

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra pružnosti a pevnosti

Vliv kruhových otvorů na napjatost v deskách

*Effect of Circular Holes on the State of Stress
at the Plates*

Student:

Lukáš Wawrzyczek

Vedoucí bakalářské práce:

Dr. Ing. Ludmila Adámková

Ostrava 2012

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Katedra pružnosti a pevnosti

Zadání bakalářské práce

Student: **Lukáš Wawrzyczek**
Studijní program: B2341 Strojírenství
Studijní obor: 3901R003 Aplikovaná mechanika
Téma: **Vliv kruhových otvorů na napjatost v deskách**
Effect of Circular Holes on the State of Stress at the Plates

Zásady pro vypracování:

1. Proved'te analytické řešení napjatosti desky s otvorem
2. Pomocí metody FEM stanovte součinitel koncentrace napětí
3. Úlohu řešte pro různé způsoby zatěžování desky
4. Proved'te řešení desky s více otvory
5. Srovnejte výsledky analytického a numerického řešení

Seznam doporučené odborné literatury:

HOSCHL,C. Pružnost a pevnost ve strojnictví. SNTL Praha 1971
KUČERA,J. Úvod do mechaniky lomu I. Vruby a trhliny. Nestabilní lom při statickém zatížení. Skriptum VŠB-TU Ostrava, 2002,1.vydání.
KUBA,F. Teorie pružnosti a vybrané aplikace. SNTL Praha 1977.
NĚMEC,J.,DVORÁK,J.,HOSCHL,C. Pružnost a pevnost ve strojírenství. SNTL Praha 1989
ANSYS USER'S MANUALS (referenční příručky programu ANSYS od Swanson Analysis Systems, Inc.)

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Dr.Ing. Ludmila Adámková**

Datum zadání: 16.12.2011

Datum odevzdání: 21.05.2012



doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.
vedoucí katedry



prof. Ing. Radim Farana, CSc.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě: 21. 5. 2012

.....
podpis autora práce

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že bakalářská práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavře licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě: 21. 5. 2012

.....
podpis autora práce

Jméno a příjmení autora práce:

Lukáš Wawrzyczek

Adresa trvalého pobytu autora práce:

Hnojník 10, Hnojník, 739 53

ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

WAWRZYCZEK, L. *Vliv kruhových otvorů na napjatost v deskách – bakalářská práce*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra pružnosti a pevnosti, 52 s. Vedoucí práce: Adámková, L.

Bakalářská práce se zabývá vlivem kruhových otvorů na napjatost v deskách. Práce je zaměřena konkrétně na desku nekonečných rozměrů s jedním kruhovým otvorem a s dvěma kruhovými otvory stejné velikosti. Analytické řešení je provedeno pomocí Airyho funkce napětí, v případě desky s dvěma otvory je funkce definovaná v komplexní proměnné. V obou případech jsou zahrnuté možné způsoby zatížení. Problematika je také řešena numericky metodou konečných prvků v programu Patran 2011. Výsledky získané numerickou metodou jsou porovnány s výsledky analytickými.

ANNOTATION OF THESIS

WAWRZYCZEK, L. *Effect of Circular Holes on the State of Stress at the Plates – Bachelor Thesis*. Ostrava: VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics of Materials, 52 p. Thesis head: Adámková, L.

Bachelor thesis deals with the effect of circular holes on the state of stress at the plates. The work is focused particularly on plates of infinite size containing one circular hole or two equal circular holes. The analytical solution is done using the Airy stress function, in case of plate containing two circular holes the function is defined in complex variable. In both cases, there are included various loading cases. The problem is also solved numerically by finite element method using the software Patran 2011. The results of numerical solution are compared with the result of analytical solution.

Obsah

Seznam použitých značek a symbolů	7
Úvod.....	9
1 Vliv konstrukčních vrubů na průběh napětí.....	9
2 Základy teorie pružnosti.....	11
2.1 Rozdělení úloh pružnosti.....	11
2.2 Základní rovnice teorie pružnosti pro rovinný stav napjatosti.....	11
2.3 Okrajové podmínky.....	13
3 Analytické řešení s využitím funkce napětí.....	15
3.1 Airyho funkce napětí.....	15
3.2 Funkce napětí v komplexní proměnné.....	17
4 Analytické řešení desky s jedním otvorem	18
4.1 Jednoosé zatížení.....	18
4.2 Dvouosé zatížení.....	21
4.3 Čistý smyk.....	23
4.4 Tlak uvnitř otvoru	27
4.5 Stanovení součinitele koncentrace napětí při dvouosé napjatosti.....	30
5 Analytické řešení desky s dvěma otvory.....	32
6 Numerické řešení	34
6.1 Výsledky pro nekonečnou desku s jedním otvorem	38
6.2 Výsledky pro nekonečnou desku s dvěma otvory	42
7 Srovnání výsledku analytického a numerického řešení.....	46
7.1 Nekonečná deska s jedním otvorem.....	46
7.2 Nekonečná deska s dvěma otvory	46
8 Závěr	48
Seznam použité literatury	50

Seznam použitých značek a symbolů

Označení	Název	Jednotka
E	Modul pružnosti v tahu	[MPa]
G	Modul pružnosti ve smyku	[MPa]
R	Poloměr otvoru	[mm]
Re	Reálná část komplexního čísla	[-]
R, T	Objemové složky sil v polárních souřadnicích	[N/m ³]
U	Komplexní deformace	
X, Y	Objemové složky sil v kartézských souřadnicích	[N/m ³]
a	Pól bipolárního souřadného systému	
a_{nm}, b_{nm}	Koeficienty Airyho funkce napětí	
h	Hloubka vrubu	[mm]
p_x, p_y	Okrajové podmínky v kartézských souřadnicích	[MPa]
r	Radiusvektor polárního souřadnicového systému	[mm]
u, v, w	Složky posunutí	
x, y, z	Osy kartézského souřadnicového systému	
z	Komplexní číslo	[-]
\bar{z}	Komplexně sdružené číslo	[-]
α	Součinitel koncentrace napětí	[-]
$\Delta\sigma$	Odchylka napětí	[%]
γ, χ	Komplexní potenciály	
ε	Poměrná deformace	[-]

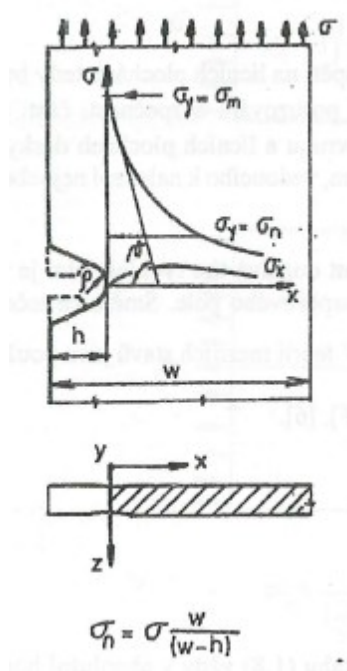
Označení	Název	Jednotka
κ	Součinitel závislý na typu rovinné úlohy	[-]
λ	Součinitel poměrné vzdálenosti středů otvorů	[-]
μ	Poissonovo číslo	[-]
ρ	Poloměr zakřivení kořene vrubu	[mm]
θ	Úhel polárního souřadnicového systému	[rad]
σ_{\max}	Maximální napětí	[MPa]
σ_{nom}	Nominální napětí	[MPa]
σ_x, σ_y	Normálové napětí v kartézských souřadnicích	[MPa]
σ_r, σ_θ	Normálové napětí v polárních souřadnicích	[MPa]
σ_η, σ_ξ	Normálové napětí v bipolárních souřadnicích	[MPa]
τ	Smykové napětí	[MPa]
ξ, η	Bipolární souřadnicový systém	
ϕ	Funkce napětí	
∇	Laplaceův operátor	

Úvod

Úkolem této práce je zjistit a popsat vliv kruhových otvorů na stav napjatosti v deskách. Znalost přesné hodnoty napětí je nezbytně nutná nejen pro posuzování spolehlivosti konstrukcí, ale také pro ověřování přesnosti metody řešení. V teorii pružnosti se v průběhu analytického řešení zavádějí zjednodušení, které do výsledku vnášejí určitou nepřesnost. Obecně ve strojírenství je přípustná odchylka do 10% oproti skutečnému stavu. U strojních součástí a celků velkého významu se navíc provádějí experimentální zkoušky na potvrzení správnosti výpočtu.

1 Vliv konstrukčních vrubů na průběh napětí

U těles s náhlou změnou tvaru nebo v okolí působíště zatížení dochází ke změně rozložení napětí a deformace. Náhlá změna tvaru je označována jako konstrukční vrub. Mezi konstrukční vruby patří osazení, zápich, drážka pro pero, otvory a jiné. Změna napětí v okolí konstrukčního vrubu má lokální charakter. V dostatečné vzdálenosti od konstrukčního vrubu je rozložení napětí rovnoměrné.



Obr. 1 Průběh napětí v okolí konstrukčního vrubu [8]

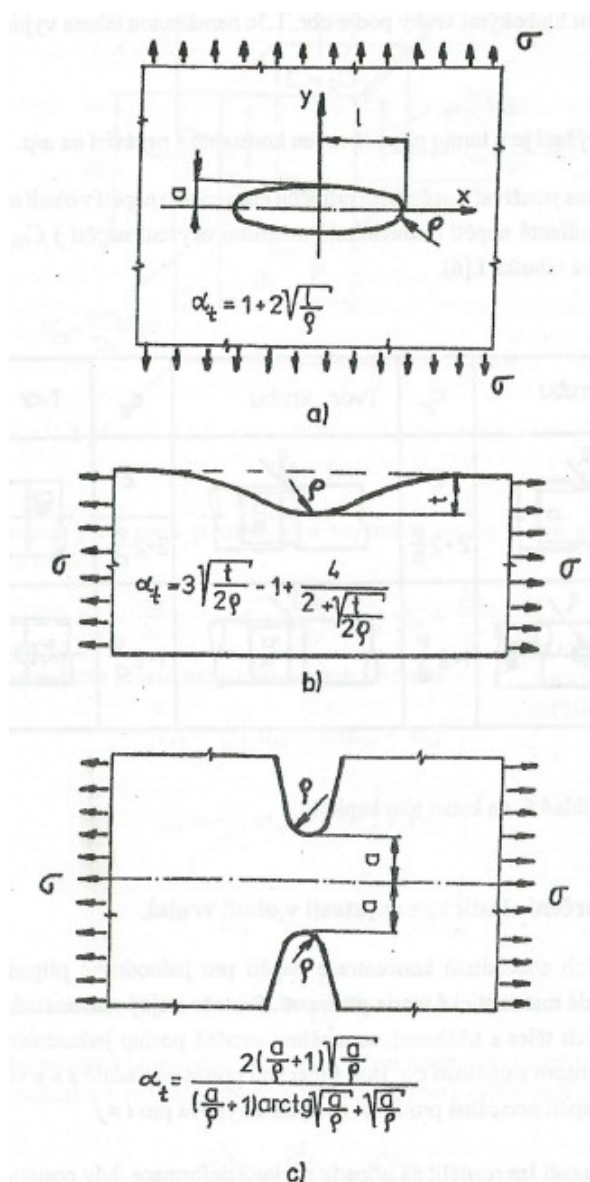
Tuto skutečnost vyjadřuje Saint-Venantův princip, který je definován následovně: „V dostatečné vzdálenosti od působíště vnější síly, případně náhle změny tvaru, je rozložení napětí a deformace nezávislé na způsobu přiložení vnější síly, případně na změně tvaru“ [14].

Velikost změny napětí účinkem vrubu lze vyjádřit teoretickým součinitelem koncentrace napětí α_t ,

$$\alpha_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}, \quad (1.1)$$

kde σ_{\max} je maximální napětí v kořeni vrubu a σ_n je nominální napětí, tj. napětí ve stejném místě součásti bez vrubu. Teoretický součinitel koncentrace napětí je závislý na poloměru zakřivení kořene vrubu ρ a jeho hloubce h (Obr. 1).

V průběhu 20. století byla provedena řada výzkumů, za účelem stanovení velikosti teoretického součinitele koncentrace napětí pro nejběžnější typy geometrie konstrukčních vrubů v technické praxi. Ucelený přehled součinitelů koncentrace napětí je uveden např. v díle [15].



Obr. 2 Ukázky výpočtu teoretického součinitele koncentrace napětí pro vybrané případy [8]

2 Základy teorie pružnosti

Pro řešení stavu napjatosti v tělesech jsou nezbytné znalosti z teorie pružnosti. V této kapitole jsou shrnuty základní poznatky z teorie pružnosti, které jsou nezbytné pro analytické řešení úloh.

2.1 Rozdělení úloh pružnosti

Řešení stavu napjatosti a deformace obecných prostorových těles je velmi obtížné. V případech, kde je to možné, se snažíme úlohu idealizovat na rovinnou. Tímto krokem získáme značné zjednodušení. Vzhledem ke geometrii řešeného problému lze provést i v tomto případě idealizaci na rovinnou úlohu. V teorii pružnosti rozlišujeme následující dva základní případy rovinných úloh.

Rovinná deformace – Hlavní podmínka rovinné deformace je, aby složka posuvu do jedné souřadnice byla nulová, a zároveň složky posuvů v ostatních směrech byly nezávislé na jedné souřadnici. Například pro souřadnici z lze tyto podmínky vyjádřit vztahem (2.1).

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0 \quad (2.1)$$

Případ rovinné deformace můžeme předpokládat u těles, které mají jeden rozměr značně velký vzhledem k ostatním a vyšetřované místo je v dostatečné vzdálenosti od konců tělesa.

Rovinná napjatost – Hlavní podmínka rovinné napjatosti je, aby všechny složky napětí působících na těleso, byly rovnoběžné s jednou rovinou. Např. pro rovinu x - y můžeme tyto podmínky vyjádřit vztahem (2.2).

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0 \quad (2.2)$$

Tento případ rovinné napjatosti je u těles, jejichž jeden rozměr je značně malý v porovnání s ostatními.

2.2 Základní rovnice teorie pružnosti pro rovinný stav napjatosti

Základní rovnice teorie pružnosti jsou trojího typu:

- Statické rovnice rovnováhy.
- Geometricko-deformační rovnice.
- Fyzikální rovnice.

Pro stanovení napjatosti a deformace je nezbytné použití všech typů rovnic, doplněných o okrajové podmínky.

