



Testování vybraných modelů odhadu hodnoty VaR

Aleš KRESTA, VŠB-TU Ostravaⁱ

Abstract

Modeling, measuring, and subsequent management of the portfolio risks is of great importance for decision making in financial institutions. This article is focused on the portfolio returns modeling with the use of two particular probability distributions, normal distribution and normal inverse Gaussian model. The normal distribution is chosen because of its general and easy use and normal inverse Gaussian distribution is selected because of its ability to model the skewness and kurtosis. The goals of the article are to backtest chosen models for VaR estimation and to choose the best one. Models based on these two distributions are compared on the basis of VaR estimation of market risk. The backtesting results are statistically tested on the number and independence of the exceptions. The conclusion, that the models which utilize the normal inverse Gaussian model are for portfolio modeling more appropriate than those with normal probability distribution, is based on the results shown in the application part of the article. On the other hand even these models are not accurate for VaR estimation on lower confidence levels because of the existence of bunching.

Keywords

Backtesting, copula functions, NIG model, returns modeling, Value at Risk.

JEL Classification: G15, G21, G22

ⁱ Department of Finance, Faculty of Economics, VŠB-Technical University of Ostrava, Sokolská 33, 701 21 Ostrava, Czech Republic.

ales.kresta@vsb.cz

The access to the METACentrum (super)computing facilities provided under the research intent MSM6383917201 and the support of the SGS project of VSB-TU Ostrava SP2011/7 is highly appreciated.

1. Úvod

Risk management je jednou z klíčových činností všech finančních institucí. Cílem risk managementu je identifikace, modelování a měření rizika, přičemž riziko je obecně chápáno jako možnost odchýlení se skutečných výsledků od očekávaných. Riziko finančních institucí lze rozdělit na kreditní (úvěrové) riziko, operační riziko, riziko likvidity a v neposlední řadě riziko tržní.

Nejpoužívanější mírou rizika je hodnota Value at Risk (VaR), která na zvolené hladině spolehlivosti vyjadřuje maximální možnou ztrátu. Metodologie Value at Risk je často kritizována z důvodů nesploňování podmínek tzv. koherentní míry rizika, viz Artzner a kol. (1999), a mnoho autorů proto doporučuje použít

jako míru rizika hodnotu conditional Value at Risk (cVaR). Nicméně při měření rizikovosti finančních institucí se používá právě hodnota VaR (pro banky dle Basel II, pro pojišťovny dle Solvency II).

Při výpočtu hodnoty VaR a cVaR se vychází z historických dat, přičemž se většinou předpokládá normální rozdělení. Hodnotu VaR pak lze vypočítat pomocí inverzní distribuční funkce normovaného normálního rozdělení a hodnotu cVaR je také možno vyjádřit analyticky. Empirické pravděpodobnostní rozdělení finančních výnosů má ale oproti normálnímu rozdělení vyšší špičatost a nenulovou šikmost, viz například Fama (1965) nebo Filáček a kol. (1998). Ve snaze vypořádat se s těmito charakteristikami byly navrženy různé přístupy. Například Hansen (1994)

navrhl zešikmené Studentovo rozdělení. Rovněž Lévyho procesy jsou vhodným modelem pro finanční časové řady. Přehled těchto procesů lze nalézt například v Cont a Tankov (2003).

Při modelování vývoje portfolia aktiv je potřeba nejen zvolit vhodné pravděpodobnostní rozdělení výnosů jednotlivých aktiv, ale i zohlednit vzájemnou závislost jejich vývoje. S postupující integrací jednotlivých finančních trhů jsou aktiva čím dál více propojena a tím roste i význam modelování vzájemné závislosti. Vhodným a flexibilním nástrojem pro modelování této závislosti jsou kopula funkce. Zatímco v publikaci Kresta (2010) byly využity eliptické kopula funkce při ex-post modelování výnosů mezinárodně diverzifikovaného portfolia, Tichý (2010) zase zpětně testoval odhad hodnoty VaR měnového portfolia pomocí Lévyho modelů spojených kopula funkcemi. Zpětným testováním odhadu hodnoty VaR pro jednotlivé měnové kurzy se však zabývali již Alexander a Sheedy (2008), kteří uvažovali jak normální rozdělení výnosů, tak i některé složitější rozdělení jako Studentovo a smíšené normální rozdělení.

Cílem článku je zpětně otestovat vybrané modely pro odhad hodnoty VaR a vybrat ten, který dosahuje nejlepších výsledků. Navrhované modely tak mohou sloužit jako interní modely při určování tržního rizika bank a pojišťoven.

Pro modelování výnosů portfolia aktiv (tedy tržního rizika) jsou v práci uvažovány modely normálního inverzního Gaussova rozdělení pravděpodobnosti a normálního rozdělení pravděpodobnosti, obojí sdružené eliptickými kopula funkcemi. Přesnost těchto modelů je empiricky ověřena pomocí metody zpětného testování na historických časových řadách, přičemž je ověřován počet překročení hodnoty VaR a shlukování těchto překročení.

Článek je členěn následovně. Nejprve je popsáno normální inverzní Gaussovo rozdělení pravděpodobnosti (kapitola 2) a kopula funkce (kapitola 3). V následujících dvou kapitolách je vysvětlena metodologie Value at Risk (kapitola 4) a postup zpětného testování odhadu hodnoty VaR včetně jednotlivých statistických testů (kapitola 5). V páté kapitole jsou aplikována teoretická východiska a je provedeno zpětné testování odhadu hodnoty VaR pro zvolená mezinárodně diverzifikovaná portfolia akciových indexů. V závěru článku jsou následně shrnuty dosažené výsledky.

2. Normální inverzní Gaussovo rozdělení pravděpodobnosti

Normální inverzní Gaussov model (dále NIG) byl ve finanční literatuře představen Barndorff-Nielsenem (1995). Předpokládáme parametry $\alpha > 0$,

$-\alpha < \beta < \alpha$ a $\delta > 0$, pak lze $NIG(\alpha, \beta, \delta)$ rozdělení pravděpodobnosti, jímž se NIG model řídí, popsat pravděpodobnostní funkcí hustoty následovně:

$$f_{NIG} = \frac{\alpha\delta}{\pi} \exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\right) \frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} \quad (1)$$

Distribuční funkci lze definovat následovně,

$$F_{NIG} = \frac{\alpha\delta}{\pi} \exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right) \int_{-\infty}^x \frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (t - \mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2 + (t - \mu)^2}} \exp(\beta(t - \mu)) dt, \quad (2)$$

kde $K_1(x)$ značí modifikovanou Besselovu funkci druhého druhu. Populační momenty tohoto rozdělení jsou shrnuty v tabulce 1.

