

Lenka RANDÝSKOVÁ<sup>1</sup>, Petr JANAS<sup>2</sup>

STANOVENÍ EFEKTIVNÍ TUHOS TI PRŮŘEZU OCELOVÉHO PRVKU Z OHYBOVÝCH ZKOUŠEK

BENDING TEST-BASED DETERMINATION OF EFFECTIVE CROSS-SECTION STIFFNESS

**Abstrakt**

Pro většinu používaných materiálů platí, že při překročení limitní hodnoty napětí materiálu již není závislost mezi vektorem napětí a vektorem deformací v určitých úsecích lineární. Vliv fyzikálně nelineárního chování se projeví u konstrukce změnou tuhosti materiálu  $EI$ . V tomto článku je uveden postup určení efektivní (sečnové) tuhosti  $EI$  průřezu ocelového prvku z ohybových zkoušek v závislosti na relativním natočení průřezu  $d\varphi$ . K určení  $EI$  použijeme obecnou deformační metodu a iterační postup výpočtu.

**Klíčová slova**

Tuhost materiálu, ohybová zkouška, fyzikální nelinearita, deformační metoda

**Abstract**

For majority of materials the stress-strain relation becomes non-linear as soon as the normal stress exceeds its limit value. The non-linear behavior manifests itself through the change of the cross-section stiffness  $EI$ . In this paper the effective (secant) stiffness  $EI$  is determined as a function of the relative cross-section rotation  $d\varphi$  from the bending-test. To this end, the displacement method is utilized along with an iterative procedure.

**Keywords**

Cross-section stiffness, bending test, physical nonlinearity, displacement method

## 1 ÚVOD

Na fyzikálně a geometricky nelineárním chování konstrukce se může podílet nepružné chování materiálu a změna tvaru profilu prutů konstrukce. Tyto změny se projeví změnou ohybové tuhosti prutů. V [1] byla odvozena efektivní tuhost jako funkce ohybového momentu  $M$ . Při geometricky nelineárním řešení oblouků [3] se ukázalo, že jedné hodnotě zatížení (tedy i ohybového momentu  $M$ ) odpovídají až tři deformované stavy této konstrukce. Dále pak hodnota ohybového momentu nevymezuje ani při nulové nebo konstantní normálové síle v prutu jednoznačně efektivní tuhost  $EI$ . Jednomu ohybovému momentu mohou odpovídat při velkých deformacích i dvě hodnoty této tuhosti i při stejných normálových silách. Ukazuje se však, že  $EI$  může být jednoznačně definována jako funkce změny jeho pootočení  $d\varphi$ .

---

<sup>1</sup> Ing. Lenka Randýsková, Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420)597321919, e-mail: lenka.randyskova@vsb.cz.

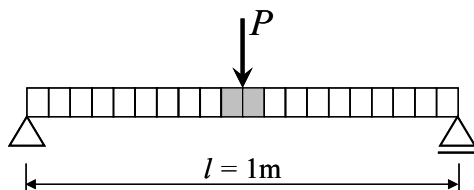
<sup>2</sup> Doc. Ing. Petr Janas, CSc., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420)597321308, e-mail: petr.janas@vsb.cz.

## 2 ŘEŠENÍ

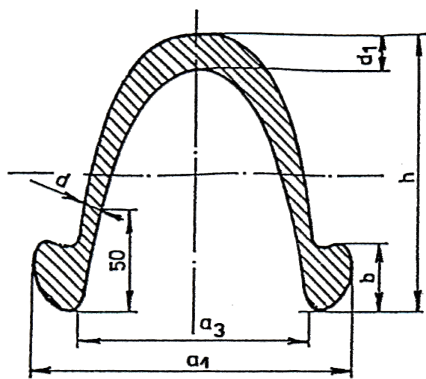
Odvození efektivní (sečnové) tuhosti  $EI$ , v tomto případě pro nulovou normálovou sílu, provedeme na prostém nosníku délky 1 metr, který je tvořen profilem P-28. Nosník je po své délce rozdělen na  $n$  dílků. Při tomto řešení se vychází z předpokladů, že konstrukce a tedy i každý její průřez je z pružnoplastického materiálu, platí Navier-Bernoulliho hypotézy o zachování rovinnosti průřezu, které se v procesu zatěžování nemění. Zanedbává se vliv posouvajících sil, vlastní pnutí, klopení a ztráta stability. Pro určení efektivní tuhosti použijeme obecnou deformační metodu [2] a iterační postup výpočtu. Při řešení respektujeme geometrickou nelinearitu.