Statické rovnice rovnováhy

Statické rovnice rovnováhy vyjadřují podmínky rovnováhy na malém elementu vyjmutého z tělesa. Tvar elementu je určen použitým souřadným systémem. Rovnice rovnováhy pro kartézské souřadnice lze zapsat ve tvaru [1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0\end{aligned}\tag{2.3}$$

nebo v polárních souřadnicích určené rovnicemi [1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rt}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} + R &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rt}}{\partial r} + \frac{2}{r} \tau_{rt} + T &= 0\end{aligned}\tag{2.4}$$

V rovnicích (2.3) a (2.4) jsou objemové složky sil označené symboly X, Y a R, T.

Geometrické rovnice

Cauchyho geometrické rovnice vyjadřují vztahy mezi posuvy a poměrnými deformacemi. Pro rovinnou úlohu se Cauchyho rovnice zmenší na tři a dají se vyjádřit v kartézských souřadnicích soustavou rovnic [9]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\tag{2.5}$$

Popřípadě v polárních souřadnicích následovně [9]

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_t = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\tag{2.6}$$

Rovnice kompatibility

Pro rovinné úlohy lze rovnice kompatibility ve složkách deformace vyjádřit ve tvaru [9]

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0\tag{2.7}$$

Dosazením složek deformace (2.11) do rovnice (2.7) a jednoduché úpravě můžeme vyjádřit rovnici kompatibility ve složkách napětí, též označované jako Lévyho podmínka, ve tvaru [9]

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) + (1 + \mu) \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.8)$$

Pokud budou derivace složek objemových sil nulové, pak v kartézských souřadnicích lze Lévyho podmínku zapsat ve tvaru [9]

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (2.9)$$

popřípadě v polárních souřadnicích [9]

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_t) = 0. \quad (2.10)$$

Fyzikální rovnice

Fyzikální rovnice (konstituční rovnice) definují důležité vztahy mezi statickými a geometrickými rovnicemi. Pro lineární oblast pružnosti platí Hookeův zákon, který lze zapsat pro izotropní materiál a rovinný stav napjatosti bez uvážení vlivu teploty rovnicemi [9]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu\sigma_y], & \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu\sigma_x], \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, & \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y), \end{aligned} \quad (2.11)$$

nebo inverzními vztahy [9]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), & \sigma_y &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.3 Okrajové podmínky

Okrajové podmínky v lineární pružnosti vyjadřují způsob jakým je těleso uchyceno nebo zatíženo. Jsou nezbytné pro stanovení integračních konstant diferenciálních rovnic. Obvykle jsou určeny posuvy nebo zatížení na povrchu tělesa, podle toho rozlišujeme následující typy okrajových podmínek.

Statické okrajové podmínky – část povrchu tělesa je zatížen silovým účinkem (síla, tlak, moment).

Geometrické okrajové podmínky – na povrchu tělesa jsou předepsány složky posuvů.

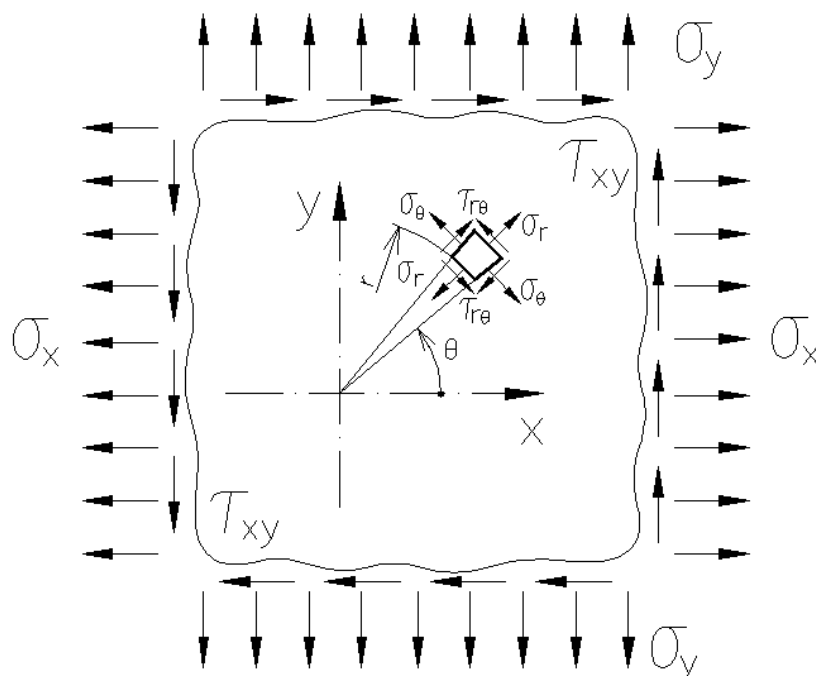
Smíšené okrajové podmínky – na určité části povrchu jsou známy zároveň statické a okrajové podmínky.

Transformace napětí z kartézských souřadnic do polárních souřadnic

Při řešení problematiky stavu rovinné napjatosti v okolí kruhových otvorů se používají polární souřadnice. Zatížení v takových případech jsou předepsané v kartézských souřadnicích, proto je nutné uvést rovnice pro transformaci napětí z kartézských souřadnic do polárních souřadnic. Transformační rovnice je uvedena v [11] ve tvaru

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \frac{-\sigma_x + \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}\quad (2.13)$$

Transformační rovnice (2.13) platí pro úhel θ zakótovaný od kladné osy x podle Obr. 3.



Obr. 3 Transformace napětí z kartézských souřadnic do souřadnic polárních

3 Analytické řešení s využitím funkce napětí

Použití funkce napětí pro řešení stavu napjatosti zavedl Maxwell. Pro prostorovou napjatost definoval tři funkce napětí $\phi_1(x, y, z)$, $\phi_2(x, y, z)$ a $\phi_3(x, y, z)$. Derivací funkcí napětí lze stanovit složky napětí ve všech bodech tělesa. Složky napětí získané z derivace funkcí napětí musí splňovat statické rovnice rovnováhy a rovnice kompatibility. Nalezení tří funkcí napětí pro prostorovou úlohu je velmi obtížné, ale podařilo se nalézt funkce napětí pro určité případy rovinných úloh. U rovinných úloh se soustava tří funkcí napětí snižuje na jednu, která je označovaná jako Airyho funkce napětí.

3.1 Airyho funkce napětí

Při řešení stavu napjatosti u rovinných úloh je vhodné zavést Airyho funkci napětí ϕ . Funkce napětí $\phi(x, y)$ v kartézských souřadnicích musí splňovat rovnice rovnováhy (2.3) a rovnice kompatibility (2.7). Složky napětí vyjádřené v kartézských souřadnicích z Airyho funkce napětí jsou definované derivacemi [9]

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Dosazením rovnic (3.1) do rovnice kompatibility (2.9) získáme biharmonickou rovnici [9]

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \nabla^4 \phi = 0.\tag{3.2}$$

Airyho funkce napětí $\phi(x, y)$ je tedy určena pouze jednou diferenciální rovnicí. V určitých případech rovinných úloh pružnosti je vhodné zavést polární souřadnice k nalezení řešení. Složky napětí v polárních souřadnicích jsou vyjádřené derivacemi [1]

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\tag{3.3}$$

Potom biharmonická rovnice v polárních souřadnicích má tvar [11]

$$\nabla^4 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \phi = 0. \quad (3.4)$$

Obecné Michellovo řešení

O nalezení obecného řešení v polárních souřadnicích se zasloužil australský profesor matematiky John Henry Michell. Při obecném řešení biharmonické rovnice (3.4) dosáhl Michell obecného tvaru Airyho funkce napětí ve formě [11]

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) = & a_0 + a_1 \cdot \log r + a_2 \cdot r^2 + a_3 \cdot r^2 \cdot \log r \\ & + (a_4 + a_5 \cdot \log r + a_6 \cdot r^2 + a_7 \cdot r^2 \cdot \log r) \cdot \theta \\ & + \left(a_{11} \cdot r + a_{12} \cdot r \cdot \log r + \frac{a_{13}}{r} + a_{14} \cdot r^3 + a_{15} \cdot r \cdot \theta + a_{16} \cdot r \cdot \theta \cdot \log r \right) \cdot \cos \theta \\ & + \left(b_{11} \cdot r + b_{12} \cdot r \cdot \log r + \frac{b_{13}}{r} + b_{14} \cdot r^3 + b_{15} \cdot r \cdot \theta + b_{16} \cdot r \cdot \theta \cdot \log r \right) \cdot \sin \theta \quad (3.5) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n1} \cdot r^n + a_{n2} \cdot r^{2+n} + a_{n3} \cdot r^{-n} + a_{n4} \cdot r^{2-n}) \cdot \cos n\theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (b_{n1} \cdot r^n + b_{n2} \cdot r^{2+n} + b_{n3} \cdot r^{-n} + b_{n4} \cdot r^{2-n}) \cdot \sin n\theta \end{aligned}$$

Konstanty a_n , a_{nm} a b_{nm} jsou určeny na základě okrajových podmínek pro daný konkrétní řešený případ. Obecné Michellovo vyjádření je periodické, které má obrovské praktické využití a umožňuje snadné řešení pro okrajové podmínky vyjádřené pomocí Fourierovy metody.

3.2 Funkce napětí v komplexní proměnné

Komplexní proměnnou do matematické teorie pružnosti rovinných úloh zavedl L. Kolosov a N. I. Muskhelishvili. Metoda je založena na formulaci okrajových podmínek v komplexní rovině a následné využití velmi účinných matematických prostředků pro řešení problému v komplexním oboru. Funkce napětí vyjádřená v komplexní proměnné poskytuje řešení pro velké množství úloh pružnosti. Využití zahrnuje úlohy kroucení, rovinných úloh pružnosti, lomové mechaniky a anizotropních materiálu.

Každá funkce napětí může být zapsána ve tvaru [11]

$$\phi = \operatorname{Re}\left[\bar{z}\gamma(z) + \chi(z)\right], \quad (3.6)$$

kde Re znamená reálnou část z komplexního čísla a \bar{z} komplexně sdružené číslo. Pokud je funkce napětí (3.6) vyjádřena v závislosti na dvou libovolně zvolených funkcích komplexní proměnné $\gamma(z)$, $\chi(z)$, potom je nezbytné vyjádřit také napětí a deformace ve tvaru dvou komplexních potenciálů.

Označením komplexní deformace $U = u + iv$ můžeme pole posuvů definované v komplexní proměnné zapsat ve tvaru [11]

$$2GU = \kappa\gamma(z) - z\overline{\gamma'(z)} - \overline{\chi'(z)}, \quad (3.7)$$

kde součinitel κ je závislý pouze na Poissonově čísle μ

$$\begin{aligned} \kappa &= 3 - 4\mu \text{ pro rovinnou deformaci,} \\ \kappa &= \frac{3 - \mu}{1 + \mu} \text{ pro rovinnou napjatost.} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Kombinace základních napětí ve tvaru komplexních potenciálů lze vyjádřit ve tvaru [11]

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\gamma'(z) + \overline{\gamma'(z)}] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[z\gamma''(z) + \overline{\chi''(z)}] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Funkce $\gamma(z)$ a $\chi(z)$ jsou obecně označovány jako Kolosov-Muskhelishviliho potenciály. Řešení problému se následně redukuje na nalezení vhodného komplexního potenciálu, který splňuje dané okrajové podmínky.

4 Analytické řešení desky s jedním otvorem

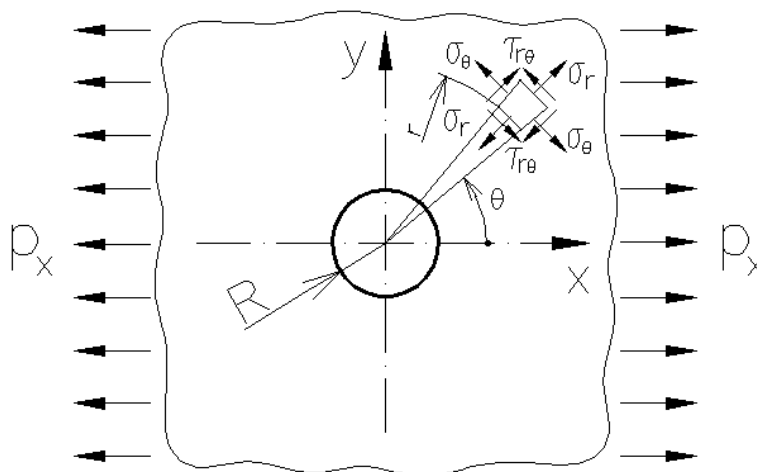
Analytické řešení je provedeno pro desku nekonečných rozměrů s jedním otvorem. Poloměr otvoru je dán rozměrem R . Řešení bude provedené v polárních souřadnicích r a θ , kde počátek souřadného systému je totožný se středem otvoru. Při řešení stavu napjatosti jednotlivých případů je použita Airyho funkce napětí. Na základě typu úlohy a stanovených okrajových podmínek se vybírají členy z obecného Michellova řešení (3.5), které popisují stav napjatosti dané úlohy.

Pro desku nekonečných rozměrů s jedním otvorem je provedené analytické řešení pro následující způsoby zatížení desky:

- Jednoosé zatížení
- Dvouosé zatížení
- Čistý smyk
- Tlak uvnitř otvoru

4.1 Jednoosé zatížení

V prvním případě uvažujme desku nekonečných rozměrů s kruhovým otvorem namáhanou tahovým napětím v jedné ose. Tahové napětí zavedeme v ose x a označíme p_x (Obr. 4).



