideas"* (Galbraith & Haines, 2000).

A lo que Gómez-Chacón (2010) añaden que:

> *… el estudiante mostrará una motivación efectiva cuando se muestran dos categorías de uso del ordenador.*
>
> - *El valor para el usuario, que incluye el compromiso y el estímulo que conllevan actitudes tales como curiosidad e interés, la credibilidad que añade elementos de valor y relevancia; y el valor de la utilidad (reconocer el valor de la tarea antes de poner los medios para realizarla).*
> - *La expectativa de éxito en su desenvolvimiento técnico y en su satisfacción y efectividad operan como estructuras orientadoras de la acción. Esta expectativa de éxito está vinculada a las formas de comportamiento en el uso del ordenador*. (Gómez-Chacón, -2010-, p. 229)

Semana 1

Por su parte, Mamolo (2007):

… considera que el enfoque geométrico presenta la ventaja de proporcionar un contexto para investigar el infinito sin la necesidad de introducir representaciones o terminología simbólica poco familiar como ocurre con el enfoque de teoría de conjuntos. Según Tirosh y Tsamir (1996), cuando los conjuntos infinitos están representados en un contexto geométrico, tal como segmentos de diferentes longitudes o cuadrados de diferentes perímetros, los estudiantes reconocen más fácilmente la correspondencia uno a uno que cuando conjuntos semejantes se representan numéricamente. (pp. 229 -230)

Al realizar la situación didáctica "no es necesario que para cada saber al que apunte la enseñanza hay que pasar obligatoriamente primero por una situación de acción, luego por una situación de formulación y luego por una situación de validación. Aunque esto pueda ser apropiado en algunos casos no se trata de una regla general. Por un lado, si bien una situación de validación supone la formulación de una aserción, y la formulación de una aserción supone una acción interiorizada, eso no significa que haya que pasar anteriormente por fases a-didácticas de acción y de formulación".

- A la pregunta 1 de esta sesión los estudiantes ya reconocen que un segmento se puede subdividir en partes infinitas. En discusiones de los alumnos llegaron a la conclusión de que este proceso lo podían continuar y con la ayuda del software Geogebra los alumnos podían de una forma muy visual observar el cambio que le está ocurriendo al segmento.
- Pregunta 2. Esta pregunta basada en la paradoja de Zenón, pone a los alumnos en una situación de divisibilidad infinita la cual les produce una sensación de no terminar el sembrado.
- Pregunta 3. Ya los estudiantes tienen la noción de aproximación a cero, lo cual es un adelanto para la construcción del concepto de infinito actual, y permitirá tener la noción de infinito como un todo.
- Pregunta 4. En este caso los estudiantes reconocen que los conjuntos tienen la misma cantidad de elementos sin importar la convicción que tienen los estudiantes sobre este tipo de conjuntos.
- Pregunta 5. Los estudiantes ya realizan biyección de dos conjuntos numéricos y determinan que los conjuntos tienen la misma cantidad de elementos sin importar que uno

de los conjuntos sea un subconjunto del otro.

- Pregunta 6. De nuevo los estudiantes realizan la comparación de dos conjuntos en este caso otra biyección y determinan que los conjuntos poseen la misma cantidad de elementos, dejando a un lado el obstáculo de cantidades más grandes tienen más elementos.
- Pregunta 7. Los jóvenes reconocen que entre estos dos números se tiene una cantidad infinita de números y dan ejemplos de estos, la ayuda de Geogebra les brinda la posibilidad de encontrar estos números y dar una respuesta coherente al lo que se les está preguntando.
- Pregunta 8. En este caso los estudiantes respondieron satisfactoriamente, reconociendo la aproximación que se realiza. Ellos al realizar el debate sobre este resultado deciden que 4 es la respuesta correcta, a dar cada uno sus puntos de vista.
- Pregunta 9. En este ejercicio geométrico los alumnos reconocen que es un proceso infinito y mediado por el software Geogebra pueden realizar las iteraciones necesarias para hacer sus propias conclusiones y dar respuesta a la pregunta 9.
- Pregunta 10. Antes de iniciar el ejercicio algunos estudiantes se atrevieron a afirmar que el proceso se repetiría infinitamente, luego de realizar entre ellos este proceso y verificar que no es infinito, los alumnos deciden dar respuesta y decir que no es infinito este proceso.
- Pregunta 11. En esta pregunta reconocen que los números tienen un sucesivo que siempre será el mayor, y saben que es mejor ser el segundo en el juego para así ganar.

En esta sesión los estudiantes en su mayoría ya reconocen aproximaciones a un número determinado, expresan nociones de infinito potencial y actual, tienen presente que las subdivisiones realizadas a un segmento siempre se acercan a un número o que este proceso no termina. Además de la utilización de figuras geométricas el software Geogebra es una ayuda indispensable en el reconocimiento de estos conceptos, la utilización de estos dos elementos en la comprensión del concepto de infinito ha dado un gran resultado en esta investigación.

Semana 2

- ∞ Pregunta 1. En este caso los estudiantes en su gran mayoría todavía confunden conjuntos muy grandes con conjuntos infinitos.
- ∞ Pregunta 2. Los alumnos reconocen el límite de la función cuando la variable “x” se aproxima a cero, los estudiantes se apoyan en el software Geogebra para ver el recorrido de la gráfica y así determinar que los resultados aumentan tanto por la izquierda como por la derecha.
- ∞ Pregunta 3. En este caso los estudiantes con la ayuda de Geogebra ya determinan que la gráfica no tendrá un punto más alto y que seguirá aumentado indefinidamente.
- ∞ Pregunta 4. Utilizando la representación gráfica e involucrada con Geogebra los alumnos reconocen que el infinito se puede representar en un punto, en este caso el norte que representa el punto (0,1).

Los estudiantes tienen más nociones sobre el concepto de infinito, en los ejercicios propuestos relacionan estos con una fundamentación más fuerte del concepto, continúan mejorando en la noción de límite y la aproximación de un número, en el ejercicio de la circunferencia, los estudiantes tienen presente que el infinito se puede llevar a un valor determinado, pueden jugar con este y palpar el proceso que se realiza. Se evidencia en esta etapa de la investigación que el paradigma del infinito potencial no está presente.

Semana 3

- ∞ Pregunta 1. Los estudiantes al determinar el dominio y el rango de las funciones están reconociendo que estas tienen procesos diferentes y que dependiendo de la gráfica computacional su comportamiento es diferente.
- ∞ Pregunta 2. En esta sesión los estudiantes realizaron un trabajo acertado en la concepción y en su gran mayoría reconocen el concepto de infinito, lo más importante lo representan y definen de dos formas diferentes, ya tienen la noción intuitiva de este concepto.

Al terminar la fase III de esta investigación, se realizó otra entrevista a un estudiante para determinar en qué medida está comprendiendo el concepto de infinito, el cual se tiene como objetivo en este proyecto de grado. Preguntas:

- ¿Qué puede concluir cuando se comparan dos conjuntos como: los números naturales y los números impares?
  R/ Que los dos tienen la misma cantidad de números.
- ¿Al realizar divisiones sucesivas entre dos a un segmento que sucede con este segmento?
  R/ Que el segmento se va acercando a un número determinado.
- Al relacionar el segmento entre cero y uno con todas sus cifras decimales, con los números naturales ¿Quién tendrá más elementos?
  R/ El segmento de cero a uno con todas sus cifras decimales.
- Al comparar conjuntos como: la arena de la playa, las estrellas del universo o las divisiones sucesivas que se le pueden hacer a un segmento, ¿Cuál cree que tiene más elementos?
  R/ Las divisiones que se le pueden hacer a un segmento.

Ya el joven presenta cambios en la concepción del concepto de infinito desde que inició la fase II pasando por la fase III, demostrando que no solo el infinito es en potencia sino también en acto.

El método utilizado para las categorías utilizadas en este proyecto fue el análisis de los resultados en las fases II y III, mostrando los avances obtenidos en la fase III por parte de cada uno de los estudiantes que presentaron las secuencias utilizadas en esta investigación. En este análisis se utilizó el siguiente cuadro para la fase II.

Tabla No 2 “Categorías para fase II”

Comparación y equivalencia de conjuntos	Divisibilidad indefinida	Conceptualización del concepto de infinito	Geometría

Pregunta 1 y 2	Pregunta 4 y 5	Pregunta 6 y 7	Pregunta 3 y 4

Fuente: producción propia

Y el siguiente cuadro se utilizó para la fase III.

Tabla No 3 “Categorías secuencia didáctica”

Comparación y equivalencia de conjuntos	Divisibilidad indefinida	Conceptualización del concepto de infinito	Geometría
Pregunta 4, 5, 6 y 11	Pregunta 1, 2, 3, 8 y 9	Pregunta 7	Pregunta 1, 2, 3, 8 y 9
Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 4	Pregunta 2, 3 y 4
	Pregunta 2	Pregunta 3 y 4	Pregunta 1

Fuente: producción propia

6.8.FASE 4. Análisis a priori y análisis a posteriori.

Se basa en el conjunto de datos recogidos en la experimentación. El análisis se fundamenta en un *análisis de contenido* de los datos obtenidos en la implementación, para la confrontación con el análisis *a priori*.

Al reconocer en la fase 2 las categorías a trabajar se realiza el siguiente análisis de los resultados tanto a priori como a posteriori.