Při odvození tuhosti  $EI$ , která bude určena v závislosti na relativním natočení jednotlivých průřezů  $d\varphi$ , postupujeme následně (jako vstupní hodnoty, ze kterých vycházíme, slouží hodnoty získané z ohybových zkoušek na obr. 3):

1. nosník rozdělíme na  $n$  dílků (vzhledem k výšce použitého profilu volíme  $n = 16$ , pak je délka dvou středních dílků, které v tomto případě měří 125 mm, srovnatelná s výškou  $h$  daného profilu P-28)
2. určíme hodnotu síly  $P$  v závislosti na průhybu středu nosníku  $w_s$  (kap. 2.1)
3. získanou hodnotu síly  $P$  porovnáme s hodnotou síly  $P_{zk}$ , který odpovídá danému průhybu  $w_s$  dle ohybové zkoušky (obr. 3)
4. pokud se získaná hodnota síly liší, měníme hodnotu efektivní tuhosti  $EI$  dvou středních dílků nosníku (obr. 1) tak dlouho, dokud neobdržíme s určitou zadanou přesností  $\varepsilon_2$  hodnotu odpovídající síly  $P_{zk}$  z ohybové zkoušky (při prvním kroku výpočtu měníme pouze  $EI$  dvou středních dílků, v následujících krocích pak už  $EI$  všech dílků)
5. tento postup aplikujeme na všechny hodnoty daných průhybů středu nosníku  $w_s$
6. popsaným postupem získáme hodnoty efektivních tuhostí  $EI$ , kterým je vždy přiřazeno relativní natočení daných dílků  $d\varphi$  (po vynesení hodnot do grafu získáme požadovanou křivku tuhosti)
7. celý postup opakujeme, ale při následujících krocích již vždy postupně měníme tuhosti všech dílků nosníku dle hodnot tuhostí získaných v předcházejícím kroku, avšak hodnotu tuhosti dvou středních dílků upravujeme stále dle bodů 3 až 4
8. výpočet ukončíme, pokud se hodnoty ohybových tuhostí následujících kroků budou shodovat s požadovanou přesností  $\varepsilon_3$