Obr. 4 Deska s jedním otvorem zatížená v ose x

Předpokládejme, že obvod otvoru bude nezatížený a na desku bude působit pouze už zmíněné tahové napětí $\sigma_x(x = \infty) = p_x$. Pak okrajové podmínky můžeme zapsat pomocí transformačních vzorců (2.13) v polárních souřadnicích

$$\begin{aligned}
\sigma_r(R, \theta) &= 0 \\
\tau_{r\theta}(R, \theta) &= 0 \\
\sigma_r(\infty, \theta) &= \frac{P_x}{2} \cdot (1 + \cos 2\theta) \\
\sigma_\theta(\infty, \theta) &= \frac{P_x}{2} \cdot (1 - \cos 2\theta) \\
\tau_{r\theta}(\infty, \theta) &= -\frac{P_x}{2} \cdot \sin 2\theta
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Pro danou úlohu z obecného Michellova řešení (3.5) odpovídá Airyho funkce ve tvaru

$$\begin{aligned}
\phi(r, \theta) &= a_0 + a_1 \cdot \log r + a_2 \cdot r^2 + a_3 \cdot r^2 \cdot \log r \\
&\quad + (a_{21} \cdot r^2 + a_{22} \cdot r^4 + a_{23} \cdot r^{-2} + a_{24}) \cdot \cos 2\theta
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Složky napětí Airyho funkce napětí (4.2) jsou definované vzorci

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= a_3(1 + 2 \log r) + 2a_2 + \frac{a_1}{r^2} - \left(2a_{21} + \frac{6a_{23}}{r^4} + \frac{4a_{24}}{r^2} \right) \cos 2\theta \\
\sigma_\theta &= a_3(3 + 2 \log r) + 2a_2 - \frac{a_1}{r^2} + \left(2a_{21} + 12a_{22}r^4 + \frac{6a_{23}}{r^4} \right) \cos 2\theta \\
\tau_{r\theta} &= \left(2a_{21} + 6a_{22}r^2 - \frac{6a_{23}}{r^4} - \frac{2a_{24}}{r^2} \right) \sin 2\theta
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Je-li v okrajových podmínkách definované zatížení v nekonečnu, pak v rovnici (4.3) členy a_3 a a_{22} jsou rovny nule. Zavedením okrajových podmínek (4.1) získáme soustavu rovnic (4.4) pro vyjádření neznámých koeficientů. První okrajová podmínka v (4.4) bude splněna pouze tehdy, když budou oba členy napětí σ_r v první rovnici (4.3) rovny nule.

$$\begin{aligned}
\sigma_r(R, \theta): \quad 2a_2 + \frac{a_1}{R^2} &= 0 \\
\sigma_r(R, \theta): \quad 2a_{21} + \frac{6a_{23}}{R^4} + \frac{4a_{24}}{R^2} &= 0 \\
\sigma_\theta(\infty, \theta): \quad 2a_2 &= \frac{P_x}{2} \\
\tau_{r\theta}(R, \theta): \quad 2a_{21} - \frac{6a_{23}}{R^4} - \frac{2a_{24}}{R^2} &= 0 \\
\tau_{r\theta}(\infty, \theta): \quad 2a_{21} &= -\frac{P_x}{2}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Řešením této soustavy rovnic získáme neznámé koeficienty ve tvaru

$$a_1 = -\frac{R^2 P_x}{2}, \quad a_2 = \frac{P_x}{4}, \quad a_{21} = -\frac{P_x}{4}, \quad a_{23} = -\frac{R^4 P_x}{4}, \quad a_{24} = \frac{R^2 P_x}{2} \tag{4.5}$$

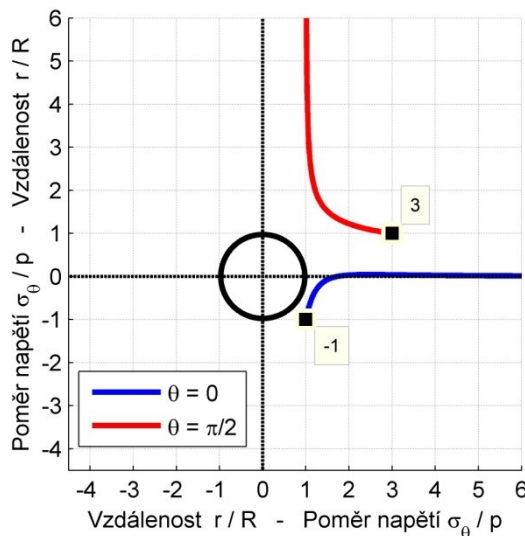
Dosazením koeficientu zpátky do rovnic (4.3) získáme složky napětí pro daný případ

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p_x}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{p_x}{2} \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4} - 4\frac{R^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{p_x}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{p_x}{2} \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{p_x}{2} \left(1 - 3\frac{R^4}{r^4} + 2\frac{R^2}{r^2}\right) \sin 2\theta\end{aligned}\quad (4.6)$$

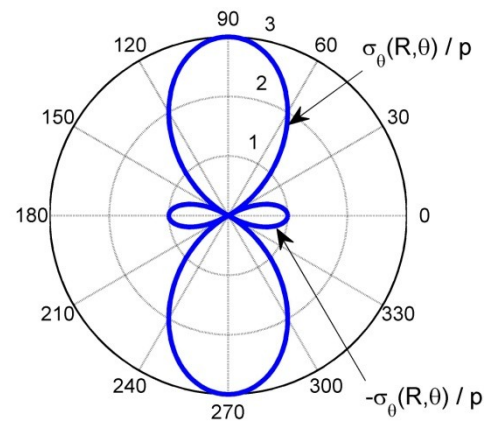
Dosazením $r = R$ do vzorců (4.6) dostaneme napětí na obvodu otvoru

$$\begin{aligned}\sigma_r(R, \theta) &= 0 \\ \sigma_\theta(R, \theta) &= p_x(1 - 2\cos 2\theta) \\ \tau_{r\theta}(R, \theta) &= 0\end{aligned}\quad (4.7)$$

Všechna napětí jsou rovna nule, kromě normálového σ_θ . Maximální hodnota napětí nastává pro úhel $\theta = \pm\pi/2$ a je rovna $\sigma_\theta/p = 3$, naopak pro úhel $\theta = 0$ nebo $\theta = \pi$ nastává minimum $\sigma_\theta/p = -1$. Průběh normálového napětí σ_θ je zobrazen na Obr. 5 v závislosti na vzdálenosti polární souřadnice r , červeně je znázorněn průběh napětí pro úhel $\theta = \pi/2$ a modře pro úhel $\theta = 0$. Druhý graf (Obr. 6) vyjadřuje velikosti normálového napětí σ_θ na obvodu otvoru v závislosti na velikosti polárního úhlu θ .



Obr. 5 Průběh napětí v závislosti na poloměru

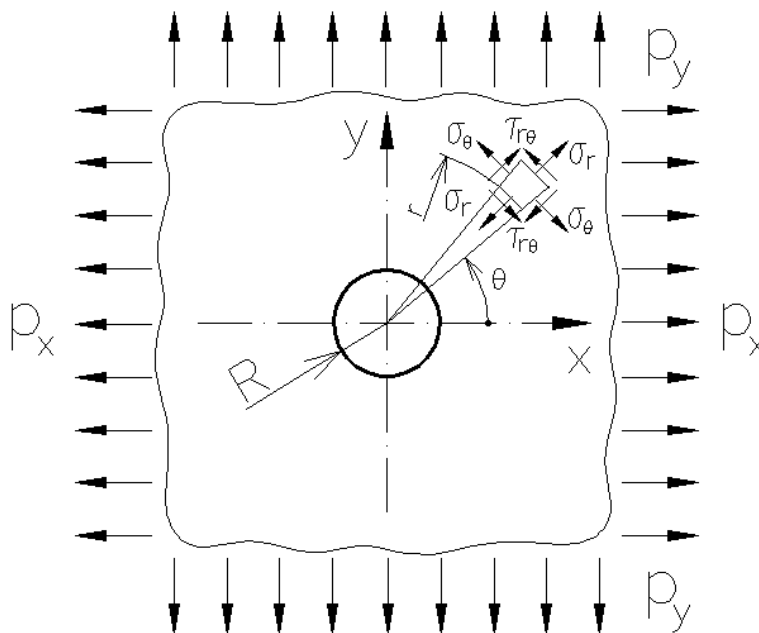


Obr. 6 Průběh napětí v závislosti na úhlu

Z grafu (Obr. 5) je patrné, že s narůstající vzdáleností r se hodnoty normálového napětí σ_θ ustalují na konstantní hodnotě. Pro úhel $\theta = 0$ je ustálená hodnota napětí rovná nule, na rozdíl od úhlu $\theta = \pi/2$, kde se hodnota ustaluje na velikosti zatížení zadaných v okrajových podmínkách.

4.2 Dvouosé zatížení

Uvažujme případ nekonečné desky s kruhovým otvorem, která je zatížena tahovým napětím v obou osách x a y (Obr. 7). Označme tahové napětí v ose x p_x a v ose y p_y .



Obr. 7 Deska s jedním otvorem zatížena kombinovaně v obou osách

Předpokládejme, že obvod otvoru bude nezatížený a deska bude zatížena pouze tahovým napětím $\sigma_x(x = \infty) = p_x$ a $\sigma_y(y = \infty) = p_y$. Pak okrajové podmínky můžeme zapsat pomocí transformačních vzorců (2.13) v polárních souřadnicích

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(R, \theta) &= \tau_{r\theta}(R, \theta) = 0 \\
 \sigma_r(\infty, \theta) &= \frac{p_x + p_y}{2} + \frac{p_x - p_y}{2} \cos 2\theta \\
 \sigma_\theta(\infty, \theta) &= \frac{p_x + p_y}{2} - \frac{p_x - p_y}{2} \cos 2\theta \\
 \tau_{r\theta}(\infty, \theta) &= \frac{p_x - p_y}{2} \cdot \sin 2\theta
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

V tomto případě využijeme stejný tvar Airyho funkce jako je použitý pro předchozí příklad v kapitole 4.1. Složky napětí jsou určeny vzorci (4.6) a po dosazení okrajových podmínek dostaneme

$$\begin{aligned}
\sigma_r(R, \theta): \quad & 2a_2 + \frac{a_1}{R^2} = 0 \\
\sigma_r(R, \theta): \quad & 2a_{21} + \frac{6a_{23}}{R^4} + \frac{4a_{24}}{R^2} = 0 \\
\sigma_\theta(\infty, \theta): \quad & 2a_2 = \frac{p_x + p_y}{2} \\
\tau_{r\theta}(R, \theta): \quad & 2a_{21} - \frac{6a_{23}}{R^4} - \frac{2a_{24}}{R^2} = 0 \\
\tau_{r\theta}(\infty, \theta): \quad & 2a_{21} = \frac{-p_x + p_y}{2}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Řešením této soustavy rovnic získáme neznámé koeficienty ve tvaru

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{R^2(p_x + p_y)}{2}, \quad a_2 = \frac{p_x + p_y}{4}, \quad a_{21} = \frac{-p_x + p_y}{4}, \\
a_{23} &= -\frac{R^4(p_x - p_y)}{4}, \quad a_{24} = \frac{R^2(p_x - p_y)}{2}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Zpětným dosazením koeficientu do rovnic (4.3) můžeme zapsat složky napětí pro daný případ

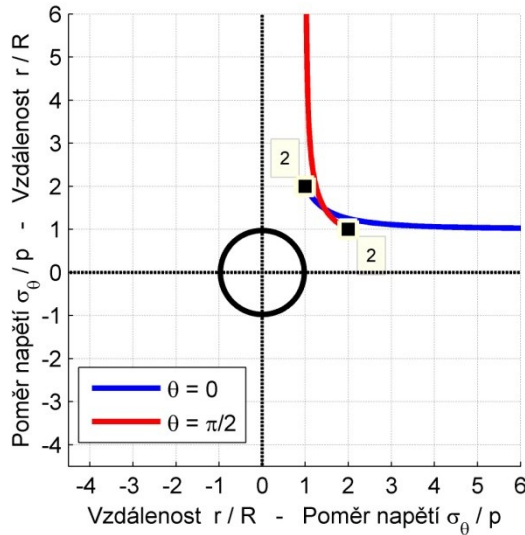
$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{p_x + p_y}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{p_x - p_y}{2} \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4} - 4\frac{R^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \\
\sigma_\theta &= \frac{p_x + p_y}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{p_y - p_x}{2} \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\
\tau_{r\theta} &= \frac{p_y - p_x}{2} \left(1 - 3\frac{R^4}{r^4} + 2\frac{R^2}{r^2}\right) \sin 2\theta
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Dosazením $r = R$ do vzorců (4.11) dostaneme napětí na obvodu otvoru

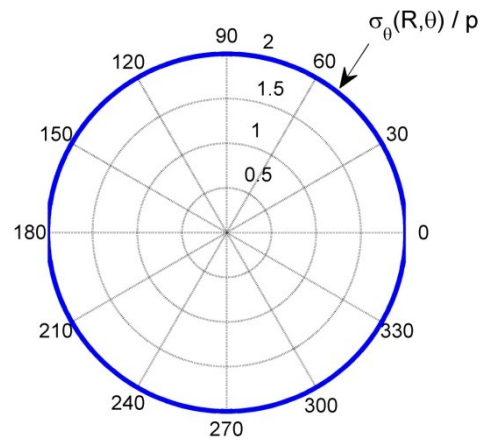
$$\begin{aligned}
\sigma_r(R, \theta) &= 0 \\
\sigma_\theta(R, \theta) &= p_x + p_y + 2(p_y - p_x) \cos 2\theta \\
\tau_{r\theta}(R, \theta) &= 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Maximální hodnota normálového napětí σ_θ nastává pro úhel $\theta = \pm\pi/2$ a je rovna $\sigma_{\theta, \max} = 3p_x - p_y$, naopak pro úhel $\theta = 0$ nebo $\theta = \pi$ nastává minimum $\sigma_{\theta, \min} = -p_x + 3p_y$. Je-li deska zatížena stejně velkým napětím v nekonečnu v obou osách $p_x = p_y = p$, pak normálové napětí σ_θ na obvodu otvoru je konstantní a nezávislé na hodnotě polárního úhlu θ . V takovém případě je maximální hodnota rovna $\sigma_\theta / p = 2$.

Průběh normálového napětí σ_θ je zobrazen na Obr. 8 v závislosti na vzdálenosti polární souřadnice r , červeně je znázorněn průběh napětí pro úhel $\theta = \pi/2$ a modře pro úhel $\theta = 0$. Druhý graf (Obr. 9) vyjadřuje velikosti normálového napětí σ_θ na obvodu otvoru v závislosti na velikosti polárního úhlu θ .