Tabulka 1 Populační momenty NIG rozdělení

| Populační moment | Vzorec |
|------------------|---|
| Střední hodnota | $\mu + \delta\beta(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$ |
| Rozptyl | $\alpha^2\delta(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}$ |
| Šikmost | $3\beta\alpha^{-1}\delta^{\frac{1}{2}}(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{4}}$ |
| Špičatost | $3\left(1 + \frac{\alpha^2 + 4\beta^2}{\delta\alpha^2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}\right) + 3$ |

Parametry μ, α, β a δ tohoto pravděpodobnostního rozdělení mohou být odhadnuty dvěma metodami: (i) metodou maximální věrohodnosti a (ii) metodou momentů. Použití metody maximální věrohodnosti je při odhadu parametrů NIG rozdělení časově/početně velmi náročné, vhodnější se proto jeví použití metody momentů. Položíme-li populační momenty, uvedené v tabulce 1, rovny momentům výběru, získáme následující odhady parametrů NIG rozdělení:

$$\hat{\mu} = m - \frac{3s\sqrt{v}}{3k - 4s^2 - 9}, \quad (3)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sqrt{3k - 4s^2 - 9}}{\sqrt{v\left(k - \frac{5}{3}s^2 - 3\right)^2}}, \quad (4)$$

$$\hat{\beta} = \frac{s\left(k - \frac{5}{3}s^2 - 3\right)}{\sqrt{v}}, \quad (5)$$

$$\hat{\delta} = 3^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{v \left(k - \frac{5}{3} s^2 - 3 \right)}{3k - 4s^2 - 9}}, \quad (6)$$

kde m je střední hodnota výběru, v je rozptyl výběru, s je výběrový koeficient šikmosti, k je výběrový koeficient špičatosti. Detailnější informace lze nalézt v Prause (1999).

3. Charakteristika kopula funkcí

Kopula funkce byly poprvé představeny Sklar (Sklar, 1959). Přehled teorie spolu s praktickou aplikací pak lze nalézt v textech Cherubini a kol. (2004), Nelsen (2006) nebo Rank (2006). Pro jednoduchost budeme dále uvažovat dvourozměrnou kopula funkci, přičemž vše platí analogicky i pro n -rozměrnou kopula funkce.

Kopula funkce je v podstatě reálná funkce, která zachycuje závislost jednotlivých distribučních funkcí v $[0,1]$

$$C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1] \text{ v } R^2, \quad (7)$$

přičemž tato funkce musí pro jakékoliv $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ splňovat:

$$C(u,0) = C(0,v) = 0, \quad (8)$$

$$C(u,1) = u, C(1,v) = v, \quad (9)$$

pokud $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$, pak

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (10)$$

Na kteroukoliv kopula funkci může být pohlíženo jako na vícerozměrnou distribuční funkci s marginálními distribučními funkcemi ve formě standardizovaného rovnoměrného rozdělení.

Předpokládejme dvě potenciaálně závislé náhodné proměnné X a Y s marginálními distribučními funkcemi F_x a F_y a sdruženou distribuční funkcí $F_{x,y}$. Potom dle Sklarova teoremu platí:

$$F_{x,y}(x,y) = C(F_x(x), F_y(y)). \quad (11)$$

Pokud jsou marginální distribuční funkce F_x a F_y spojité, kopula funkce C je jedinečná. Sklarův teorem naznačuje také inverzní vztah,

$$C(u,v) = F_{x,y}(F_x^{-1}(u), F_y^{-1}(v)). \quad (12)$$

Z formulace (11) je patrné, že sdružené rozdělení pravděpodobnosti obsahuje dvě rozdílné informace: (i) marginální distribuční funkce jednotlivých náhodných proměnných, (ii) funkci závislosti těchto distribučních funkcí. Zatímco marginální distribuční funkce jsou dány pomocí F_x a F_y , kopula funkce C popisuje pouze závislost těchto distribučních funkcí.

Za předpokladu znalosti marginálních distribučních funkcí náhodných proměnných je tedy pro

potřeby modelování nezbytné zvolit vhodnou kopula funkci. S trochou zjednodušení lze rozlišit eliptické a Archimédovy kopula funkce. Hlavní rozdíl mezi těmito dvěma typy funkcí spočívá ve způsobu jejich konstrukce. Zatímco pro Archimédovy kopula funkce je potřeba definovat generující funkci (tzv. generátor), pro eliptické kopula funkce je dostatečná znalost související sdružené distribuční funkce (např. Gaussova, Studentova, atd.).

3.1 Charakteristika eliptických kopula funkcí

Eliptické kopula funkce vycházejí z některého známého eliptického sdruženého rozdělení pravděpodobnosti, konkrétně nejpoužívanější jsou Gaussova a Studentova kopula funkce. Nevýhodou při aplikaci těchto kopula funkcí v oblasti financí je jejich symetričnost, což neodpovídá hlavně koncům sdružených rozdělení empirických dat.¹ Obecně můžeme do kopula funkce dosadit dle (11) jakékoliv marginální rozdělení, ovšem použitím normálního rozdělení v případě Gaussovy kopula funkce získáváme sdružené normální rozdělení pravděpodobnosti a použitím Studentova rozdělení ve Studentově kopula funkci získáváme sdružené Studentovo rozdělení pravděpodobnosti.

Definice Gaussovy kopula funkce

Gaussova kopula funkce patří mezi eliptické kopula funkce. Za předpokladu korelace mezi náhodnými proměnnými R může být definována následovně,

$$C_R^{Ga}(u,v) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)), \quad (13)$$

kde Φ^{-1} je inverzní funkce k distribuční funkci normovaného normálního rozdělení Φ , Φ_R značí dvourozměrnou sdruženou distribuční funkci normovaného normálního rozdělení při korelaci R . Funkční hodnoty Gaussovy kopula funkce spolu s náhodně generovanými čísly jsou zobrazeny na obrázku 1.

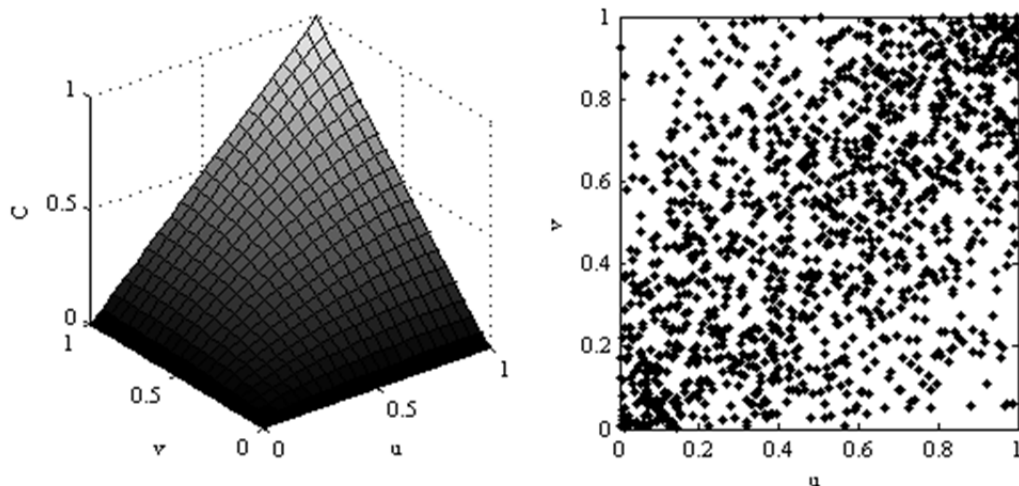
Definice Studentovy kopula funkce

Studentova kopula funkce vychází ze Studentova rozdělení pravděpodobnosti, lze ji tedy definovat následovně,