En la tabla No xxx. se establece una correspondencia de preguntas que tiene la misma categoría.

Tabla No 4. Análisis a priori y a posteriori	
Fase 2	Fase 3
Pregunta 1	Pregunta 11
E1	E1
El estudiante responde que decide comenzar el juego, de esta manera no reconoce la infinidad del conjunto de los números naturales.	En esta fase reconoce que al ser el segundo en el juego será el ganador de este.
No respondió a la pregunta dejando dudas sobre si realmente no tiene alguna noción de la infinitud de los números naturales.	Tiene presente que son dos turnos los que se van a jugar.
E15	E15
En este caso decide empezar el juego de primero, lo cual para este lo llevará a perder el juego.	Ya tiene presente que al ser el segundo en el juego tendrá la opción de dar el número más grande.
El estudiante dice que puede durar unos 4 minutos el juego.	Es consciente de que el juego solo dura dos turnos, reconociendo la infinidad de los números naturales.

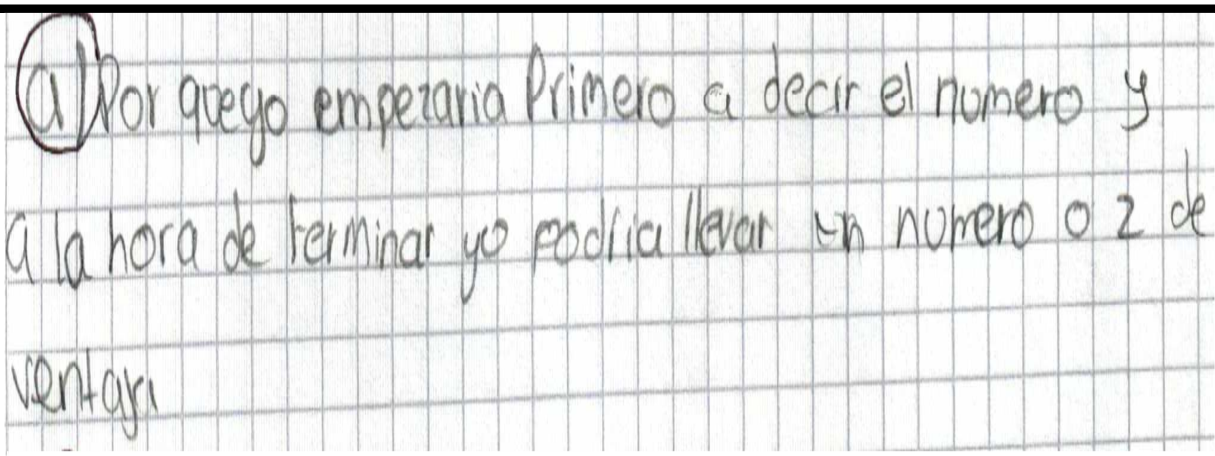

a) Por que yo empezaria Primero a decir el numero y
a la hora de terminar yo podria llevar un numero o 2 de
ventaja

Ilustración No. 12 Respuesta pregunta 1, estudiante 25.
Fuente: Producción propia

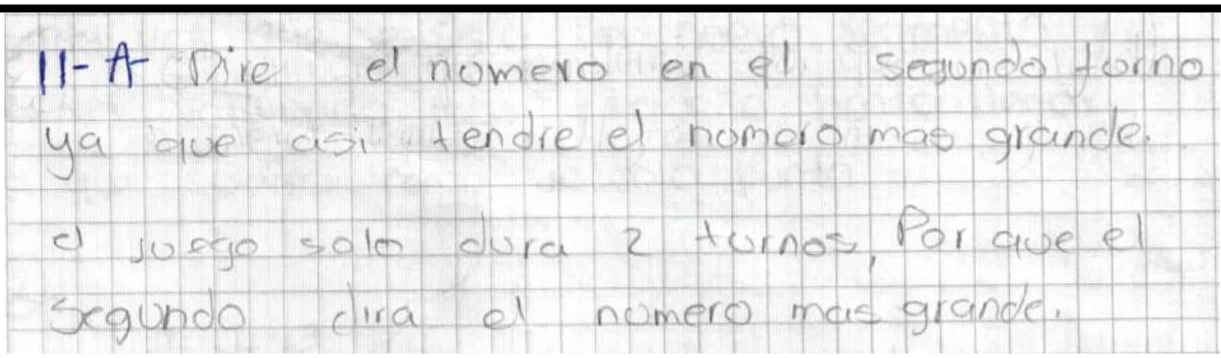

11- A Dire el numero en el segundo turno
ya que asi tendre el numero mas grande.
el juego solo dura 2 turnos, Por que el
segundo dira el numero mas grande.

Ilustración No. 13 Respuesta pregunta 11, estudiante 25.
Fuente: Producción propia

Pregunta 2	Pregunta 1 y 3
E2	E2
El estudiante realiza una división, de un segmento de 3 unidades, pero no continua el proceso.	En esta pregunta asociada a la paradoja de Zenón, el estudiante reconoce que el procedimiento del agricultor 1 es el primero en terminar.

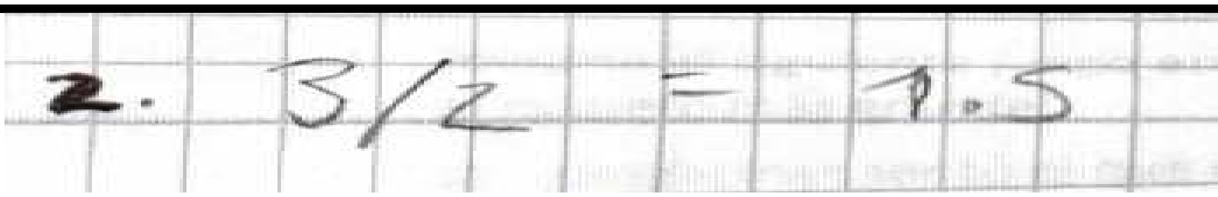


Ilustración No. 14 Respuesta pregunta 2, estudiante 5.

Fuente: Producción propia

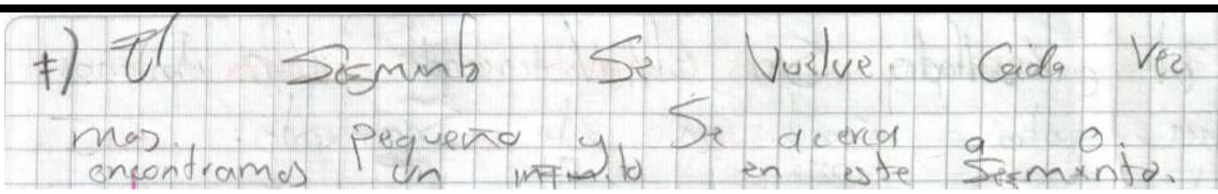


Ilustración No. 15 Respuesta pregunta 1, estudiante 5.

Fuente: Producción propia

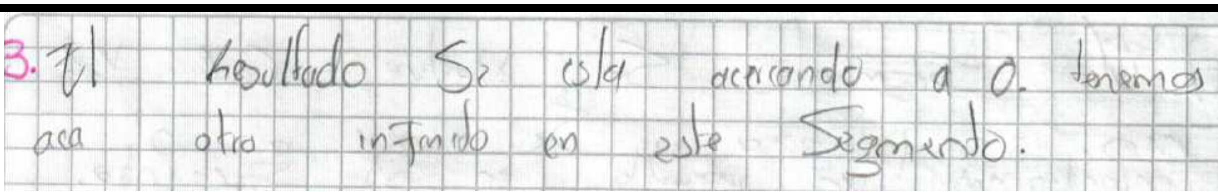


Ilustración No. 16 Respuesta pregunta 3, estudiante 5.

Fuente: Producción propia

E14	E14
Se evidencia la noción del concepto de infinito y la aproximación a un determinado número.	Para esta pregunta el estudiante tiene la noción de infinito más clara.
Pregunta 3	Pregunta 6 semana 1 y pregunta 1 semana 2
E3	E3
Reconoce que un subconjunto tiene los mismos elementos que el conjunto,	Tiene la noción de biyección entre dos conjuntos y determina que poseen la misma

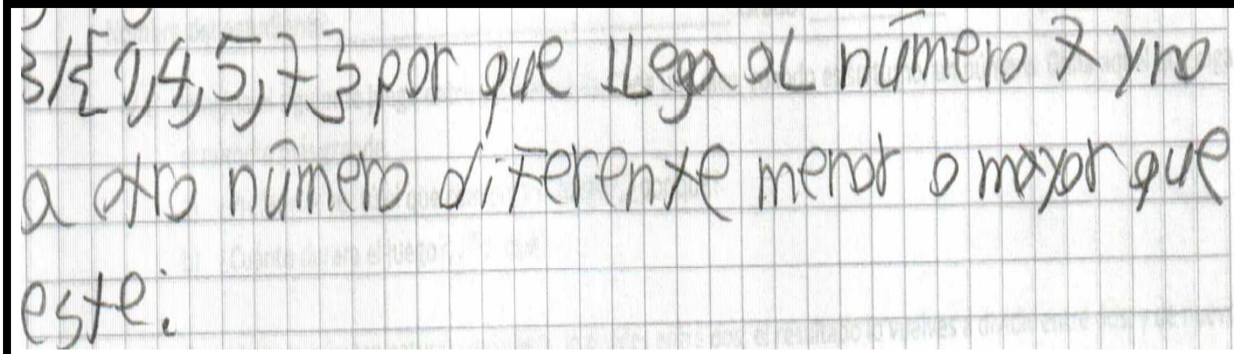
<table>
<tr><td></td><td>cardinalidad.</td></tr>
<tr><td>E13</td><td>E13</td></tr>
<tr><td>Responde que el conjunto de los números impares posee más elementos que el conjunto de los números naturales, presenta un obstáculo a la hora de realizar biyecciones entre conjuntos.</td><td>En esta pregunta reconoce que los conjuntos poseen la misma cantidad de elementos, presentando un avance significativo en la comprensión del concepto de infinito.</td></tr>
<tr><td colspan="2">

