**PLUSS, ILEANA**
*Departamento de Matemática, Escuela de Estadística*

# UNIDAD DE ENSEÑANZA. ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1° ORDEN. APLICACIONES DE DERIVE EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MICROECONÓMICO SOBRE RELACIÓN ENTRE INGRESO Y CANTIDADES DEMANDADAS

## INTRODUCCIÓN

Una de las aplicaciones más importantes de la integración se la encuentra en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Diversos problemas de la micro y de la macroeconomía son formulados matemáticamente como ecuaciones diferenciales. Se las utiliza con frecuencia en temas relacionados con el equilibrio y las condiciones de estabilidad, y también en la teoría de los ciclos económicos.

Conocida la tasa de cambio de una función, estas ecuaciones le permiten a un economista, como en el problema a tratar, encontrar la función cuyo cambio se describe.

Por ejemplo, conocida la elasticidad de la demanda, encontrar la función de demanda; conocidas las funciones costo marginal o ingreso marginal hallar las funciones costo total o ingreso total; conocida la tasa de inversión, encontrar funciones de capital; conocida la tasa de cambio del precio encontrar las condiciones para la estabilidad dinámica del precio en el mercado, etc.

Dentro de Optimización dinámica, donde las variables se consideran dependientes del tiempo, las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones en diferencias tienen particular importancia.

El DERIVE proporciona una herramienta ventajosa para encontrar las soluciones de una ecuación diferencial y de sistemas de ecuaciones diferenciales, y su pantalla gráfica permite hacer el análisis de dichas soluciones, frente a la complejidad de realizar este trabajo manualmente.

Como producción del tercer taller para docentes, realizado sobre el tema : INTRODUCCIÓN A LOS MODELOS DINÁMICOS. ECUACIONES DIFERENCIALES. APLICACIONES DE DERIVE; presento, como resultado del mismo, la Unidad de Enseñanza: ECUACIONES DIFERENCIALES, a partir de un problema aplicado al campo económico y su solución.

## OBJETIVOS

▪Descubrir la utilidad del programa DERIVE para encontrar las soluciones de una ecuación diferencial de 1°orden.

▪Interpretar problemas cuyo modelo es una ecuación diferencial, a partir de sus gráficas.

## CONCEPTOS PREVIOS

Se asume que el alumno conoce el concepto de ecuación diferencial y su clasificación.

Brevemente:

- una ecuación diferencial es una ecuación que contiene una función desconocida y algunas de sus derivadas.
- se clasifican en ordinarias y parciales, según que la incógnita sea una función de una sola variable o de dos o más variables.
- el orden de una ecuación diferencial es el de la derivada de orden mayor que figura en la ecuación.
- el grado de una ecuación diferencial está dado por el mayor exponente con que figura la derivada de mayor orden en la ecuación.

Se asume además que el alumno conoce métodos para encontrar las soluciones de ecuaciones diferenciales de 1°orden.

**PROBLEMA**

El planeamiento es importante para el éxito empresarial. Entre las variables a considerar están la demanda del mercado y el ingreso.

Se conoce la tasa de incremento en el ingreso a medida que aumenta la cantidad demandada: esta es igual al doble del cubo del ingreso menos el cubo de la cantidad demandada, todo dividido por el triple del producto de la cantidad demandada por el cuadrado del ingreso.

a) Modelice el enunciado del problema.
b) Investigue qué tipo de ecuación diferencial representa el modelo.
c) Encuentre la solución general del modelo y verifíquela.
d) Obtenga las gráficas de las curvas integrales, usando la solución general, variando la constante de 0,01 a 0,05, en pasos de 0,01.
e) Halle la relación entre el ingreso y la cantidad demandada cuando ésta es igual a 10 y el ingreso es cero .
f) Grafique e interprete la solución particular encontrada en e).