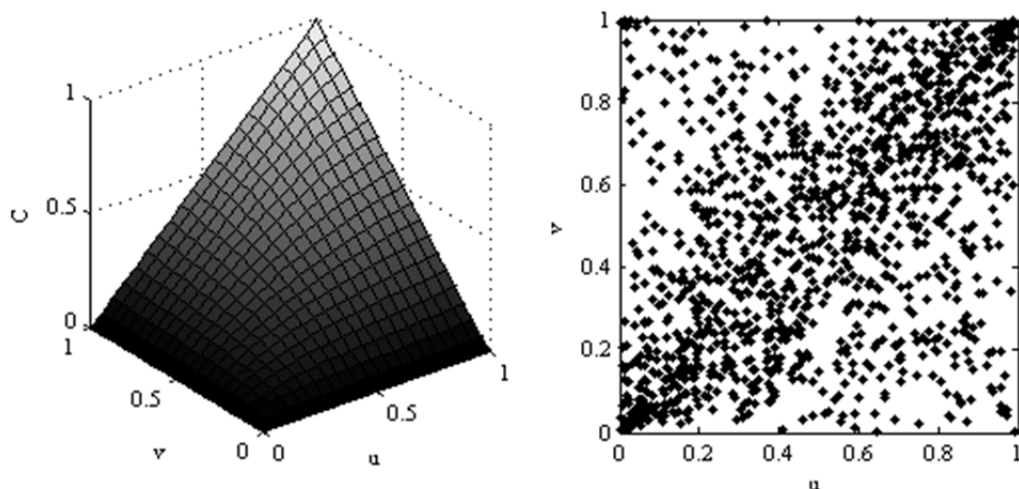
$$C_{R,\nu}^{St}(u,v) = t_{R,\nu}(t_\nu^{-1}(u), t_\nu^{-1}(v)), \quad (14)$$

kde R opět značí korelaci mezi náhodnými proměnnými, t_ν^{-1} je inverzní funkcí k distribuční funkci Studentova rozdělení s ν stupni volnosti a $t_{R,\nu}$

¹ Demarta a McNeil (2005) například popisují zešikmenou Studentovu kopula funkci, která sice vychází ze Studentovy kopula funkce, ale není již symetrická, a tudíž nepatří do třídy eliptických kopula funkcí.



Obrázek 1 Průběh Gaussovy kopula funkce (vlevo) a generovaná náhodná čísla (vpravo) pro parametr korelace $R = 0,5$



Obrázek 2 Průběh Studentovy kopula funkce (vlevo) a generovaná náhodná čísla (vpravo) pro parametr korelace $R = 0,5$ a stupně volnosti $\nu = 2$

je dvourozměrnou sduženou distribuční funkcí Studentova rozdělení při korelaci R a ν stupni volnosti.

Pomocí parametru ν lze u Studentovy kopula funkce ovlivnit konce rozdělení. Pro nižší hodnoty tohoto parametru je pravděpodobnost extrémního scénáře vyšší (lze tedy takto modelovat těžké konce). Naopak čím je parametr ν vyšší, tím více se Studentova kopule blíží Gaussově kopuli. Funkční hodnoty Studentovy kopula funkce spolu s náhodně generovanými čísly jsou zobrazeny na obrázku 2.

3.2 Popis metod odhadu parametrů při modelování pomocí kopula funkcí

Existují tři hlavní přístupy k odhadu parametrů při modelování pomocí kopula funkcí: EMLM (exact

maximum likelihood method), IFM (inference function for margins) a CML (canonical maximum likelihood). Zatímco při použití EMLM jsou odhadovány všechny parametry současně, což může být výpočetně velmi náročné (obzvláště při odhadu vysoce dimenzionálních dat nebo při použití složitějších marginálních funkcí), při IFM a CML jsou parametry marginálních rozdělení a parametry kopula funkce odhadnuty zvlášť. V případě IFM jsou odhadnuty nejprve parametry marginálních distribučních funkcí a na jejich základě pak parametry kopula funkce. U CML jsou parametry kopula funkce odhadnuty na základě empirických distribučních funkcí. Podrobnější vysvětlení těchto metod lze nalézt např. v Cherubini a kol. (2004). V tomto článku bude využito CML přístupu.

| | | | | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------------------|
| den x-m | ... | den x-2 | den x-1 | den x | | | | | interval pro odhad |
| | den x-m | ... | den x-2 | den x-1 | den x | | | | interval pro ověření |
| | | den x-m | ... | den x-2 | den x-1 | den x | | | |
| | | | den x-m | ... | den x-2 | den x-1 | den x | | |
| | | | | den x-m | ... | den x-2 | den x-1 | den x | |
| | | | | | den x-m | ... | den x-2 | den x-1 | den x |
| | | | | | | den x-m | ... | den x-2 | den x-1 |
| | | | | | | | den x-m | ... | den x-2 |
| | | | | | | | | den x-m | ... |
| | | | | | | | | | den x-m |

Obrázek 3 Posouvání intervalu (moving window) vstupních dat pro výpočet hodnoty VaR pro jednotlivé dny

4. Charakteristika metodologie Value at Risk

Value at Risk (dále VaR) je metodou hodnocení rizika, která se dnes používá hlavně v oblasti finančních institucí. VaR v podstatě vyjadřuje maximální možnou ztrátu na určité hladině spolehlivosti α . Formálně lze tedy definovat následovně,

$$\Pr(\Delta\Pi_{t+\Delta t} \leq -VaR_{\alpha,\Delta t}) = 1 - \alpha, \quad (15)$$

kde $\Delta\Pi$ vyjadřuje náhodnou veličinu – zde konkrétně změnu ceny portfolia za čas Δt , $VaR_{\alpha,\Delta t}$ je maximální ztráta na dané hladině spolehlivosti α pro časový horizont Δt a \Pr značí pravděpodobnost. Hodnota $1 - \alpha$ se nazývá hladina významnosti. Na VaR lze v podstatě pohlížet jako na α kvantil (hladina spolehlivosti) pravděpodobnostního rozdělení ztrát nebo jako na záporný $1 - \alpha$ kvantil (hladina významnosti) pravděpodobnostního rozdělení výnosů.

Nejčastěji používané hladiny významnosti, 15 %, 1 % a 0,5 %, jsou zároveň zakotveny v legislativu stanovených metodologiích. Rovněž časový horizont, pro který je hodnota VaR počítána může být pro jednotlivé instituce různý – pro banky dle metodologie Basel II je to 10 dní, pro pojišťovny dle metodologie Solvency II pak jeden rok. Obecně je však hodnota VaR počítána spíše pro kratší časové intervaly, nejčastěji pro jeden den, a následně je přepočtena pro delší časové intervaly.

5. Popis postupu zpětného testování (backtesting)

Kvalitu odhadu hodnoty VaR je potřeba (nejen z důvodu legislativních nařízení) ověřit na minulých datech. Předpokládejme, že máme model, který odhaduje hodnotu VaR na určité hladině spolehlivosti α . Pro jednoduchost dále předpokládejme, že odhadujeme hodnotu VaR pro interval jednoho dne. Při zpětném testování postupujeme tak, že pro jednotlivé dny porovnáváme hodnotu VaR určenou modelem na základě informací známých předchozí den k uvažovanému dni a pozorovanou ztrátou uvažovaného dne. Dny, ve kterých skutečná ztráta přesáhne hodnotu VaR, se nazývají výjimky. Pokud zaznamenáme výjimky v přibližně $1 - \alpha$ procentech případů, odha-

duje model hodnotu VaR správně. V případě vyššího výskytu výjimek model podhodnocuje riziko, v případě nižšího počtu výjimek model riziko nadhodnocuje. Blíže se tímto postupem zabývá Hull (2007) nebo Resti a Sironi (2007).

