

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

Fakulta stavební

Katedra stavební mechaniky

Numerické řešení 2D difuze s využitím MKP

Numerical solution of 2-D chloride diffusion problem using FEA

Student:

Petr Lehner

Vedoucí bakalářské práce:

Ing. Petr Konečný, Ph.D.

V Ostravě 2012

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta stavební
Katedra stavební mechaniky

Zadání bakalářské práce

Student: **Petr Lehner**

Studijní program: B3607 Stavební inženýrství

Studijní obor: 3607R037 Konstrukce staveb

Téma: Numerické řešení 2D difuze s využitím MKP
Numerical solution of 2-D chloride diffusion problem using FEA

Zásady pro vypracování:

K numerickému řešení 2D difuze bude použito MKP a tepelně-difuzní analogie. Práce bude sestávat z: (a) přípravy algoritmu pro řešení nestacionární difuze metodou konečných prvků, (b) implementace algoritmu, (c) ověření modelu na vhodném úloze. Řešení bude umožňovat jak interaktivní zadávání vstupů se zobrazením pole koncentrací výpisu koncentrace pro zvolenou souřadnici, tak spuštění v dávce s ohledem na využití v pravděpodobnostním posudku spolehlivosti.

The thermal-diffusion analogy for the numerical solution of 2-D chloride diffusion problem using FEA will be used for the solution. Thesis will consist of: (a) preparation of algorithm for non stationary diffusion using finite elements, (b) algorithm implementation, (c) validation of the model on suitable task. Solution will allow for interactive inputs, concentration field view, printout of concentration in given coordinates as well as for batch application with respect to probabilistic analysis.

Seznam doporučené odborné literatury:

Kolář, V., Kratochvíl, J., Leitner, F., Ženíček, A. Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL, Praha, 1979

Teplý, B., Šmiřák, S.: Pružnost a plasticita I I., VUT, Brno, 2000

Logan, D., L., First Course in the Finite Element method-3.rd ed.,Brooks/Cole, Pacific Groove, USA, ISBN:0-534-38517-6

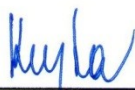
KONEČNÝ, P.. (2007): Reliability of Reinforced Concrete Bridge Decks with Respect to Ingress of Chlorides, Doktorská disertační práce
Fakulta stavební, VŠB – TU Ostrava, Ostrava
Numerical solution of 2-D chloride diffusion problem using FEA

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Petr Konečný, Ph.D.**

Datum zadání: 31.10.2011

Datum odevzdání: 30.04.2012



doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. Ing. Darja Kubečková Skulinová, Ph.D.
děkanka fakulty

Prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě.....

.....

podpis studenta

Prohlašuji, že

- byl jsem seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k presenčnímu. Souhlasím s tím, že údaje o bakalářské práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č.111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě.....

.....

podpis studenta

Anotace

U železobetonových mostů existuje několik faktorů ovlivňujících jejich životnost. Jedním z kritických problémů je koroze výztuže způsobená pronikáním posypových solí.

Modelování degradace železobetonu je aktuální úkol s mnoha náhodnými vstupními parametry. Při pravděpodobnostním posudku metodou Monte Carlo je však použito velké množství simulačních kroků. To vede i při dnešní úrovni výpočetní techniky k časově náročným výpočtům. Cílem práce v této oblasti je naprogramování nástroje, který bude v konečném důsledku schopný urychlit celý proces výpočtu.

Prvním krokem je příprava a implementace algoritmu v prostředí programu MatLab, který při výpočtu sice nemá požadovanou rychlost, ale zdá se být vhodným nástrojem pro pochopení daného problému.

Práce pojednává o postupu vytvoření modelu nestacionární difuze chloridů a výpočtu chloridové koncentrace a obsahuje také ověření výsledků porovnáním s dostupným řešením.

Klíčová slova

Difuze chloridů, nestacionární úloha, algoritmus, MKP, železobeton.

Annotation

Concrete bridges life time affecting several factors. Corrosion of reinforcement caused by deicing salts penetration through the concrete bridges is one of the critical.

Modeling of concrete degradation is the current task with a lot of random input parameters. There is needed large number of simulation steps in the probabilistic assessment using Monte Carlo. That leads to time-consuming calculations even in current level of computerization. Programming algorithm to accelerate the process of calculation is the aim of the research.

The first step is the preparation and implementation of the algorithm in MatLab software. It is not fast, but it seems to be a useful tool for understanding the problem.

The work discusses preparation of a model of transient diffusion of chloride, calculation of the chloride concentration and the example shows the functionality of the program.

Keywords

Diffusion of chloride, nonstationary task, algorithm, FEM, reinforced concrete.

Obsah bakalářské práce

| | |
|--|----|
| Seznam použitého značené | IX |
| Řecké symboly | IX |
| Ostatní symboly | IX |
| 1. Úvod | 1 |
| 1.1. Difuze chloridů železobetonovou mostovkou | 1 |
| 1.2. Trhlina na povrchu mostovky | 2 |
| 1.3. Základní princip MKP | 3 |
| 1.4. Numerické modelování difuze | 4 |
| 2. Cíle bakalářské práce | 5 |
| 2.1. Rozsah bakalářské práce | 5 |
| 3. Model nestacionární difuze chloridů | 7 |
| 3.1. Teplotní analýza | 7 |
| 3.2. Teplotně-difuzní analogie | 11 |
| 4. Implementace algoritmu | 13 |
| 4.1. Vstupní parametry | 13 |
| 4.2. Vytváření prvků a zadání trhlin | 14 |
| 4.3. Výpočetní část | 15 |
| 4.4. Grafické a textové možnosti výstupu | 16 |
| 5. Řešené úlohy | 19 |
| 5.1. Porovnání s 1D rovnicí difuze | 19 |
| 5.2. 2D úloha v porovnání s modelem v programu ANSYS | 21 |
| 6. Závěr | 27 |
| 7. Seznam použitých pramenů | 29 |
| 8. Přílohy | 30 |
| Poděkování | 38 |

Seznam použitého značení

| | |
|------------------|---|
| A | plocha kolmá na tepelný tok [m^2] |
| c | tepelnou kapacitu [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$] |
| C_0 | efektivní koncentrace rozpustitelných chloridových iontů [% hmotnosti cementu] na povrchu konstrukce |
| C_{th} | limitní koncentrace chloridů [%] |
| $C_{x,t}$ | koncentrace chloridů [%] v hloubce x [m] po čase t [s] |
| $C_{x,z,t}$ | koncentrace chloridů [%] v určitém místě konstrukce po čase t [s] |
| D | difuzní součinitel [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] |
| D_c | difuzní součinitel chloridových iontů v betonu [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$] |
| E_{in} | teplo vstupující do úlohy [J] |
| E_{gen} | teplo generované vnitřním zdrojem [J] |
| E_{out} | vystupující teplo [J] |
| t | čas [s] |
| q_x | teplo vstupující do úlohy na okraji x [W/m^2] |
| q_{x+dx} | teplo vstupující do úlohy na okraji x+dx [W/m^2] |
| Q | vnitřní zdroj [W/m^3] |
| ΔU | změna energie [J] |

Řecké symboly

| | |
|-----------|--|
| ρ | hustotu materiálu [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$] |
| λ | součinitele tepelné vodivosti [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$] |

Ostatní symboly

| | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| x! | faktoriál x |
| $\frac{\partial ()}{\partial t}$ | parciální derivace podle času t |
| $\frac{\partial ()}{\partial x}$ | parciální derivace podle x |

1. Úvod

V dnešní době se u stavebních konstrukcí bere velký ohled nejen na náklady při pořízení stavby, ale hlavně na jejich údržbu a nevyhnutelné rekonstrukce. To vše se projeví do skutečných celkových nákladů, které zatěžují současné i budoucí veřejné rozpočty. Velkou úlohu při návrhu kvalitnějších konstrukcí, odolnějších proti danému zatížení a prostředí, přebírají degradační modely. Jejich správné pochopení a implementace na daný problém jsou jedním z důležitých kroků k odhadu chování stavebních konstrukcí a následným úsporám.

Řada výzkumných skupin po celém světě se dlouhodobě zabývá problematikou trvanlivosti mostů a snahou o prodloužení jejich životnosti. Konstrukce, které mají vydržet dlouhý časový úsek bez nutnosti náročné a drahé rekonstrukce, jsou jasným cílem dnešní společnosti. Bezpečný a spolehlivý návrh ze statického hlediska je samozřejmostí. Kvalitní odhad degradačních procesů umožňuje těchto cílů dosáhnout.

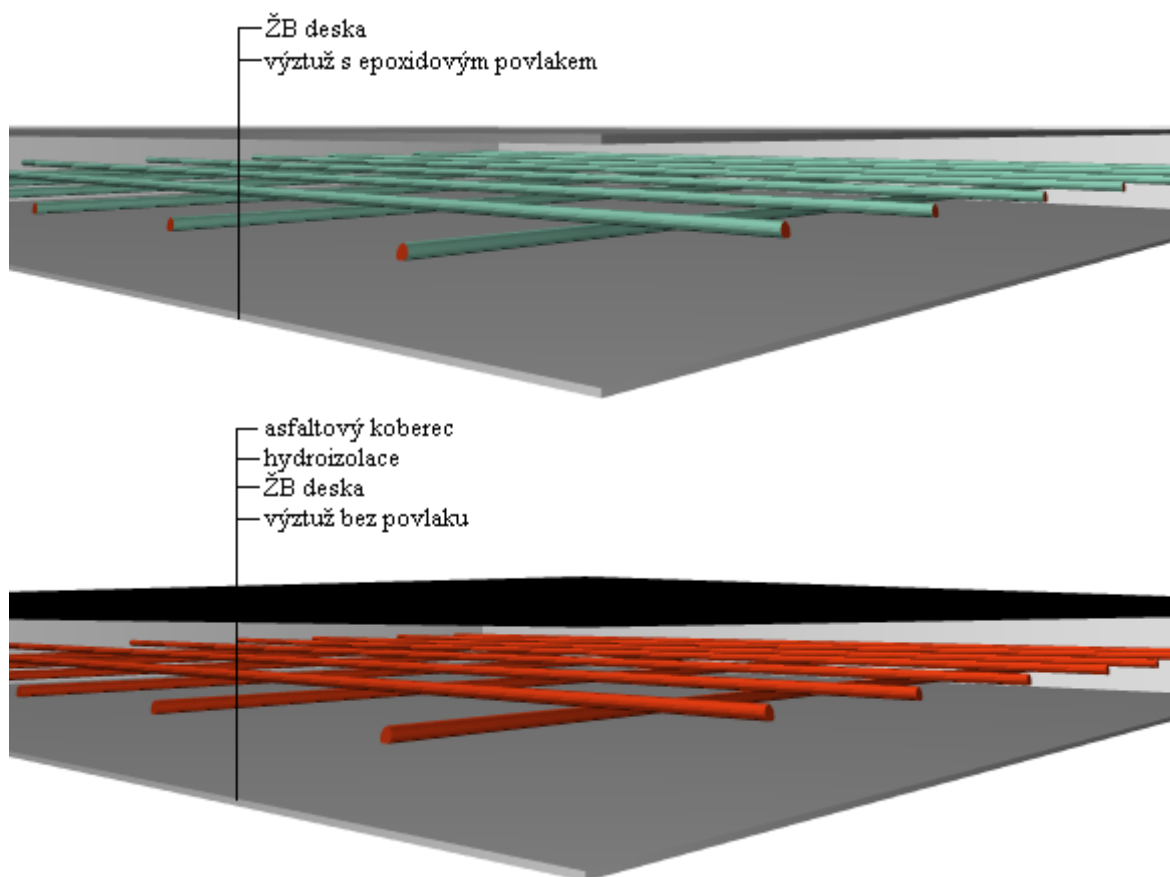
U železobetonových mostů mohou hrát velkou roli chemicky agresivní látky. Nejvýznamnějším faktorem je průnik posypových solí přes krytí k ocelové výztuži, které vyvolávají její korozi a celkový pokles únosnosti dané konstrukce. V případě mostu bez hydroizolace na povrchu používaného ve Spojených státech k tomuto procesu přezpívají také trhliny v mostovce. Správné předpoklady a výpočetní modely jsou tedy v tomto případě o to důležitější z důvodu bezpečnosti i finanční náročnosti.

1.1. Difuze chloridů železobetonovou mostovkou

Jak již bylo řečeno, nejvýznamnějším důvodem oprav železobetonových mostovek je koroze výztuže vyvolána průnikem posypových solí (chloridových iontů) přes krytí. Proces průniku je řízen difuzním dějem uskutečněným velkým počtem náhodně přeskakujících atomů a iontů, které se snaží vytvořit v konstrukci rovnovážný stav.

Difuze je přenosový proces, při němž dochází k přemístění látky z míst s větší koncentrací, do míst, kde je koncentrace menší. Celý děj je samovolný a snaží se o vyrovnání rozdílů mezi jednotlivými koncentracemi.