**Solución**

a) Ingreso = y  Cantidad demandada = x
Tasa de incremento en el ingreso al aumentar la cantidad demandada = dy/dx
Modelo :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,y^3 - x^3}{3xy^2} \qquad y \in \Re^+ \; ; \; x \in \Re^+ \qquad \textbf{ec. dif . ord. de 1° orden y 1° grado}$$

b) Se puede comprobar que **no es** una ecuación diferencial de variables separables , puesto que no se puede escribir de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = p(x).q(y)$$

El DERIVE brinda la posibilidad de hacer un test de homogeneidad, y si la ecuación es homogénea a la vez la resuelve. Para ello se carga el Archivo Útil ODE1. MTH, y se aplica Simplify sobre el operador HOMOGENEOUS_GEN( $(2y^3-x^3)$ / $3xy^2$ , x, y, c). Luego, si la ecuación no es homogénea nos responde “inapplicable”; ésto no ocurre en nuestro caso puesto que nos da la **solución general del modelo**:

c) $$-LN[(x^3+y^3)/x^3] = LN(x) + c$$

Reemplazando c por LN(c) en la expresión anterior, y aplicando soLve para c sobre la misma, obtenemos **la solución general en forma implícita:**

$$\mathbf{c = \frac{x^2}{x^3 + y^3}} \; ; \quad \textbf{para x e y no simultáneamente nulos} \qquad \textbf{(1)}$$

La solución general de una ecuación diferencial puede ser verificada siempre por derivación.
Con DERIVE, cargamos el archivo útil DIF-APPS. MTH, y utilizamos el operador:

IMP_DIF ( u , x, y , 1 )

para obtener la derivada de la función implícita u (x, y) = 0 . En nuestro caso la función implícita es :

$$c - \frac{x^2}{x^3 + y^3} = 0$$

Y el operador resulta:

$$IMP\_DIF \left( c - \frac{x^2}{x^3 + y^3} , x , y , 1 \right)$$

Aplicándo Simplify sobre el mismo obtenemos:

$$\frac{0.333333\ (2y^3 - x^3)}{xy^2}$$

Con lo cual queda comprobado que (1) es la solución general de la ecuación diferencial del modelo [1]

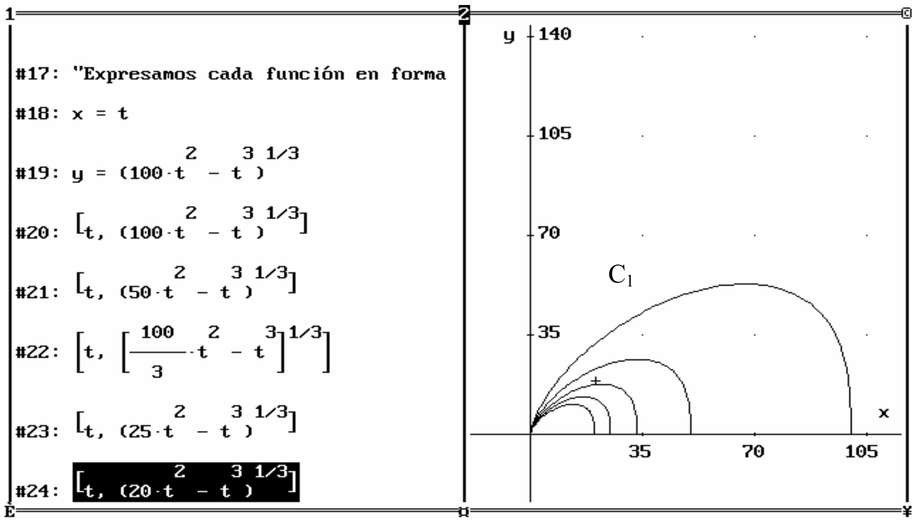
**d**) Para graficar las curvas integrales variando la constante de 0.01 a 0.05 en pasos de 0.01, expresamos la solución particular para cada valor de la constante.
Por ejemplo para c = 0.01, escribimos la solución particular en la siguiente forma paramétrica, a fin de poder darle a la variable independiente la variación adecuada para el problema:

$$x = t$$
$$y = (100t^2 - t^3)^{1/3} \qquad 0<t<100$$

Aplicando Plot sobre el vector:

$$[t,\ (100t^2 - t^3)^{1/3}]$$

obtenemos la curva $C_1$ .