Postup ověření modelu pomocí zpětného testování v případě odhadu tržního rizika je tedy následující: (i) uvažujeme výpočet hodnoty VaR pro den x , (ii) pro odhad modelu použijeme časové řady korespondující s intervalem $x - m$ až $x - 1$, kde m je zvolená délka časové řady, na jejímž základě budeme model odhadovat, (iii) odhadnutým modelem určíme hodnotu VaR pro jeden den a tuto hodnotu porovnáme se skutečnou ztrátou zaznamenanou dne x , (iv) dále postup opakujeme pro další dny, tzn. proměnnou x zvýšíme vždy o jedničku (jeden den), celkem předpokládáme n pozorování. Schematicky je postup volby časové řady pro odhad modelu a časové řady pro ověření znázorněn na obrázku 3.

V podstatě tímto postupem ověřujeme, že pravděpodobnost výskytu výjimky je rovna hodnotě $1 - \alpha$, tedy hladině významnosti. Tuto rovnost je potřeba statisticky otestovat. Pro potřeby statistických testů je potřeba definovat proměnnou I_t , která nabývá hodnoty jedna, pokud v den t skutečná ztráta překročí pro tento den odhadnutou hodnotu $VaR_{\alpha,t}$ (jedná se o výjimku), a hodnoty nula, pokud skutečná ztráta v den t hodnotu $VaR_{\alpha,t}$ nepřekročí.

Pro potřeby statistického testu počtu výjimek lze využít buď binomické rozdělení nebo vhodnější test navržený Kupiecem (Kupiec, 1995), který je oboustranný, a tudíž testuje nevhodnost modelu jak z pohledu podhodnocení, tak nadhodnocení rizika. Tento test je založen na následujícím věrohodnostním poměru (likelihood ratio),

$$LR = \frac{\pi_{ock}^{n_1} (1 - \pi_{ock})^{n_0}}{\pi_{poz}^{n_1} (1 - \pi_{poz})^{n_0}}, \quad (16)$$

kde n_i je počet pozorování, pro která platí $I_t = i$, π_{ock} je očekávaná pravděpodobnost výskytu výjimky (tedy $\pi_{ock} = 1 - \alpha$) a π_{poz} je pozorovaná pravděpo-

dobnost výskytu výjimky, $\pi_{poz} = \frac{n_1}{n_0 + n_1}$. Přičemž

$-2\ln(LR)$ má asymptoticky chí kvadrát rozdělení s jedním stupněm volnosti. Testovací statistiku lze tedy přepsat do tvaru:

$$-2\ln(LR) = 2\ln\left[\left(1 - \frac{n_1}{n_0 + n_1}\right)^{n_0} \left(\frac{n_1}{n_0 + n_1}\right)^{n_1}\right] - 2\ln[\alpha^{n_0}(1-\alpha)^{n_1}] \quad (17)$$

kde proměnné mají stejný význam jako v předchozí rovnici.

Druhým problémem při zpětném testování je shlukování výjimek (tzv. bunching). Předpokladem zpětného testování je, že výskyt pozorovaných výjimek je v čase nezávislý a výjimky jsou rovnoměrně rozprostřeny. Testováním tohoto předpokladu se zabýval Christoffersen (1998), který navrhuje dva statistické testy. První test ověřuje náhodnost rozdělení výjimek v čase. Jedná se o následující věrohodnostní poměr,

$$LR = \frac{\pi_{poz}^{n_1} (1 - \pi_{poz})^{n_0}}{\pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{11}^{n_{11}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}}}, \quad (18)$$

kde n_{ij} je počet pozorování, pro která platí $I_t = j \wedge I_{t-1} = i$, $\pi_{ij} = \Pr(I_t = j | I_{t-1} = i)$,

$$\pi_{poz} = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}}. \quad \text{Dále} \quad n_0 = n_{00} + n_{10}$$

a $n_1 = n_{01} + n_{11}$, neboť je nutné, aby platilo $n_{00} + n_{10} + n_{01} + n_{11} = n_0 + n_1$. Rovněž u tohoto testu má $-2\ln(LR)$ asymptoticky chí kvadrát rozdělení s jedním stupněm volnosti.

Oba předchozí testy, definované v (16) a (18), lze spojit do jednoho statistického testu, který ověřuje jak počet výjimek, tak jejich shlukování v čase:

$$LR = \frac{\pi_{ock}^{n_1} (1 - \pi_{ock})^{n_0}}{\pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{11}^{n_{11}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}}}, \quad (19)$$

kde všechny proměnné byly vysvětleny již u předchozích testů. V tomto případě má $-2\ln(LR)$ chí kvadrát rozdělení se dvěma stupni volnosti.

6. Zpětné testování odhadu tržního rizika

V této kapitole bude zpětně testován odhad tržního rizika v podobě hodnoty VaR pro zvolené mezinárodně diverzifikované portfolio akciových indexů. Bude tak navázáno na výzkum provedený Tichým (2010), portfolio citlivé pouze na měnové riziko bude rozšířeno o riziko akciové.

Předpokládáno bude mezinárodně diverzifikované portfolio akciových indexů, rizikovými faktory tedy budou nejen vývoj těchto indexů, ale i vývoj přísluš-

ných měnových kurzů. Výnos portfolio bude modelován pomocí eliptických kopula funkcí, jako marginální rozdělení bude uvažováno normální rozdělení pravděpodobnosti a NIG model. Vhodnost modelů bude následně testována pomocí metody zpětného testování a statistických testů definovaných v předchozí kapitole.