Ve střední Evropě se při ochraně hojně využívá izolace na povrchu nosné konstrukce, ale ve Spojených státech se rozšířila epoxidová pryskyřice přímo na ocelové výztuži (viz obr. 1.1). U obou způsobů však dochází k porušení ochrany, průniku chloridových iontů k výztuži a předčasné korozi.

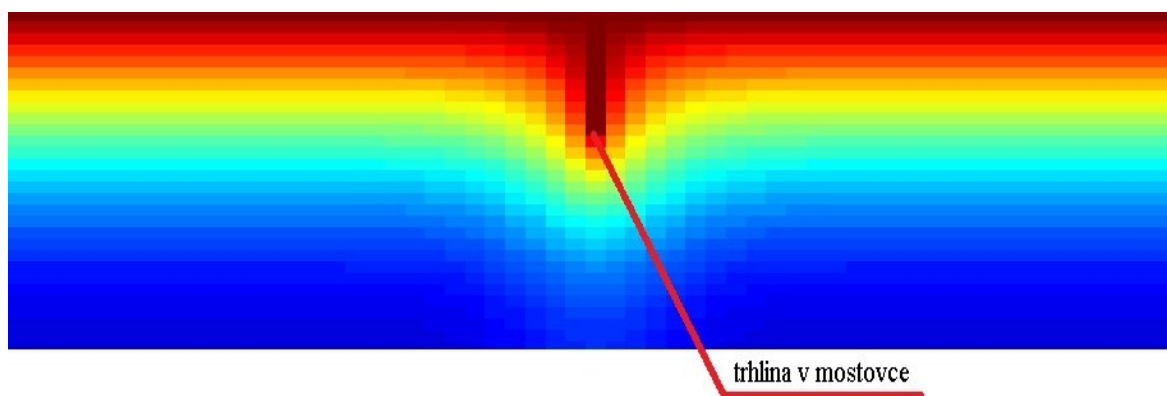


Obr. 1.1 Model železobetonové mostovky s výztuží s epoxidovým povlakem (nahore) a s hydroizolací na nosné desce (dole)

1.2. Trhlina na povrchu mostovky

Výztuž v uvažované mostovce zabraňuje vzniku trhlin, ale poznatky v dané problematice dokazují, že k porušení přesto dochází ([4] KONEČNÝ 2007). Trhlina v mostovce vystavené působení posypových solí umožňuje rychlejší průnik chloridových iontů, a proto je nutné při výpočtu uvažovat s počáteční koncentrací chloridů nejen na povrchu, ale i v celé hloubce trhliny v betonu.

Díky difuznímu principu je celá konstrukce sycena nejen od povrchu mostovky, ale také přímo z trhliny. V té se předpokládá stejná hodnota koncentrace, jako na povrchu. Na detailu v místě trhliny (obr. 1.2) je patrný plynulý přechod koncentrace po určité době difuzního procesu. Viditelná je i logicky větší hodnota koncentrace v místě pod trhlinou, než pod ostatními částmi konstrukce ve stejné hloubce. To je taky důvod, proč není možno vliv trhliny při výpočtu koncentrace zanedbat.



Obr. 1.2 Detail koncentrace chloridových iontů v místě trhliny

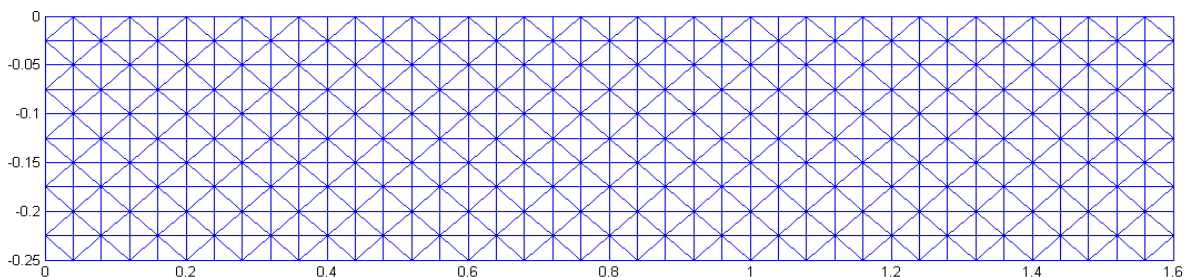
1.3. Základní princip MKP

Metoda konečných prvků (angl.. FEM Finite Element Method) je dnes nejčastěji užívaná univerzální metoda pro numerické řešení úloh. Od svého vzniku v 50. letech minulého století se rozšířila od řešení strukturní analýzy a složitých úloh pružnosti do všech vědních oborů. Masovému využití této metody napomohl vývoj výpočetní techniky, díky které je možné uskutečnit složité matematické operace.

Celý výpočet MKP vychází z principu virtuálních prací (také označovaného jako Lagrangeův princip) – *Těleso je v rovnováze, jestliže celková potenciální energie deformace soustavy je minimální.* Jinak řečeno každá část tělesa se snaží o tuto rovnováhu při vynaložení co nejmenší energie.

Diskretizace spojitého kontinua fyzikálního modelu do určitého počtu prvků umožňuje zjištění parametrů v jednotlivých uzlových bodech mezi prvky. Konstrukce může být rozdělena

nepravidelnými polygony nebo pravidelnou sítí uzlů (obr 1.3). Při větším počtu prvků roste přesnost, ale také výpočetní náročnost.



Obr. 1.3 Ukázka diskretizace modelu konstrukce

1.4. Numerické modelování difuze

Z výše popsaných poznatků vyplývá, že zmíněnou konstrukci je nutno posuzovat pravděpodobnostně a to zákonitě přináší nutnost velkého počtu vstupních parametrů.

V dizertační práci pana doktora Petra Konečného: *Posouzení spolehlivosti železobetonové mostovky s ohledem na působení chloridů* [4], se využívá při výpočtu hledaných hodnot chloridové koncentrace na 2D modelu komerčního MKP programu ANSYS. Využití těchto vstupních dat při výpočtu metodou Monte Carlo může být zdlouhavé, a proto je důležité vyvinout metodu jak celý proces urychlit.

Na pracovišti katedry Stavební mechaniky v Ostravě je k dispozici open source MKP software uFEM ([3] BROŽOVSKÝ2010), který umožňuje modelovat 2D stacionární teplotní problémy. Kombinace uFEM a pravděpodobnostní nástroj Monte ([2] BROŽOVSKÝ2010) představují potenciál pro poměrně efektivní pravděpodobnostní analýzu MKP úlohy.

Dále se zde používá při modelování 1D nestacionární úlohy software Korozeeneck ([5] KONEČNÝ, BROŽOVSKÝ, GHOSH).

2. Cíle bakalářské práce

Základní metou předložené práce je odvození a implementace algoritmu pro nestacionární 2D úlohu difuze chloridů železobetonovou mostovkou programu MatLab, který bude sloužit jako podklad pro další rozvoj programu uFEM [3]. Metoda MKP je aplikována na modelu konstrukce mostovky bez hydroizolačního povlaku, který je užíván v oblastech Severní Ameriky, a proto je zde zohledněna trhлина v mostovce.

Práce se tak v zásadě soustředí na tyto cíle:

- a) Odvození MKP modelu teplotní analýzy, převod na nestacionární difuzní problém a příprava algoritmu použitelného při výpočtu.
- b) Implementace algoritmu a získání chloridové koncentrace s možností využití při pravděpodobnostním posudku spolehlivosti konstrukce. Možnost interaktivního vstupu i pro uživatele bez znalostí programovacího jazyka. Grafické i textové výstupy dle specifických požadavků uživatele.
- c) Ověření modelu na úlohách, které se dají porovnat s dostupnými daty.

2.1. Rozsah bakalářské práce

V úvodní kapitole je popsána problematika koroze výztuže v železobetonové mostovce způsobená difuzí posypových solí. Dále je zde uvedena podstata metody konečných prvků, její aplikace na difuzní nestacionární úlohu ve 2D a současný stav výzkumu dané problematiky na katedře Stavební mechaniky v Ostravě.

Kapitola 3. nazvaná *Model nestacionární difuze chloridů* obsahuje odvození konečného prvku MKP aplikované na teplotní analýzu. Vysvětlení analogie s difuzí chloridových iontů je rozpracována v druhé podkapitole tohoto bodu.

Hlavní částí práce je kapitola 4. *Implementace algoritmu*. Jak název kapitoly napovídá, pojednává o aplikaci připraveného algoritmu v programátorském prostředí softwaru MatLab. Popisuje postup výpočtu z hlediska uživatele a vysvětluje posloupnost dějů. Vstupní, výpočetní a výstupní část programu je přehledně zdokumentována.

Funkčnost programu je dokázána v kapitole 5. *Řešené úlohy*. V první úloze jsou porovnány výsledky chloridové koncentrace s přímým výpočtem 1D problému. V druhé části jsou využity výstupy z komerčního systému ANSYS, ve kterém je aplikována metoda konečných prvků přímo na danou úlohu 2D nestacionární difuze.

Před výpisem použité literatury jsou v závěru práce popsány vyvstalé problémy při daném řešení a možnosti postupů při dalším výzkumu.

Přílohy obsahují opis výpočetního algoritmu vytvořeného v softwaru MatLab a ukázky grafických výstupů, které nejsou použity v hlavních kapitolách. Celý algoritmus se všemi přidruženými soubory a výsledky je přiložen na CD-ROM k bakalářské práci.

3. Model nestacionární difuze chloridů

Difuze chloridových iontů je stejně jako vedení tepla jedním z transportních procesů. Oba případy lze popsat systémem parciálních diferenciálních rovnic, které se následně řeší variační metodou MKP. Zkoumaný problém spadá do kategorie nestacionární difuze, při které do prvku přichází více látky, než z něho odchází, a proto v něm s časem roste koncentrace.

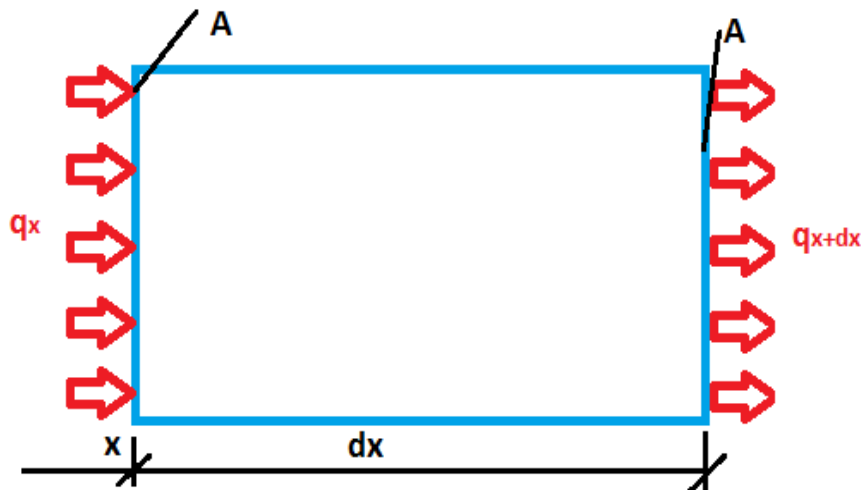
3.1. Teplotní analýza

3.1.1. Rovnice nestacionárního vedení tepla

Prvním krokem je odvození rovnice nestacionárního vedení tepla, což popisují Brožovský a Materna v publikaci *Metoda konečných prvků ve stavební mechanice* ([1] BROŽOVSKÝ, MATERNA 2012). Základní rovnice vedení tepla má tvar:

$$E_{in} + E_{gen} = \Delta U + E_{out} \quad /3.1/$$

kde E_{in} je teplo vstupující do úlohy [J], E_{gen} je teplo generované vnitřním zdrojem [J], ΔU je změna energie [J] a E_{out} je vystupující teplo [J].



Obr. 3.1 Schéma vedení tepla prvkem

Rovnici 3.1 upravíme dle obr. 3.1 na:

$$q_x A dt + Q A dx dt = \Delta U + q_{x+dx} A dt \quad /3.2/$$

kde q_x je teplo vstupující do úlohy na okraji x [W/m^2], q_{x+dx} je teplo vstupující do úlohy na okraji $x+dx$ [W/m^2], t je čas [s], Q je vnitřní zdroj [W/m^3], A je plocha kolmá na tepelný tok [m^2].

$$q_x = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad /3.3/$$

Fourierův zákon dle rovnice /3.3/ popisuje, že vektor tepelného toku q_x je úměrný gradientu teploty $\frac{\partial T}{\partial x}$ a součiniteli tepelné vodivosti λ [$Wm^{-1}K^{-1}$].