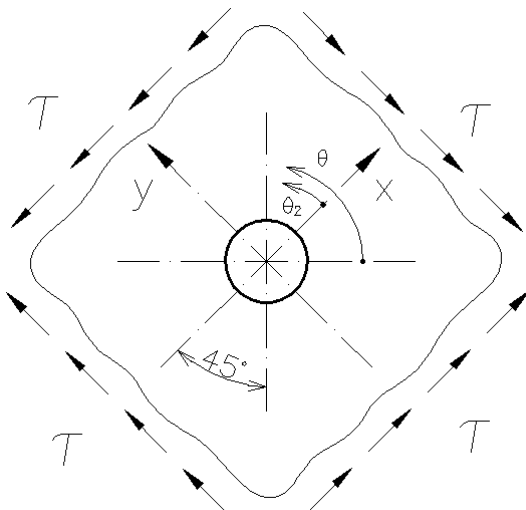
Obr. 8 Průběh napětí v závislosti na poloměru



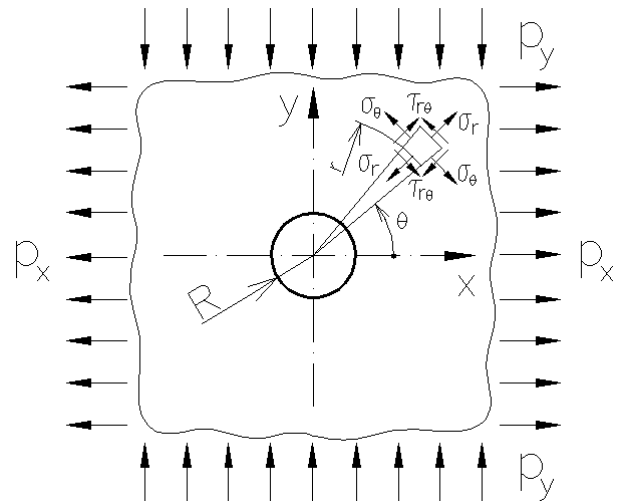
Obr. 9 Průběh napětí v závislosti na úhlu

4.3 Čistý smyk

U tohoto typu zatížení lze obecně postupovat dvěma způsoby. V prvním případě je deska natočena o úhel 45° a uvažujeme zatížení smykovým napětím (Obr. 10). Druhý způsob nahrazuje smykové napětí kombinací zatížené ve dvou osách (Obr. 11).



Obr. 10 Zatížení smykovým napětím



Obr. 11 Zatížení kombinované ve dvou osách

4.3.1 Zatížení smykovým napětím

Uvažujme nejdříve zatížení smykovým napětím, pro který můžeme vyjádřit okrajovou podmínku $\tau_{xy} = -\tau$. Pomocí transformačních vzorců (2.13) lze danou okrajovou podmínku přepsat do polárních souřadnic

$$\begin{aligned}\sigma_r(R, \theta) &= \tau_{r\theta}(R, \theta) = 0 \\ \sigma_r(\infty, \theta) &= -\tau \sin 2\theta \\ \sigma_\theta(\infty, \theta) &= \tau \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta}(\infty, \theta) &= -\tau \cos 2\theta\end{aligned}\tag{4.13}$$

Pro danou úlohu z obecného Michellova řešení (3.5) odpovídá Airyho funkce ve tvaru

$$\phi(r, \theta) = (b_{21} \cdot r^2 + b_{22} \cdot r^4 + b_{23} \cdot r^{-2} + b_{24}) \cdot \sin 2\theta\tag{4.14}$$

Složky napětí Airyho funkce (4.14) jsou definované vzorci

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\left(2b_{21} + \frac{6b_{23}}{r^4} + \frac{4b_{24}}{r^2}\right) \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \left(2b_{21} + 12b_{22}r^4 + \frac{6b_{23}}{r^4}\right) \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \left(-2b_{21} - 6b_{22}r^2 + \frac{6b_{23}}{r^4} + \frac{2b_{24}}{r^2}\right) \cos 2\theta\end{aligned}\tag{4.15}$$

Dosazením okrajových podmínek do rovnice (4.15) získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sigma_r(R, \theta): \quad & 2b_{21} + \frac{6b_{23}}{R^4} + \frac{4b_{24}}{R^2} = 0 \\ \tau_{r\theta}(R, \theta): \quad & -2b_{21} + \frac{6b_{23}}{R^4} + \frac{2b_{24}}{R^2} = 0 \\ \sigma_r(\infty, \theta): \quad & -2b_{21} = -\tau \\ \sigma_\theta(\infty, \theta): \quad & 2b_{21} = \tau \\ \tau_{r\theta}(\infty, \theta): \quad & -2b_{21} = -\tau\end{aligned}\tag{4.16}$$

Řešením této soustavy rovnic jsou neznámé koeficienty ve tvaru

$$b_{21} = \frac{\tau}{2}, \quad b_{23} = \frac{\tau \cdot R^4}{2}, \quad b_{24} = -\tau \cdot R^2\tag{4.17}$$

Dosazením koeficientu zpátky do rovnic (4.3) získáme složky napětí pro daný případ

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\tau \cdot \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4} - 4\frac{R^2}{r^2}\right) \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \tau \cdot \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4}\right) \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \tau \cdot \left(-1 + 3\frac{R^4}{r^4} - 2\frac{R^2}{r^2}\right) \cos 2\theta\end{aligned}\tag{4.18}$$

Dosazením $r = R$ do vzorců (4.18) dostaneme napětí na obvodu otvoru

$$\begin{aligned}\sigma_r(R, \theta) &= 0 \\ \sigma_\theta(R, \theta) &= 4\tau \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta}(R, \theta) &= 0\end{aligned}\tag{4.19}$$

Maximální hodnota normálového napětí σ_θ nastává pro úhel $\theta_2 = 0$ (nebo $\theta = \pi/2$) a je rovna $\sigma_\theta/\tau = 4$, naopak pro úhel $\theta_2 = \pi$ (nebo $\theta = 3\pi/2$) nastává minimum $\sigma_\theta/\tau = -4$.

4.3.2 Zatížení kombinované ve dvou osách

Alternativně můžeme zatížení čistým smykem nahradit kombinací zatížení ve dvou osách podle Obr. 11. Okrajové podmínky jsou definované $\sigma_x(x = \infty) = p_x$ a $\sigma_y(y = \infty) = -p_y$. Příklad dvouosého zatížení je obecně vyřešen v kapitole 4.2 pro tahové napětí v obou osách. Náhradou tahového zatížení za tlakové v ose y ($p_y = -p_y$) v uvedeném řešení můžeme získat složky napětí pro tento případ ve tvaru

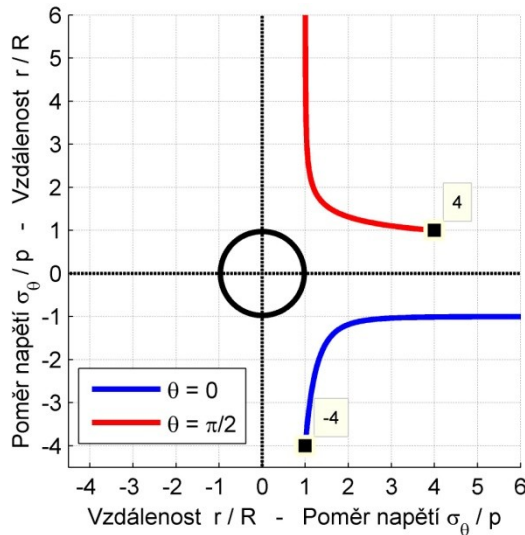
$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p_x - p_y}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{p_x + p_y}{2} \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4} - 4\frac{R^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{p_x - p_y}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{p_x + p_y}{2} \left(1 + 3\frac{R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{p_x + p_y}{2} \left(1 - 3\frac{R^4}{r^4} + 2\frac{R^2}{r^2}\right) \sin 2\theta\end{aligned}\tag{4.20}$$

Dosazením $r = R$ do vzorců (4.20) dostaneme napětí na obvodu otvoru

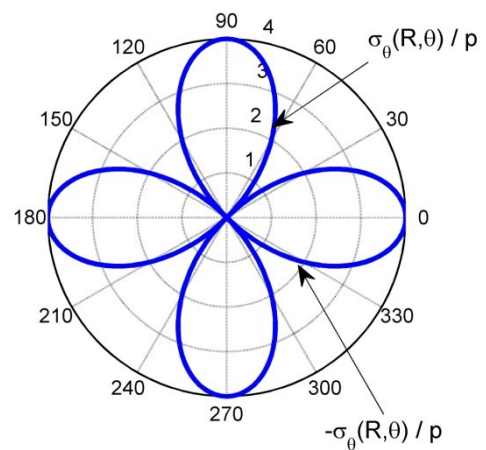
$$\begin{aligned}\sigma_r(R, \theta) &= 0 \\ \sigma_\theta(R, \theta) &= p_x - p_y - 2(p_x + p_y) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta}(R, \theta) &= 0\end{aligned}\tag{4.21}$$

Maximální hodnota normálového napětí σ_θ nastává pro úhel $\theta = \pm\pi/2$ a je rovna $\sigma_{\theta,\max} = 3p_x + p_y$, naopak pro úhel $\theta = 0$ nebo $\theta = \pi$ nastává minimum $\sigma_{\theta,\min} = -p_x - 3p_y$. Je-li deska zatížena stejně velkým napětím v nekonečnu v obou osách $p_x = p_y = p$, pak normálové napětí σ_θ na obvodu otvoru nabývá maxima $\sigma_\theta / p = 4$ a minima $\sigma_\theta / p = -4$.

Průběh normálového napětí σ_θ je zobrazen na Obr. 12 v závislosti na vzdálenosti polární souřadnice r , červeně je znázorněn průběh napětí pro úhel $\theta = \pi/2$ a modře pro úhel $\theta = 0$. Druhý graf (Obr. 13) vyjadřuje velikosti normálového napětí σ_θ na obvodu otvoru v závislosti na velikosti polárního úhlu θ .



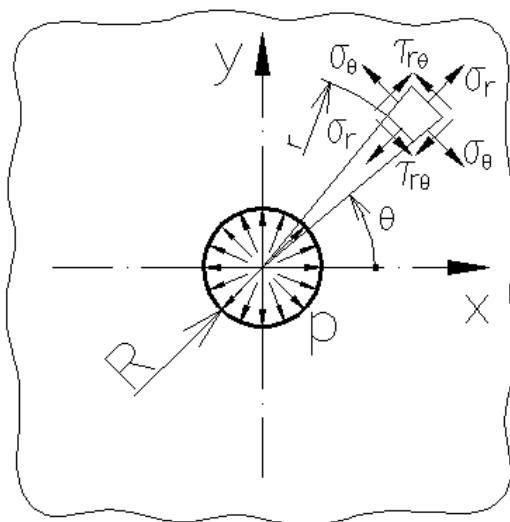
Obr. 12 Průběh napětí v závislosti na poloměru



Obr. 13 Průběh napětí v závislosti na úhlu

4.4 Tlak uvnitř otvoru

V posledním příkladu uvažujme nekonečnou desku s kruhovým otvorem. Na desku působí uvnitř otvoru tlakové napětí, které je osově symetrické a konstantní velikosti.



Obr. 14 Deska s jedním otvorem zatížená tlakem uvnitř otvoru

Okrajové podmínky pro tento stav zatížení můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\sigma_r(R, \theta) &= -p \\ \sigma_r(\infty, \theta) &= 0\end{aligned}\tag{4.22}$$

Z obecného Michellova řešení (3.5) lze pro daný případ zapsat Airyho funkci napětí ve tvaru

$$\phi(r, \theta) = a_0 + a_1 \cdot \log r + a_2 \cdot r^2 + a_3 \cdot r^2 \cdot \log r,\tag{4.23}$$

kde složky napětí jsou

$$\begin{aligned}\sigma_r &= a_3(1 + 2 \log r) + \frac{a_1}{r^2} + 2a_2 \\ \sigma_\theta &= a_3(3 + 2 \log r) - \frac{a_1}{r^2} + 2a_2 \\ \tau_{r\theta} &= 0\end{aligned}\tag{4.24}$$

Koeficient a_3 bude opět roven nule, protože je definována okrajová podmínka v nekonečnu. Zavedením okrajových podmínek (4.22) do složek napětí (4.24) dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sigma_r(R, \theta): \quad & \frac{a_1}{R^2} + 2a_2 = -p, \\ \sigma_r(\infty, \theta): \quad & 2a_2 = 0\end{aligned}\tag{4.25}$$

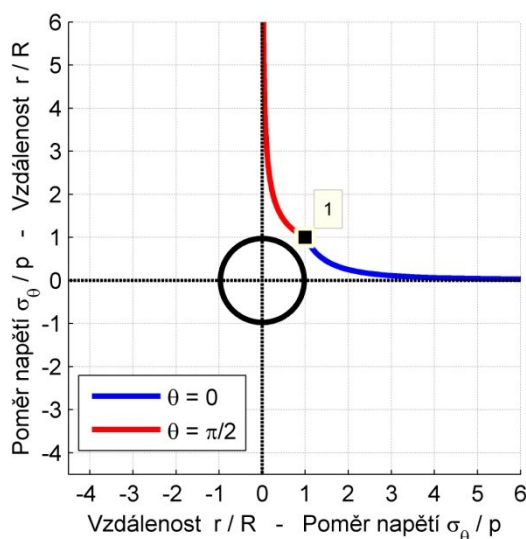
pro kterou lze stanovit neznámé koeficienty ve tvaru

$$a_1 = -pR^2, \quad a_2 = 0. \quad (4.26)$$

Po dosazení těchto koeficientů zpátky do rovnice (4.24) získáme složky napětí

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{-pR^2}{r^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{pR^2}{r^2} \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Průběh normálového napětí σ_θ je zobrazen na Obr. 15 v závislosti na vzdálenosti polární souřadnice. Z grafu je zřejmé, že největší hodnota normálového napětí σ_θ je na obvodu otvoru a je rovna $\sigma_\theta / p = 1$. S narůstající vzdáleností r , napětí σ_θ klesá až k nule pro $r = \infty$.



Obr. 15 Deska s jedním otvorem zatížena tlakem uvnitř otvoru

Shrnutí výsledků analytického řešení nekonečné desky s jedním otvorem

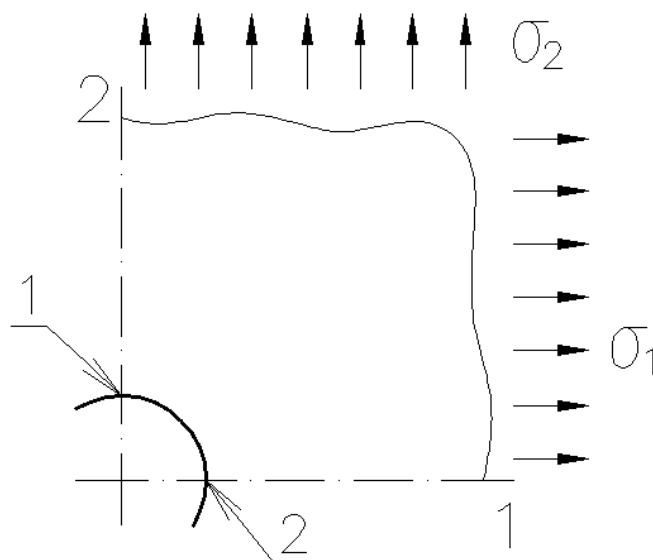
Na závěr v následující tabulce je uvedeno shrnutí získaných hodnot normálového napětí σ_θ z analytického řešení na obvodu otvoru pro úhly $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$.