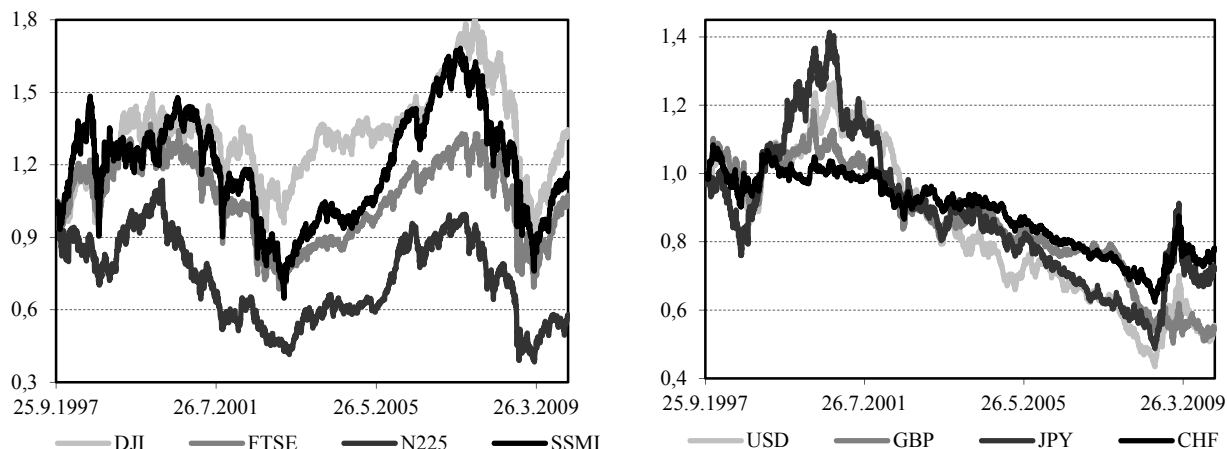
6.1 Vstupní data

Zpětné testování odhadu tržního rizika bude prováděno na portfolio čtyř akciových indexů, konkrétně americký Down Jones Industrial Average (DJI), britský FTSE 100 (FTSE), japonský Nikkei 225 (N225) a švýcarský Swiss Market Index (SMI). Vzhledem k tomu, že indexy jsou denominovány v jiných měnách než českých korunách, budou v portfolio zastoupeny i měnové kurzy vůči české koruně, konkrétně se jedná o americký dolar (USD), britskou libru (GBP), japonský jen (JPY) a švýcarský frank (CHF). Časové řady cen těchto aktiv byly získány ze serveru české národní banky (kurzy jednotlivých měn vůči české koruně) a serveru finance.yahoo.com (kurzy jednotlivých indexů) za období od 25. 9. 1997 do 31. 12. 2009. Vývoj těchto časových řad je zobrazen na obrázku 4. Z obrázku je patrná závislost vývoje jak měnových kurzů, tak akciových indexů.

Jednotlivé časové řady byly spojeny do matice tak, aby se v každém řádku vyskytovaly příslušné kurzy k patřičnému dni. Chybějící údaje byly interpolovány ze dvou nejbližších nechybějících sousedních hodnot a následně byl proveden převod na matici spojitých denních výnosů,² se kterými bude dále pracováno. Takto byly získány časové řady o délce 3 189 pozorování. Charakteristiky jednotlivých časových řad spojitých výnosů za zvolené období jsou shrnuty v tabulce 2.

Z tabulky 2 je zřejmých několik poznatků. Indexy jsou více volatilní než měnové kurzy – toto je jednak dáno vyšší hodnotou směrodatné odchylky, ale také vyšším rozpětím maximálního a minimálního výnosu. U všech časových řad lze pozorovat nenulovou šikmost a značnou špičatost. Indexy jsou zešikmeny doleva – pro ztráty jsou tedy pravděpodobnější vyšší hodnoty, kdežto zisky jsou spíše menší, ale více pravděpodobné. Měnové kurzy, až na výjimku JPY, jsou naopak zešikmeny doprava – časové řady obsahují relativně hodně malých ztrát a v případě výnosů jsou tyto vysoké. Již z pohledu na hodnoty koeficientu šikmosti a špičatosti je zřejmé, že normální rozdělení

² Spojitý denní výnos se určí jako logaritmus podílu aktuální ceny aktiva k předchozí ceně, $r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln P_t - \ln P_{t-1}$.



Obrázek 4 Vývoj časových řad za období od 25. 9. 1997 do 31. 12. 2009. Pro přehlednost byly ceny normalizovány tak, aby v počátku vždy začínaly na hodnotě 1

není vhodné pro modelování těchto časových řad. Toto potvrzuje i Jarque-Bera test, pomocí kterého můžeme pro všechny časové řady na 5% hladině pravděpodobnosti zamítnout nulovou hypotézu, že řada má normální rozdělení.

Koeficienty lineární korelace výnosů jednotlivých časových řad jsou uvedeny v tabulce 3. Z tabulky je zřejmá různá závislost dvojic *index – měna* na jedné straně a *index – index spolu s měna – měna* na straně druhé. Zatímco indexy (respektive měnové kurzy) jsou vzájemně pozitivně korelovány, korelace mezi indexy a měnami je negativní. Při růstu (respektive poklesu)

ceny indexu je tedy dopad mírněn poklesem (respektive růstem) směnného kurzu měny vůči české koruně. Při přepočtu hodnoty indexů do českých korun by byly tyto hodnoty méně volatilní než hodnoty vyjádřené v příslušných měnách.

Jednotlivé modely budou aplikovány za účelem odhadu rizika pro různá portfolia. Budou předpokládána tři portfolia, konkrétně: (i) tangenciální portfolio Π_m , pro které je maximalizován poměr očekávaného výnosu a směrodatné odchylky, (ii) rovnoměrně citlivé portfolio Π_{eq} , kdy každý index (potažmo i měnový

Tabulka 2 Základní charakteristiky spojitých výnosů vstupních časových řad

| Aktivum | Minimální výnos | Maximální výnos | Střední hodnota | Medián | Směrodatná odchylka | Šikmost | Špičatost |
|---------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|---------------------|---------|-----------|
| DJI | -8,201 % | 10,508 % | 0,009 % | 0,040 % | 1,260 % | -0,025 | 10,505 |
| FTSE | -9,265 % | 9,384 % | 0,002 % | 0,046 % | 1,299 % | -0,106 | 8,671 |
| N225 | -12,111 % | 10,086 % | -0,017 % | 0,023 % | 1,558 % | -0,408 | 8,205 |
| SMI | -8,108 % | 10,788 % | 0,005 % | 0,056 % | 1,309 % | -0,020 | 8,395 |
| USD | -4,818 % | 4,333 % | -0,019 % | -0,036 % | 0,772 % | 0,121 | 5,764 |
| GBP | -4,871 % | 3,995 % | -0,019 % | -0,021 % | 0,643 % | -0,037 | 7,602 |
| JPY | -5,253 % | 5,448 % | -0,010 % | -0,041 % | 0,920 % | 0,272 | 6,111 |
| CHF | -3,063 % | 2,927 % | -0,008 % | -0,018 % | 0,539 % | 0,297 | 7,525 |

Tabulka 3 Korelační matice spojitých výnosů vstupních časových řad

| Aktivum | DJI | FTSE | N225 | SMI | USD | GBP | JPY | CHF |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| DJI | 1,000 | 0,493 | 0,148 | 0,477 | -0,073 | -0,015 | -0,126 | -0,135 |
| FTSE | 0,493 | 1,000 | 0,335 | 0,804 | -0,074 | -0,027 | -0,208 | -0,198 |
| N225 | 0,148 | 0,335 | 1,000 | 0,331 | -0,048 | 0,020 | -0,178 | -0,174 |
| SMI | 0,477 | 0,804 | 0,331 | 1,000 | -0,042 | -0,004 | -0,169 | -0,198 |
| USD | -0,073 | -0,074 | -0,048 | -0,042 | 1,000 | 0,663 | 0,643 | 0,499 |
| GBP | -0,015 | -0,027 | 0,020 | -0,004 | 0,663 | 1,000 | 0,457 | 0,527 |
| JPY | -0,126 | -0,208 | -0,178 | -0,169 | 0,643 | 0,457 | 1,000 | 0,550 |
| CHF | -0,135 | -0,198 | -0,174 | -0,198 | 0,499 | 0,527 | 0,550 | 1,000 |

kurz) má v portfoliu stejnou váhu, (iii) portfolio s minimálním rozptylem Π_{mv} . Váhy jednotlivých indexů (a potažmo i měnových kurzů) jsou pro tato portfolio uvedeny v tabulce 4. Lze vidět, že při maximalizaci podílu očekávaného výnosu a rizika (tangenciální portfolio) jsou přibližně dvě třetiny prostředků investovány do švýcarského indexu a třetina prostředků je investována do amerického indexu. Portfolio s minimálním rozptylem je již diverzifikováno do všech čtyř možných indexů – do švýcarského a amerického indexu je investována vždy přibližně třetina prostředků, pětina prostředků je investována do japonského indexu a zbytek je investován do britského indexu.