Taylorovým rozvojem a dosazením do vzorce 3.3 získáme:

$$q_{x+dx} = -\left[\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{d}{dx} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\right] \quad /3.4/$$

Důležitá je změna energie ΔU , která je závislá na měrné tepelné kapacitě c [$W.h/kg.K$] a na objemové hmotnosti ρ [kg/m^3] ve vztahu:

$$\Delta U = c(\rho A dx) dT \quad /3.5/$$

Dosazením a úpravou výrazů /3.3/, /3.4/ a /3.5/ do základní rovnice /3.2/ získáme hledanou rovnici nestacionární úlohy tepla:

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + Q = \frac{c\rho \partial T}{\partial t} \quad /3.6/$$

3.1.2. Odvození konečného prvku

Proces odvození konečného prvku 2D nestacionární úlohy tepla vychází z přednášek *Numerická analýza transportních procesů* pana doktora Tomáše Krejčího z ČVUT ([6] KREJČÍ 2012). V práci je použit trojúhelníkový izoparametrický prvek, který je popsán

interpoláčními básovými funkcemi N (obr 3.2). Plošné souřadnice ξ , které jsou shodné s funkcemi N , odvodíme z ploch trojúhelníků:

$$N_1 = \xi_1 = \frac{a_1}{a} \quad N_2 = \xi_2 = \frac{a_2}{a} \quad N_3 = \xi_3 = \frac{a_3}{a} \quad /3.7/$$

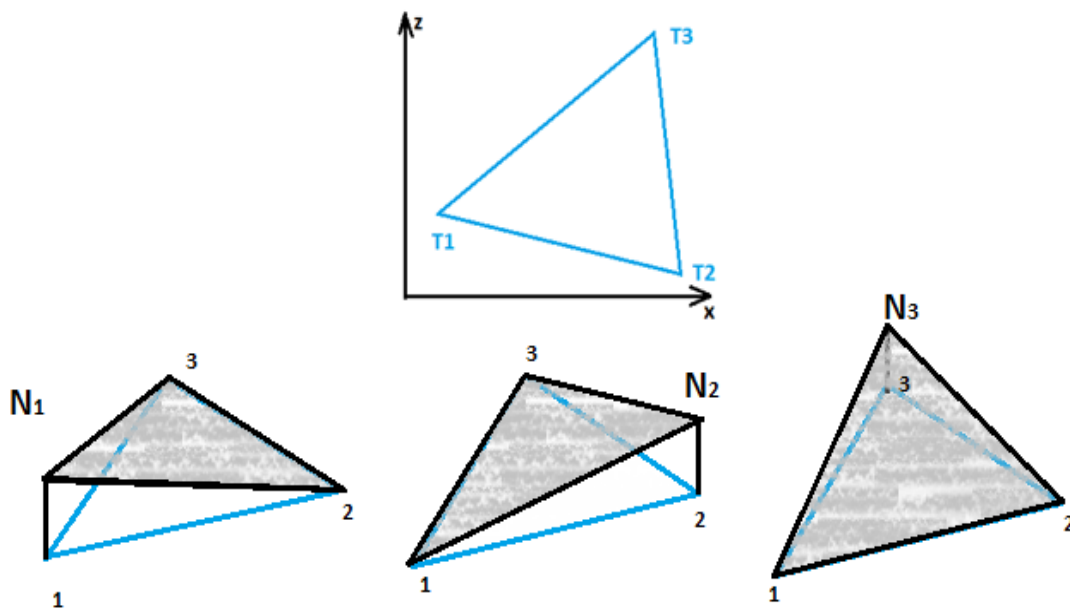
Vztahy mezi plošnými souřadnicemi a kartézskou soustavou vypadají takto:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \quad /3.8/$$

$$z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 \quad /3.9/$$

Inverzí výrazů /3.8/ a /3.9/ získáme:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 z_3 - x_3 z_2 & z_2 - z_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 z_1 - x_1 z_3 & z_3 - z_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 z_2 - x_2 z_1 & z_1 - z_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad /3.10/$$



Obr. 3.2 Trojúhelníkový izoparametrický prvek a jeho básové funkce

Aproximací teplot, které jsou vztaženy na každý uzel (obr. 3.2) dle vztahu:

$$\{T\} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} \quad /3.11/$$

získáme matici B obsahující gradienty teplot, která je po prvku konstantní:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} Z_{23} & Z_{31} & Z_{12} \\ X_{32} & X_{13} & X_{21} \end{bmatrix} \quad /3.12/$$

Matici vodivosti K , které je analogickou s maticí tuhosti u deformačně-napěťové analýzy, získáme úpravou:

$$K = \int_V B^T \lambda B dV = a B^T \lambda B \quad /3.13/$$

Dále je nutno získat matici kapacity C , která je analogická s maticí hmotnosti. Využijeme báze funkce N z vztahu /3.7/ a dosadíme do rovnice:

$$C = \int_V N^T \rho c N dV = a N^T \rho c N \quad /3.14/$$

Získané matice vodivosti K a kapacity C použijeme pro získání diskrétní podoby rovnice vedení tepla. Zjednodušeně se dá princip virtuálních prací popsat jako rovnost vnitřních a vnějších energií, které udržují těleso v rovnováze. Podmínku rovnosti vnějších a vnitřních virtuálních prací a teplotního toku, kterou odvodil Krejčí [6] z rovnice nestacionární úlohy tepla /3.6/, zapíšeme maticově:

$$K r + C \frac{dr}{dt} = f \quad /3.13/$$

kde r je matice neznámých uzlových teplot a $\frac{dr}{dt}$ je jejich časová derivace. Pravou stranu (teplotní toky) f získáme z upravené Dirichletovy okrajové podmínky:

$$f = -K r_a \quad /3.14/$$

V rovnici se využije matice vodivosti konstrukce K a vektor počátečních okrajových podmínek r_a (teploty na okraji konstrukci).

3.1.3. Časová diskretizace

V diskrétní podobě rovnice vedení tepla se vyskytuje časová derivace uzlových teplot. Při výpočtu potřebujeme časový interval Δt . Za předpokladu, že známe řešení r_{i-1} bude lineární aproximace vypadat takto:

$$r(t) = \tau r_i + (1 - \tau)r_{i-1} \quad /3.15/$$

kde pomocnou konstantu τ získáme ze vztahu:

$$\tau = (t_i - t_{i-1}) / 2\Delta t. \quad /3.16/$$

Vzhledem k tomu, že rozdíl mezi časem t_i a t_{i-1} je roven Δt je ve výpočtu dosazena za konstantu τ hodnota 0,5.

Po dosazení vztahu /3.15/ a /3.16/ do rovnice /3.13/ získáme v maticovém zápise:

$$r_{(t)} = (K * \tau + C / \Delta t) \setminus (f^T + (C / (\Delta t) - K * (1 - \tau)) * r_{(t-1)}) \quad /3.17/$$

Těmito rovnicemi získáme hledaný vektor neznámých r_i .

3.2. Teplotně-difuzní analogie

V úvodu kapitoly je uvedeno, že teplotní problém a difuze chloridových iontů patří mezi transportní procesy a lze je považovat za matematicky analogické. Pro odvození teplotního procesu jsme využili Fourierův zákon a rovnici /3.6/:

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Q = \frac{c\rho\partial T}{\partial t}$$

kde se snažíme získat teploty T [K] na uzlech a jako známé hodnoty uvažujeme:

- hustotu materiálu ρ [kg.m⁻³]
- tepelnou kapacitu c [J.kg⁻¹.K⁻¹]
- součinitele tepelné vodivosti λ [Wm⁻¹K⁻¹]
- hloubku hledané koncentrace x [m]
- čas t [s].

Naopak u difuze chloridových iontů využijeme druhý Fickův zákon:

$$D_c \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t} \quad /3.18/$$

kde je hledanou neznámou koncentrace v uzlech C [%] a vstupními parametry jsou:

- difuzní součinitel D_c [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$]
- hloubka hledané koncentrace x [m]
- čas t [s].

Změna koncentrace v závislosti na čase je vyjádřena členem $\frac{\partial C}{\partial t}$ křivost v daném místě x vyjadřuje $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$. Na rozdíl od Fourierovy rovnice 3.6 neobsahuje Fickova rovnice vnitřní zdroj, který by přispíval ke koncentraci.

Podobnost výše popsaných rovnic je využita při implementaci algoritmu a projeví se při výpočtu záměnou konstant vstupujících do matice vodivosti K a kapacity C .

V matici vodivosti K se nahradí součinitel tepelné vodivosti λ za difuzní součinitel D_c :

$$K = AB^T D_c B \quad /3.19/$$

Matice kapacity C obsahuje hustotu materiálu ρ a tepelnou kapacitu c , které v úloze difúze chloridových iontů nevystupují:

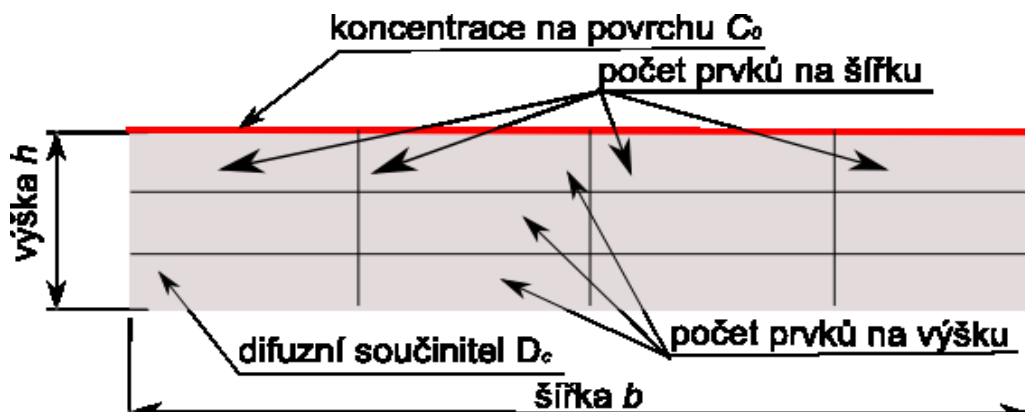
$$C = AN^T N \quad /3.20/$$

4. Implementace algoritmu

Výpočetní program je vytvořen v softwaru MatLab 7.10.0.854 (R2010b). Je tvořen hlavním a jedním vedlejším souborem. Hlavní soubor je v zásadě rozdělen na čtyři části samostatně popsané v níže uvedených podkapitolách. Program s uživatelem komunikuje jasnými a srozumitelnými volbami a dotazy.

4.1. Vstupní parametry

Kromě základních geometrických rozměrů jako je šířka b a výška h konstrukce v metrech, uživatel zadává i počet konečných prvků v obou směrech zobrazení. Dále se zadává charakteristická materiálová hodnota D_c , což je součinitel difuze, který udává prostup 1 m^2 soli za rok. Důležitá je i koncentrace chloridu na povrchu C_0 (%). V průběhu zadávání je pro názornost zobrazen obr. 4.1.



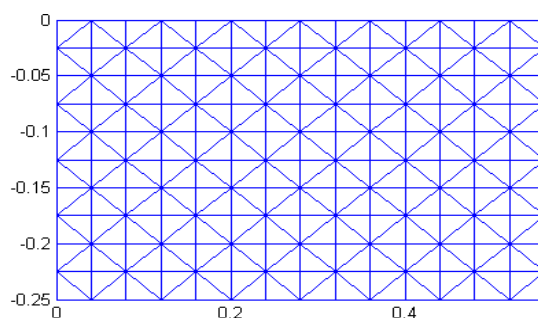
Obr. 4.1 Vstupní hodnoty algoritmu

Vzhledem k výše zmíněnému a zjevnému vlivu trhliny v krytí na prostup chloridu k výztuži, je nutno do výpočtu zavést i její umístění a hloubku. Na tyto hodnoty je však uživatel tázán až v průběhu druhé fáze programového procesu. Stejně tak uživatel ovlivní počet výpočetních kroků, jak je popsáno v kapitole 4.3.

Pro výslednou koncentraci je nutno zadat požadované souřadnice umístění a čas, ve kterém se má daná veličina vyhledat. Všechny tyto údaje uživatel zadává až po výpočtu (kapitola 4.4.2.), kdy si vybere jednu z možností výstupních procedur.

4.2. Vytváření prvků a zadání trhlin

Tvorba uzlů a prvků na konstrukci probíhá automaticky a skrytě. Velikost elementu je určena podílem šířky (výšky) a počtu prvků na šířku (výšku). Tyto hodnoty jsou pak použity při tvorbě uzlové sítě konstrukce. Ta má vzhledem k povaze konstrukce počátek souřadnic v horním levém okraji a hodnoty ve svislém směru jsou záporné. V programu byl zvolen trojúhelníkový konečný prvek. Pro přesnější výsledky je však zajištěno vystřídání jednotlivých prvků (obr. 4.2). Koncentrace tak nemá tendenci inklinovat jen k jednomu směru.