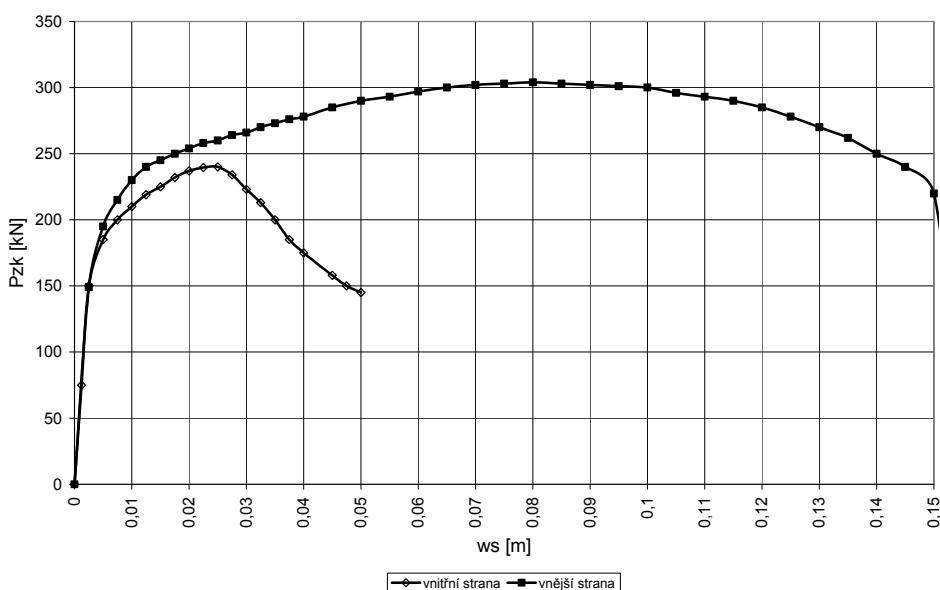


Obr. 1: Schéma zatěžovaného nosníku



$a_1$ [mm]	148
$a_3$ [mm]	109
$b$ [mm]	31
$d$ [mm]	7,9
$d_1$ [mm]	14,5
$h$ [mm]	127,5

Obr. 2: Profil P-28



Obr. 3: Hodnoty z ohybových zkoušek při zatěžování z vnitřní a vnější strany kořene profilu P-28

## 2.1 Určení síly $P$ v závislosti na průhybu středu nosníku $w_s$

Nosník je rozdělen na  $n$  přímkových dílků. Každý tento dílek budeme považovat za prut uložený oboustranně monoliticky. Tím dostaneme celkem  $n_p = [3 \cdot (n+1) - 3]$  neznámých parametrů vektoru deformace  $\{r\}$ . Tyto neznámé deformace, které představují vodorovný posun  $u_i$ , svislý posun  $w_i$  a natočení  $\varphi_i$  jednotlivých bodů nosníku, lze získat řešením soustavy rovnic

$$[K] \cdot \{r\} = \{F\}, \quad (1)$$

kde  $[K]$  je celková matice tuhosti nosníku a získáme ji lokalizací globálních matic tuhosti jednotlivých dílků  $[k_i]$ . Matice  $[K]$  je při nelineárním řešení funkcí vektoru  $\{F\}$ . Vektor  $\{F\}$  je zatěžovací vektor, který obsahuje jedinou nenulovou hodnotu a to sílu  $P$ , která tvoří střední hodnotu tohoto vektoru.

$$\{F\} = \{0 \quad \dots \quad P \quad \dots \quad 0\}^T = P \cdot \{0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0\}^T = P \cdot \{\bar{F}\} \quad (2)$$

$$[k_i^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{ds_i} & 0 & 0 & -\frac{EA}{ds_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_i}{ds_i^3} & -\frac{6EI_i}{ds_i^2} & 0 & -\frac{12EI_i}{ds_i^3} & -\frac{6EI_i}{ds_i^2} \\ 0 & -\frac{6EI_i}{ds_i^2} & \frac{4EI_i}{ds_i} & 0 & \frac{6EI_i}{ds_i^2} & \frac{2EI_i}{ds_i} \\ -\frac{EA}{ds_i} & 0 & 0 & \frac{EA}{ds_i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_i}{ds_i^3} & \frac{6EI_i}{ds_i^2} & 0 & \frac{12EI_i}{ds_i^3} & \frac{6EI_i}{ds_i^2} \\ 0 & -\frac{6EI_i}{ds_i^2} & \frac{2EI_i}{ds_i} & 0 & \frac{6EI_i}{ds_i^2} & \frac{4EI_i}{ds_i} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$[T_i] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[k_i] = [T_i]^T \cdot [k_i^*] \cdot [T_i] \quad (5)$$

Při řešení této úlohy máme zadán svislý posun středu nosníku  $w_s$ , přičemž hodnota síly  $P$  je zde neznámá hodnota. Získáváme tedy smíšenou úlohu, kterou řešíme postupem popsáním následujícími rovnicemi.