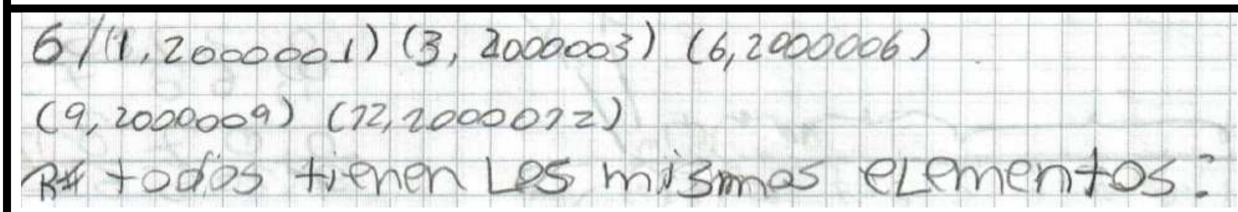
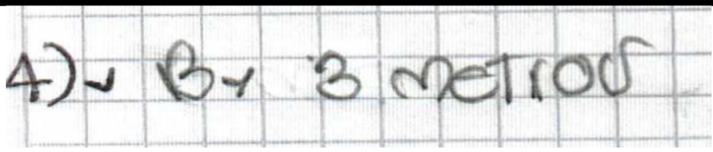
Ilustración No. 17 Respuesta pregunta 3, estudiante 1.
Fuente: Producción propia</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Ilustración No. 18 Respuesta pregunta 6, estudiante 1.
Fuente: Producción propia</td></tr>
<tr><td>Pregunta 4</td><td>Pregunta 2 y 9 semana 1, pregunta 2 y 3 semana 2, pregunta 2 semana 3</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>E4</td></tr>
<tr><td>No reconoce la aproximación de un segmento</td><td>Reconoce que al aproximar este valor a cero la</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>al realizar divisiones sucesivas.</td><td>función aumenta indefinidamente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">

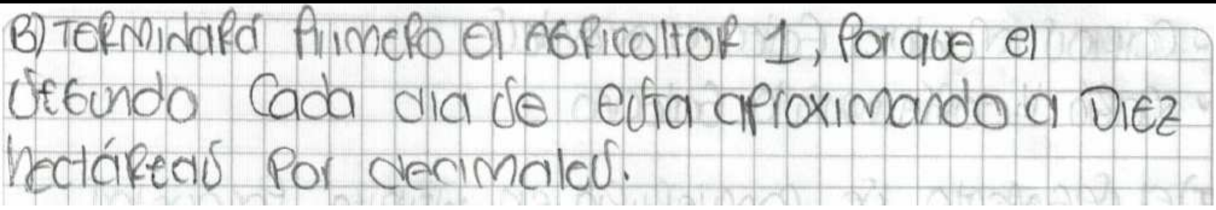


4)- B- 3 metros

Ilustración No. 19 Respuesta pregunta 4, estudiante 12.

Fuente: Producción propia

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

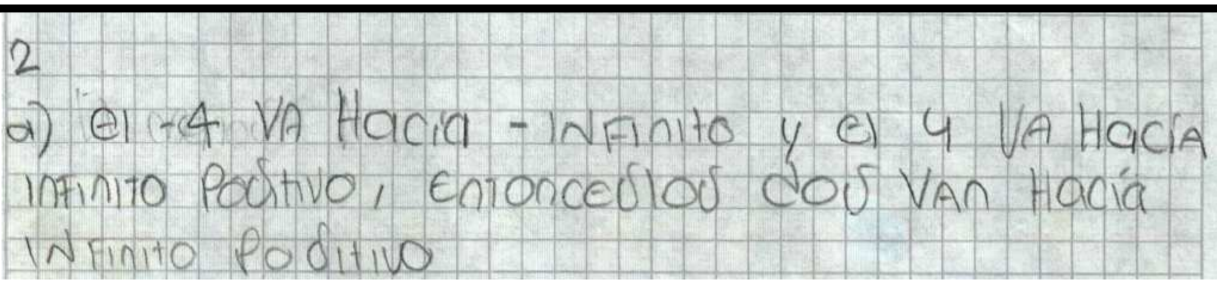


B) Terminará primero el agricoltor 1, porque el segundo cada dia se esta aproximando a diez hectáreas por decimales.

Ilustración No. 20 Respuesta pregunta 2, estudiante 12.

Fuente: Producción propia

</td></tr>
<tr><td colspan="2">



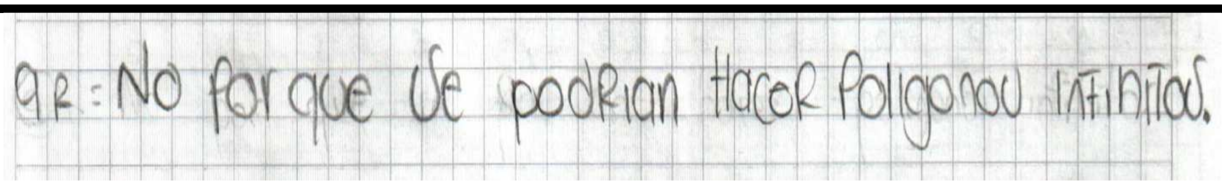
2

a) el -4 va hacia -infinito y el 4 va hacía infinito positivo, entonces los dos van hacía infinito positivo

Ilustración No. 21 Respuesta pregunta 2, estudiante 12.

Fuente: Producción propia

</td></tr>
<tr><td colspan="2">



9R: No porque se podrian hacer poligonos infinitos.

Ilustración No. 22 Respuesta pregunta 9, estudiante 12.

Fuente: Producción propia

</td></tr>
<tr><td>E12</td><td>E12</td></tr>
<tr><td>La respuesta es 3 metros donde el estudiante no</td><td>Reconocen en esta pregunta que cuando se</td></tr>
</table>

tiene la noción de aproximación a un determinado número.	acercan a un número este aumenta indefinidamente.
Pregunta 5	Pregunta 4, 5
E5	E5
El estudiante todavía tiene la intuición de que un subconjunto de los números naturales puede tener más elementos que el mismo conjunto de los números naturales.	En este caso reconoce que los dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos, ya están realizando una comparación entre un conjunto y un subconjunto de este.
E11	E11
Determina que los múltiplos de 4 tendrán más elementos que el conjunto de los números naturales.	En este caso ya el estudiante reconoce que al realizar una comparación uno a uno entre conjuntos numéricos tiene la misma cantidad de elementos.

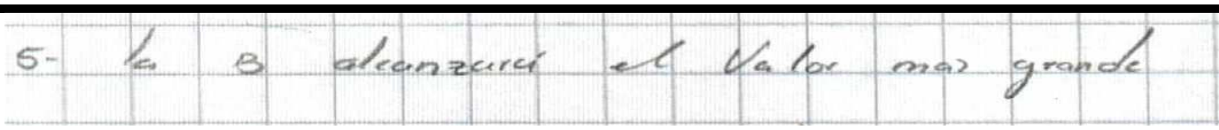
<table>
<tr><td colspan="2">


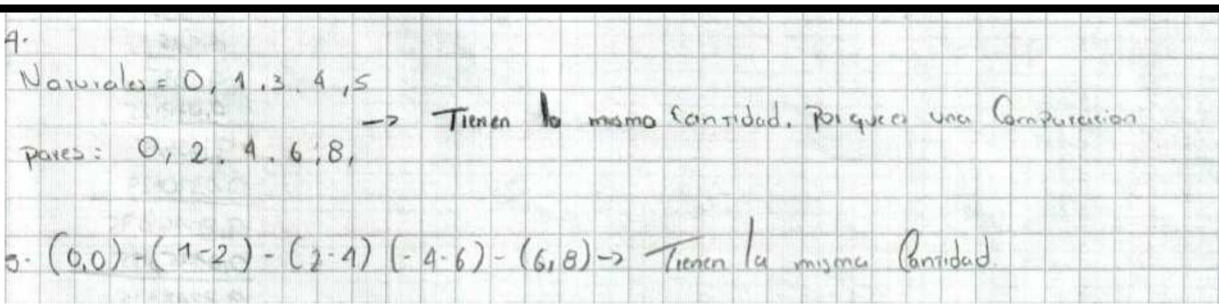
Ilustración No. 23 Respuesta pregunta 5, estudiante 13.
Fuente: Producción propia
</td></tr>
<tr><td colspan="2">