Obr. 4.2 Protisměrné vytváření konečných prvků

Následuje vytvoření matice okrajových podmínek. Zde se projeví dříve zadaná koncentrace chloridů na povrchu C_0 (%). Všechny uzly v místě horního okraje vozovky jsou označeny touto hodnotou, což bude využito v pozdějším výpočtu. Také je zde nutná interakce s uživatelem, který zadává parametry trhlin na povrchu konstrukce (obr. 4.3).

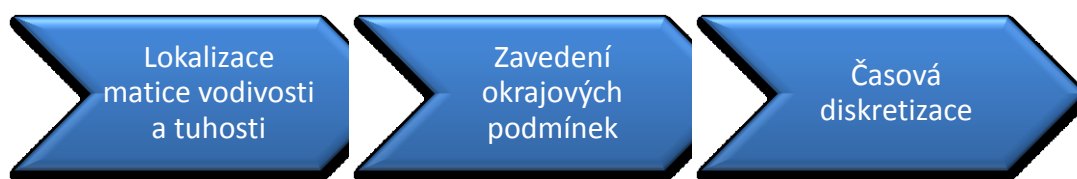


Obr. X Diagram vstupních parametrů trhlin

Algoritmus zavede koncentraci i do uzlů v těsné blízkosti trhlin a tím je zajištěna v úvodu popsaná podmínka vlivu trhliny.

4.3. Výpočetní část

Samotný výpočet hledané chloridové koncentrace na uzlech modelu je rozdělen do několika cyklů a kroků.



Obr. 4.4 Proces výpočtu

4.3.1. Lokalizace matice vodivosti a tuhosti

V prvním cyklu jsou dle rovnic /3.19/ a /3.20/ vytvořeny matice vodivosti K a kapacity C pro jednotlivé prvky a následně jsou lokalizovány do globálních matic celého modelu. Lokalizace probíhá na základě kódových čísel jednotlivých uzlů na prvcích, kdy je vždy přičtena hodnota v daném místě.

Globální matice vodivosti K a kapacity C mají v konečném důsledku symetrický rozměr velikosti největšího kódového čísla. Tento popsáný cyklus probíhá dle počtu konečných prvků v modelu.

Vzhledem ke snaze o rychlý výpočet je před daným cyklem provedeno tzv. vynulování, kdy jsou do všech matic zavedeny nulové hodnoty, aby nedocházelo k postupnému narůstání jejich velikosti a tím ke zpomalení výpočtu.

4.3.2. Zavedení okrajových podmínek

Následuje druhý krok výpočtu, ve kterém je vytvořen zatěžovací vektor a upraveny matice vodivosti a kapacity. Zatěžovací vektor f vychází z vektoru okrajových podmínek r_d maticovým přepočtem přes vodivost modelu K dle rovnice /3.14/.

Okrajové podmínky musí být zavedeny i do matice vodivosti C a kapacity K a to vynulováním příslušného řádku a sloupce a zapsáním jedničky na diagonálu.

4.3.3. Časová diskretizace a vykreslovací matice

V tomto cyklu do výpočtu vstupuje čas. Uživatel je požádán o zavedení poslední vstupní hodnoty potřebné pro výpočet a tou je počet časových kroků. Předtím je informován o přibližné velikosti jednoho kroku, pro lepší určení požadované hodnoty.

V cyklu, který se opakuje podle počtu časových kroků, probíhá časová diskretizace dle vztahu /3.17/ popsaného v kapitole 3.1. :

$$r_{(t)} = (K * \tau + C / \Delta t) \setminus (f' + (C / (\Delta t) - K * (I - \tau))) * r_{(t-1)}$$

Popsaný cyklus nejvíce zatěžuje operační paměť počítače, a proto výpočet trvá v porovnání s ostatními částmi déle. Pro přehlednost je uživatel informován o každém desátém kroku výpočtu textovým výstupem.

Zbývá vytvoření tzv. vykreslovací matice konstrukce. Jedná se o patrovou matici, jejíž rozměry určuje počet uzlů v modelu a výšku počet časových kroků.

Obsahuje koncentrace chloridů ve všech časových intervalech na všech bodech a je použita při grafickém a textovém výpisu.

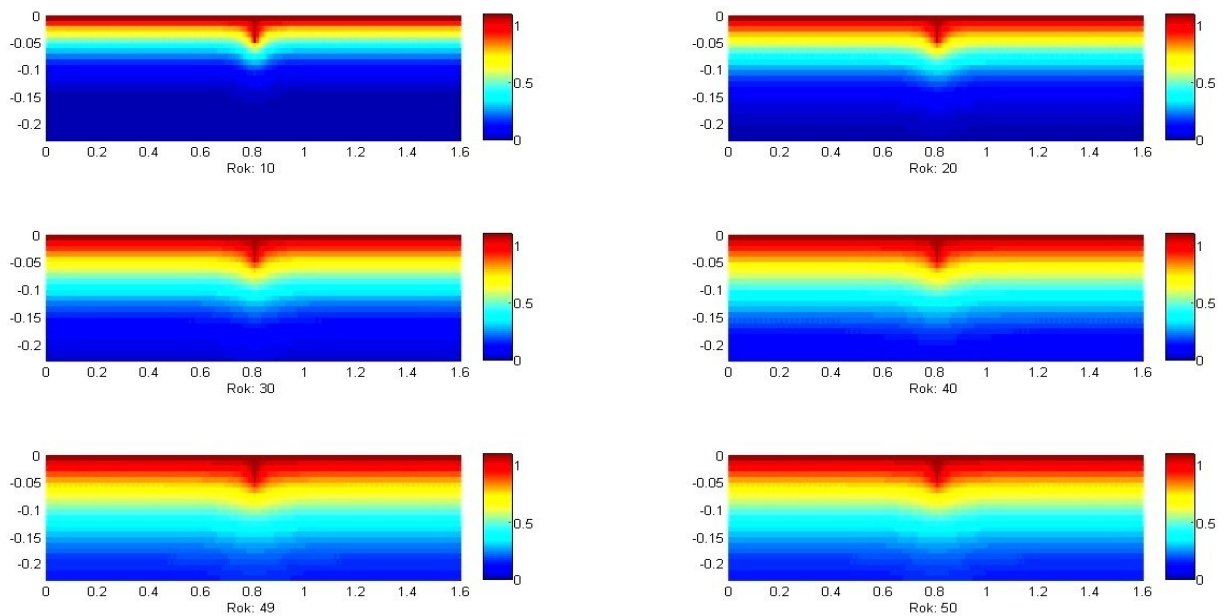
4.4. Grafické a textové možnosti výstupu

Když program vypočte a zapíše koncentrace, jsou pro uživatele důležité způsoby jejich zobrazení a možnosti kontroly dle vlastního zadání.

4.4.1. Grafické výstupy

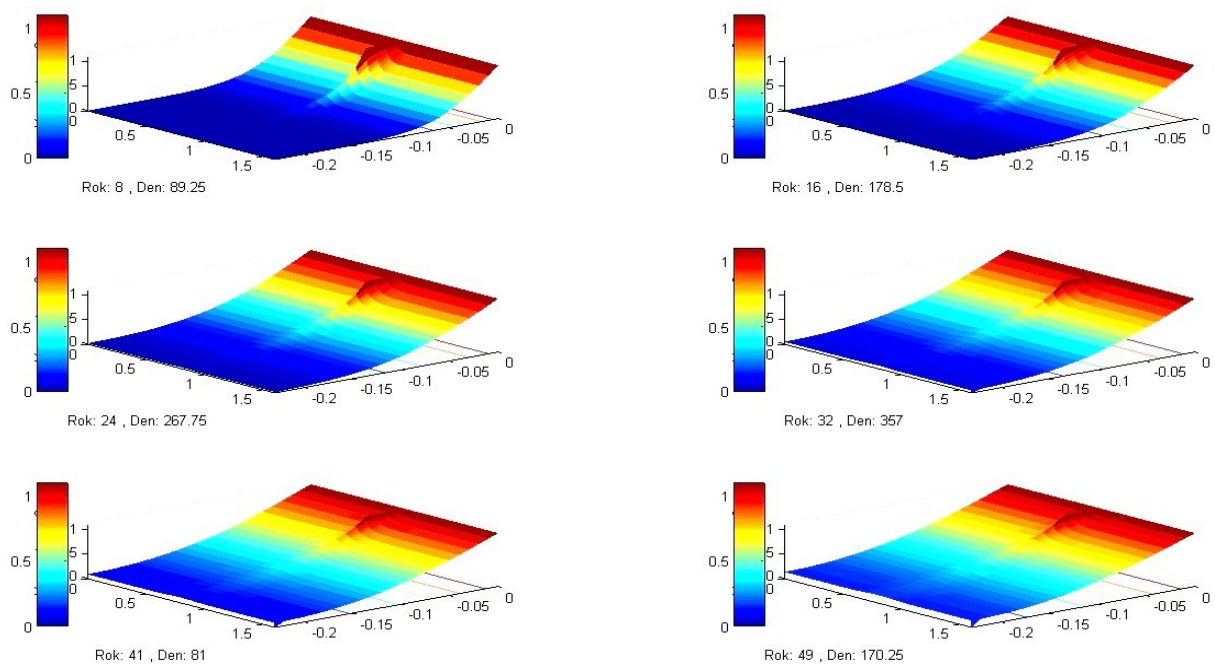
Vzhledem k velkému počtu hodnot je pro celkový přehled výhodné grafické zobrazení. Uživatel si může vybrat mezi třemi možnostmi.

Tou první je kombinace několika 2D grafů s různým časovým odstupem (obr. 4.5).



Obr. 4.5 Příklad 2D grafického výstupu

Další možností jsou 3D grafy, jejímž třetím rozměrem je hodnota koncentrace chloridových iontů. V tomto zobrazení je dobře patrný rozdíl v místě trhliny (obr. 4.6).



Obr. 4.6 Příklad 3D grafického výstupu

Uložení difuzního postupu do videosouboru, ve kterém je velice přehledně patrný průběh průniku chloridů přes železobetonovou mostovku, je poslední z grafických možností implementovaných do programu.

4.4.2. Konkrétní hodnoty koncentrace

Výše popsané možnosti slouží ke kontrole a prezentaci výsledků výpočtu. Při využití např. u pravděpodobnostního výpočtu je nutné získání konkrétní hodnoty, dle času a místa v konstrukci. Pro tento případ slouží poslední část algoritmu, ve které má možnost uživatel nebo nadřazený program načíst neomezený počet hodnot koncentrace.

Trojitou interpolací času a obou osových souřadnic jsou docíleny požadované přesné výsledky. Ty jsou vypsány do tabulky v prostředí programu. Uživatel má možnost celou akci opakovat a získat tak další hledané hodnoty.

5. Řešené úlohy

V této kapitole jsou uvedeny dva příklady, na kterých je zkontrolována funkčnost implementovaného algoritmu.

5.1. Porovnání s 1D rovnicí difuze

První část se zaměřuje na pronikání chloridů do konstrukce bez trhliny v betonové mostovce, kterou popisuje 1D model. Jeho hodnoty však lze srovnat s 2D numerickým modelem popsáním v této práci. Ke kontrole výsledků chloridové koncentrace se využívá upravené Crankovo řešení [4] diferenciální rovnice druhého Fickova zákona:

$$C_{x,t} = C_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{14} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{\sqrt{4D_c t}} \right)^{2n+1}}{n!(2n+1)} \right\} \quad /5.1/$$

kde je $C_{x,t}$ koncentrace chloridových iontů (%) v čase t a hloubce x . Ve výpočtu se vyskytuje koncentrace chloridu na povrchu C_0 (%) a charakteristická materiálová hodnotou D_c , což je součinitel difuze, který udává prostup soli přes 1 m^2 konstrukce za rok působení.