$$[K] \cdot \{r\} = P \cdot \{\bar{F}\} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1s} & \cdots & k_{1n_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & & k_{ss} & & k_{sn_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n_p1} & \cdots & k_{n_ps} & \cdots & k_{n_pn_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ w_s \\ \vdots \\ d_{n_p} \end{Bmatrix} = P \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & 0 & \cdots & k_{1n_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & & 1 & & k_{sn_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n_p1} & \cdots & 0 & \cdots & k_{n_pn_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ -P \\ \vdots \\ d_{n_p} \end{Bmatrix} = -w_s \cdot \begin{Bmatrix} k_{1s} \\ \vdots \\ k_{ss} \\ \vdots \\ k_{n_ps} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$[K_{\bar{F}}] \cdot \{r_P\} = -w_s \cdot \{K_s\} \Rightarrow \{r_P\} = [K_{\bar{F}}]^{-1} \cdot (-w_s) \cdot \{K_s\} \quad (9)$$

$\{\bar{F}\}$  – zatěžovací vektor vyvolaný jednotkovou silou  $P = 1$

$\{K_s\}$  – vektor obsahující prvky z prostředního sloupce původní matice tuhosti soustavy  $[K]$

$[K_{\bar{F}}]$  – modifikovaná matice tuhosti, původní prostřední sloupec je nahrazen vektorem  $\{\bar{F}\}$

$\{r_P\}$  – modifikovaný vektor deformací, hodnota  $w_s$  je nahrazena zápornou hodnotou  $P$

Vyřešením této úlohy získáme kromě hodnot všech deformací  $r$  nosníku i hodnotu svislé síly  $P$ , která vyvolá právě daný posun  $w_s$ . Po získání všech deformací určíme nové souřadnice bodů nosníku a následně pak novou matici tuhosti  $[K]$  již deformovaného nosníku a celou úlohu opět zopakujeme.

Výpočet pro dané  $w_s$  probíhá iteračně, dokud neobdržíme požadovanou přesnost řešení, která je dána velikostí zatížení určených v následujících  $k$ -tých iteracích.

$$\varepsilon_1 = \left| \frac{(P_k - P_{k-1})}{P_k} \right| \quad (10)$$

## 2.2 Určení tuhosti $EI$ v závislosti na relativním natočení $d\varphi$

Určíme pro danou hodnotu  $w_s$  hodnotu síly  $P$ . Získanou hodnoty síly  $P$  porovnáme s hodnotou síly  $P_{zk}$ , která odpovídá danému průhybu  $w_s$  dle ohybové zkoušky (obr. 3). Pokud je získaná hodnota síly odlišná, upravujeme hodnotu efektivní tuhosti  $EI$  dvou středních dílků nosníku.

$$\begin{aligned} EI_{n/2}' &= EI_{n/2+1}' = \frac{1}{2}(EI_{n/2} + \tilde{EI}) \\ F < F_{zk} &\Rightarrow \tilde{EI} = EI_{n/2}(1 + \varepsilon_2) \\ F > F_{zk} &\Rightarrow \tilde{EI} = EI_{n/2}(1 - \varepsilon_2) \end{aligned} \quad (11)$$

Hodnotu tuhosti středních dílků upřesňujeme tak dlouho, dokud neobdržíme s určitou zadanou přesností  $\varepsilon_2$  hodnotu odpovídající síly  $P_{zk}$  z ohybové zkoušky.

$$\varepsilon_2 = \left| \frac{(P_{zk} - P)}{P} \right| \quad (12)$$

Tento postup aplikujeme pro všechny hodnoty daných průhybů  $w_s$ . Popsaných postupem získáme hodnoty tuhostí  $EI_i$ , kterým vždy přiřadíme příslušné relativní natočení středních dílků  $d\varphi_i$  (po vynesení hodnot do grafu získáme požadovanou křivku tuhosti).

$$d\varphi_i = \left| \frac{1}{ds_i}(\varphi_i - \varphi_{i+1}) \right| \quad (13)$$

$$ds_i \approx \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} \quad (14)$$

Celý postup opakujeme, ale při následujících  $j$ -tých krocích již vždy postupně měníme efektivní tuhosti všech  $i$ -tých dílků nosníku dle hodnot tuhostí získaných v předcházejícím kroku, přičemž hodnotu tuhosti dvou středních dílků stále upravujeme již popsáným postupem (v závislosti na hodnotě síly  $P_{zk}$  z ohybové zkoušky).