Ilustración No. 24 Respuesta pregunta 4 y 5, estudiante 13.
Fuente: Producción propia
</td></tr>
<tr><td>Pregunta 6</td><td>Pregunta 7 semana 1, Pregunta 2 semana 2 y pregunta 2 semana 3</td></tr>
<tr><td>E6</td><td>E6</td></tr>
<tr><td>No reconoce la infinitud de los números decimales, responde que si existe algún número pero no lo representa en la respuesta.</td><td>Ya tiene la noción de infinito actual donde reconoce que entre dos números decimales existe una cantidad infinita de estos.</td></tr>
</table>

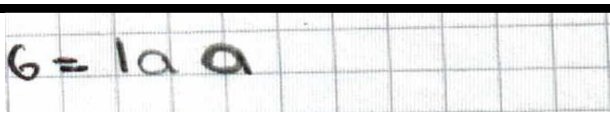
<table>
<tr><td colspan="2">

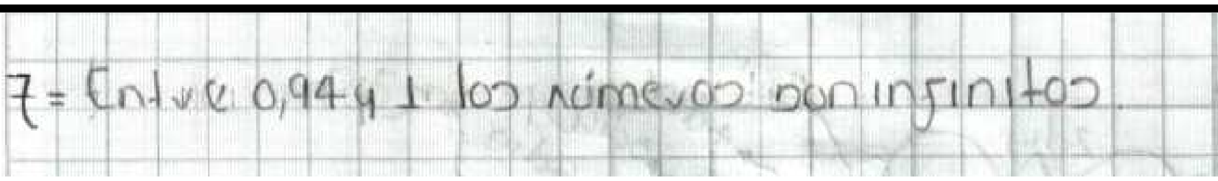
Ilustración No. 25 Respuesta pregunta 6, estudiante 2.
Fuente: Producción propia</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Ilustración No. 26 Respuesta pregunta 2, estudiante 2.
Fuente: Producción propia</td></tr>
<tr><td>E10</td><td>E10</td></tr>
<tr><td>Representa algunos números que no tienen ninguna secuencia con lo pedido en el ejercicio.</td><td>En la respuesta presenta una serie de números que cumplen con la condición pedida, se observa un avance significativo en la comprensión del concepto de infinito.</td></tr>
<tr><td>Pregunta 7</td><td>Pregunta 4 semana 3</td></tr>
<tr><td>E7</td><td>E7</td></tr>
<tr><td>La definición dada por el estudiante demuestra que solo reconoce el infinito potencial, mostrando que reconoce cuando algo aumenta indefinidamente, pero no reconoce el infinito actual.</td><td>La definición que muestra en esta etapa del proyecto, se observa un estudiante reconociendo un infinito en lo pequeño, y mostrando una comparación entre infinitos.</td></tr>
<tr><td>E9</td><td>E9</td></tr>
<tr><td>Se presenta la definición clásica de los libros de texto escolar para secundaria donde solo definen el infinito como algo que no tiene fin,</td><td>Al dar la definición escribe sobre varios tipos de infinito pero solo define el infinito potencial.</td></tr>
</table>

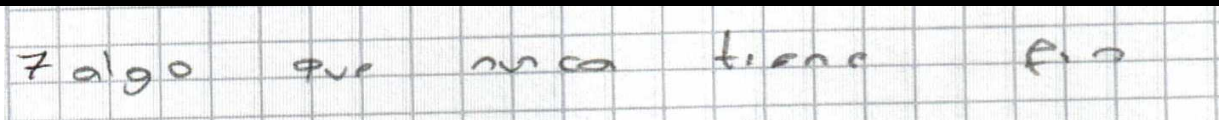
<table>
<tr><td>esta es la noción del estudiante para la definición de este concepto.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">
7 algo que nunca tiene fin

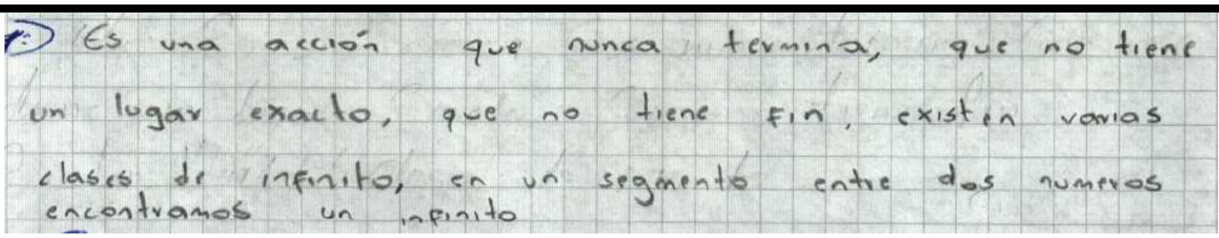
Ilustración No. 27 Respuesta pregunta 7, estudiante 29.
Fuente: Producción propia</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Es una acción que nunca termina, que no tiene un lugar exacto, que no tiene fin, existen varias clases de infinito, en un segmento entre dos numeros encontramos un infinito

Ilustración No. 28 Respuesta pregunta 4, estudiante 29.
Fuente: Producción propia</td></tr>
<tr><td>E8</td><td>E8</td></tr>
<tr><td>En este caso la definición a la que se refiere la da con una frase refiriéndose al amor.</td><td>Ahora da una definición aunque no muy técnica, ya tiene presente que hay varios infinitos en este caso habla de infinito muy pequeño e infinito muy grande.</td></tr>
</table>

Fuente: producción propia

En este momento de la investigación ya se tiene una institucionalidad del concepto de infinito por parte de los estudiantes, reconocen los diferentes infinitos y se apropiaron del concepto.

7. CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Esta investigación presenta las siguientes conclusiones del proceso realizado y deja unas recomendaciones y cuestiones abiertas.

7.1. Conclusiones

Desde los griegos, pasando por los árabes y europeos, se ha notado la dificultad por la cual han pasado gran cantidad de matemáticos, filósofos, astrónomos, físicos, al tratar de escudriñar este magnífico concepto como lo es el infinito. Pitágoras tratando de esconderlo y no revelar ese nuevo conjunto numérico que estaba por florecer y Aristóteles prohibiéndolo a sus discípulos.

Pero en este recorrido nos encontramos con un árabe Thbit ibn Qurra el cual trabajó con conjuntos infinitos, operó con subconjuntos de un conjunto como los números pares e impares y realizó una equipotencia entre estos, pero tampoco pudo definirlo de una manera coherente. Los matemáticos europeos iniciaron un gran camino como Galileo que trabajó de alguna manera con la equipotencia de los números naturales y sus cuadrados, Leibniz y Newton con sus trabajos en los infinitesimales, dieron un gran paso para la definición de este concepto, dada por George Cantor.

1- En la fase I de esta investigación se evidenció, observando y analizando los resultados arrojados de la prueba diagnóstica que se aplicó a estudiantes de grado 11, que tanto de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario como la Institución Educativa Técnico Agropecuario Taparcal del municipio de Belén de Umbría, al igual que los docentes vinculados a las instituciones del municipio, sólo reconocen el infinito potencial, esto se evidencia en las definiciones encontradas en dicha fase de este trabajo, los ejercicios resueltos por parte de estudiantes y docentes dan la luz para continuar con los objetivos de esta investigación, se encontró en estos resultados la idea intuitiva de infinito potencial muy arraigada en la mente tanto de estudiantes como docentes.

2- La fase II de este trabajo de grado se llevó a cabo con estudiantes de grado 10 de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario, grupo a intervenir en esta investigación y se les aplicó la prueba propuesta para esta fase, los resultados y el análisis de estas pruebas dan la razón para continuar con este proceso, se evidencian las falencias existentes en la comprensión del concepto de infinito, por lo que se pretende dar solución a la pregunta de investigación. Se encuentra entonces que los estudiantes sólo reconocen el infinito potencial.

3- Para la fase III en la aplicación de la secuencia didáctica mediada por las TIC, el software *GeoGebra*, brindó un aporte fundamental para la realización de este proyecto, ya que este mostró a los estudiantes de una manera práctica los cambios que sucedían con los ejercicios propuestos en la secuencia didáctica, se demostraron los avances que presentaban los estudiantes en la comprensión del concepto de infinito, tanto potencial como actual, cambiando la noción de que el infinito no es sólo potencial. Se tiene presente en este trabajo que al involucrar las TIC en este proceso se obtienen buenos resultados y puede mejorarse la comprensión de otros conceptos que están ligados al infinito, tanto potencial como actual.

4- En la fase IV se realizó el análisis a priori y a posteriori de este trabajo de grado y se pudo observar los avances presentados por los estudiantes en toda la investigación, cambiando de manera paulatina la noción de concepto de infinito en las secuencias presentadas, se observó en algunas respuestas de los educandos como ya tienen presente que hay varios infinitos, unos más grandes que otros, lo que indica que han logrado mejorar su nivel de comprensión del concepto de infinito.

Este trabajo fue realizado bajo una metodología de una ingeniería didáctica y como marco teórico la teoría de las situaciones didácticas, mediada por las TIC, en el caso de esta investigación el software *GeoGebra*, ha sido una valiosa herramienta de trabajo para los estudiantes.