Tab. 1 Shrnutí získaných hodnot pro analytické řešení desky s jedním otvorem

Způsob zatížení	Poměr napětí σ_θ / p	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$
Jednoosý tah	-1	3
Dvouosý tah	2	2
Čistý smyk	-4	4
Tlak uvnitř otvoru	1	

4.5 Stanovení součinitele koncentrace napětí při dvouosé napjatosti

Uvažujme obecné zatížení desky s jedním otvorem hlavními napětími σ_1, σ_2 a označme body na obvodu otvoru podle Obr. 16.



Obr. 16 Zatížení desky s jedním otvorem hlavními napětími

V kapitole 4.2 je pro tento případ odvozené normálové napětí σ_θ . Přeznačíme-li v rovnici (4.12) p_x na σ_1 a p_y na σ_2 , pak dostaneme pro bod 1 napětí (4.28) a bod 2 napětí (4.29).

$$\sigma_{\theta,1} = 3\sigma_1 - \sigma_2 \quad (4.28)$$

$$\sigma_{\theta,2} = -\sigma_1 + 3\sigma_2 \quad (4.29)$$

Označíme-li α_{ijk} velikost dílčího součinitele koncentrace napětí, kde první index značí bod na obvodu otvoru, druhý směr normálového napětí σ_θ a poslední index napětí, které danou koncentraci napětí způsobilo. Na základě tohoto označení můžeme ze vzorců (4.28) a (4.29) vyjádřit $\alpha_{111} = 3$, $\alpha_{112} = -1$, $\alpha_{221} = -1$, $\alpha_{222} = 3$. Pokud dále označíme α_{ik} výsledný součinitel koncentrace napětí, pak můžeme vzorce (4.28) a (4.29) přepsat do tvaru

$$\alpha_{11}\sigma_1 = \alpha_{111}\sigma_1 + \alpha_{112}\sigma_2 \quad (4.30)$$

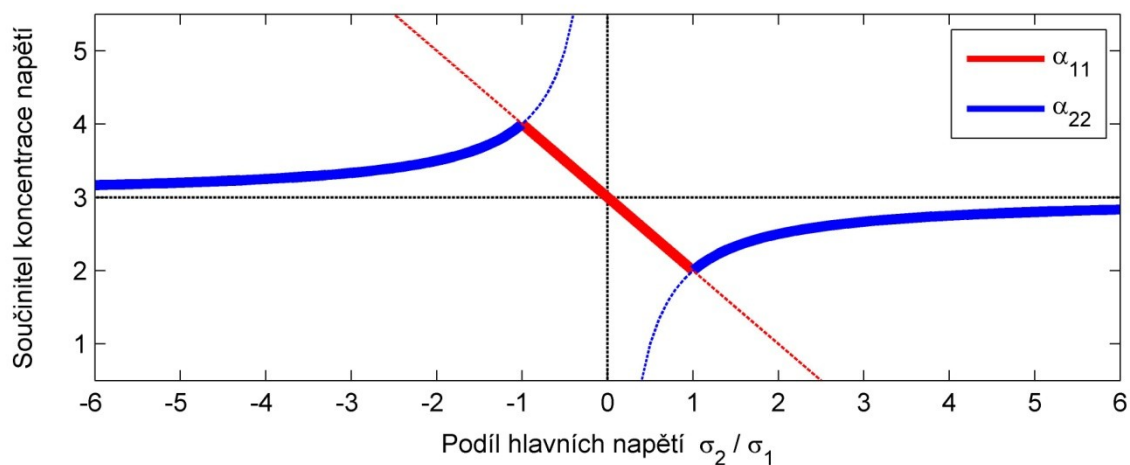
$$\alpha_{22}\sigma_2 = \alpha_{222}\sigma_2 + \alpha_{221}\sigma_1,$$

nebo

$$\alpha_{11} = \alpha_{111} + \alpha_{112} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad (4.31)$$

$$\alpha_{22} = \alpha_{222} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \alpha_{221}.$$

Graficky jsou součinitele koncentrace napětí (4.31) zobrazeny na Obr. 17. Z grafu je patrné, že součinitel koncentrace napětí závisí na napjatosti a pohybuje se v rozmezí $2 \leq \alpha_i \leq 4$. V případě kdy σ_1 se limitně blíží k nule, pak absolutní hodnota α_{11} narůstá do nekonečna a součin $\alpha_{11}\sigma_1 < \alpha_{22}\sigma_2$, pak v intervalu $1 \leq |\sigma_2/\sigma_1| < \infty$ je rozhodující napjatost v bodě 2. Podobně pokud $\sigma_2 \rightarrow 0$ je $|\alpha_{22}| \rightarrow \infty$ a jejich součin $\alpha_{22}\sigma_2$ je menší než $\alpha_{11}\sigma_1$, takže v intervalu $-1 \leq \sigma_2/\sigma_1 \leq 1$ je rozhodující napjatost v bodě 1.



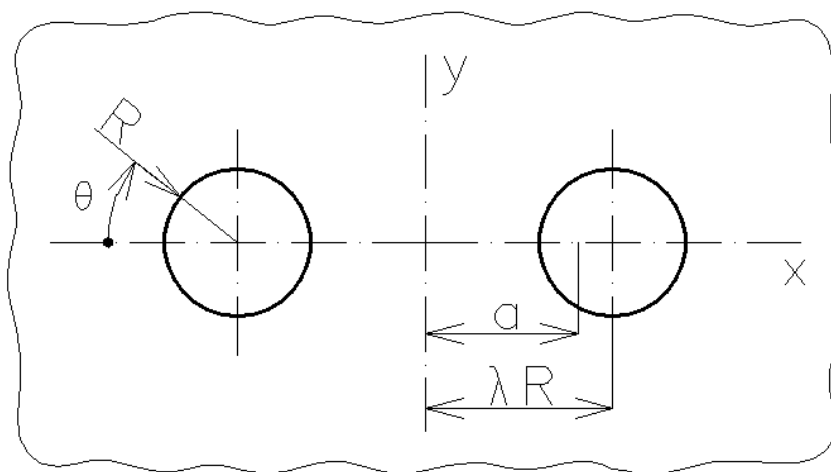
Obr. 17 Grafický průběh součinitele koncentrace napětí

5 Analytické řešení desky s dvěma otvory

Problematice stanovení napjatosti v nekonečné desce se dvěma otvory stejné velikosti se věnoval Ling, který výsledky svého bádání publikoval v [13]. Ve své práci popisuje kompletně teoretický postup analytického řešení, včetně vyjádření parametrických koeficientů v explicitní formě. Funkce napětí je definována v bipolárním souřadném systému. Bipolární souřadnice (ξ, η) jsou vyjádřeny transformační rovnicí

$$x + iy = -a \coth \frac{1}{2} i(\xi + i\eta), \quad (5.1)$$

kde a označuje souřadnice pólu na ose x ($\pm a, 0$).



Obr. 18 Nekonečná deska obsahující dva kruhové otvory

Při analýze napětí jsou uvažovány tři stavy zatížení, jmenovitě všestranné tahové zatížení, zatížení v ose x a zatížení v ose y . Maximální napětí je vypočteno v závislosti na vzdálenosti středů otvorů. Tato vzdálenost mezi otvory je definována bezrozměrným součinitelem λ (Obr. 18), který udává vzdálenost středů otvorů v násobcích průměru otvorů. Práce zahrnuje i speciální případ, kdy dochází k tečnému dotyku otvoru. Hodnoty maximálních napětí σ_{ξ} / p [-] jsou převzaty z publikace [13] a uvedené v Tab. 2.

Tab. 2 – Tabulka napětí analytického řešení pro nekonečnou desku s dvěma otvory [13]

λ	Všestranné zatížení σ_{ξ} / p [-]		Zatížení v ose x σ_{ξ} / p [-]	Zatížení v ose y σ_{ξ} / p [-]	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi$	$\theta = \pm\pi/2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi$
1	2,894	∞	2,569	3,869	∞
1,5	2,255	2,887	2,623	3,151	3,264
2	2,158	2,411	2,703	3,066	3,020
3	2,080	2,155	2,825	3,020	2,992
5	2,033	2,049	2,927	3,004	2,997
8	2,014	2,018	2,970	3,001	2,999

6 Numerické řešení

Pro numerické řešení úlohy byl zvolen celosvětově nejrozšířenější software Patran ve verzi 2011, který slouží jako pre/post-processing konečnoprvkové analýzy. Výhodou Patranu je rozsáhlá nabídka podporovaných řešičů, např., MSC Nastran, Marc, Abaqus, Ansys a jiné. Úlohy řešené v této práci jsou z oblasti lineární pružnosti, a proto byl zvolen řešič zaměřený na lineární úlohy MSC Nastran.

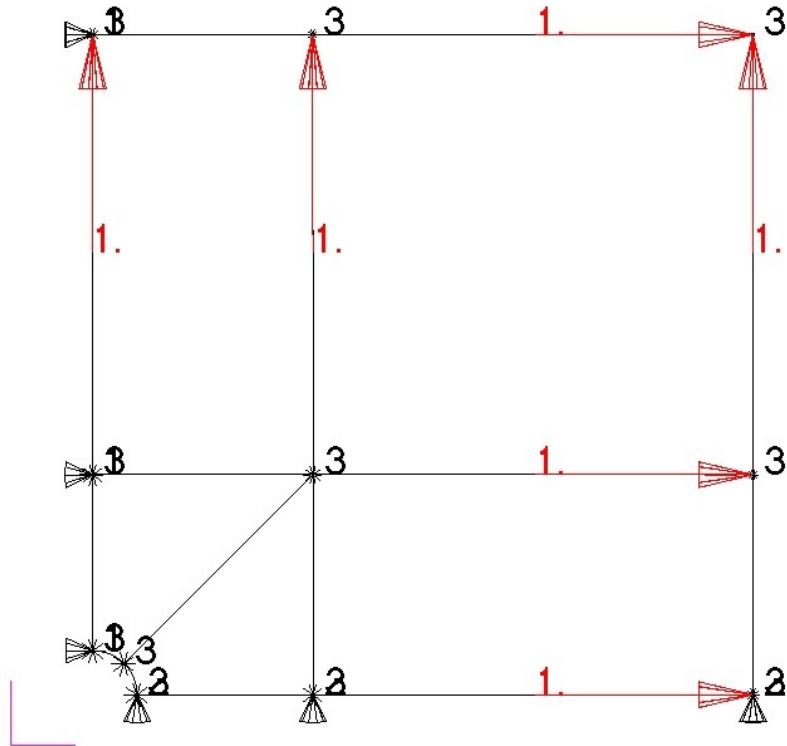
Tvorba modelu a zadání okrajových podmínek

Při tvorbě jednotlivých modelů lze využít okrajové podmínky symetrie, které zjednoduší geometrii modelů na čtvrtinu. Úloha je řešena jako rovinná, proto model je tvořen pouze plochou. Dále byl model rozdělen řezy na izoparametrické plochy, aby bylo dosaženo co nejkvalitnější sítě.

Okrajové podmínky jsou nezbytnou součástí každé úlohy. V řešených úlohách definujeme geometrické okrajové podmínky (dvě roviny symetrie a zabránění posuvu v ose z) a statické okrajové podmínky (způsob zatížení). Symetrie je realizována odebráním posuvu ve směru normály roviny symetrie a odebráním posuvu v ose z splníme druhou definovanou geometrickou okrajovou podmínku. Statické okrajové podmínky v řešených případech jsou realizované v softwaru Patran funkcí „Pressure“ na hranách 2D modelů, kde hodnota „Edge Pressure“ je nastavená na jednotkovou velikost 1 [-] u tlakového a -1 [-] u tahového zatížení.

Na rozdíl od analytického řešení, kde jsme nemuseli definovat žádné materiálové vlastnosti, u numerického řešení jsou nezbytné pro analýzu. Materiálové vlastnosti modelu uvažujeme ocel s modulem pružnosti $E = 210\,000$ [MPa] a Poissonovou konstantou $\mu = 0,3$ [-].

Úprava modelu včetně zadaných okrajových podmínek je pro nekonečnou desku s jedním otvorem zobrazena na Obr. 19 a pro nekonečnou desku s dvěma otvory na Obr. 20.



MSC Software

Obr. 19 Schéma čtvrtiny modelu desky s jedním otvorem včetně okrajových podmínek dvojosý tah



MSC Software

Obr. 20 Schéma čtvrtiny modelu desky s dvěma otvory pro $\lambda = 1,5$ včetně okrajových podmínek pro dvojosý tah

Vytvoření sítě

Velký důraz se klade na výsledné hodnoty napětí v okolí kruhového otvoru a s rostoucí vzdáleností od otvoru jejich význam klesá. Snahou bylo navrhnout síť s ohledem na tento požadavek.