$$d\varphi_{i,j} \geq d\varphi_{m-1,j-1} \cap d\varphi_{i,j} < d\varphi_{m,j-1} \Rightarrow EI_{i,j} = EI_{m-1,j-1} - \frac{(d\varphi_{i,j} - d\varphi_{m-1,j-1})}{(d\varphi_{m,j-1} - d\varphi_{m-1,j-1})} (EI_{m-1,j-1} - EI_{m,j-1}) \quad (15)$$

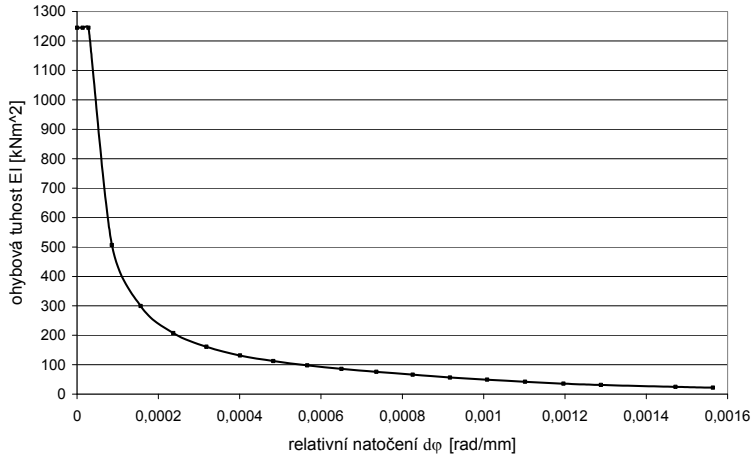
Při změnách efektivních tuhostí stále kontrolujeme, zda hodnoty  $EI_i$  v následujících krocích pouze klesají. Pokud by se stalo, že by tuhost začala zpětně stoupat, tak vzrostlou hodnotu tuhosti nahradíme menší tuhostí z předcházejícího kroku.

Výpočet provádíme tak dlouho, dokud neobdržíme požadovanou přesnost řešení  $\varepsilon_3$ , která je dána hodnotami tuhostí v následujících krocích.

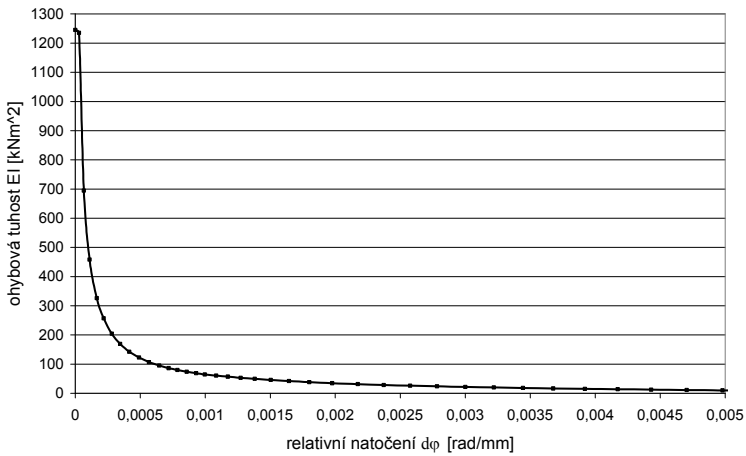
$$\varepsilon_3 = \max \left| \frac{(EI_{i,j} - EI_{i,j-1})}{EI_{i,j}} \right| \quad (16)$$