7.2. Recomendaciones y Cuestiones Abiertas

Esta investigación contribuye para continuar mejorando la comprensión del concepto de infinito en básica secundaria mediada por las TIC, bajo una ingeniería didáctica, por tanto se plantean las siguientes recomendaciones y cuestiones abiertas:

7.2.1. Recomendaciones:

- La implementación de las TIC como herramientas didácticas y prácticas para el abordaje y desarrollo de temáticas como el infinito y demás conceptos matemáticos.

- La realización de un libro: Texto escolar, donde se aborde el tema de comprensión del concepto de infinito en grados desde sexto hasta once.

- Hacer una evaluación periódica del nivel de comprensión del concepto de infinito en los estudiantes de grados superiores con el fin de evidenciar avances o falencias y realizar la intervención pertinente según sea el caso.

7.2.2. Cuestiones abiertas:

- ¿Es viable implementar en el plan de estudios de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario del municipio de Belén de Umbría las secuencias didácticas empleadas en este trabajo de grado con el fin de trabajar más sobre la comprensión del concepto de infinito?

- ¿Es pertinente desarrollar este proyecto con estudiantes universitarios de primer semestre en la Licenciatura, para mejorar los niveles de comprensión de este concepto en los futuros profesores en matemáticas?

- ¿Será conveniente realizar capacitaciones a los docentes con el fin de que se apropien del concepto de infinito y a su vez puedan realizar el proceso enseñanza-aprendizaje de forma adecuada en las aulas de clase?

8. BIBLIOGRAFÍA

ARRIGO. Gianfranco. D´AMORE. Bruno. SBARAGLI. Silvia. 2011. Infinitos infinitos. Historia, filosofía y didáctica del infinito matemático. Editorial Magisterio. Bogotá. Colombia

GIL V. Carlos A. 2016. El género literario del cuento como estrategia didáctica para abordar el concepto de infinito en el grado 11-3 de la institución educativa sor maría juliana del municipio de Cartago (valle del cauca). Maestría en Enseñanza de la Matemática UTP. Pereira Colombia

GIRALDO L, Conrado 2006. El Infinito En Nuestra Escuela. Maestría en Enseñanza de la Matemática. Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

GONZÁLEZ, G. José Rodrigo, MESA Fernando y MARTÍNEZ A. Alejandro. Tópicos del Análisis Complejo.2009. P. 43-44. Primera edición. Pereira Colombia.

GUTIÉRREZ. R. Norma. 2009. Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior. Instituto politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada Y Tecnología de Avanzada. México D.F.

LESTÓN. Patricia. 2011. El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología. Instituto politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada Y Tecnología de Avanzada. México D.F

WALLACE. David. Foster. Todo y más una breve historia del infinito. España. Pdf

9. WEBGRAFÍA

ÁLVAREZ. Renato. 2009. De Euclides a Newton: Los genios a través de sus libros. De cómo se gestó y vino al mundo el cálculo infinitesimal http://euler.us.es/~libros/calculo.html. Recuperado en 08 de febrero de 2016 05:43 pm

ÁREA, M. (2004). "Los ordenadores en la Educación Secundaria: del MS-Dos a Internet". Revista Aula de innovación educativa. Nº 135. Pp. 30-35. Recuperado en: http://webpages.ull.es/users/manarea/Documentos/AULA%20InnovEd-TIC%20EdSec.pdf citado en: 24 de noviembre de 2015 07:46 pm

ARTIGUE. Michèle. Ingeniería Didáctica. Recuperado en: www.cimm.ucr.ac.cr/edefaria Citado en: 25 de noviembre de 2015 09:32 pm

Astronomía. Biografías. Eudoxo de Cnido y las esferas. Recuperado en: http://www.astromia.com/biografias/eudoxo.htm. Citado el 15 de febrero de 2016 08:30 pm
Astrophysical Journal. El Universo tiene diez veces más galaxias de lo que se pensaba Recuperado en: http://www.infobae.com/america/mundo/2016/10/16/el-universo-tiene-diez-veces-mas-galaxias-de-lo-que-se-pensaba/ Citado en: abril 21 de 2016 07:34 pm

BELMONTE M. José Luis. Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito. Recuperado en: http://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/76247/1/DDMCE_Belmonte_Martinez_JL_Modelos_intuitivos_y_esquema.pdf. Citado el 01 de Febrero de 2016 10:13 pm

BELMONTE, José Luis. SIERRA, Modesto. Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. Recuperado en: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v14n2/v14n2a2.pdf. Citado el 04 de febrero de 2016, hora: 4:56pm

BELMONTE, José Luis. Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito. Recuperado en: http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v14n2/v14n2a2.pdf. Citado el 11 de Abril de 2016, hora: 4:56pm

BELLON. Waldemar. Cantor, el conquistador del infinito. Recuperado en http://www.bdigital.unal.edu.co/17718/1/13381-37668-1-PB.pdf. citado en 20 de Marzo de 2016 05:08 pm

BOLZANO. Bernard. Las paradojas del infinito. Recuperado en: https://books.google.com.co/books?id=XikNFUPdqTQC&pg=PR7&lpg=PR7&dq=Bolzano+libro+paradojas+del+infinito&source=bl&ots=eUGcgx24dQ&sig=w6ypcqtRpLFS15w1UE7McwV

C41U&hl=es&sa=X&ved=0ahUKEwiW0trppt3MAhVJlB4KHZexAcoQ6AEIKzAD#v=onepage&q=Bolzano%20libro%20paradojas%20del%20infinito&f=false. Citado en: 20 de febrero de 2016 07:46 pm

BURBAGE. Frank. CHOUCHAN. Nathalie. Leibniz y el infinito. Recuperado en: http://sd60915155566d186.jimcontent.com/download/version/1346721198/module/6260547382/name/leibniz%20el%20infinito%5B1%5D.pdf Citado Noviembre 26 de 2015 08:33 pm

CAMACHO. A. AGUIRRE M. Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. Recuperado en. http://www.clame.org.mx/relime.htm Citado en: Noviembre 03 de 2015, Hora: 5:30 pm

CANTORAL.U. Ricardo. Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano. Recuperado en: www.editdiazdesantos.com/wwwdat/pdf/9788479788032.pdf citado en: Abril 28 de 2016 04:41 pm

CHOQUE, Raúl. “Estudio En Aulas De Innovación Pedagógica Y Desarrollo De Capacidades Tic”. Recuperado en: http://www.sav.us.es/pixelbit/pixelbit/articulos/n35/1.pdf Citado en 06 de octubre de 2015

D’AMORE B., ARRIGO G., BONILLA ESTÉVEZ M., FANDIÑO PINILLA M.I., PIATTI A., RODRÍGUEZ BEJARANO J., ROJAS GARZÓN P.J., ROMERO CRUZ J.H., SBARAGLI S. (2006). “El sentido del infinito”. *Épsilon*.[Sevilla, Spagna]. Vol. 22(2), n° 65, 187-216. ISSN: 1131-9321. Recuperado en: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/644%20%20al%20Sentito%20del%20infinito.pdf citado en: 29 de octubre de 2015

DE FARIA CAMPOS Edison, Ingeniería Didáctica. Recuperado en: www.cimm.ucr.ac.cr/edefaria Citado en: 25 de noviembre de 2015 09:15 pm

Diccionario de la real Academia Española Recuperado en: http://dle.rae.es/?id=LWs5qiN Citado en: Marzo 30 de 2016 06:34 pm

GARBIN, Sabrina. AZCÁRATE, Carmen. Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años Departament de Didáctica de les Matemátiques i les Ciencies Experimentals. Universidad Autónoma de Barcelona. España. Recuperado en: www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21786/21620 Citado en: Febrero 02 de 2016 07:44 Pm

GARBIN. Sabrina. ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Recuperado en http://www.redalyc.org/pdf/335/33580205.pdf. 26 de Abril de 2016. Hora 7:35 p.m

Geogebra. Características de la GeoGebra. Recuperado en: https://sites.google.com/site/geogebra1112/caracteristicas-de-geogebra. Citado en 25 de noviembre de 2015 10:13 pm

GÓMEZ. C. Inés María. Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática con tecnología. Facultad de ciencias matemáticas. Universidad de Complutense de Madrid. Recuperado en: www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/199615/353389 citado en: Marzo 31 de 2016 05:34 pm

GONZÁLEZ. Á. Joaquín. El infinito matemático. Recuperado en http://www.henciclopedia.org.uy/autores/Gonzalez%20Alvarez%20J/InfinitoMatematico.htm. Citado el 10 de Febrero de 2016

HILBERT. David. El Hotel Infinito de Hilbert Recuperado en: http://www.neoteo.com/el-hotel-infinito-de-hilbert Citado en: Mayo 28 de 2016 09:36 pm

LESTÓN Patricia, CRESPO CRESPO Cecilia. El Infinito Matemático: La Escuela Cantor Y Bolzano**.** Recuperado en: http://funes.uniandes.edu.co/4713/1/Lest%C3%B3nElinfinitoALME2010.pdf Citado el 28 de octubre de 2015

LESTÓN Patricia. Ideas de los alumnos de escuela media sobre el infinito de los conjuntos numéricos. Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González. Buenos Aires argentina. Recuperado en: www.soarem.org.ar/DOCUMENTOS/29%20LESTON.pdf Citado en: enero 14 de 2016 06:17 pm

LÉVY. Tony. Th_bit ibn Qurra y el infinito numérico. Investigación y ciencia. Primer trimestre 200. P. 14-15-16-17 Noviembre 29 de 2015 08:16 pm