Se observa que cualquiera sea el valor de la constante c en el modelo de solución:

$$c = \frac{x^2}{x^3+y^3}$$

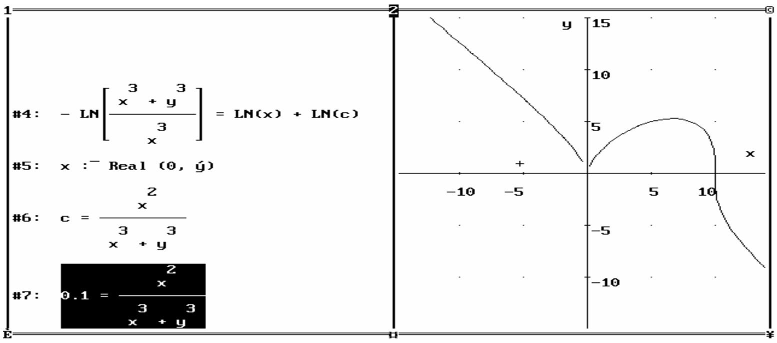
las curvas que representan la variación del ingreso en relación con la variación de la demanda son del mismo "tipo". Lo muestran las gráficas para $0<t<20$ ; $0<t<25$ ; $0<t<50$ ; $0<t<100/3$ ; $0<t<100$ siendo t = x
Puede inferirse que el modelo es útil para diversas situaciones.

**e)** Sustituyendo en la solución general x por 10 e y por 0, resulta c = 0.1. Sustituyendo nuevamente en la solución general c por 0.1, se obtiene **la solución particular pedida.**

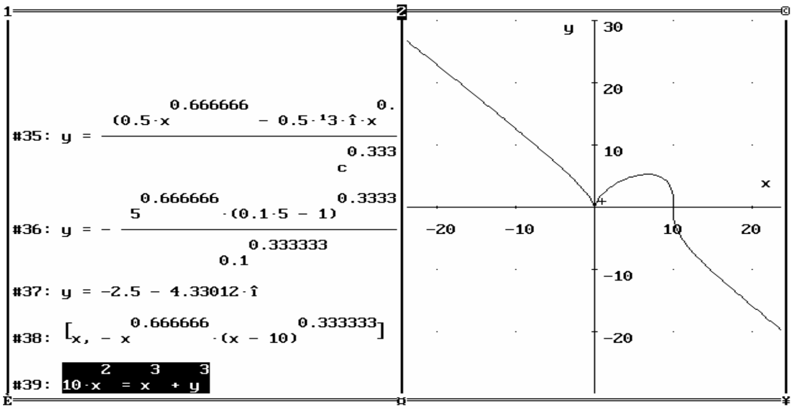
$$\mathbf{0.1 = \frac{x^2}{x^3 + y^3} \quad \Rightarrow \quad 10x^2 = x^3 + y^3}$$ **es una ecuación algebraica racional entera (2)**

**f)** Si graficamos la función $\mathbf{0.1 = \frac{x^2}{x^3+y^3}}$ obtenemos**:**

[1]En la resolución del problema con DERIVE que acompaña este trabajo, se muestra otro camino que brinda el programa para hallar la derivada de una función implícita.




o bien si graficamos **$10x^2 = x^3 + y^3$ :**




Sólo una parte de éstas gráficas es útil para el problema.

**¡ Hay que conocer la herramienta computacional para lograr la gráfica de la función (2) conveniente al problema!**

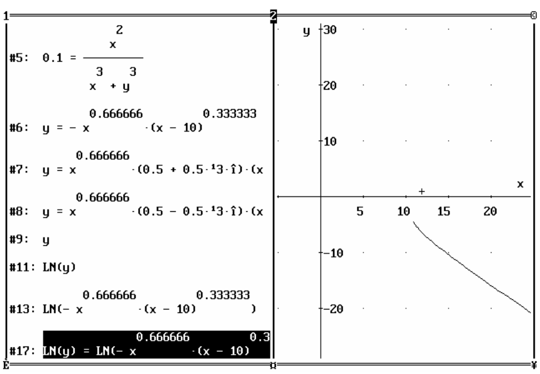
El comando soLve permite resolver una ecuación para alguna de sus variables. Si se aplica soLve para y (ingresos) en (2) , se obtiene:

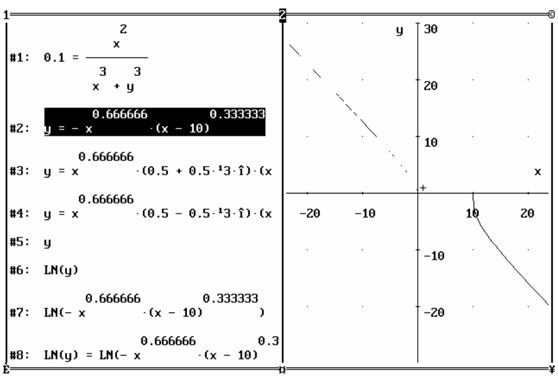
$$y = -x^{2/3} (x - 10)^{1/3} \qquad (3)$$

y otras dos soluciones complejas no reales que despreciamos.