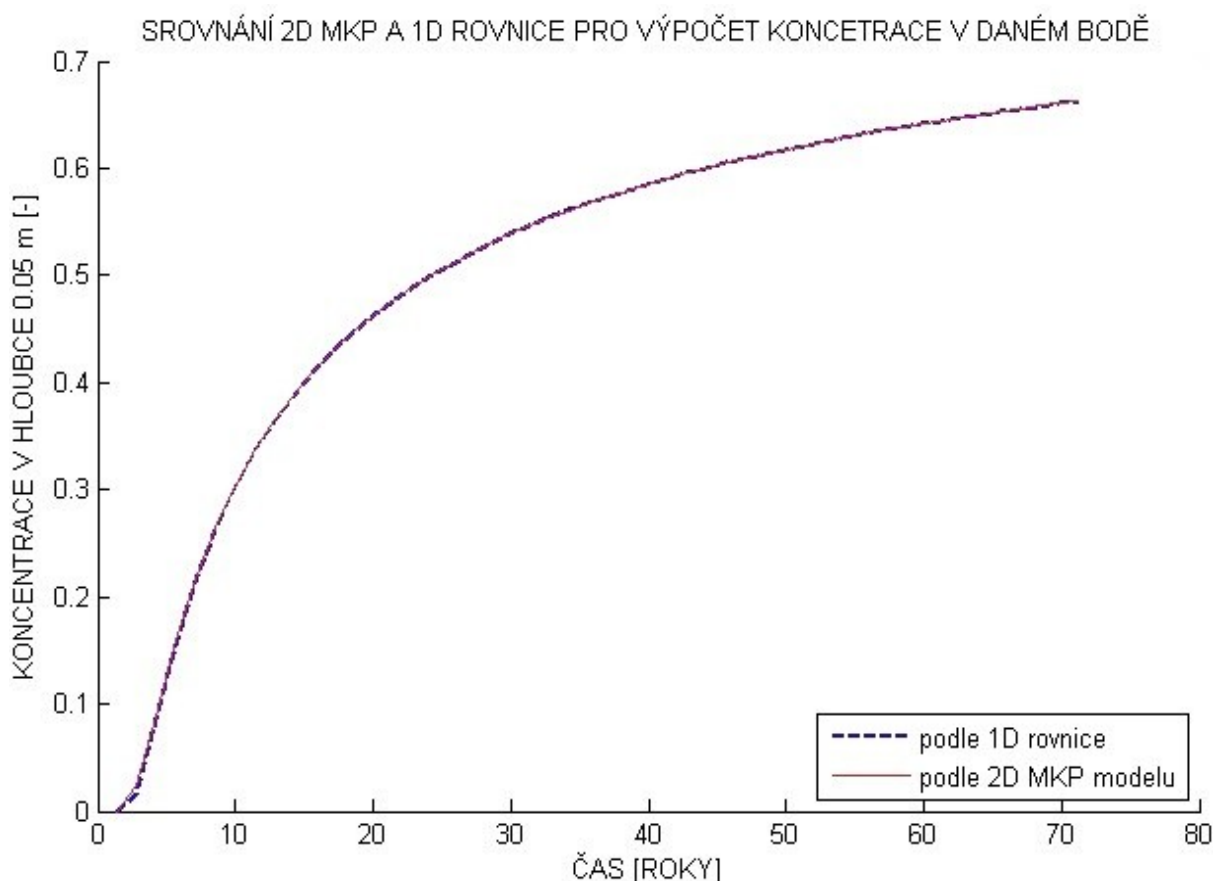
Do vztahu /5.1/ jsou v algoritmu zavedeny stejné hodnoty (tabulka 5.1) jako do vytvořeného programu a výsledné koncentrace jsou porovnány na grafech.

Tabulka 5.1 Vstupní hodnoty 1. příkladu

| Parametr | Hodnota | Jednotka |
|---------------------------------|--------------------|----------------------------------|
| Tloušťka desky h | 0.3 | m |
| Difuzní součinitel D_c | $5 \cdot 10^{-12}$ | $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ |
| Počet dělení na tloušťku | 20 | - |
| Hloubka hledané koncentrace x | 0,05 | m |
| Koncentrace na povrchu C_0 | 0,9 | % |

Pro uvedený příklad je do původního programu přidána rovnice /5.1/. Dále byl naprogramován algoritmus vykreslující výsledky obou výpočtu dle zadaných vstupních hodnot.

Parametrem, který ovlivňuje zobrazení hodnot v grafu, je počet let, po kterých působí chloridové ionty na konstrukci. U prvního grafu (obr. 5.1) bylo zadáno 70 let od začátku difuze. Z porovnání vyplývá, že implementovaný algoritmus vykazuje prakticky stejné výsledky jako široce rozšířené řešení popisující 1D pronikání chloridů.

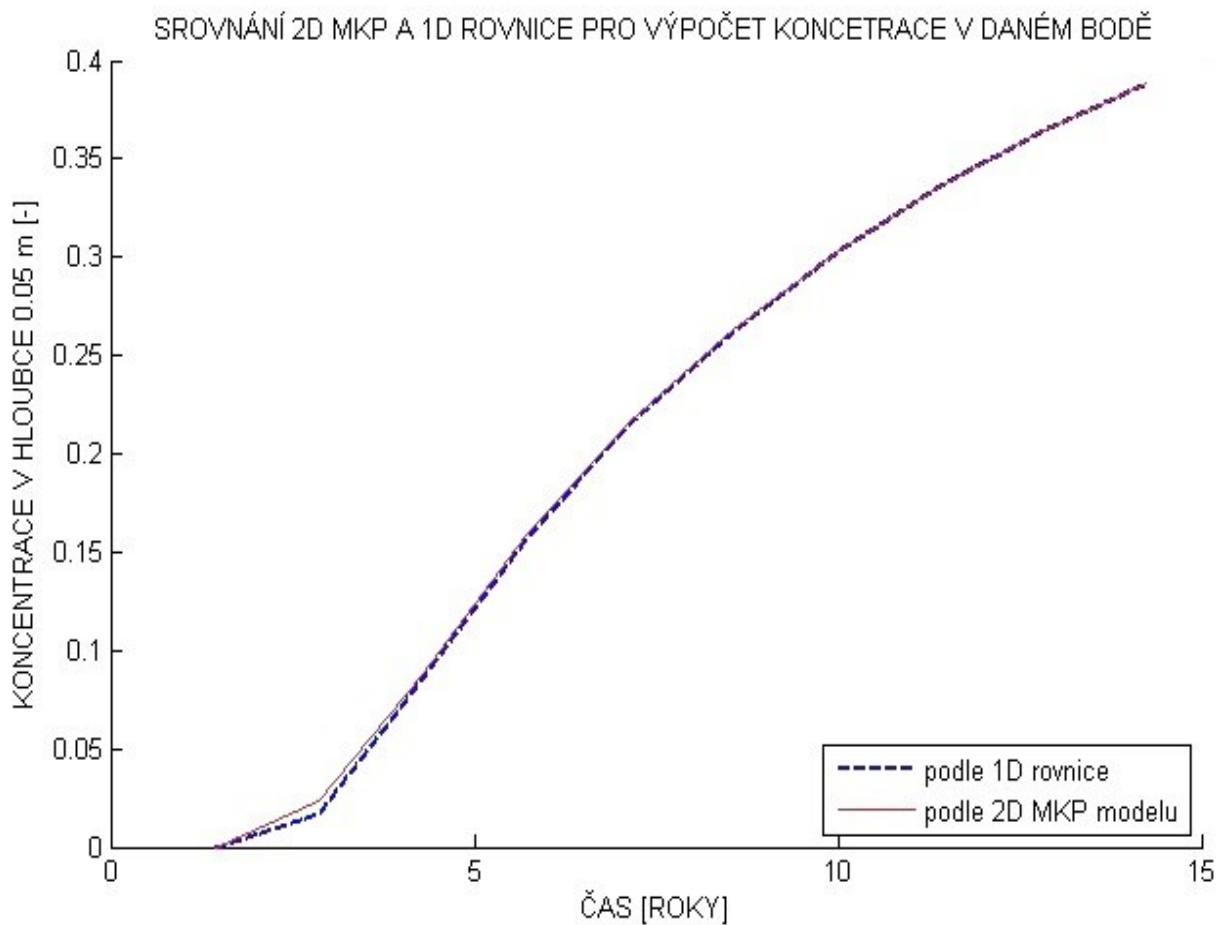


Obr. 5.1 Srovnání s 1D rovnicí difuze –70 let působení chloridů

Jak uvádí Tikalsky ([7] 2003), rovnice /5.1/ se 14 členy popisující 1D model pronikání chloridových iontů vyvolává chybu 0,001 pro hodnoty hloubky x od 0 od 1 m, difuzního součinitele D_c od 1×10^{-8} do $1 \times 10^{-14} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ a životnost od 0 do 100 let.

Výsledky obou metod jsou při použité metodě zobrazení a zadaném počtu let téměř shodné. Proto byla do stejně upraveného algoritmu zavedena jiná hodnota času, kdy působí

chloridy na konstrukci a to konkrétně 15 let. Vykreslený graf (obr 5.2) ukazuje, že i při této změně jsou výsledky nepatrně odlišné a rozdíl je jen v počáteční části výpočtu.



Obr. 5.2 Srovnání s 1D rovnicí difuze –15 let působení chloridů

Porovnání s 1D difuzní rovnicí bylo prvním krokem, při kontrole implementovaného algoritmu. Vzhledem k dostatečně přesným a shodným výsledkům bylo možno pokračovat v dalším porovnání uvedeném v druhé části.

5.2. 2D úloha v porovnání s modelem v programu ANSYS

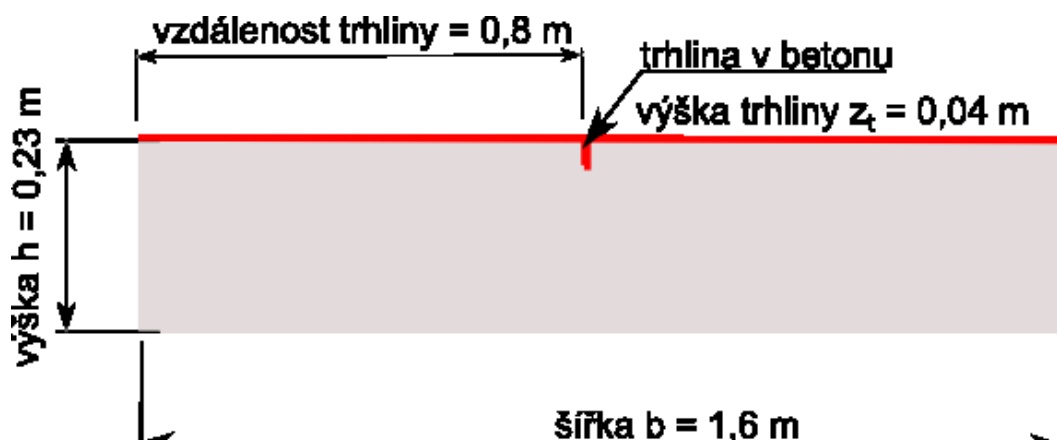
V druhém příkladu jsou porovnány výstupy 2D algoritmu s výsledky z komerčního programu ANSYS získané z disertační práce pana doktora Petra Konečného [4].

Oba výpočetní postupy využívají 2D MKP model vycházející z 2. Fickova zákona difúze. Na rozdíl o prvního příkladu je zde uvažováno s vlivem trhliny v betonové mostovce. Efekt

trhliny při výpočtu je popsán v úvodu práce. Do výpočetního modelu (obr. 5.3) je proto zavedena svislá trhlina, jejíž rozměry jsou také uvedeny v tabulce /5.2/.

Tabulka 5.2 Vstupní hodnoty 2. příkladu

| Parametr | Hodnota | Jednotka |
|-------------------------------------|-----------------------|----------------------------|
| Tloušťka desky h | 0,23 | m |
| Šířka desky b | 1,6 | m |
| Difuzní součinitel D_c | $4,91 \cdot 10^{-12}$ | $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ |
| Koncentrace na povrchu C_0 | 1,1 | % |
| Počet dělení na šířku | 160 | - |
| Počet dělení na tloušťku | 26 | - |
| Koncentrace na povrchu C_0 | 1,1 | % |
| Souřadnice 1. hledaného bodu [x; z] | [0,75;0,10] | m |
| Souřadnice 2. hledaného bodu [x; z] | [0,80;0,10] | m |
| Souřadnice 3. hledaného bodu [x; z] | [0,00;0,10] | m |
| Souřadnice začátku trhliny [x; z] | [0,80;0,00] | m |
| Délka svislé trhliny | 0,04 | m |



Obr. 5.3 Schéma ŽB desky se svislou trhlinou

Pro porovnání využijeme výsledky koncentrace chloridů ve třech bodech ve stejné vzdálenosti od povrchu vozovky. Jeden se nachází na okraji železobetonové mostovky. Druhý je uvažován přímo pod trhlinou a třetí je umístěn 5 centimetrů vodorovně od druhého bodu.

V tabulce /5.3/ jsou zobrazeny hodnoty vypočtené pro časové úseky 10, 20, 30, 40 a 50 let od počátku působení posypových solí na vozovku.