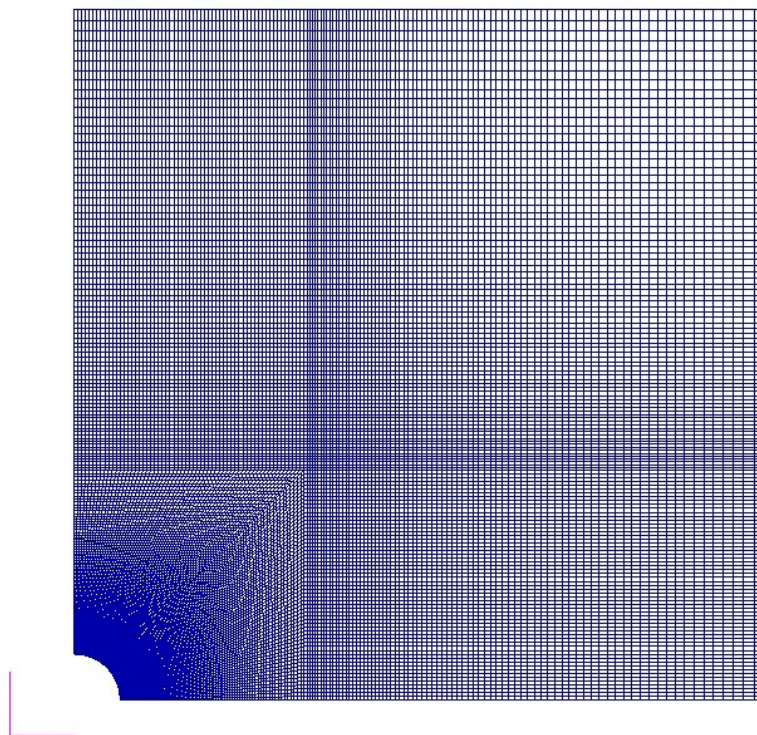
V rámci přípravy před síťováním byly nezbytné nastavit zjemnění sítě. Pro požadovanou úpravu sítě je v Patranu dostupná funkce „Mesh Seed“, tato funkce definuje na hranách modelu počet použitých prvků. V řešeném případě jsou použité dva typy „Mesh Seed“ a to konkrétně „One Way Bias“ a „Uniform“. „Uniform“ vytváří rovnoměrně rozložení prvků po celé délce křivky a tento typ je použit na obvodu otvoru. Druhý typ, „One Way Bias“, vytváří prvky s rostoucí, popřípadě klesající, délkou hrany prvku. Tento typ je v řešeném případě výhodné použít na obou rovinách symetrie a dosáhnout tím požadovaného zjemnění v blízkosti otvoru.

S ohledem na provedenou úpravu sítě, vytvoření isoparemetrických ploch, je použitý isoparemetrický síťář. Patran pro vytvoření isoparemetrické sítě u dvou rozměrných úloh má v nabídce dva typy prvků, čtyř-uzlový CQUAD4 a tří-uzlový CTRIA3. Geometrie řešených úloh umožňuje použít oba tyto prvky. Jelikož jsou všechny izoparemetrické plochy čtyřhranné byl zvolený čtyř-uzlový prvek CQUAD4. Z důvodu rozdělení ploch na jednotlivé izoparemetrické plochy je nezbytné provést equivalenci. Equivalence upravuje síť způsobem, že sloučí totožné uzly do jednoho a tím vznikne spojení jednotlivých sítí v modelu.

Vykreslení grafů

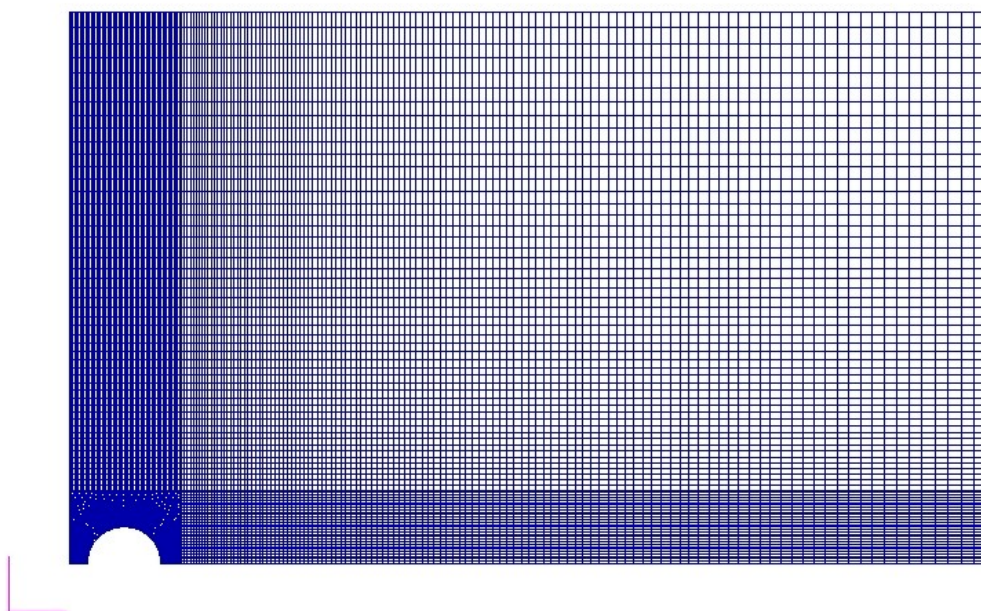
Pro grafické zobrazení průběhu složek napětí podél os symetrie byl použit software Matlab. Ze softwaru Patran byly exportovány hodnoty globálních souřadnic uzlů podél os symetrie a jejich globální hodnoty složek napětí. Tyto datové soubory byly dále zpracované v softwaru Matlab za účelem vytvoření jednotlivých grafů.

Pro názornost byly v grafech zvýrazněny osy symetrie a vyznačena pozice otvoru. V grafech se vykresluje složky napětí kolmé k dané ose. Konkrétně pro složku napětí σ_y se na vodorovné ose vynáší poměr vzdálenosti r/R a na svislé ose velikost poměru napětí σ_y/p . Podobně pro složku napětí σ_x se vodorovnou osu vynáší velikost poměru napětí σ_x/p a na svislou osu poměr vzdálenosti r/R .



MSC Software

Obr. 21 Model desky s jedním otvorem včetně sítě



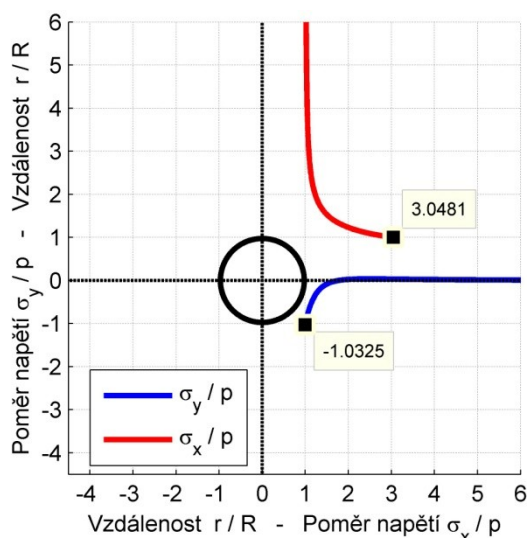
MSC Software

Obr. 22 Model desky s dvěma otvory pro $\lambda = 1,5$ včetně sítě

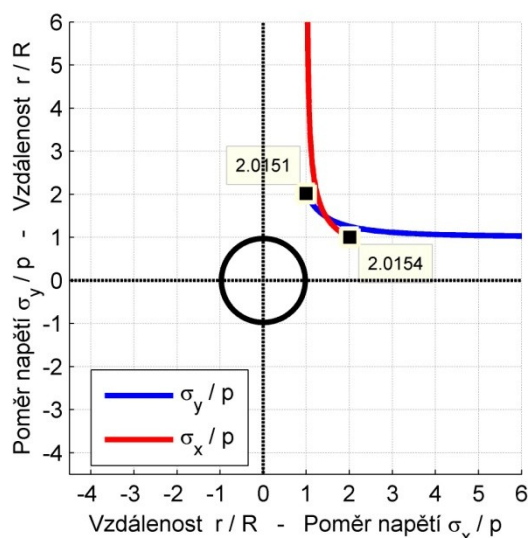
6.1 Výsledky pro nekonečnou desku s jedním otvorem

Z MKP analýzy pro jednotlivé stavy zatížení byly vytvořeny následující grafy. V grafu na Obr. 23 je zobrazen průběh napětí pro jednoosý tah. Maxima $\sigma_y / p = 3,0481$ dosahuje napětí ve svislé ose, naopak minima $\sigma_x / p = -1,0325$ je dosaženo ve vodorovné ose.

V druhém grafu (Obr. 24) je zobrazen průběh napětí pro dvojosý tah, kde maximum napětí ve svislé ose je $\sigma_x / p = 2,0154$ a maxima napětí ve vodorovné ose je $\sigma_y / p = 2,0151$.



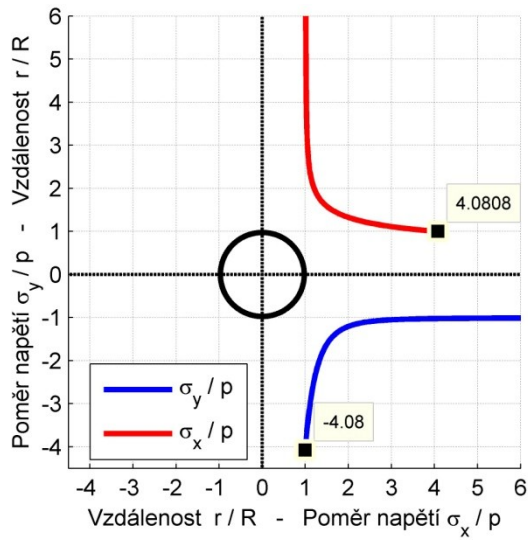
Obr. 23 Jednoosý tah



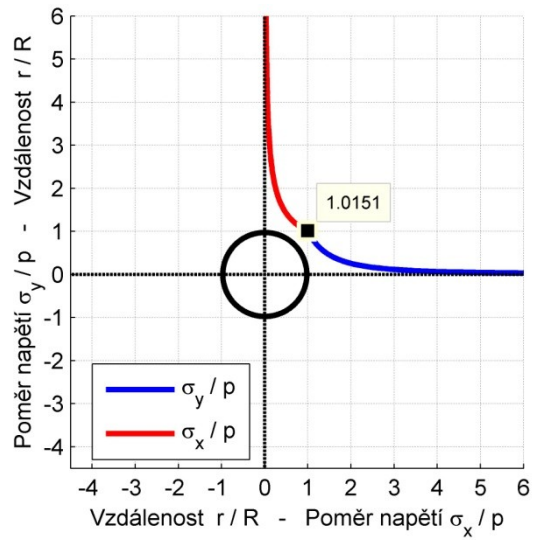
Obr. 24 Dvojosý tah

Dále na Obr. 25 je zobrazen graf pro desku zatíženou čistým smykem. V tomto případě je maximální hodnota napětí pro svislou osu rovná $\sigma_x / p = 4,0808$ a minimum $\sigma_y / p = -4,08$ nastává ve vodorovné ose.

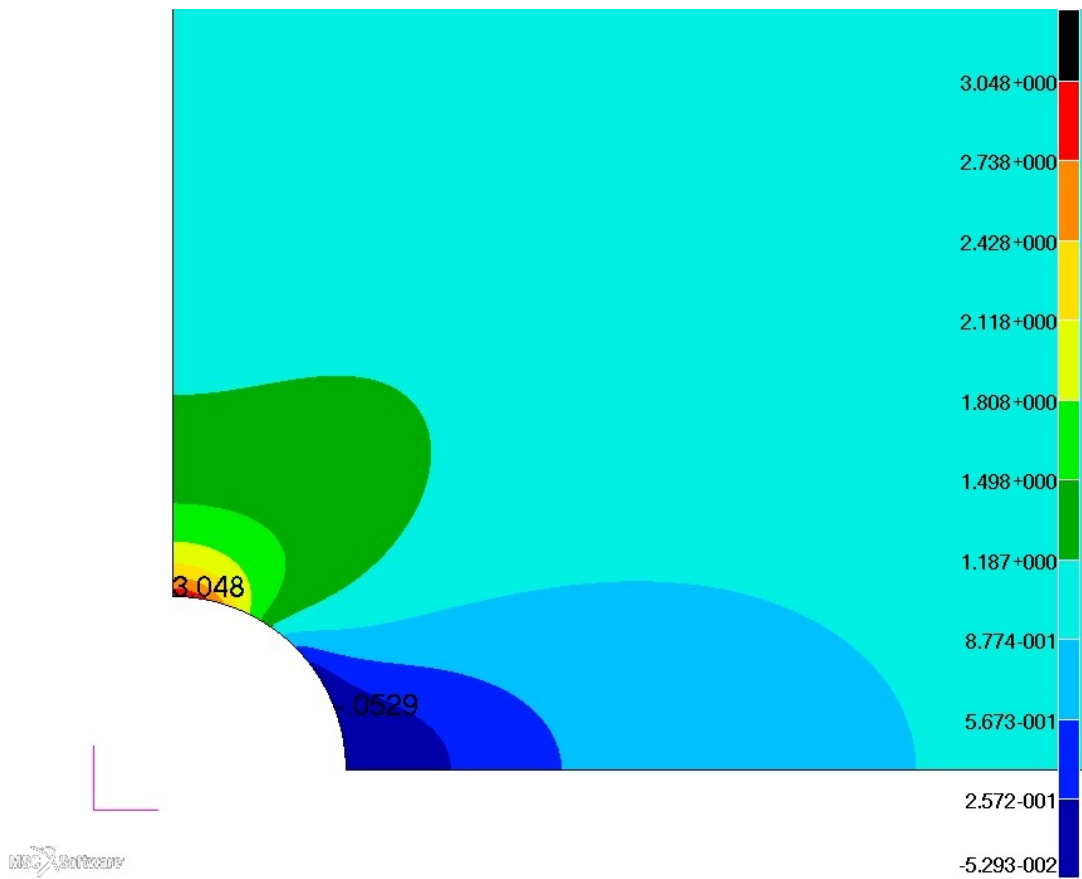
Poslední graf (Obr. 26) zobrazuje průběh napětí pro zatížení tlakem uvnitř otvoru. Při tomto zatížení jsou průběhy složek napětí kolmých k jednotlivým osám stejné a jejich maximum dosahuje hodnoty $\sigma / p = 1,0155$.