Tabulka 4 Složení uvažovaných portfolií

| Portfolio – označení | DJI, USD | FTSE, GBP | N225, JPY | SMI, CHF |
|---|----------|-----------|-----------|----------|
| Tangenciální portfolio – Π_m | 29,79 % | 0,00 % | 0,00 % | 70,21 % |
| Rovnoměrně citlivé portfolio – Π_{eq} | 25,00 % | 25,00 % | 25,00 % | 25,00 % |
| Portfolio s minimálním rozptylem – Π_{mv} | 34,25 % | 11,15 % | 21,62 % | 32,98 % |

6.2 Postup odhadu hodnoty VaR a použité modely

Pro odhad hodnoty VaR byla uvažována čtyři různá sdružená rozdělení pravděpodobnosti: (i) normální rozdělení pravděpodobnosti sdružené Gaussovou kopula funkcí definovanou rovnicí (13) – tedy sdružené normální rozdělení, Ga-Ga, (ii) NIG rozdělení definované rovnicí (1) sdružené Gaussovou kopula funkcí, NIG-Ga, (iii) normální rozdělení sdružené Studentovou kopula funkcí definovanou rovnicí (14), Ga-St (iv) NIG rozdělení sdružené dohromady pomocí Studentovy kopula funkce, NIG-St.

Při odhadu modelů bylo využito CML přístupu, který byl zvolen s ohledem na časovou úsporu vzhledem k přístupům IFM a EMLM, která vychází z faktu, že pro modely s různými marginálními rozděleními jsou parametry kopula funkcí odhadnuté metodou CML vždy stejné, a proto je postačuje odhadnout pouze jednu.

Byly tedy odhadnuty zvlášť parametry marginálních rozdělení a zvlášť parametry kopula funkcí. Při odhadu parametrů obou se vycházelo z posledních 250 dní s ohledem na to, aby v datech byly přítomny extrémní výnosy a zároveň aby časová řada použitá pro odhad parametrů nebyla příliš dlouhá a pružně reagovala na změny charakteristik výnosů jednotlivých aktiv. Parametry NIG modelu byly odhadnuty metodou momentů dle rovnic (3) až (6), parametry kopula funkcí (korelační matice pro Gaussovou kopuli a korelační matice spolu se stupni volnosti pro Studen-

tovu kopula funkci) pak metodou maximální věrohodnosti.

Odhad hodnoty VaR byl proveden metodou simulace Monte Carlo s 50 tisíci scénáři pro pozorování číslo 251 (14. září 1998) až 3 189 (29. prosinec 2009), celkem bylo tedy uskutečněno 2 939 testovacích pozorování.³ Při odhadu hodnoty VaR pomocí simulace Monte Carlo je pro každý den postupováno následovně. Nejprve jsou na základě odhadnutých parametrů patřičné kopula funkce generována náhodná čísla v intervalu (0,1), která mají patřičnou strukturu závislosti, konkrétně je generováno 50 tisíc vektorů náhodných čísel.⁴ Takto generovaná náhodná čísla jsou pak pomocí patřičných inverzních distribučních funkcí marginálních rozdělení transformována na náhodné výnosy jednotlivých aktiv, čímž je získáno 50 tisíc vektorů náhodných výnosů jednotlivých aktiv. Pro každý vektor (scénář) výnosů jednotlivých aktiv je následně určen výnos portfolio. Simulované výnosy portfolio jsou seřazeny vzestupně od nejnižší po nejvyšší ztrátu a hodnota VaR je určena jako patřičný kvantil rozdělení pravděpodobnosti (tedy jako ztráta v pořadí $50\,000\alpha$).

Celý postup zpětného testování byl proveden třikrát, vždy s náhodně nastaveným generátorem pseudonáhodných čísel. Výsledky všech tří běhů zpětného testování byly téměř identické – počet výjimek u jednotlivých modelů a hladin spolehlivosti α byl většinou stejný, výjimečně se lišil o jednu výjimku. Dále budou tedy prezentovány pouze výsledky prvního běhu zpětného testování.

6.3 Výsledky zpětného testování

Pro zvolené hladiny spolehlivosti 85 %, 95 %, 99 % a 99,5 % lze vzhledem ke 2 939 pozorováním předpokládat postupně 441, 147, 29 a 15 výjimek. Pozorované počty výjimek pro jednotlivé modely a portfolia jsou uvedeny v tabulce 5.

Obecně lze říci, že při použití všech modelů je hodnota VaR na hladině spolehlivosti 85 % nadhodnocena (počet výjimek je nižší než je předpoklad) a na hladině spolehlivosti 95 %, 99 % a 99,5 % podhodnocena (počty výjimek jsou vyšší, než je předpoklad). Lze tak usuzovat na dodatečnou špičatost pravděpodobnostního rozdělení výnosů, která není modely zachycena.

Na základě srovnání počtu výjimek lze jako nejpřesnější model označit NIG rozdělení sdružené

³ V obrázku 3 tedy x nabývá postupně hodnoty 251 až 3189.

⁴ Postup generování vektoru náhodných čísel pro Gaussovou a Studentovu kopula funkci uvádějí například Cherubini a kol. (2004).

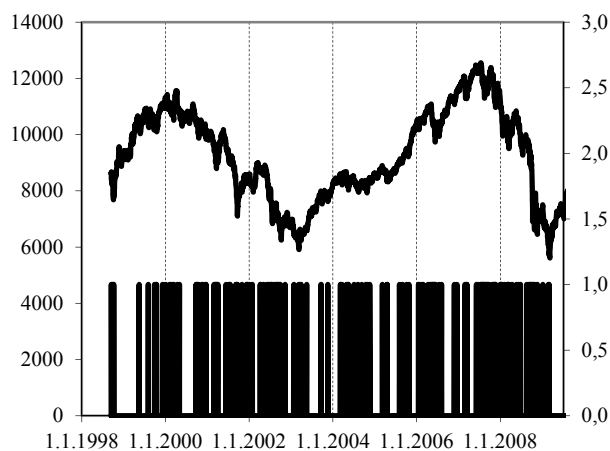
Studentovou kopula funkcí, kdy lze pomocí Kupiecova testu na 5% hladině pravděpodobnosti akceptovat počet výjimek pro všechna portfolia a hladiny spolehlivosti. Tento model je charakteristický tím, že ze všech uvažovaných modelů dovoluje modelovat nejvyšší špičatost. Použije-li se pro sdružení NIG rozdělení namísto Studentovy kopula funkce Gaussova kopule, pozorovaný počet výjimek se pro 85% hladinu spolehlivosti sníží (NIG-Ga tak ve srovnání s NIG-St riziko ještě více nadhodnocuje) a pro ostatní hladiny spolehlivosti se počet výjimek zvýší (NIG-Ga tak ve srovnání s NIG-St riziko ještě více podhodnocuje). Pro NIG-Ga model již nelze statisticky akceptovat počty výjimek pro hladinu spolehlivosti 85 % (portfolio s minimálním rozptylem a rovnoměrně citlivé portfolio) a rovněž pro hladinu spolehlivosti 99 % pro tangenciální portfolio.