La función (3) es irracional **y como el programa opera en el conjunto de los números complejos**, para hallar valores de la misma aplica logaritmos: $\ln y = \ln (-x^{2/3} (x-10)^{1/3}]$, lo cual restringe el dominio de la función.

Debido a esos logaritmos que afectan a la variable, sólo construye la gráfica de la función (3) para x>10 y para x<0 (porque opera en el conjunto de los números complejos) .

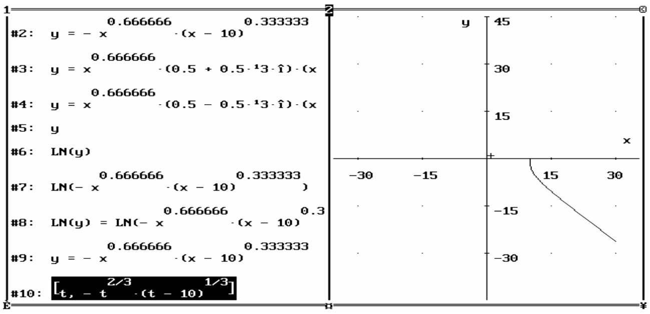


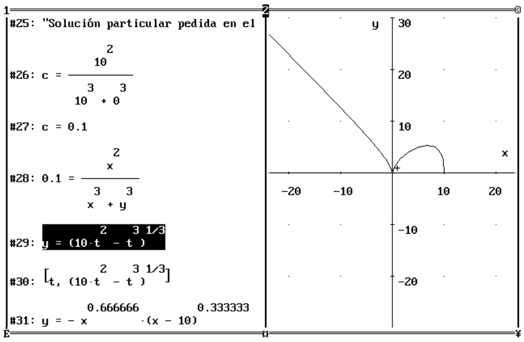

Estas gráficas no conviene considerarlas para el análisis del problema.

Tampoco conviene la solución particular en la forma paramétrica:

$$x = t$$
$$y = -t^{2/3} (t-10)^{1/3} . \qquad 0<t<30$$



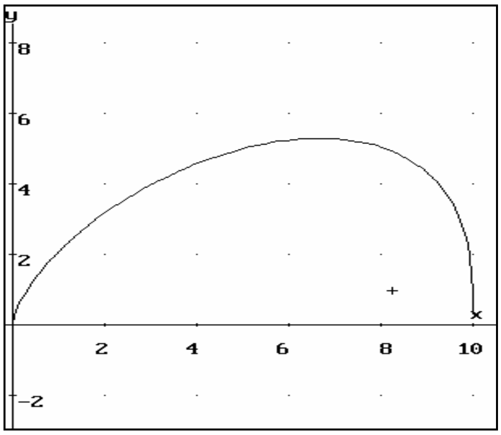

¿Qué ocurre si graficamos la función (3) expresada de la siguiente forma: $y = (10t^2 - t^3)^{1/3}$ ?
Como el programa aplica logaritmo, realiza la gráfica para x<10.




Para obtener la gráfica que nos interesa de la función $\mathbf{10x^2 = x^3 + y^3}$, se la expresa en la forma paramétrica siguiente :

$$x = t$$
$$y = (10t^2 - t^3)^{1/3} \qquad 0<t<10$$

y se aplica Plot sobre el vector: $[\, t, (10t^2 - t^3)^{1/3} \,]$.