Los números Transfinitos: Hablemos del infinito (Parte II) Recuperado en: https://euclides59.wordpress.com/2013/01/09/los-numeros-transfinito-hablemos-del-infinito-parte-ii/. Citado en 15 de marzo de 2016 07:10 pm

LUPIÁÑEZ. José Luis. RICO Luis. Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Recuperado en http://funes.uniandes.edu.co/595/1/LupiannezJ05-2757.PDF Citado el: 04 de mayo de 2016 07:32 pm

MEN (Ministerio de Educación Nacional).2003. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. P.60. Recuperado en: eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf Citado en: enero 24 de 2016 08:45 pm

NÁPOLES VALDÉS. Juan Eduardo, Paradojas y fundamentos. Recuperado en: http://www.librosmaravillosos.com/paradojasyfundamentos/pdf/paradojasyfundamentos%20-%20Juan%20Eduardo%20Napoles%20Valdes.pdf citado en 13 de noviembre de 2015 06:37 pm

ORTIZ José Ramón. El Concepto de infinito. Recuperado en:http://emis.u-strasbg.fr/journals/BAMV/conten/vol01/vol1n2p59-81.pdf Citado en: 09 de noviembre de 2015 09:38 pm

PANIZZA. Mabel. II Conceptos básicos de la teoría de situaciones Didácticas. Recuperado en: crecerysonreir.org/docs/MATEMATICAS_teorico.pdf Citado en: Marzo 31 de 2016 10:07 pm

PEÑALVA MARTÍNEZ M. Carmen. Implicaciones Didácticas De Las Dificultades En El Aprendizaje De Conjuntos Infinitos: Representaciones De Conjuntos Numéricos En Textos Matemáticos Escolares. Universidad De Alicante Recuperado en: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/PenalvaM01-2622.PDF Citado en 16 de septiembre de 201554- PANIZZA. Mabel. II Conceptos básicos de la teoría de situaciones Didácticas. Recuperado en: crecerysonreir.org/docs/MATEMATICAS_teorico.pdf Citado en: Abril 02 de 2016 09:34 pm

RODRÍGUEZ G. Gregorio, GIL F. Javier, GARCÍA J. Eduardo. Metodología De La Investigación Cualitativa. Recuperado en: https://www.google.com.co/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=8&ved=0ahUKEwiKodOnx7PJAhUDSSYKHeoFAsEQFghHMAc&url=http%3A%2F%2Fmedia.utp.edu.co%2Fcentro-gestion-ambiental%2Farchivos%2Fmetodologia-de-la-investigacion- Citado en: 01 de diciembre de 2015 05:11 pm

RUIZ. Ángel. Historia y filosofía de las matemáticas. Recuperado en: www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20filosofia%20de%20las%20matematicas.pdf Citado en: 20 de Febrero de 2016 09:32 pm

VRANCKEN, Silvia; G REGORINI, María Inés; ENGLER, Adriana; MÜLLER, Daniela; HECKLEIN, Marcela. Dificultades Relacionadas Con La Enseñanza Y El Aprendizaje Del Concepto De Límite. Recuperado en: www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf Citado el 17 de septiembre de 2015

WALDEGG. Guillermina. Vol I N°1 Enero-Junio 1996. Revista Mexicana de Investigación Educativa. Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. Recuperado en: http://www.redalyc.org/pdf/140/14000108.pdf citado en: Noviembre 15 de 2015

XIRAS. Ramón. Introducción a la historia de la filosofía. Recuperado en: https://www.academia.edu/7408550/Xirau_Ramon_-_INTRODUCCION_A_La_Historia_De_La_Filosofia Citado en: 20 de febrero de 2016 07:08 pm

ANEXOS

Anexo A *Prueba diagnóstica.*

Tema a trabajar en la prueba diagnóstica:

- ∞ Infinito potencial y actual.

Objetivos prueba diagnóstica:

- ∞ Determinar en qué medida los estudiantes comprenden el concepto de infinito decreciente.
- ∞ Determinar la infinitud del proceso algorítmico en la división.
- ∞ Analizar cómo los estudiantes realizan comparaciones entre dos segmentos.
- ∞ Definición del concepto de infinito.

La siguiente prueba se realiza una muestra de los diferentes grupos que hay en la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario, para iniciar el proceso de investigación sobre el concepto de infinito, para este caso su comprensión y en alguna medida su manipulación.

Nombre del estudiante: ____

Grado: __________________ **Fecha: _______________**

1. Escriba la expresión decimal que corresponde a la siguiente fracción $\frac{2}{3}$
2. ¿Qué otra representación puede darse al número 0.9999....? (Los puntos suspensivos indican que el dígito 9 se repiten en una cantidad mayor que cualquier número).____________________________
3. Considere los segmentos ___y ___ de la figura 1.1.
   A___________B

   C_________________________________D

   Figura 1.1

   ¿Cuál de los dos segmentos tiene más, igual o menos puntos?

4. ¿Es cierta la igualdad: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ ... = 1$?

5. Realizar la gráfica de la siguiente función $\quad = \frac{1}{}$

6. Definir con sus palabras el concepto de infinito: ____
____
____
____
____
____

Anexo B: TAREA 1.

Tema tarea 1:

- ∞ Infinito potencial
- ∞ Infinito actual

Objetivos de la Fase I

- ∞ Determinar el nivel de comprensión del concepto de infinito
- ∞ Analizar la correspondencia entre dos conjuntos numéricos numerables que realizan los estudiantes
- ∞ Observar las operaciones realizadas por los estudiantes en los procesos sobre infinito en la geometría

Pregunta 1: Para detectar si los estudiantes y docentes tienen presente que los racionales tienen una representación decimal infinita o solamente conciben una aproximación.

Pregunta 2: Se pretende conocer si son capaces de indicar por sí mismos si la expresión decimal 0.999… corresponde a 1.

Pregunta 3: Que dos segmentos distintos tienen la misma cantidad de puntos.

Pregunta 4: Para esta pregunta se pretende indagar que tanto reconocen los estudiantes como docentes, que una figura geométrica se puede dividir infinitamente.

Pregunta 5: En esta pregunta se desea conocer si los estudiantes reconocen aproximaciones muy cercanas a cero por la izquierda y por la derecha y que esto los lleva a resultados infinitos.

Pregunta 6: Si los estudiantes pueden realizar biyecciones entre los conjuntos dados y que estos poseen la misma cantidad de elementos.

Pregunta 7: Cómo definen el infinito los estudiantes y docentes.

En esta fase de la investigación se pretende recolectar la mayor información tanto de estudiantes como de docentes sobre el manejo del concepto de infinito en la educación media de la Institución Educativa Nuestra Señora del Rosario. La tarea la deben de resolver tanto los estudiantes como los docentes del área de matemáticas de esta institución.

Nombre del estudiante: ____

Institución Educativa: __________________________**Grado:** ___________ **Fecha:** ______________

1. Dadas las siguientes fracciones elige una y escriba la expresión decimal que le corresponde:

   c) $\frac{20}{3}, \frac{20}{6}, \frac{20}{9}, \frac{20}{12}, \frac{20}{15}, \frac{20}{18}$

   d) ¿Qué puedes concluir con el resultado obtenido?

2. ¿Qué otra representación puede darse al número 0.9999....? (Los puntos suspensivos indican que el dígito 9 se repiten en una cantidad mayor que cualquier número).____

3. Considere los segmentos ___ y ___ de la figura N° 1

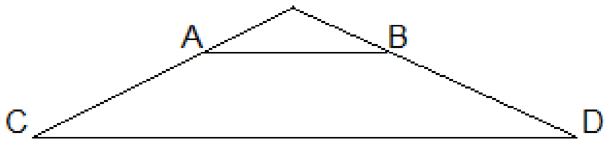
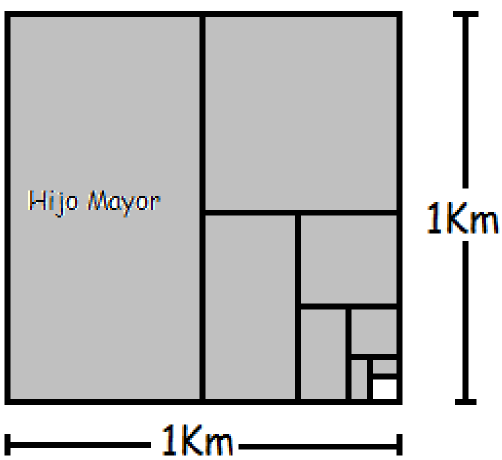


Figura 1

¿Cuál de los dos segmentos tiene más, igual o menos puntos?

4. Un padre dejó en su testamento la siguiente condición para dar a cada uno de sus hijos la herencia que le corresponderá. "Hijos míos a cada uno de vosotros ostocará una porción de la herencia de la siguiente manera: Al mayor de todos la mitad de la parcela, al siguiente en edad la mitad de lo que quedo, al siguiente la mitad de lo que quedó y así sucesivamente. Sabiendo que el padre tenía una cantidad infinita de hijos. Sabiendo que la parcela es la figura N° 2 ¿Cuál será el área total de la parcela que deja en herencia el padre?



5. Realizar la gráfica de la siguiente función $\quad = \frac{1}{\ }$, completando la siguiente tabla de valores

	-10	-1	-0,1	-0,01	0	0.01	0,1	1	10
( )									

¿Qué puedes concluir sobre la gráfica?