Nejhorších výsledků dosahují modely založené na normálním rozdělení. Lze vidět, že při použití Studentovy kopula funkce je rozdíl mezi pozorovaným a předpokládaným počtem výjimek nižší než při použití Gaussovy kopula funkce. Rozdíly jsou však většinou stále příliš vysoké, než aby mohly být statisticky akceptovány (s výjimkou odhadu VaR na hladinách spolehlivosti 85 % a 95 % pro některá portfolia). S ohledem na pozorovaný počet výjimek lze tedy shrnout, že pro modelování výnosů portfolia je potřeba zvolit model s možností modelovat vyšší špičatost marginálních rozdělení a dále že použitím Studentovy kopula funkce je ve srovnání s Gaussovou kopula funkcí dosahováno lepších výsledků.

Druhým problémem, který může při zpětném testování vznikat, je shlukování výjimek. Pomocí Christoffersenova testu nezávislosti výjimek bylo testová-

no, zda je pravděpodobnost nastání výjimky nezávislá na skutečnosti, zda ji předcházela či nepředcházela výjimka. P-hodnoty tohoto testu pro jednotlivé modely a portfolia jsou uvedeny v tabulce 6. Lze vidět, že výjimky jsou na sobě nezávislé pouze pro hladiny spolehlivosti 99 % a 99,5 %, a to ještě ne pro všechna portfolia a modely.

Na obrázku 5 je srovnán vývoj hodnoty portfolia s minimálním rozptylem a rozložení výjimek odhadu VaR na hladině spolehlivosti 95 %. Výjimky jsou naznačeny spodním sloupcovým grafem. Z tohoto srovnání lze vidět, že výjimky se nejvíce shlukují při propadech hodnoty portfolia, konkrétně v létě roku 2002 a na jaře roku 2006, dále pak od podzimu roku 2007 do konce roku 2008.



Obrázek 5 Srovnání vývoje hodnoty portfolia s minimálním rozptylem a vývoje výjimek při odhadu VaR na hladině spolehlivosti 95 %

Tabulka 5 Počty výjimek pro jednotlivé modely, portfolia a hladiny spolehlivosti modelu VaR. Tučně zvýrazněné hodnoty lze na 5% hladině pravděpodobnosti přijmout na základě Kupiecova testu za rovné předpokládanému počtu výjimek.

| Portfolio | Hladina spolehlivosti α | Předpokládaný počet výjimek | Pozorovaný počet výjimek | | | |
|---|--------------------------------|-----------------------------|--------------------------|-------------------|-----------------|-------------------|
| | | | Normální rozdělení | | NIG rozdělení | |
| | | | Gaussova kopule | Studentova kopule | Gaussova kopule | Studentova kopule |
| Tangenciální portfolio Π_m | 85,0 % | 441 | 382 | 392 | 410 | 427 |
| | 95,0 % | 147 | 161 | 162 | 158 | 159 |
| | 99,0 % | 29 | 67 | 58 | 42 | 36 |
| | 99,5 % | 15 | 40 | 33 | 18 | 15 |
| Rovnoměrně citlivé portfolio Π_{eq} | 85,0 % | 441 | 401 | 419 | 395 | 405 |
| | 95,0 % | 147 | 171 | 172 | 151 | 150 |
| | 99,0 % | 29 | 51 | 42 | 31 | 29 |
| | 99,5 % | 15 | 33 | 26 | 21 | 19 |
| Portfolio s minimálním rozptylem Π_{mv} | 85,0 % | 441 | 412 | 427 | 399 | 413 |
| | 95,0 % | 147 | 166 | 165 | 153 | 152 |
| | 99,0 % | 29 | 57 | 49 | 34 | 30 |
| | 99,5 % | 15 | 34 | 24 | 19 | 17 |

Na obrázku 6 uvedeném v příloze je graficky zachycen vývoj hodnoty VaR odhadnuté modelem NIG-St pro portfolio s minimálním rozptylem spolu se skutečnou ztrátou tohoto portfolio pozorovanou daný den. K výjimkám dochází v případě, že skutečná ztráta je vyšší než odhadnutá hodnota VaR a tyto výjimky jsou pro jednotlivé hladiny spolehlivosti zachyceny na obrázku 7 v příloze.

7. Závěr

Modelování rizika je bezesporu jedním z hlavních úkolů risk managementu. V tomto článku byla popsána metoda modelování výnosů portfolio aktiv pomocí kopula funkcí a různých marginálních rozdělí. Konkrétně byly popsány eliptické kopula funkce, tj. Gaussova a Studentova kopula funkce, jako marginální rozdělí byl charakterizován normální inverzní Gaussův model. Kromě toho byla popsána metodologie VaR, která se používá jako ukazatel míry rizika, dále byl naznačen postup zpětného testování odhadu této hodnoty, včetně popisu jednotlivých statistických testů.

V aplikační části článku byla zpětně testována kvalita odhadu hodnoty VaR navrhovaných modelů na mezinárodně diverzifikovaném portfolio akciových indexů. Pro modelování marginálních rozdělí byly uvažovány normální inverzní Gaussův model a normální rozdělí pravděpodobnosti. Tato marginální rozdělí byla sdružena pomocí Gaussovy a Studentovy kopula funkce. Celkově tak byly uvažovány čtyři modely (sdružené rozdělí pravděpodobnosti).

Z těchto čtyř uvažovaných modelů je pro modelování výnosů portfolio nejvhodnější normální inverzní Gaussův model sdružený pomocí Studentovy kopula

funkce. O něco horších výsledků dosahuje normální inverzní Gaussův model sdružený pomocí Gaussovy kopula funkce. Pro oba modely je počet pozorovaných výjimek při zpětném testování velmi blízký očekávanému počtu výjimek, avšak problematické je shlukování těchto výjimek. Toto shlukování se projevuje obzvláště při odhadu hodnoty VaR na nižších hladinách spolehlivosti.

Normální rozdělí pravděpodobnosti, ať už sdružené Gaussovou, nebo Studentovou kopula funkcí, není pro modelování portfolio příliš vhodné. Při odhadu hodnoty VaR na vysokých hladinách spolehlivosti nejsou tyto modely přesné.