La gráfica obtenida muestra la variación del ingreso en función de la demanda para las condiciones iniciales pedidas: **ingreso cero cuando la cantidad demandada es 10**.
Tambien se deberá tener en cuenta que las unidades en los problemas económicos, se adaptan a la solución real que corresponde al problema.
Si y (ingresos ) está expresado en "miles de pesos", la gráfica de la solución particular pedida nos dice que el ingreso máximo sería de aproximadamente $5800, alcanzado cuando la demanda está entre 6 y 7 unidades de cierto tipo.
También se puede leer en la misma gráfica que, si la demanda no alcanza a 7 unidades los ingresos crecen a medida que aumenta la demanda y disminuyen rápidamente ( se produce un déficit ) si la

demanda sigue creciendo de 7 a 10 unidades.

"DERIVE"

"Resolución de la ecuación diferencial y'=(2y^3-x^3)/(3xy^2)"

$$r = \frac{2 \cdot y^3 - x^3}{3 \cdot x \cdot y^2}$$

$$\text{HOMOGENEOUS\_GEN}\left(\frac{2 \cdot y^3 - x^3}{3 \cdot x \cdot y^2}, x, y, c\right)$$

$$- \text{LN}\left(\frac{x^3 + y^3}{x^3}\right) = \text{LN}(x) + c$$

x :∈ Real (0, ∞)

$$- \text{LN}\left(\frac{x^3 + y^3}{x^3}\right) = \text{LN}(x) + \text{LN}(c)$$

$$c = \frac{x^2}{x^3 + y^3}$$

"verificación"

$$\text{IMP\_DIF}\left(c - \frac{x^2}{x^3 + y^3}, x, y, c\right)$$

$$\frac{0.333333 \cdot (2 \cdot y^3 - x^3)}{x \cdot y^2}$$

"se verifica la ecuación"

"Otra forma de aplicar derivación implícita es usando el operador"

" d_impli(u,x,y):=-dif((u,x,1)/(dif(u,y,1)"

$$c - \frac{x^2}{x^3 + y^3} = 0$$

$$\text{D\_IMPLI}(u, x, y) := - \frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^1 u}{\left(\frac{d}{dy}\right)^1 u}$$

$$\text{D\_IMPLI}\left(c - \frac{x^2}{x^3 + y^3}, x, y\right)$$

$$\frac{0.333333 \cdot (2 \cdot y^3 - x^3)}{x \cdot y^2}$$

"se verifica la ecuación"

"expresamos cada función en forma paramétrica"

$x = t$

$y = (100 \cdot t^2 - t^3)^{1/3}$

"obtenemos las gráficas de las curvas integrales aplicando Plot sobre:"

$\left[t, (100 \cdot t^2 - t^3)^{1/3}\right]$

$\left[t, (50 \cdot t^2 - t^3)^{1/3}\right]$

$\left[t, \left(\frac{100}{3} \cdot t^2 - t^3\right)^{1/3}\right]$

$\left[t, (25 \cdot t^2 - t^3)^{1/3}\right]$

$\left[t, (20 \cdot t^2 - t^3)^{1/3}\right]$

"hallar la relación entre el ingreso y la cantidad demandada"

"cuando ésta es 10 y el ingreso es 0"

$$c = \frac{x^2}{x^3 + y^3}$$

$x := 10$

$y := 0$

$c = 0.1$

$$0.1 = \frac{x^2}{x^3 + y^3}$$

"es la relación pedida"

"para graficarla aplicamos Plot sobre"

$$\left[t,\ (10\cdot t^{2} - t^{3})^{1/3}\right]$$

"observar que si se aplica Plot sobre las expresiones siguientes,"

" la gráfica que se obtiene no corresponde al problema"

$$y = -x^{2/3}\cdot(x-10)^{1/3}$$

$$\left[x,\ -x^{2/3}\cdot(x-10)^{1/3}\right]$$

## BIBLIOGRAFÍA


SIMONIELLO, Ana M. *"Taller Introducción a los Modelos Dinámicos-Ecuaciones Diferenciales",* 98

GONZALEZ, A. - CALDERÓN, S. - GALACHE, T. - ORDOÑEZ, J. - TORRICO, A. *"Fundamentos de Optimización Matemática para la Economía y la Empresa"* RA-MA, 97

STEWART, James: *"Cálculo"* INT.TOMSON, 98 (3° Edición)

DOWLING, E.: *"Matemática para Economistas",* McGRAW-HILL, 89

DRAPER, Jean: "*Mathematical Analisis"* , HARPER & ROW, 67