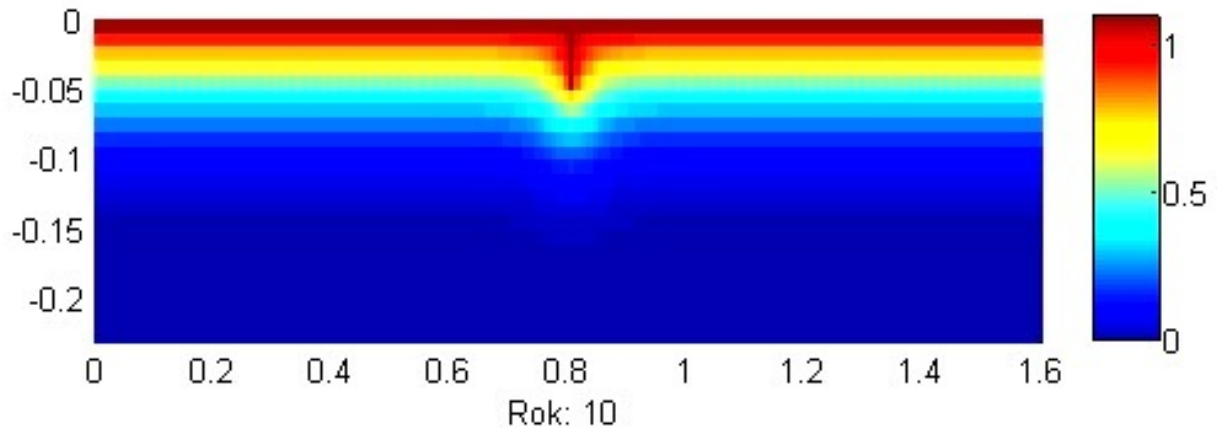
Tabulka 5.3 Porovnání výsledků koncentrace (%) z implementovaného algoritmu v MatLabu a programu ANSYS

| Umístění bodu [x; z] | Program | Roky od počátku působení chloridů | | | | |
|-------------------------|---------|-----------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| | | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| [0,75;0,1] | ANSYS | 0,1157 | 0,2775 | 0,3841 | 0,4593 | 0,5177 |
| | MatLab | 0,1157 | 0,2770 | 0,3842 | 0,4601 | 0,5188 |
| [0,80;0,1] | ANSYS | 0,1473 | 0,3041 | 0,4057 | 0,4779 | 0,5341 |
| | MatLab | 0,1515 | 0,3072 | 0,4089 | 0,4812 | 0,5375 |
| [0,00;0,1] | ANSYS | 0,0778 | 0,2309 | 0,3294 | 0,4070 | 0,4680 |
| | MatLab | 0,0775 | 0,2207 | 0,3267 | 0,4048 | 0,4667 |

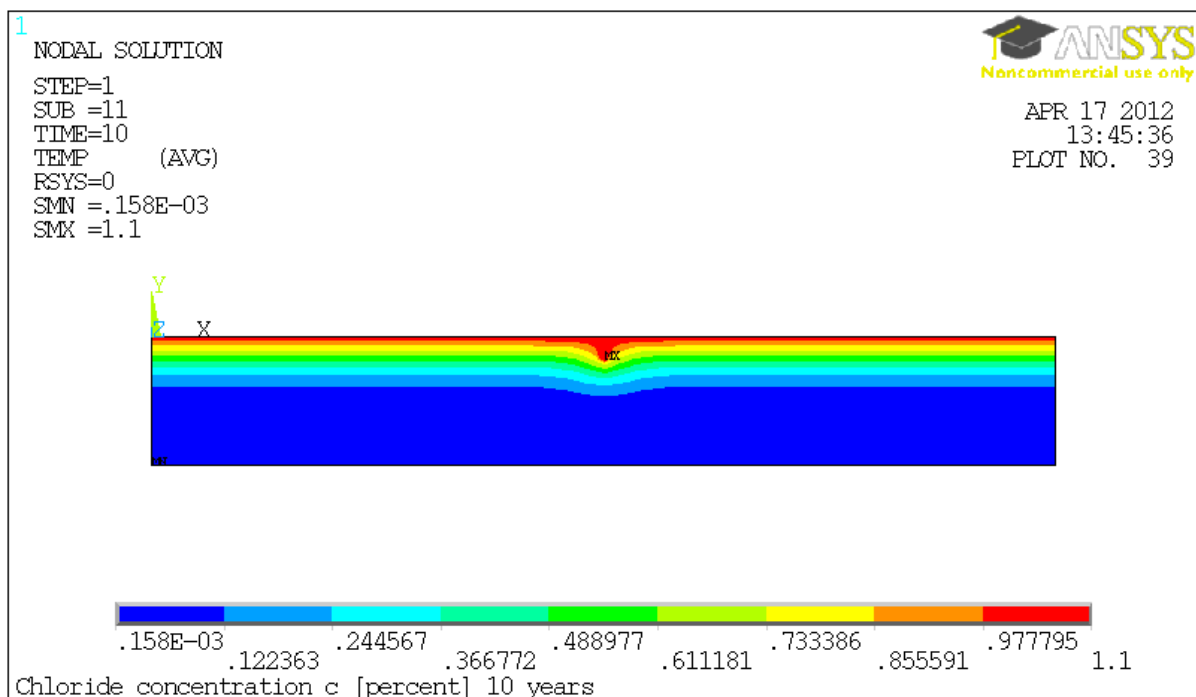
Ve výsledcích jsou patrné rozdíly v koncentraci v obou programech, které jsou pravděpodobně způsobeny použitím izomarametrického prvku tvaru trojúhelníku. Rozdíl v řádu tisícín je v daném případě akceptovatelný.

Pro porovnání slouží i grafický výstup z obou programů. Na barevně rozlišeném rozložení chloridové koncentrace je patrná trhlinka uprostřed vozovky uvažované konstrukce.

Na obr. 5.4, 5.6 a 5.8 jsou zobrazeny grafické výstupy z implementovaného algoritmu v MatLabu a na obr. 5.5, 5.7 a 5.9 jsou výstupy z programu ANSYS [4]. Jedná se o řezy modelem dané železobetonové mostovky.

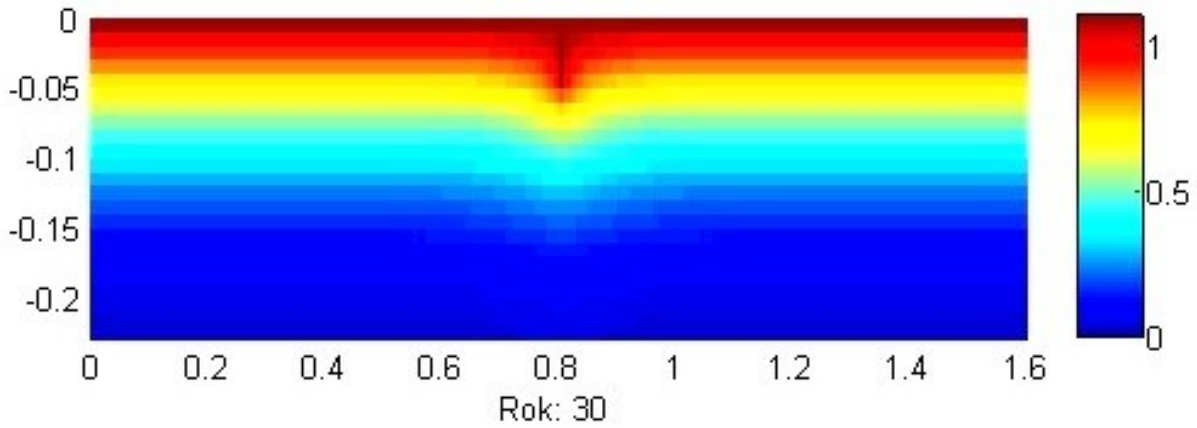


Obr. 5.4 Koncentrace po 10 let dle algoritmu v MatLabu

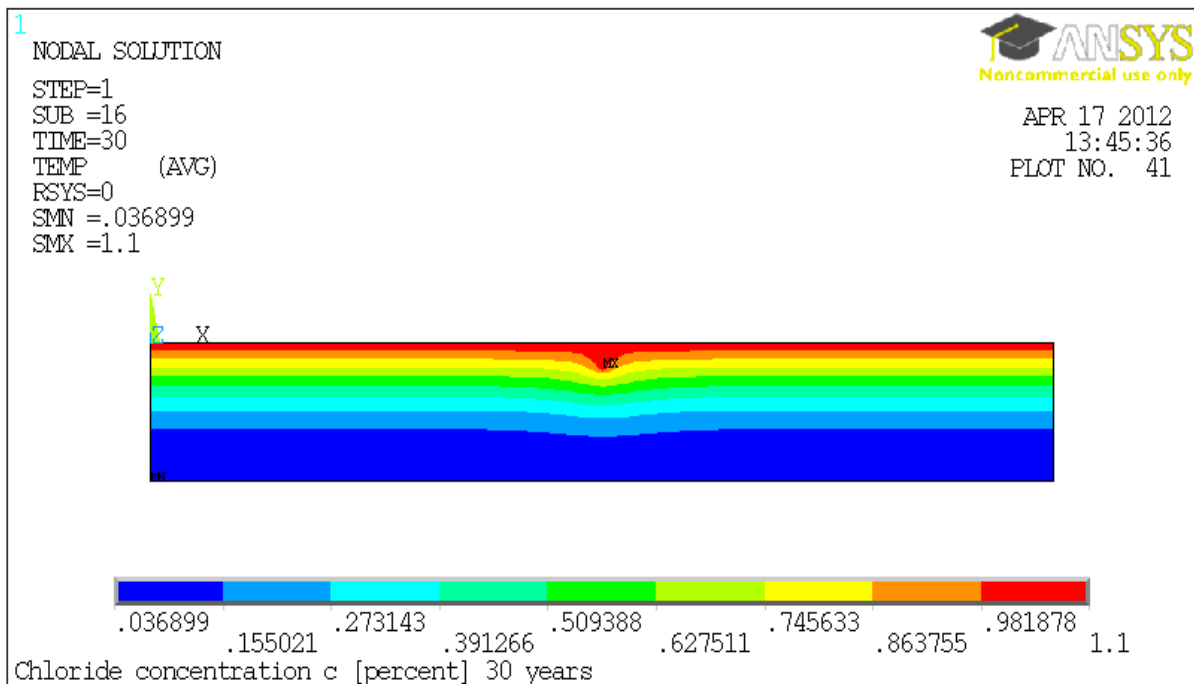


Obr. 5.5 Koncentrace po 10 let dle ANSYS

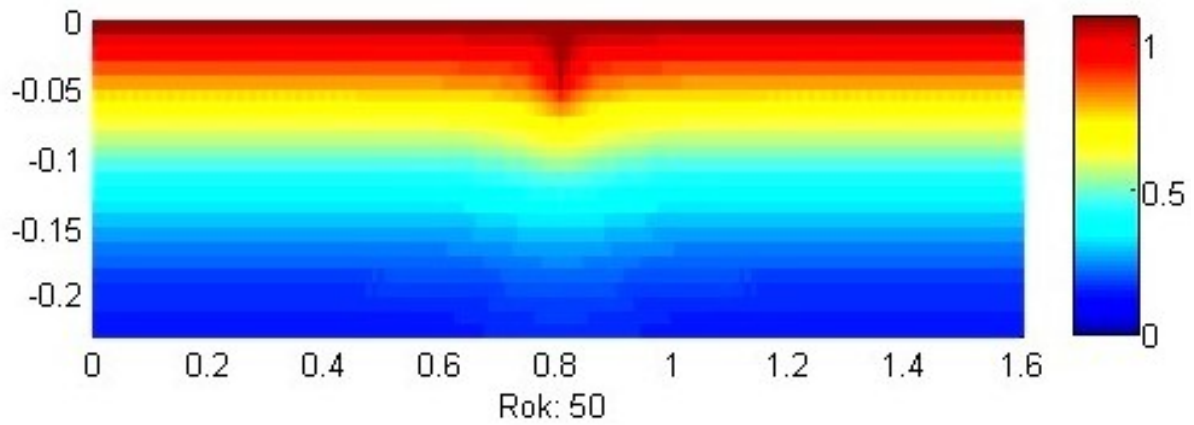
Vertikální a horizontální osy zobrazují rozměry konstrukce a barevně rozlišená škála představuje koncentrace chloridových iontů v daném časovém úseku od počátku působení chloridů.