Literatura

- ALEXANDER, C., SHEEDY, E. (2008). Developing a stress testing framework based on market risk models. *Journal of Banking and Finance* 32(10): 2220–2236. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jbankfin.2007.12.041>
- ARTZNER, P. a kol. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* 9(3): 203–228. <http://dx.doi.org/10.1111/1467-9965.00068>
- BARNDORFF-NIELSEN, O. E. (1995). *Normal inverse Gaussian distributions and the modeling of stock returns*. Aarhus: Aarhus University.
- CONT, R., TANKOV, P. (2003). *Financial Modelling with Jump Processes*. Boca Raton: Chapman a Hall/CRC.
- DEMARTA, S., MCNEIL, A. J. (2005). The t copula and related copulas. *International Statistical Review* 73(1): 111–129. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1751-5823.2005.tb00254.x>

Tabulka 6 P-hodnoty Christoffersenova testu na nezávislost výjimek v čase. Hodnoty vyšší jak 0,05 jsou zvýrazněny

| Portfolio | Hladina spolehlivosti α | Pozorovaný počet výjimek | | | |
|---|--------------------------------|--------------------------|-------------------|-----------------|-------------------|
| | | Normální rozdělí | | NIG rozdělí | |
| | | Gaussova kopule | Studentova kopule | Gaussova kopule | Studentova kopule |
| Tangenciální portfolio Π_m | 85,0 % | 0,001 | 0,005 | 0,001 | 0,003 |
| | 95,0 % | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| | 99,0 % | 0,270 | 0,135 | 0,144 | 0,079 |
| | 99,5 % | 0,119 | 0,055 | 0,098 | 0,064 |
| Rovnoměrně citlivé portfolio Π_{eq} | 85,0 % | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| | 95,0 % | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| | 99,0 % | 0,069 | 0,023 | 0,043 | 0,032 |
| | 99,5 % | 0,055 | 0,487 | 0,574 | 0,610 |
| Portfolio s minimálním rozptylem Π_{mv} | 85,0 % | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| | 95,0 % | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| | 99,0 % | 0,001 | 0,001 | 0,403 | 0,310 |
| | 99,5 % | 0,403 | 0,189 | 0,111 | 0,086 |

FAMA, E. F. (1965). The behavior of stock market prices. *Journal of Business* 38(1): 34–105. <http://dx.doi.org/10.1086/294743>

FILÁČEK J., KAPIČKA M., VOŠVRDA M. (1998). Testování hypotézy efektivního trhu na BCPP, *Czech Journal of Economics and Finance* 48(9): 554–566.

GREEN, H. W. (2008). *Econometric analysis*. Upper Saddle River: Prentice Hall.

HANSEN, B. E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review* 35(3): 705–730. <http://dx.doi.org/10.2307/2527081>

HULL, J. (2007). *Risk Management and Financial Institutions*. Upper Saddle River: Prentice Hall.

CHERUBINI, G., LUCIANO, E., VECCHIATO, W. (2004). *Copula Methods in Finance*. Chichester: Wiley.

CHRISTOFFERSEN, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review* 39(4): 841–862. <http://dx.doi.org/10.2307/2527341>

KRESTA, A. (2010). Portfolio Value at Risk estimation utilizing Lévy models coupled together by copula functions. In *Proceedings of 47th EWGFM meeting*. Prague: X-MEDIA servis, 89–100.

KUPIEC, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives* 3(2): 73–84. <http://dx.doi.org/10.3905/jod.1995.407942>

NELSEN, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. New York: Springer. Springer Series in Statistics.

PRAUSE, K. (1999). *The Generalized Hyperbolic Model: Estimation, Financial Derivatives, and Risk Measures*. Freiburg im Breisgau: Albert-Ludwigs-Universität Freiburg.

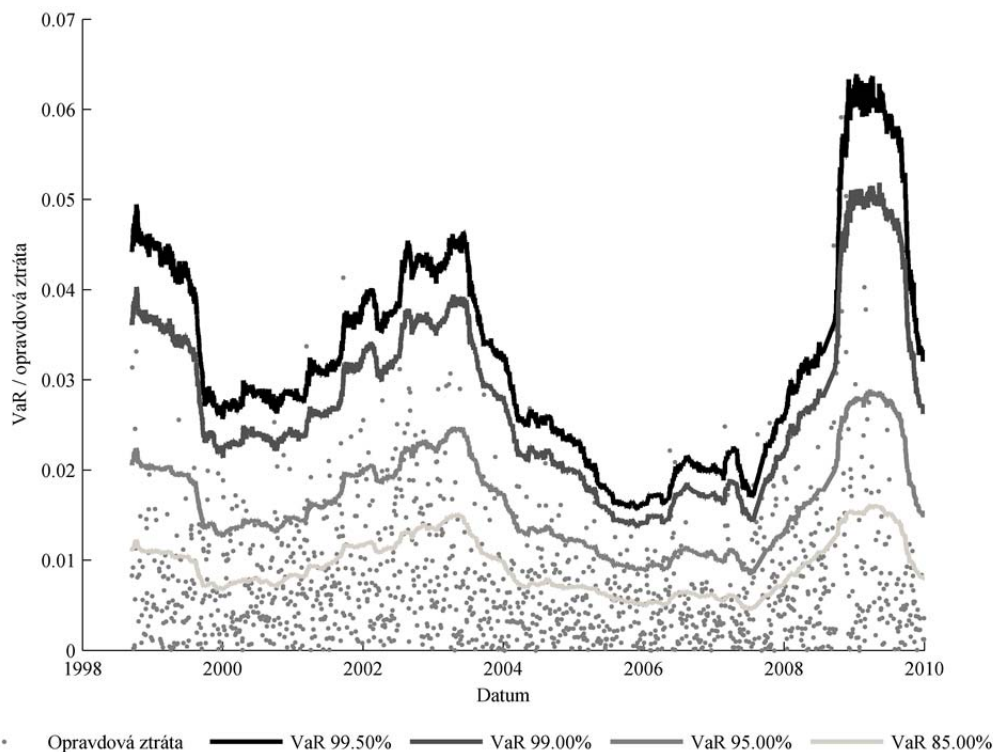
RANK, J. (2006). *Copulas: From Theory to Application in Finance*. London: Risk Books.

RESTI, A., SIRONI, A. (2007). *Risk Management and Shareholders Value in Banking: From Risk Measurement Models to Capital Allocation Policies*. Chichester: Wiley.

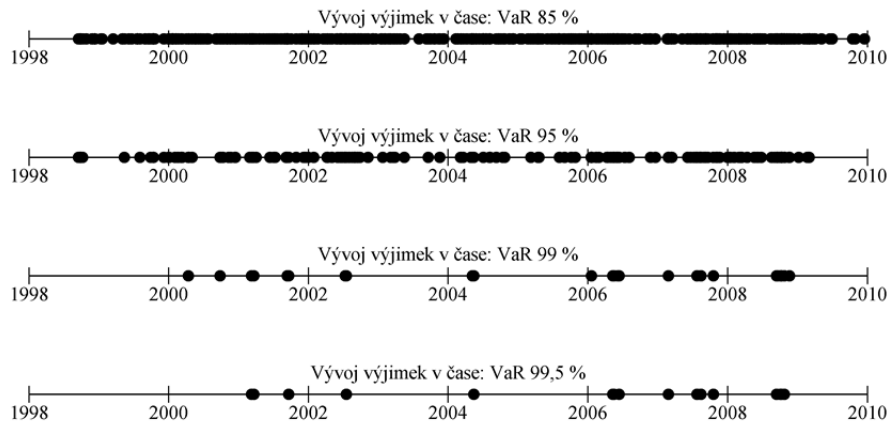
SKLAR, A. (1959). Fonctions de repartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* 8: 229–231.

TICHÝ, T. (2010). Posouzení odhadu měnového rizika portfolia pomocí Lévyho modelů. *Politická ekonomie* 58(4): 504–521.

Příloha



Obrázek 6 Pozorovaná jednodenní ztráta a hodnota VaR odhadnutá modelem NIG-St při různých hladinách spolehlivosti pro portfolio s minimálním rizikem



Obrázek 7 Pozorované výjimky pro portfolio s minimálním rozptylem a NIG-St model