6. ¿Cuántos números pares hay en los números naturales? ¿Cuántos números impares hay en los números naturales?

7. ¿Qué entiende usted por infinito, basándose en lo realizado anteriormente?

Anexo C Fase II

Tema Fase II:

- Infinito potencial
- Infinito actual
- Infinito en la geometría

Objetivos:

Para cada pregunta se tiene un objetivo en esta fase de la investigación.

Pregunta 1: Determinar en qué medida los estudiantes tienen presente que los números naturales siempre tienen un número sucesivo o mayor.

Pregunta 2: Para esta pregunta se pretende conocer cómo los estudiantes manejan las divisiones sucesivas en un segmento y en qué medida reconocen que este proceso no termina.

Pregunta 3: La relación que existe entre un conjunto y un subconjunto. Que el todo no es mayor que una de sus partes.

Pregunta 4: El límite de forma indirecta de una sucesión cuando tiende a infinito.

Pregunta 5: la biyección que se tiene en dos conjuntos numéricos y la relación que sale de estos.

Pregunta 6: Cómo tienen presente los estudiantes el infinito actual.

Pregunta 7: Cómo definen los estudiantes el infinito y si solo tienen presente el infinito potencial o también el infinito actual.

Nombre del estudiante: ___________________________________ Grado: ____________

Fecha: _______________

1. Imagina el siguiente juego entre dos personas. Cada una dice, cuando es su turno, un número. Gana aquél que diga el número más grande.
   c) ¿Preferirías ser tú el que comienza el juego?, ¿por qué?
   d) ¿Cuánto durará el juego?, ¿Por qué?

2. Considera un número natural cualquiera; lo divides entre dos; el resultado lo vuelves a dividir entre dos; y de nuevo lo divides entre dos y así sucesivamente. ¿Qué resultado se obtendrá al final?, ¿por qué?

3. ¿Cuál de los dos conjuntos siguientes crees que contendrá más números:
   $\{1,2,3,4,\ldots\}$ *ó* $\{1,3,5,7,\ldots\}$? ¿Por qué?

4. Si tienes un conjunto de hilos Figura 1, donde la longitud de cada hilo es la mitad del anterior, y los vas uniendo uno junto al otro, obtendrás un hilo más largo:

   ¿Cuánto medirá este nuevo hilo cuando hayas unido todos los hilos?
   e) 2 Metros
   f) 3 Metros
   g) Infinito
   h) Una cantidad tan grande que no se puede medir

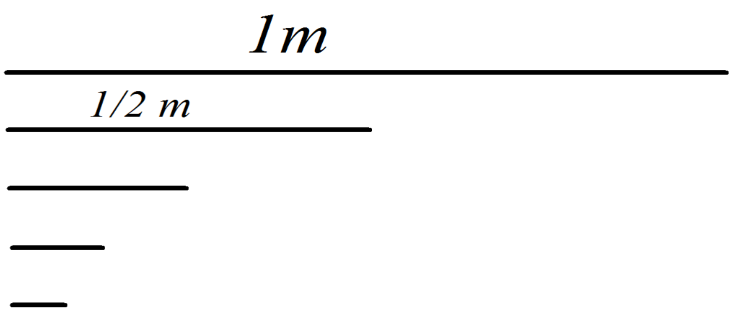


Figura 1

5. Observa estas dos sucesiones de números:

   $: 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \ldots$

   $: 4, \quad 8, \quad 12, \quad 16, \quad 20, \quad 24, \quad 28, \ldots$

   Que continúan indefinidamente. ¿Cuál de las siguientes respuestas es la correcta?
   e) La ***A*** alcanzará el valor más grande
   f) La ***B*** alcanzará el valor más grande

g) Las dos alcanzarán un valor tan grande como queramos
h) Otra respuesta. Dila

6. ¿Existe algún número entre $2,\hat{9} \quad 3$?
   c) Si. Escribe alguno
   d) No. ¿Por qué?

7. ¿Qué entendemos por infinito? Puedes dar la respuesta en una frase o en un dibujo

Anexo D: Área de Matemáticas

Docente: James Rodríguez Ossa

Tiempo: Cada actividad tiene una duración aproximada de 4 horas que se darán en dos sesiones de 2 horas.

GRADO	NOMBRE DE LA SECUENCIA	SITUACIÓN PROBLEMA CENTRAL	PROPÓSITO DE LA SECUENCIA A NIVEL DE CONTENIDO MATEMÁTICO
Décimo	Comprensión del concepto de infinito	Realizar una estimación aproximada en ejercicios prácticos, mediados por entornos virtuales	Que los estudiantes se aproximen a la noción de infinito actual.

Los desempeños esperados de un estudiante para esta secuencia didáctica son:

- Realizar operaciones donde los estudiantes observen aproximaciones a un número en especial.
- Justificar el uso de la estimación para resolver problemas relativos a la vida social, económica y de las ciencias.
- Resolver y formular problemas que requieren técnicas de estimación.
- Identificar, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado.
- Justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable de las respuestas obtenidas.
- Determinar estrategias para buscar, seleccionar y almacenar información.

Componente actitudinal:

- Puntualidad para cada una de las sesiones.
- Respeto hacia los compañeros y sus respectivas opiniones acerca de los temas que se van

a trabajar.

- Compromiso para realizar las diferentes actividades de cada sesión.

Se inicia la secuencia didáctica explorando los saberes previos de los estudiantes para determinar qué saben y qué no saben con respecto a la temática a trabajar. Esta exploración corresponde a una evaluación diagnóstica que le permite identificar el lugar de donde se puede partir para la construcción de conocimiento. Puede realizarla por medio de actividades orales, escritas y juegos, entre otros. Además, la evaluación diagnóstica le permite establecer un punto inicial, adecuar las actividades a los estudiantes y evidenciar el desarrollo de competencias durante la secuencia didáctica.

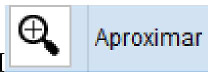
SEMANA 1:

Actividad 1:

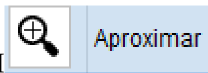
1. Ejercicio 1: En Geogebra realizar la siguiente actividad.

   a) Se tiene un segmento de 10 cm, ahora lo vas a dividir en 10 partes iguales.

   b) Vamos a tomar una de esas partes. (Por ejemplo entre 7 y 8) y lo volvemos a dividir en 10 partes iguales (como puedes observar se está haciendo pequeño la división del segmento)

   c) Haciendo uso de la ampliación (ZOOM 

) tomaremos **una** de esas diez partes en las cuales está dividido el nuevo segmento. Por ejemplo entre 7,5 y 7,6. Lo volvemos a dividir en 10 partes iguales.

   d) Continuamos este proceso dos veces más dividiendo en 10 partes iguales haciendo (ZOOM 

) y tomando una parte.

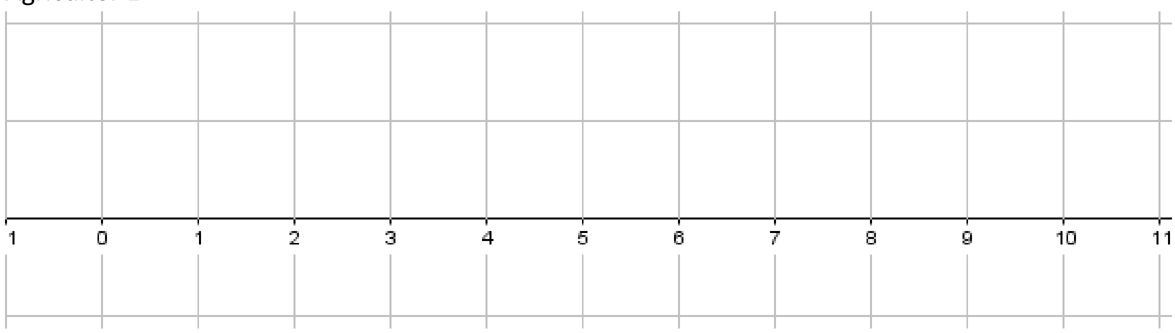
   e) Ahora nos devolvemos con la ampliación (ZOOM 

), como se ven los segmentos con respecto al inicial

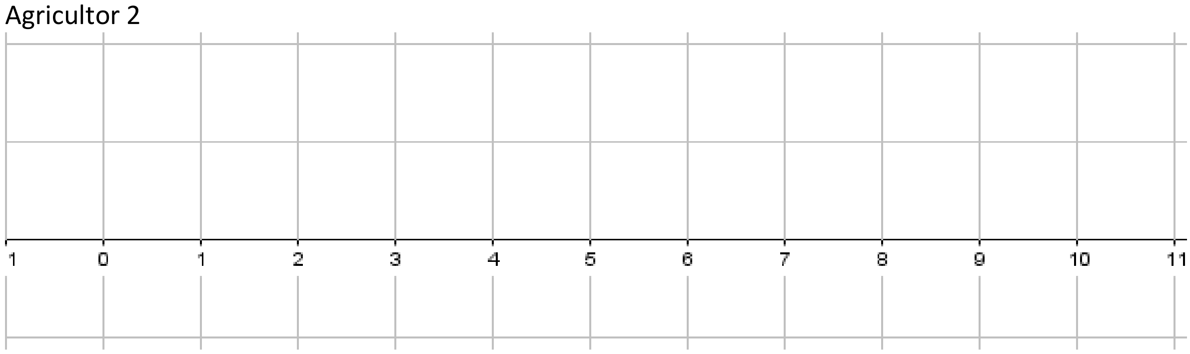
f) ¿Si continuamos con el proceso de esta misma forma muchas veces que pasará con el segmento? Justificar la respuesta

2. Se inicia la época de siembra de plátano en algunas fincas de Belén de Umbría, donde dos campesinos tienen diferentes técnicas de sembrado. Estos deben de sembrar 10 hectáreas cuadradas cada uno, el primer agricultor siembra una hectárea cuadrada cada día, y el segundo agricultor así: El primer día 5 hectáreas cuadradas, el segundo día 2.5 hectáreas cuadradas, el tercer día 1.25 hectáreas cuadradas y así sucesivamente.