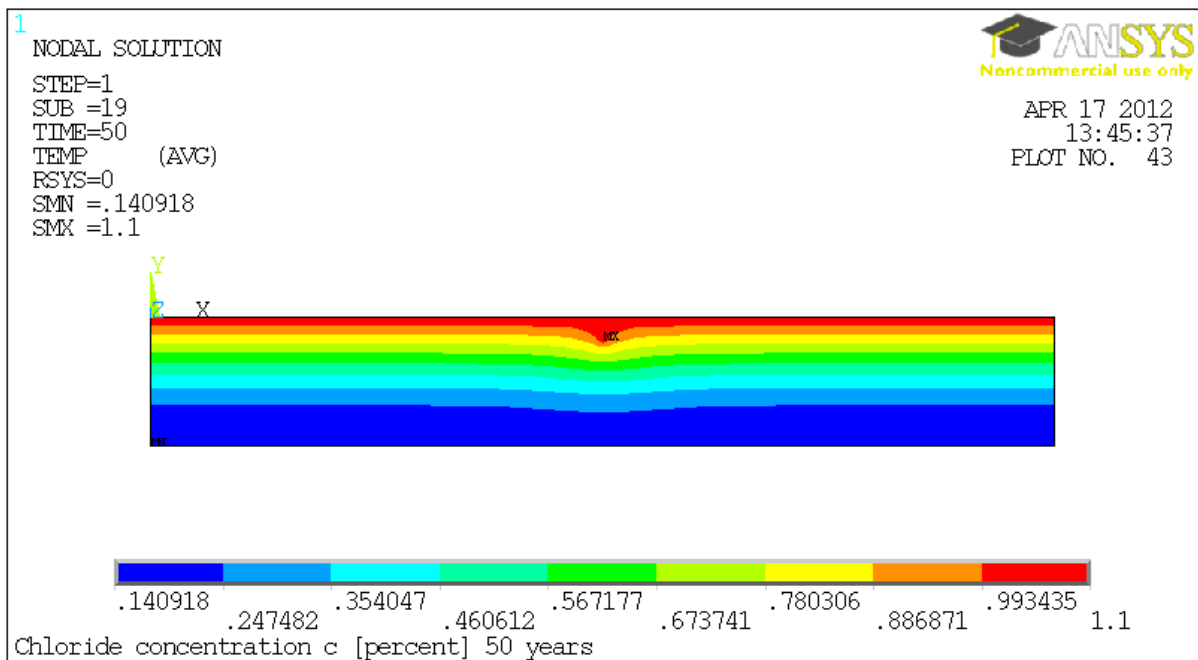
Obr. 5.6 Koncentrace po 30 let dle algoritmu v MatLabu



Obr. 5.7 Koncentrace po 30 let dle ANSYS



Obr. 5.8 Koncentrace po 50 let dle algoritmu v MatLabu



Obr. 5.9 Koncentrace po 50 let dle ANSYS

6. Závěr

Difuze chloridů železobetonovou mostovkou se stává stále aktuálnějším problémem ve výzkumu stavebních konstrukcí. Potřeba kvalitnějších a přesnějších návrhů životnosti stavby u moderních konstrukcí posouvá vývoj pravděpodobnostních posudků do této oblasti. Tyto aspekty ovlivňují nejen bezpečnost konstrukcí, ale i náklady spoje s údržbou a případnou rekonstrukcí.

Práce si bere za cíl odvození dvourozměrného konečného prvku u teplotní analýzy, která je analogickou k zmíněnému difuznímu problému. Vysvětlení této podobnosti a možnosti výpočtů na základě potřebných rovnic jsou nedílnou součástí práce.

Zavedení časově diskretizačního postupu do algoritmu, který zohledňuje při výpočtu nelineární difuzi je jedním z hlavních záměrů práce. Implementace algoritmu je zpracována v programu MatLab, který je využíván pro svou relativní programátorskou jednoduchost. Grafická přehlednost a dobré podmínky pro pochopení daného problému jsou dalšími výhodami tohoto programu. Rychlost, která je však jedním z cílů celého výzkumu, je v této práci postavena stranou.

Součástí práce je porovnání vytvořeného 2D modelu difuze chloridových iontů s 1D rovnicí vyjadřující přímo 2. Fickův difuzní zákon. Zde je ověřena funkčnost implementovaného algoritmu a jeho použitelnost v případě nestacionární difuze bez vlivu trhliny v mostovce.

V dalším příkladu naopak vliv trhliny není zanedbán. Toto porovnání má větší vypovídající hodnotu, neboť je provedeno porovnání s podobným modelem vytvořeným v komerčním programu ANSYS (KONEČNÝ 2012). Výsledky ukazují dobrou shodu mezi rozdílnými konečnými prvky u těchto výpočtů.

Předložená práce ukazuje možnosti využití programu MatLab při implementaci algoritmu pro numerický výpočet nestacionární difuze pomocí 2D modelu metodou konečných prvků. Tento algoritmus by měl být po úpravě a převeden do softwaru uFEM [3] používaného na katedře Stavební mechaniky v Ostravě. Při pravděpodobnostním posudku metodou Monte Carlo bude tato implementovaná část algoritmu spolupracovat s programem Monte [2].

Metoda Monte Carlo při simulacích využívá velké množství náhodně proměnných dat. To způsobuje výpočetní a časovou náročnost, kdy výpočet může trvat i několik dní. To je bohužel překážkou, která nedovoluje uvedenou metodu používat při bezpečnostním posudku. Vytvořený algoritmus by mohl v základním programátorském jazyce urychlit celý proces.

7. Seznam použitých pramenů

[1] BROŽOVSKÝ, J., MATERNA, A.: *Metoda konečných prvků ve stavební mechanice*, dostupné online:

<<http://mi21.vsb.cz/modul/metoda-konecnych-prvku-ve-stavebni-mechanice>>, 2012

[2] BROŽOVSKÝ, J. et al: *Monte simulation and reliability*,

dostupné online: <<http://fast10.vsb.cz/brozovsky/monte>>, 2010.

[3] BROŽOVSKÝ, J., *uFEM finite element method program*.

dostupné online: <http://fast10.vsb.cz/brozovsky/ufem_en.html>, 2010

[4] KONEČNÝ, P.: *Reliability of Reinforced Concrete Bridge Decks with Respect to Ingress of Chlorides*, Doktorská disertační práce, 2007

[5] KONEČNÝ, P., BROŽOVSKÝ, J. and GHOSH, P.: *Korozeeneck 1.0 software*,

dostupné online: <<http://fast10.vsb.cz/konecny/korozeeneck.php>>

[6] KREJČÍ, T. (2012): *Numerický analýza transportních procesů*,

Dostupné online: <<http://mech.fsv.cvut.cz/~krejci/vyuka/NTP2/ntp2.html>>

[7] TIKALSKÝ, P. (2003): *Durability and Performance-Based design using SBRA*

8. Přílohy

Seznam příloh

- | | |
|---|----|
| 1) Opis výpočtového algoritmu | 31 |
| 2) CD ROM s výpočtním programem a grafickými výstupy ve standartním rozlišení | |

1) Opis výpočtového algoritmu

```
clc;clear;close all
%% VSTUPNÍ PARAMETRY
time=clock;
fprintf('Vítejte v programu pro výpočet koncentrace chloridu přes 2D model ŽB mostovky.\n')
fprintf('\nRelace začala v%3.0f:%2.0f%3.0f:%2.0f%4.0f\n',time(4),time(5),time(3),time(2),time(1))

%MOŽNOST PŘEDEPSANÉHO ZADANÍ NEBO VLASTNÍCH HODNOT
fprintf('Zvolte možnost dle seznamu (při neexistující možnosti program pokračuje dle nastavení):' )
typzadani=input('\n 1 = Vlatní hodnoty?\n 2 = Předepsané hodnoty?\n 0 = Ukončit výpočet?\n ');
if typzadani==0
    break
end

%ZJIŠTĚNÍ ROZLIŠENÍ OBRAZOVKY A VYKRESLENÍ FIGURY SE SCHÉMATEM KONSTRUKCE
scr=get(0,'ScreenSize');
figure('position',[scr(3)*3/5 scr(4)*2.8/5+10 scr(3)/5*2 scr(4)/3]);
rgb = imread('difuze_vstupy.jpg');
image(rgb)
axis off
axis image
while typzadani>0
    if typzadani==1
        fprintf('Zadejte geometrii konstrukce:\n')
        b=input(' Šířka konstrukce b[m] =');
        h=input(' Výška konstrukce h[m] =');
        pocetdb=input(' Počet prvků na šířce konstrukce (jen celá čísla) =');
        pocetdh=input(' Počet prvků na výšce konstrukce (jen celá čísla) =');
        fprintf('\nZadejte materiálové charekteristiky:\n')
        Dth=input(' Součinitel difuze [m2/s] =');
        Ci=input(' Koncentrace na povrchu[%] =');
    elseif typzadani==2
        %ROZMĚRY A DĚLENÍ
        b=1.6;% [m]
        h=0.23;%[m]
        pocetdb=160;
        pocetdh=23;

        %MATARIÁL
        Dth=4.91*10^-12; % DIFUZNÍ SOUČINITEL

        %KONCENTRACE
        Ci=1.1;%
    end
    fprintf('\nŠířka[m] Výška[m] Dělení(šířka,výška) Difůz.sou Konce.povrch')
    fprintf('\n %6.3f %8.3f %14.0f %5.0f %11.2e %10.2e\n',b,h,pocetdb,pocetdh,Dth,Ci)
    typzadani=input('\n 1 = Změnit hodnoty?\n 0 = Pokračovat s těmito?\n ');
end
close all %UZAVŘENÍ FIGURY SE SCHÉMATEM

%% VYTVÁŘENÍ PRVKŮ
%DOPOČET KONSTANT
db=b/pocetdb; %VELIKOST PRVKU NA ŠÍŘKU
dh=h/pocetdh; %VELIKOST PRVKU NA VÝŠKU
Cs=0; %KONCENTRACE V KONSTRUKCI
T=1; %POMOCNÁ KONSTANTA ČASOVÉ APROXIMACE
```


%VELIKOST JEDNOHO KROKU DLE DOPORUČENÉHO VZORCE

```
delta=dh*dh/Dth;  
[roky,dny]=casovac(delta);
```

%VYTVÁŘENÍ UZLŮ

```
pocetuzlu=(pocetdb+1)*(pocetdh+1);  
uzly=zeros(pocetuzlu,3);  
k=1;  
for i=1:pocetdh+1  
    for j=1:pocetdb+1  
        uzly((pocetdb+1)*(i-1)+j,1)=db*(j-1);  
        uzly((pocetdb+1)*(i-1)+j,2)=-dh*(i-1);  
        uzly((pocetdb+1)*(i-1)+j,3)=k;  
        k=k+1;  
    end  
end
```

%X SOUŘADNÍCE UZLU
%Z SOUŘADNÍCE UZLU (ZÁPORNÉ)

%VYTVÁŘENÍ PRVKŮ

```
k=1;  
prvky=zeros((pocetdb*pocetdh*2),3);  
for i=1:pocetdh  
    for j=1:pocetdb  
        if mod(i+j,2)~=0  
            prvky(k,1)=uzly((pocetdb+1)*(i-1)+j,3);  
            prvky(k,2)=uzly((pocetdb+1)*(i-1)+j+1,3);  
            prvky(k,3)=uzly((pocetdb+1)*i+j+1,3);  
            k=k+1;  
            prvky(k,1)=uzly((pocetdb+1)*(i-1)+j,3);  
            prvky(k,2)=uzly((pocetdb+1)*i+j+1,3);  
            prvky(k,3)=uzly((pocetdb+1)*i+j,3);  
            k=k+1;  
        else  
            prvky(k,1)=uzly((pocetdb+1)*(i-1)+j,3);  
            prvky(k,2)=uzly((pocetdb+1)*(i-1)+j+1,3);  
            prvky(k,3)=uzly((pocetdb+1)*i+j,3);  
            k=k+1;  
            prvky(k,1)=uzly((pocetdb+1)*(i-1)+j+1,3);  
            prvky(k,2)=uzly((pocetdb+1)*i+j+1,3);  
            prvky(k,3)=uzly((pocetdb+1)*i+j,3);  
            k=k+1;  
        end  
    end  
end
```

%KÓDOVÁ ČÍSLA

```
kod=linspace(1,pocetuzlu,pocetuzlu)';
```

%OKRAJOVÉ PODMÍNKY

```
konop=pocetdb+1;  
op=zeros(pocetdb+1,2);  
for i=1:konop  
    op(i,1)=i;  
    op(i,2)=Ci;  
end
```

%OKRAJOVÉ PODMÍNKY DLE KONCENTRACE

%ZAVEDENÍ TRHLIN DO KONSTRUKCE

```
trhlina=input(' 1 = Vložit trhliny?\n 0 = Pokračovat?\n ');  
if trhlina==1  
    pocet_trhlin=input('\n Počet trhlin na povrchu: ');
```

```

for p=1:pocet_trhlin
    trhlina_x=input(' x souřadnice na povrchu trhliny = ');
    while trhlina_x>=b
        disp('Souřadnice je větší než délka konstrukce!!');
        trhlina_x=input(' x souřadnice na povrchu trhliny = ');
    end
    trhlina_delka=input(' délka trhliny od povrchu = ');
    while trhlina_delka>h
        disp('Trhlina je delší než je tloušťka konstrukce!!');
        trhlina_delka=input(' délka trhliny od povrchu = ');
    end
    leve_uzly=floor(trhlina_x/db)+1;
    pomocna_x_trhliny=leve_uzly*db-trhlina_x;
    dolni_uzel=floor(trhlina_delka/dh)+1;
    k=1;
    for i=1:dolni_uzel
        if pomocna_x_trhliny/db>0.00000001
            op(konop+k,1)=leve_uzly+(pocetdb+1)*(i-1);
            op(konop+k,2)=Ci;
            k=k+1;
        else
            end
        end
    for i=1:dolni_uzel
        if (db-pomocna_x_trhliny)/db>0.00000001
            op(konop+k,1)=leve_uzly+1+(pocetdb+1)*(i-1);
            op(konop+k,2)=Ci;
            k=k+1;
        else
            end
        end
    konop=konop+k-1;
end
end