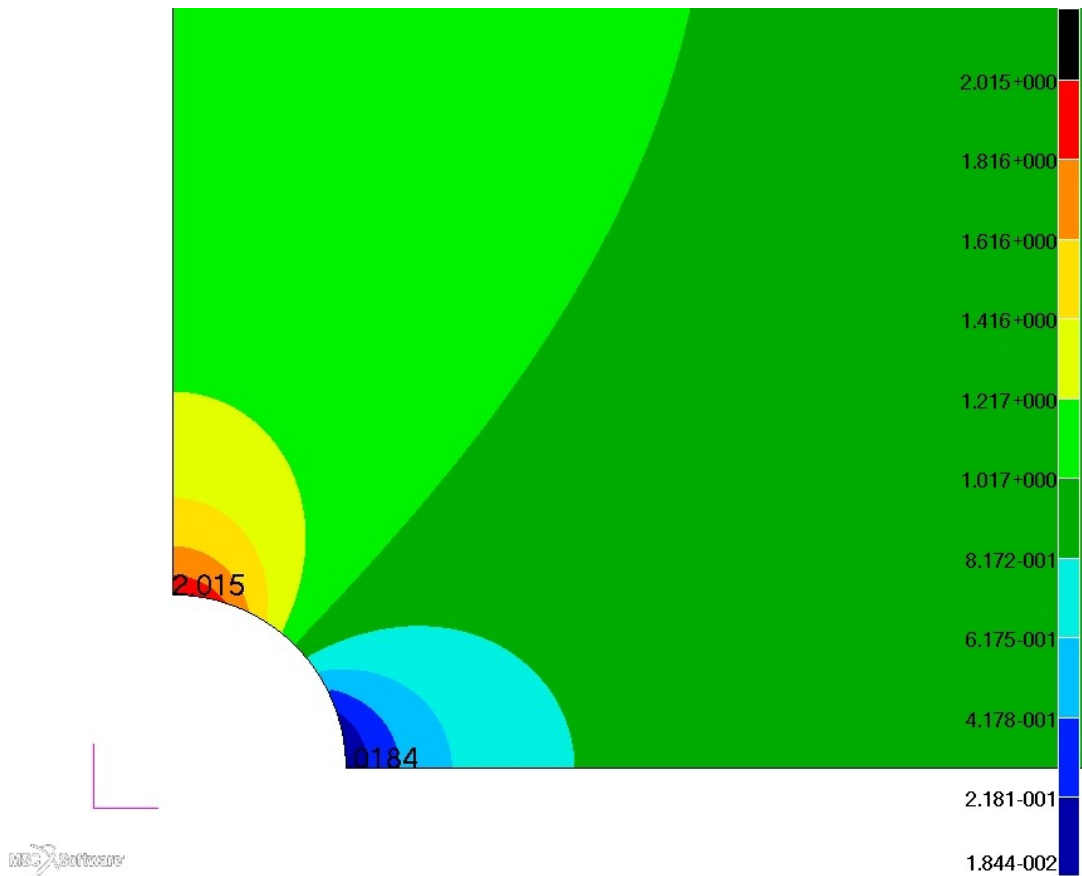
Obr. 25 Čistý smyk



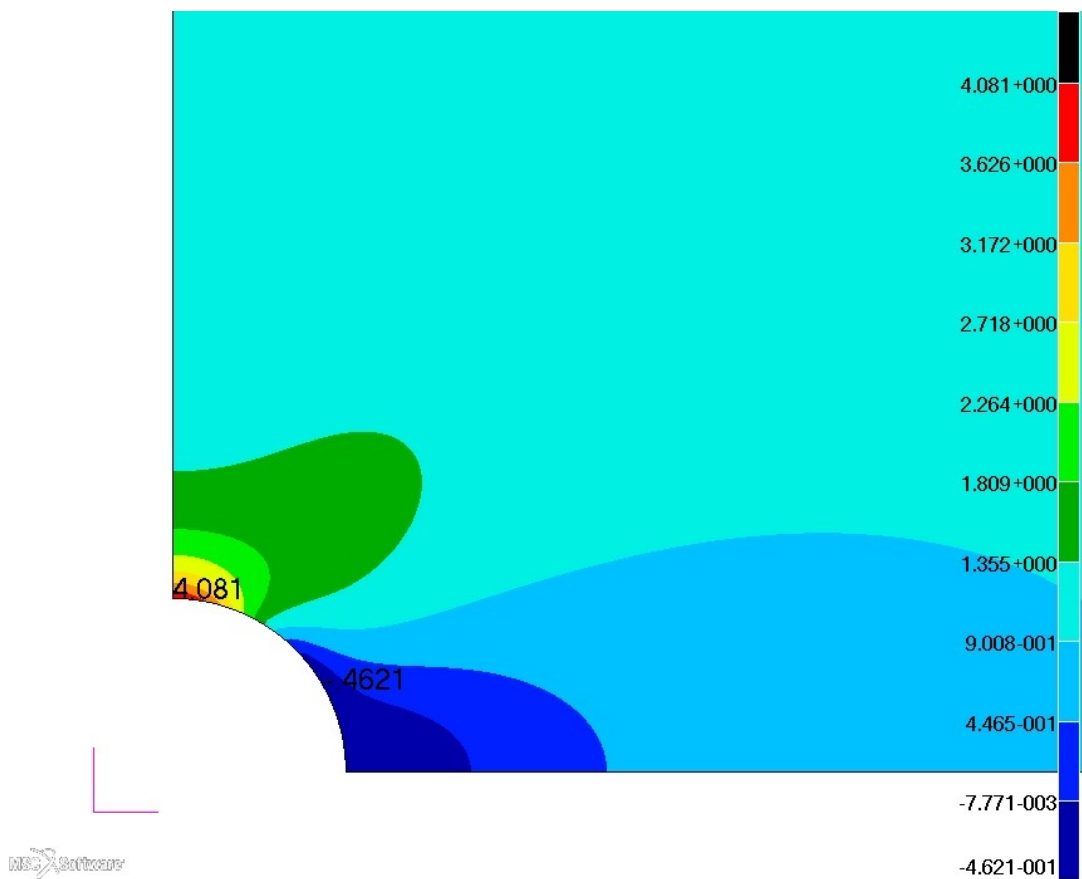
Obr. 26 Tlak uvnitř otvoru



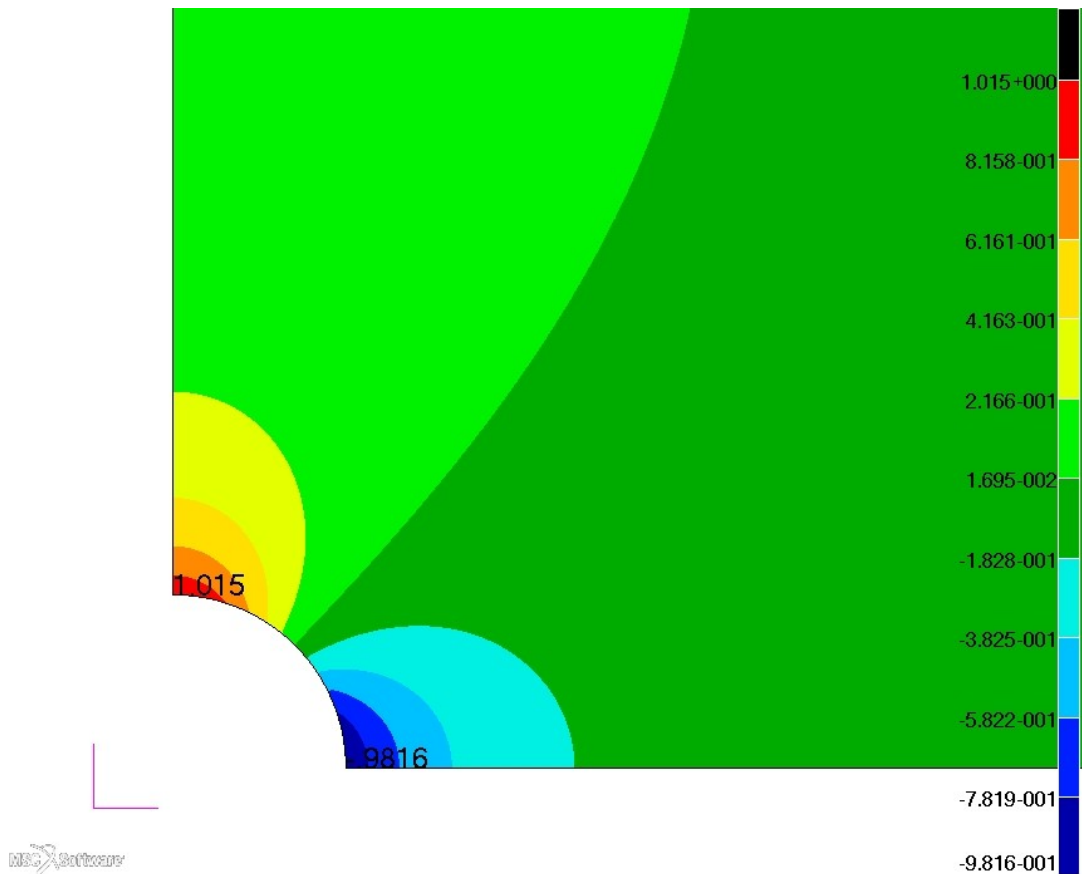
Obr. 27 Průběh napětí σ_x / p v okolí otvoru pro zatížení jednoosým tahem



Obr. 28 Průběh napětí σ_x / p v okolí otvoru pro zatížení dvouosým tahem



Obr. 29 Průběh napětí σ_x / p v okolí otvoru pro zatížení čistým smykem



Obr. 30 Průběh napětí σ_x / p v okolí otvoru pro zatížení tlakem uvnitř otvoru

Na závěr v následující tabulce je uvedené shrnutí získaných hodnot jednotlivých složek napětí σ_x / p , popřípadě σ_y / p odpovídajících napětí σ_θ z analytického řešení na obvodu otvoru pro úhly $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$.

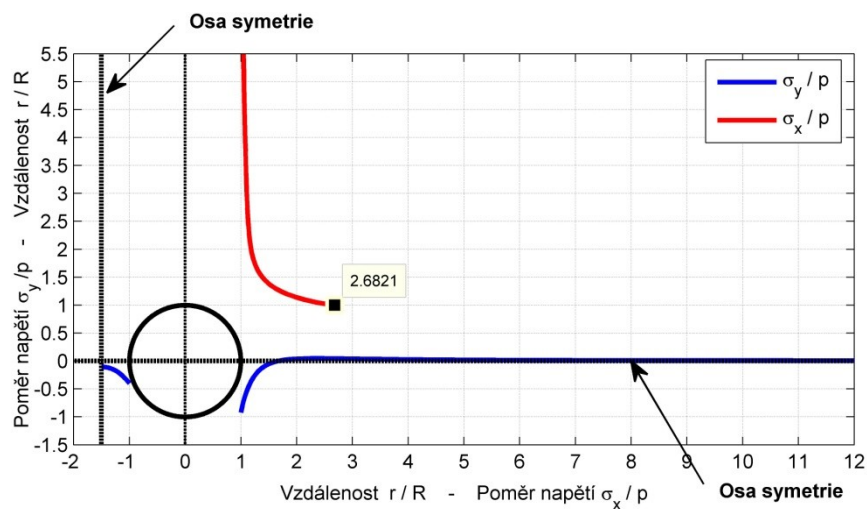
Tab. 3 Shrnutí získaných hodnot pro numerické řešení desky s jedním otvorem

Způsob zatížení	Poměr napětí σ_y / p	Poměr napětí σ_x / p
	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$
Jednoosý tah	-1,0325	3,0481
Dvouosý tah	2,0151	2,0154
Čistý smyk	-4,08	4,0808
Tlak uvnitř otvoru	1,0155	

6.2 Výsledek pro nekonečnou desku s dvěma otvory

Numerické řešení pro nekonečnou desku s dvěma otvory je provedeno pro stejné hodnoty λ a způsoby zatížení jako u analytického řešení. V rámci této kapitoly jsou zobrazeny grafy průběhu napětí u nekonečné desky s dvěma otvory, jejíž λ je rovna 1,5. Hodnoty složek napětí pro další řešené hodnoty λ jsou uvedené v závěru této kapitoly.

Uvažujeme-li tahové zatížení jednotkové velikosti $p = 1 [-]$ v ose x , pak graf průběhu složek napětí je zobrazen na Obr. 31. U tohoto způsobu zatížení maximální hodnotu nabývá napětí σ_x / p a jeho velikost je 2,6821.

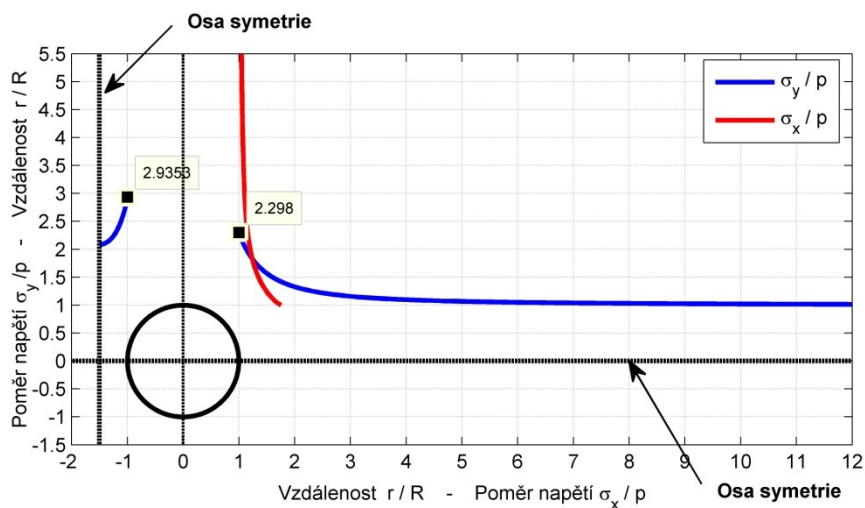


Obr. 31 Lambda 1,5 - zatížení v ose x

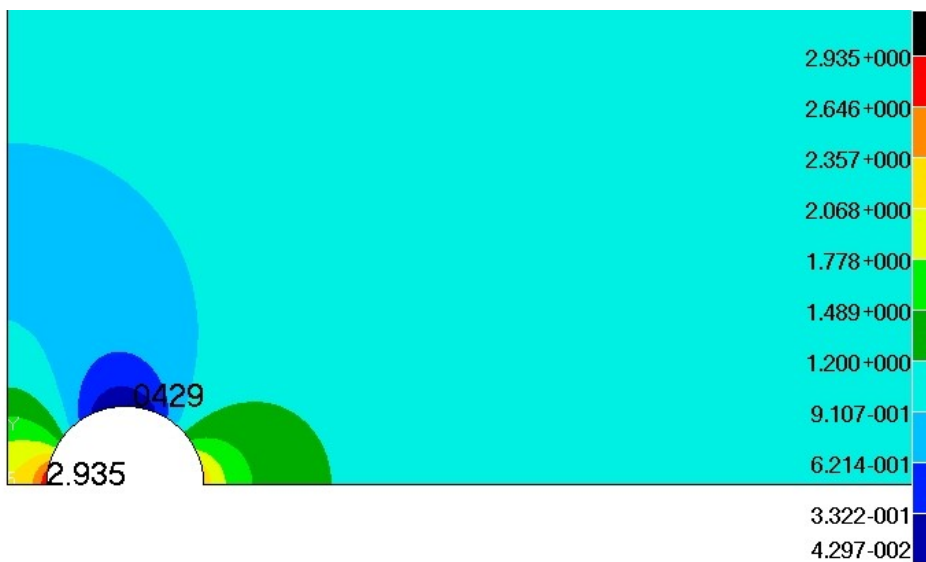


Obr. 32 Lambda 1,5 - Průběh napětí σ_x / p pro zatížení v ose x

V případě nekonečné desky s dvěma otvory zatíženou tahovým napětím jednotkové velikosti $p = 1$ [-] v obou osách je průběh napětí zobrazen na Obr. 33. Z grafu je patrné, že ve vodorovné ose symetrie nastává největší zvýšení napětí. Hodnoty složky napětí σ_y / p jsou rovné 2,9353 a 2,298.