Agricultor 1



Agricultor 2



a) Dibuja en la gráfica anterior el proceso de siembra del agricultor 1 y el agricultor 2

b) ¿Quién terminará primero el sembrado de plátano en el menor número de días?

3. Ahora con la ayuda del software Geogebra construir un segmento de 4cm, luego lo divides en 2 partes iguales, construyó otro segmento con este resultado, el segmento lo vuelve a dividir entre dos y construye la gráfica de este nuevo segmento. Continúe el proceso varias veces. ¿Qué

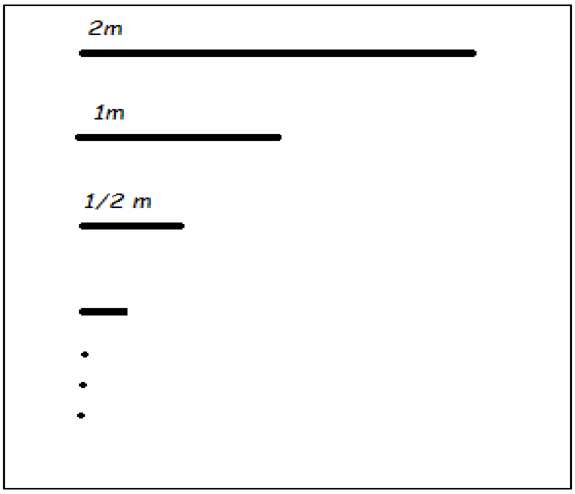
resultado se obtendrá al final?, ¿Por qué?

4. En una hoja de Geogebra construir dos rectas, la primera con los números naturales y la otra con los números naturales pares ¿Cuál de dos conjuntos numéricos crees que tiene más números?, ¿Por qué?

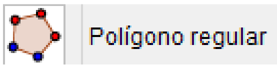
5. Del ejercicio anterior realizar grupos de dos elementos cada uno perteneciente a un conjunto diferente de tal forma que se inicie con los primeros números de cada conjunto. ¿Ahora responde quién tendrá más elementos?

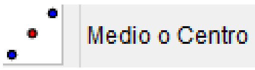
6. ¿Cuál de los siguientes conjuntos numéricos crees que es más grande:
$\{1,3,6,9,12, \ldots\}$ *ó* $\{2.000.001, 2.000.003, 2.000.006, 2.000.009,\ 2.000.012, \ldots\}$?, ¿Por qué?
7. ¿Existe algún número entre 0,9 y 1? Si la respuesta es afirmativa escribe un número que esté en ese rango y si no existe ¿Por qué?

8. Con la ayuda del software Geogebra: Dados los siguientes segmentos al unirlos uno a uno. ¿Cuánto medirá el segmento obtenido al unirlos?

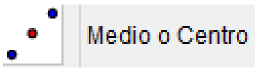


a) 3 metros
b) Infinito
c) 4 metros
d) Una longitud tan grande que no se puede medir
9. Con la ayuda de Geogebra construir un triángulo equilátero (Polígono regular



) de 10cm de lado. Luego con la opción (medio o centro 

) hallar el punto medio de cada lado y con estos construir un nuevo triángulo rectángulo (Polígono 

), de nuevo hallar los puntos medios (medio o centro 

) del triángulo resultante y con estos construir un nuevo triángulo. ¿Cree usted que este proceso terminará en algún momento?

10. Se tiene una hoja de papel del tamaño que deseen y se les pide que la doblen por la mitad, luego otra vez la doblan por la mitad y así sucesivamente. ¿Cuántas veces se podrá doblar la hoja?

11. Tenemos un juego para dos personas. Cuando le toque el turno dice un número. Gana el que diga el número más grande.

    a) ¿Cuál prefieres ser el que comienza el juego o el segundo?, ¿Por qué?
    b) ¿Cuánto durará el juego?, ¿Por qué?

SEMANA 2:

Actividad 1:

1. Ordenar de menor a mayor los siguientes conjuntos
    a) Número de granos de arena en la tierra
    b) Número de células que forman el cuerpo humano
    c) Número de estrellas
    d) Números subdivisiones de una recta

2. Con la ayuda del software GeoGebra realizar la gráfica de la siguiente función.

    a) $(\ ) = \frac{4}{\ }$
    b) Realizar la siguiente tabla con los datos obtenidos de la gráfica

	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	0	0,0001	0,001	0,01	0,1
$(\ )$									

c) ¿Qué sucede cuando el valor de ***x*** se aproxima a cero

3. Utilizando el software GeoGebra realizar la gráfica de la función: $(\ ) =$

a) ¿Cuál será el punto más alto de la gráfica?

b) ¿Se puede hallar ese valor?

4. Con la ayuda del programa GeoGebra realizar una circunferencia sobre la recta real de diámetro 1 y centrada en el punto $(0,\frac{1}{2})$, trazar una línea recta desde su norte (punto N: $(0,1)$) hasta un punto P de la recta, pasando por el punto S, siendo S un punto de la circunferencia. Mueva el punto P y vea qué sucede con el punto S, cuando P es muy grande.

SEMANA 3:

Actividad 1:

1. Para cada una de las siguientes funciones realizar la gráfica en GeoGebra, determinar el dominio y el rango.

a) $(\ ) = \frac{}{^2-16}$

b) $(\ ) =$

c) $(\ ) = 2$

2. Para los ejercicios del punto 1 determinar:

a) Que sucede si ***x*** toma valores muy cercanos a (-4) y muy cercanos a (4) en el punto a)

b) Qué pasa si ***x*** tiene valores muy cercanos a $\frac{}{2}$(por la izquierda)

c) Si ***x*** toma valores muy grandes positivos que sucede, hacia dónde va la gráfica

3. En tu cuaderno vas a responder a los siguientes interrogantes:

a) ¿Cuántos puntos puedes ubicar en la pantalla de Geogebra?

b) ¿Con cuántos puntos puedes construir una recta?

c) Si tienes que llenar el cuadrado con puntos ¿Qué cantidad de puntos caben?

¿Con tus propias palabras puedes dar un concepto de infinito? ¿Realizar una representación del concepto de infinito?

Aplicación fase II

Foto 1: Aplicación de la prueba fase II
Fuente: Producción propia

Aplicación Fase III

Foto 2: Aplicación de la prueba fase III
Fuente: Producción propia

Aplicación Fase III

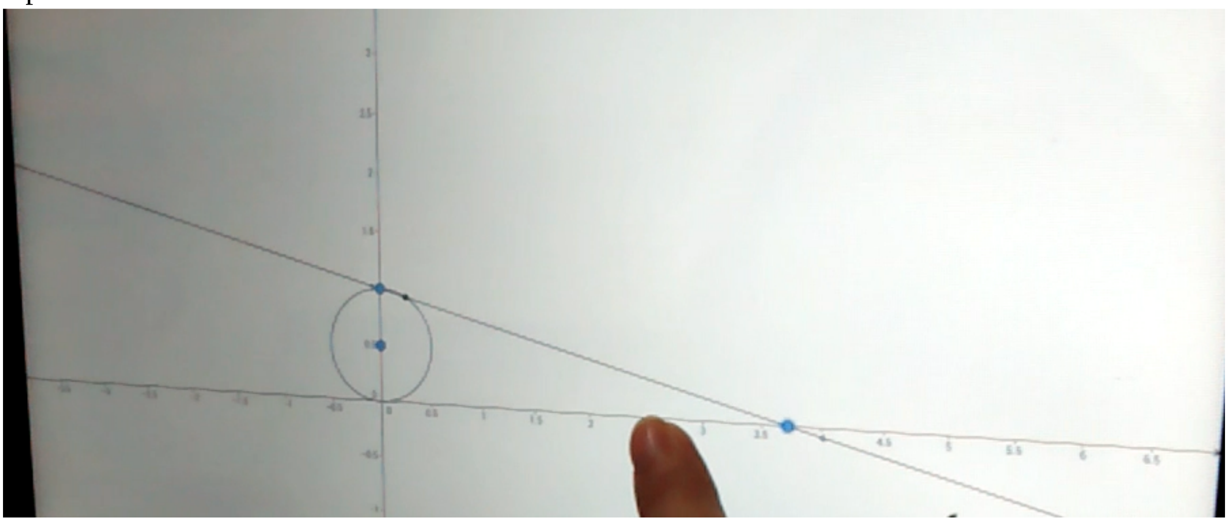


Foto 3: Aplicación de la prueba fase III
Fuente: Producción propia