```

%% VÝPOČETNÍ ČÁST

tic

%%NULOVÁNÍ MATIC

```

[pocprvku,trojka]=size(prvky);
Cprvku=zeros(3,3,pocprvku);
Kprvku=zeros(3,3,pocprvku);
nejkod=max(max(kod));
K=zeros(nejkod,nejkod);
C=zeros(nejkod,nejkod);
kcp=zeros(pocprvku,2);

```

```

%VYNULOVÁNÍ LOKÁLNÍ MATICE VODIVOSTI
%VYNULOVÁNÍ LOKÁLNÍ MATICE KAPACITY

```

```

%VYNULOVÁNÍ GLOBÁLNÍ MATICE VODIVOSTI
%VYNULOVÁNÍ GLOBÁLNÍ MATICE KAPACITY

```

%%VÝPOČET A LOKALIZACE MATICE VODIVOSTI A KAPACITY

```

N=[1/3 1/3 1/3];

```

```

%MATICE HODNOT PRO KAPACITU

```

```

for i=1:pocprvku

```

```

    poc=prvky(i,1);

```

```

%OZNAČENÍ PRVNÍHO BODU

```

```

    pro=prvky(i,2);

```

```

%OZNAČENÍ DRUHÉHO BODU

```

```

    kon=prvky(i,3);

```

```

%OZNAČENÍ TŘETÍHO BODU

```

```

    x1=uzly(poc,1);

```

```

%X SOURADNÍCE PRVNÍHO BODU

```

```

    z1=uzly(poc,2);

```

```

%Z SOURADNÍCE PRVNÍHO BODU

```

```

    x2=uzly(pro,1);

```

```

%X SOURADNÍCE DRUHÉHO BODU

```

```

    z2=uzly(pro,2);

```

```

%Z SOURADNÍCE DRUHÉHO BODU

```

```

    x3=uzly(kon,1);

```

```

%X SOURADNÍCE TŘETÍHO BODU

```

```

    z3=uzly(kon,2);

```

```

%Z SOURADNÍCE TŘETÍHO BODU

```

```

    B=[z2-z3 z3-z1 z1-z2;x3-x2 x1-x3 x2-x1]/(db*dh);

```

```

%GRADIENTY TEPLIT

```

```

    Kprvku(:,i)=B'*B*Dth*db*dh/2;

```

```

%MATICE VODIVOSTI

```

```

Cprvku(:,i)=N*N*db*dh/2;
kcp(i,1)=kod(poc,1);
kcp(i,2)=kod(pro,1);
kcp(i,3)=kod(kon,1);
for j=1:3
    for k=1:3
        K(kcp(i,j),kcp(i,k))=K(kcp(i,j),kcp(i,k))+ Kprvku(j,k,i);
    end
end

for j=1:3
    for k=1:3
        C(kcp(i,j),kcp(i,k))=C(kcp(i,j),kcp(i,k))+ Cprvku(j,k,i);
    end
end

%VÝPOČET ZATĚŽOVACÍHO VEKTORU
F=zeros(1,nejkod);
F(op(:,1))=op(:,2);
F=-F*K;
F(op(:,1))=0;

%ZAVEDENÍ OKRAJOVÝCH PODMÍNEK DO MATICE VODIVOSTI
K(op(:,1),:)=0;
K(:,op(:,1))=0;
for i=1:konop
    K(op(i,1),op(i,1))=1;
end

%ZAVEDENÍ OKRAJOVÝCH PODMÍNEK DO MATICE KAPACITY
C(op(:,1),:)=0;
C(:,op(:,1))=0;
for i=1:konop
    C(op(i,1),op(i,1))=1;
end
Cas_vypoctu=toc;
fprintf('\nČas vytváření matice kapacity a vodivosti%3.0f s\n',Cas_vypoctu )

%VÝPOČET ČASOVÉ ZÁVISLOSTI KONCENTRACE
fprintf('\nDle zvolených parametrů byl vypočten jeden krok o velikosti (roky, dny):')
fprintf('%3.0f %4.0f\n',roky,dny)
t=input('\n Počet kroků =');
tic
r=zeros(t+1,nejkod);
r(1,:)=Cs;
r(:,op(:,1))=0;
fprintf('\nVýpočet:\n')
for t=1:t;
    if mod(t,10)==0
        fprintf(' Krok č.: %3.0f\n',t)
    end
    r(t+1,:)=(K*T+C/(delta))(F'+(C/(delta)-K*(1-T))*r(t,:));
end

for i=1:konop
    r(:,op(i,1))=op(i,2);
end

```

```
%ZAVEDENÍ VÝSLEDNÝCH HODNOT DO VYKRESLOVACÍ MATICE
```

```
mt=zeros(pocetdh+1,pocetdb+1,t);  
k=1;  
for i=1:pocetdh+1  
    for j=1:pocetdb+1  
        for t=1:t  
            mt(i,j,t)=r(t,k);  
        end  
        k=k+1;  
    end  
end  
Cas_vypoctu=toc;  
fprintf('\nČas výpočtu koncentrace %3.0f s\n',Cas_vypoctu )
```

```
%% VYKRESLENÍ VÝSLEDKŮ
```

```
fprintf('\nGrafické vykreslení koncentrace:')  
vykresleni=input('\n 1 = Složený graf 2D?\n 2 = Složený graf 3D?\n 3 = Videosoubor?\n 0 = Pokračovat?\n');  
scr=get(0,'ScreenSize');
```

```
%PŘÍPRAVA SOUŘADNICOVÉHO SYSTÉMU PRO VYKRESLENÍ
```

```
X=zeros(pocetdh+1,pocetdb+1);  
Y=zeros(pocetdh+1,pocetdb+1);  
k=1;  
for j=1:pocetdh+1  
    for i=1:pocetdb+1  
        X(j,i)=uzly(k,1);  
        k=k+1;  
    end  
end  
k=1;  
for j=1:pocetdh+1  
    for i=1:pocetdb+1  
        Y(j,i)=uzly(k,2);  
        k=k+1;  
    end  
end
```

```
%CYKLUS MOŽNOSTÍ VYKRESLENÍ
```

```
[sub_x,sub_y,t]=size(mt);  
sub=zeros(sub_x,sub_y);  
while vykresleni>0
```

```
%VYKRESLENÍ FORMOU 2D GRAFŮ
```

```
if vykresleni==1  
    figure('position',[1 1 scr(3) scr(4)]);  
    cla  
    pocet=10*365.25*24*3600/delta;  
    pocet=ceil(pocet);  
    title(['Časově závislá difuze. Povrch ' num2str(Ci) ', Uvnitř ' num2str(Cs) '])  
    for k=1:6  
        j=k*pocet;  
        if j < t  
            else  
                j=t;  
            end  
        subplot(3,2,k)  
        hold on  
        sub(:,j)=mt(:,j);  
        sub(sub_x,sub_y)=0;
```

```

    surfc(X,Y,sub)
    view(0,-270)
    colorbar
    s=delta*j;
    [r,d]=casovac(s);
    xlabel(['Rok: ' num2str(r) ])
    hold off
end

```

%VYKRESLENÍ FORMOU 3D GRAFŮ

```

elseif vykresleni==2
    figure('position',[1 1 scr(3) scr(4)]);
    cla
    pocet=t/6;
    pocet=round(pocet);
    title(['Časově závislá difuze. Povrch ' num2str(Ci) ', Uvnitř ' num2str(Cs) '])
    for k=1:6
        j=k*pocet;
        if j < t
            else
                j=t;
            end
        subplot(3,2,k)
        hold on
        sub(:,:)=mt(:,j);
        sub(sub_x,sub_y)=0;
        surfc(X,Y,sub)
        s=delta*j;
        [r,d]=casovac(s);
        xlabel(['Rok: ' num2str(r) ', Den: ' num2str(d) ])
        ylabel('Koncentrace C')
        colorbar('WestOutside')
        view(50,50)
        hold off
    end
end

```

%VIDEO VYKRESLENÍ

```

elseif vykresleni==3
    aviobj = VideoWriter('video.avi');
    fid=figure('position',[1 scr(4)/6 scr(3) scr(4)*1/3]);
    open(aviobj);
    for t=1:t
        for i=1:10
            hold on
            sub(:,:)=mt(:,t);
            colormap(bone)%
            sub(sub_x,sub_y)=0;
            surf(X,Y,sub)
            title(['Difuze s počáteční koncentrací ' num2str(Ci) ' %. Krok č.: ' num2str(t)])
            s=delta*t;
            [r,d]=casovac(s);
            xlabel(['Rok: ' num2str(r) ', Den: ' num2str(d) ])
            colorbar('EastOutside')
            view(0,-270)
            hold off
            fa = getframe(fid);
            writeVideo(aviobj,fa);
        end
    end
end
end

```

```

close(avioobj);
close all
fprintf('\n Video uloženo v adresáři pod názvem "video.avi" (před dalším použitím přepište název souboru.)\n');
fprintf('\n Děkuji za využití tohoto programu.\n');
end
vykresleni=input('\n 1 = Složený graf 2D?\n 2 = Složený graf 3D?\n 3 = Videosoubor?\n 0 = Pokračovat?\n ');
end
%% DALŠÍ VÝSTUPY
fprintf('\nVýpis konkrétní koncentrace v určitém bodě:')
bodovy_vypis=input('\n 1 = Zobrazit koncentraci ?\n 0 = Pokračovat?\n ');
while bodovy_vypis>0
    vlastni_cas=input('\n 1 = Vlastní časy?\n 0 = 10,20,30,40,50 let?\n ');
    if vlastni_cas==1
        pocet_bodu=input('\n Zadejte počet hledaných časů: ');
    elseif vlastni_cas==0
        cas=[1 2 3 4 5]*3.15e+008;
        pocet_bodu=5;
    end
    koncentrace=zeros(1,pocet_bodu);
    fprintf(['Maximální čas =' num2str(delta*max(size(mt(1,1,:)))) 's, x =' num2str(b) 'm, z =' num2str(h) 'm)\n']);
    fprintf(' Zadejte souřadnice:\n');
    X=input(' Na ose x (šířka, zleva) [m] =');
    Z=input(' Na ose z (hloubka, zhora) [m] =');
    x=zeros(pocet_bodu);
    z=zeros(pocet_bodu);
    for i=1:pocet_bodu
        x(i)=X;
        z(i)=Z;
        if vlastni_cas==1
            cas(i)=input(['\n ' num2str(i) ' . čas od začátku simulace [s] = ']);
        end
        pod_cas=floor(cas(i)/delta)+1;
        nad_cas=ceil(cas(i)/delta)+1;
        casova_mt=mt(:,nad_cas)-(nad_cas-(cas(i)/delta+1))/(nad_cas-pod_cas)*(mt(:,nad_cas)-mt(:,pod_cas));
        pod_x=floor(x(i)/db)+1;
        nad_x=ceil(x(i)/db)+1;
        x_mt=casova_mt(:,nad_x)-(casova_mt(:,nad_x)-casova_mt(:,pod_x))*(nad_cas-(cas(i)/delta+1))/(nad_cas-pod_cas);
        pod_z=floor(z(i)/dh)+1;
        nad_z=ceil(z(i)/dh)+1;
        koncentrace(i)=x_mt(nad_z)-(x_mt(nad_z)-x_mt(pod_z))*(nad_cas-(cas(i)/delta+1))/(nad_cas-pod_cas);
    end
    fprintf('\nBod čas[s] x[m] z[m] koncentrace\n');
    for i=1:pocet_bodu
        fprintf('%3.0f %11.2e %5.2f %5.2f %13.3e\n', i, cas(i), x(i), z(i), koncentrace(i))
    end
    bodovy_vypis=input('\n 1 = Zobrazit koncentraci v jiných bodech?\n 0 = Pokračovat?\n ');
end
end
%%UKLÁDÁNÍ ÚLOHY DO SOUBORU
ulozeni=input('\n 1 = Uložit hodnoty koncentrace ("koncentrace.mat") a ukončit ?\n 0 = Ukončit program?\n ');
if ulozeni==1
    save koncentrace.mat mt
end
time=clock;
fprintf('\nKonec v%3.0f:%2.0f:%3.0f:%2.0f:%4.0f. Nashledanou.\n', time(4), time(5), time(3), time(2), time(1))

```

Poděkování

Rád bych touto formou poděkoval panu doktorovi Petru Konečnému, který mě podporoval celou dobu mé práce. Díky patří i Václavu Pytlíkovi, Jakubu Valihrachovi a Jiřímu Brožovskému za cenné rady a pomoc při tvorbě algoritmu.

Práce byla realizována za finančního přispění Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR z Operačního programu: OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost (OP VK) v rámci projektu „Tvorba a internacionalizace špičkových vědeckých týmů a zvyšování jejich excelence na Fakultě stavební VŠB-TUO“ projekt č. CZ.1.07/2.3.00/20.0013.