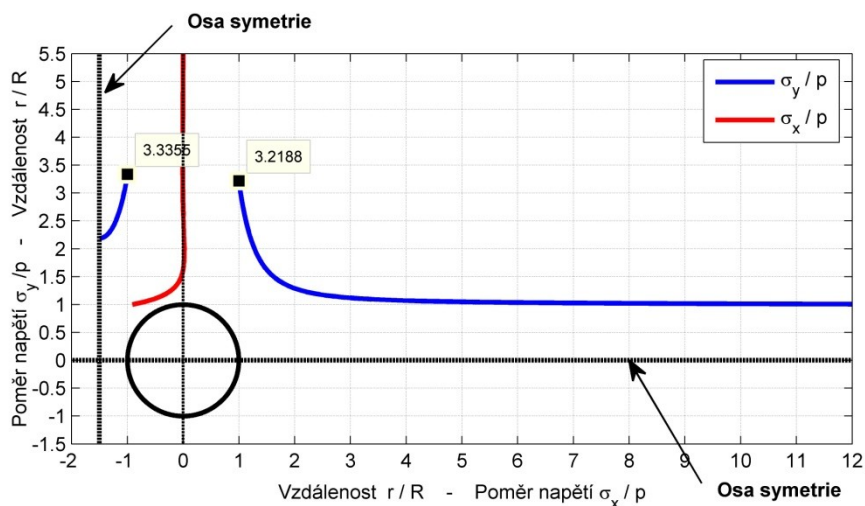


Obr. 33 Lambda 1,5 - zatížení v obou osách



Obr. 34 Lambda 1,5 - Průběh napětí σ_y / p pro zatížení v obou osách

U posledního způsobu zatížení uvažujeme jednotkové tahové napětí $p = 1 [-]$ v ose y . Graf průběhu složek napětí podél osy symetrie je zobrazen na Obr. 35. K největšímu zvýšení napětí dochází ve vodorovné ose symetrie, kde hodnoty napětí σ_y / p nabývají hodnot 3,3355 a 3,2188.



Obr. 35 Lambda 1,5 - zatížení v ose y



Obr. 36 Lambda 1,5 - Průběh napětí σ_y / p pro zatížení v ose y

Výsledné hodnoty numerického řešení pro všechny hodnoty násobků vzdálenosti středů otvorů a způsoby zatížení jsou zaznamenány v následující tabulce (Tab. 4).

Tab. 4 Shrnutí numerických výsledků pro nekonečnou desku s dvěma otvory

λ	Všestranné zatížení		Zatížení v ose x	Zatížení v ose y	
	σ_y / p [-]		σ_x / p [-]	σ_y / p [-]	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi$	$\theta = \pm\pi/2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi$
1	2,8146		2,5912	3,7991	
1,5	2,298	2,9353	2,6821	3,2188	3,3355
2	2,2008	2,4563	2,7479	3,1356	3,0915
3	2,11	2,1872	2,8591	3,0745	3,0512
5	2,0569	2,0752	2,9603	3,0504	3,0471
8	2,0296	2,0355	3,0049	3,0364	3,0365

7 Srovnání výsledku analytického a numerického řešení

Srovnání výsledku analytického a numerického řešení je provedené pomocí vypočítané odchylky. Odchylka výsledků je v tomto případě stanovena podle následujícího vzorce

$$\Delta\sigma = \left| \frac{\text{Analytické řešení} - \text{Numerické řešení}}{\text{Analytické řešení}} \right| \cdot 100 \quad [\%]. \quad (7.1)$$

7.1 Nekonečná deska s jedním otvorem

Tab. 5 Srovnání výsledku pro nekonečnou desku s jedním otvorem

Způsob zatížení	Analytické řešení σ_{θ} / p [-]		Numerické řešení σ / p [-]		Odchylka $\Delta\sigma$ [%]	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$
Jednoosý tah	-1	3	-1,0325	3,0481	3,25	1,60
Dvouosý tah	2	2	2,0151	2,0154	0,75	0,77
Čistý smyk	-4	4	-4,08	4,0808	2,00	2,02
Tlak uvnitř otvoru	1		1,0155		1,55	

7.2 Nekonečná deska s dvěma otvory

Tab. 6 Srovnání výsledků pro nekonečnou desku s dvěma otvory zatíženou v obou osách

λ	Analytické řešení σ / p [-]		Numerické řešení σ / p [-]		Odchylka $\Delta\sigma$ [%]	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi$	$\theta = 0$	$\theta = \pi$	$\theta = 0$	$\theta = \pi$
1	2,894	∞	2,8146		2,74	
1,5	2,255	2,887	2,298	2,9353	1,91	1,67
2	2,158	2,411	2,2008	2,4563	1,98	1,88
3	2,080	2,155	2,11	2,1872	1,44	1,49
5	2,033	2,049	2,0569	2,0752	1,18	1,28
8	2,014	2,018	2,0296	2,0355	0,77	0,87

Tab. 7 Srovnání výsledků pro nekonečnou desku s dvěma otvory zatíženou v ose x

λ	Analytické řešení σ/p [-]		Numerické řešení σ/p [-]		Odchylka $\Delta\sigma$ [%]	
	$\theta = \pm\pi/2$		$\theta = \pm\pi/2$		$\theta = \pm\pi/2$	
1	2,569		2,5912		0,86	
1,5	2,623		2,6821		2,25	
2	2,703		2,7479		1,66	
3	2,825		2,8591		1,21	
5	2,927		2,9603		1,14	
8	2,970		3,0049		1,18	

Tab. 8 Srovnání výsledků pro nekonečnou desku s dvěma otvory zatíženou v ose y

λ	Analytické řešení σ/p [-]		Numerické řešení σ/p [-]		Odchylka $\Delta\sigma$ [%]	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi$	$\theta = 0$	$\theta = \pi$	$\theta = 0$	$\theta = \pi$
1	3,869	∞	3,7991		1,81	
1,5	3,151	3,264	3,2188	3,3355	2,15	2,19
2	3,066	3,020	3,1356	3,0915	2,27	2,37
3	3,020	2,992	3,0745	3,0512	1,80	1,98
5	3,004	2,997	3,0504	3,0471	1,54	1,67
8	3,001	2,999	3,0364	3,0365	1,18	1,25

8 Závěr

Bakalářská práce se zabývá stanovením vlivu kruhových otvorů na napjatost v deskách. Rozbor napětí je proveden pro nekonečnou desku s jedním otvorem a nekonečnou desku s dvěma otvory pro různé vzdálenosti středů otvorů. V obou případech jsou uvažované možné způsoby zatížení. Ve všech okrajových podmínkách uvažujeme jednotkové zatížení $p = 1 [-]$ pro snadnější porovnání. Práce je zároveň zaměřená na srovnání výsledků analytického řešení a výsledků numerického řešení získaných z programu Patran 2011.

Nejdříve je analyzovaná nekonečná deska s jedním otvorem, u které byly uvažovány čtyři způsoby zatížení. Srovnání hodnot analytického a numerického řešení je uvedené v Tab. 5. Největší lokální zvýšení napětí nastává u zatížení čistým smykem (Obr. 10). Konkrétně u tohoto zatížení poměr napětí σ_{θ} / p nabývá hodnot 4 u analytického řešení a 4,0808 u numerického řešení. Naopak nejmenší lokální zvýšení napětí můžeme vidět u desky zatížené pouze tlakem uvnitř otvoru, kde poměr napětí σ_{θ} / p po celém obvodu otvoru nabývá hodnot 1 u analytického řešení a 1,0155 u numerického řešení. Tahové zatížení v jedné ose vyvodí u analytického řešení poměr napětí 3 a u numerického řešení 3,0481, v případě dvouosého tahového zatížení napětí dosahuje hodnot 2 u analytického řešení a 2,015 u numerického řešení. Maximální odchylka je 3,25% u jednoosého tahu v místě minimální hodnoty napětí. Ve zbylých případech zatížení jsou odchylky menší než 2%, proto výsledky považujeme za přesné. Velikost odchylky může být způsobená numerickou chybou.

Druhá část práce je zaměřená na nekonečnou desku s dvěma kruhovými otvory, u nichž jsou rozebrány tři způsoby zatížení pro celkem osm různých vzdáleností mezi otvory. Vzdálenost mezi otvory je definována bezrozměrným součinitelem λ (Obr. 18), který vyjadřuje vzdálenost středů otvorů v násobcích průměru otvorů.

Hodnoty analytického a numerického řešení s jejich odchylkami pro nekonečnou desku s dvěma otvory jsou uvedené v Tab. 6. V případě, kdy $\lambda = 1$ a nekonečná deska s dvěma otvory je zatížená tahovým napětím v obou osách nebo v ose y , dochází k extrémnímu nárůstu napětí v místě tečného dotyku otvorů. Takové uspořádání otvorů nemá v technické praxi uplatnění i z důvodu nedostatečného prostoru pro provedení šroubového nebo nýtového spojení.

V případě tahového zatížení v ose x nastává maximum u nekonečné desky s dvěma otvory ve svislé ose otvoru na jeho obvodě. Pro hodnotu $\lambda = 1$ je lokální zvýšení napětí nejmenší a dosahuje násobku 2,5912 velikosti zatížení a s narůstající vzdálenosti středů otvoru se blíží hodnotě 3. Naproti tomu tahové zatížení v ose y vyvolává lokální zvýšení napětí ve svislé ose otvoru na jeho obvodě a velikost napětí je přibližně 3. Z výsledků vyplývá, že v případě tahového zatížení v jedné ose je nejvýhodnější uspořádat otvory v ose zatížení. Při tahovém zatížení v obou osách u nekonečné desky s dvěma otvory pro hodnotu $\lambda > 2$ vzniká nejmenší lokální zvýšení napětí a její velikost 2,4 s narůstající vzdálenosti středu otvorů klesá na přibližně 2. Odchyly pro všechny řešené hodnoty λ jsou menší než 2,7 %, proto výsledky považujeme za přesné.

Porovnáme-li maximální hodnoty napětí na obvodu otvoru v nekonečné desce s jedním otvorem a s dvěma otvory se stejnými poloměry a stejným zatížením, pak s narůstající vzdálenosti středů otvorů u nekonečné desky s dvěma otvory se hodnoty napětí vzájemně blíží. U nekonečné desky s dvěma otvory od hodnoty $\lambda = 8$ zaniká vliv druhého otvoru a velikosti napětí odpovídají hodnotám u nekonečné desky s jedním otvorem.

Seznam použité literatury

- [1] Kuba František. *Teorie pružnosti a vybrané aplikace*. 2.vyd. Praha: SNTL/ALFA, 1982. 285 s. 04-215-82.
- [2] Timoshenko S.; Goodier J. N. *Theory of Elasticity*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1951. 506 p.
- [3] Timoshenko Stephen. *Strength of Materials: part II*. 2nd ed. New York: D. Van Nostrand Company, 1947. 510 p.
- [4] Dobrovolný Bohumil. *Pružnost a pevnost I. díl – Matematické základy, tah a tlak, kroucení*. 2.vyd. Praha: Ústav pro učebné pomůcky průmyslových a odborných škol, 1946. 453 s.
- [5] Servít R.; Doležalová E.; Crha M. *Teorie pružnosti a plasticity I*. 1.vyd. Praha: SNTL/ALFA, 1981. 455 s. 04-024-81.
- [6] Němec J.; Dvořák J.; Höschl C. *Pružnost a pevnost ve strojírenství*. 1.vyd. Praha: SNTL, 1989. 599 s. ISBN 80-03-00193-5.
- [7] Höschl Cyril. *Pružnost a pevnost ve strojnictví*. 1.vyd. Praha: SNTL/ALFA, 1971. 376 s. 04-021-71.
- [8] Kučera Josef. *Úvod do mechaniky lomu: Nestabilní lom ocelových těles při statickém a dynamickém zatížení*. 1.vyd. Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 2006. 297 s. ISBN 80-248-1268-1.
- [9] Lenert Jiří. *Pružnost a pevnost II*. 2.vyd. Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 2009. 174 s. ISBN 978-80-248-1959-4.
- [10] Lenert Jiří. *Základy matematické teorie pružnosti*. 1.vyd. Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 2000. 96 s. ISBN 80-7078-437-7.
- [11] Sadd Martin H. *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. 2nd ed. Burlington: Academic Press, 2009. 536 p. ISBN 978-0-12-374446-3.
- [12] Bouchala Jiří. *Funkce komplexní proměnné*. <http://mi21.vsb.cz/>, 2011

- [13] Ling C. B. *On stresses in a plate containing two circular holes*, J. Appl. Physics, 19, 77.
- [14] Lenert Jiří. *Pružnost a pevnost I*. 3.vyd. Ostrava: VŠB – TU Ostrava, 2009. 142 s. ISBN 978-80-248-2111-5.
- [15] Pilkey W.; Pilkey D. *Peterson's Stress Concentration Factors*. 3rd ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008. 522 p. ISBN 978-0-470-04824-5.
- [16] Savin G. N. *Stress Distribution Around Holes*. 1st ed. Kiev: Naukova Dumka Press, 1968. 1008 p. (English transl., NASA Technical Translation, NASA TT F607, 1970)

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucí bakalářské práce Dr. Ludmile Adámkové za odborné vedení, poskytování cenných rad a věnovanému času při konzultacích. Její zkušenosti a rady byly cenným podkladem pro vypracování mé bakalářské práce.