## 2.3 Výsledné hodnoty efektivních tuhostí $EI$

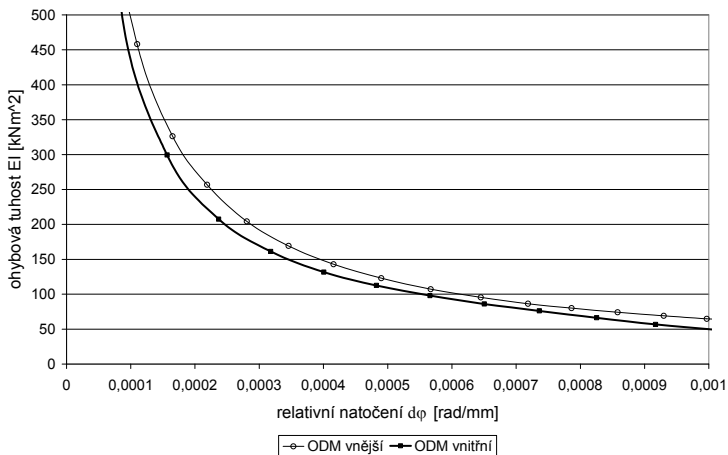
Pomocí popsáného postupu jsme obdrželi hodnoty efektivních tuhostí  $EI$  pro profil P-28 zatěžovaný z vnitřní a vnější strany kořene, z nichž jsme následně zkonstruovali křivky. Na obr. 4 až 6 jsou vyneseny křivky, které byly získány se zadanými přesnostmi  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0,0001$ . V lineární oblasti (geometricky i fyzikální) je tuhost  $EI$  konstantní. Tato lineární oblast tvoří jen malou část křivky. Při rostoucím relativním natočení  $d\varphi$  nastává pokles tuhosti  $EI$ . Pokles tuhosti má svou příčinu zejména v překročení meze kluzu materiálu, ale také i ve změně geometrie samotného profilu.



Obr. 4: Křivky tuhosti při zatěžování z vnitřní strany kořene profilu P-28



Obr. 5: Křivky tuhosti při zatěžování z vnější strany kořene profilu P-28

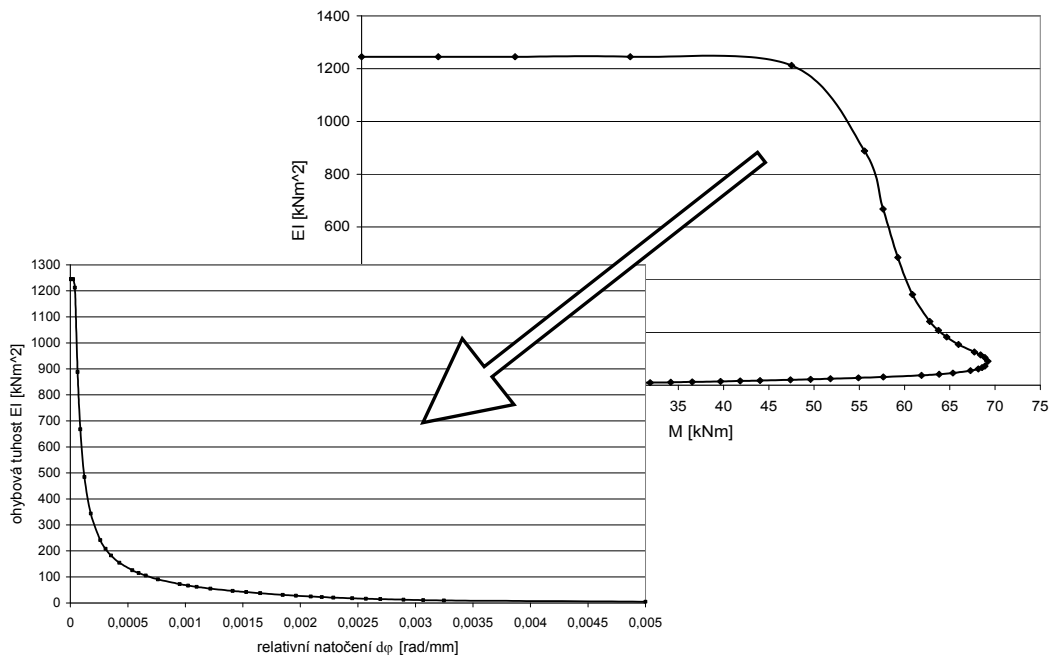


Obr. 6: Srovnání výsledných tuhostí při zatěžování z vnitřní a vnější strany kořene profilu P-28

## 2.4 Srovnání získaných výsledků s hodnotami získanými pomocí programu ANSYS

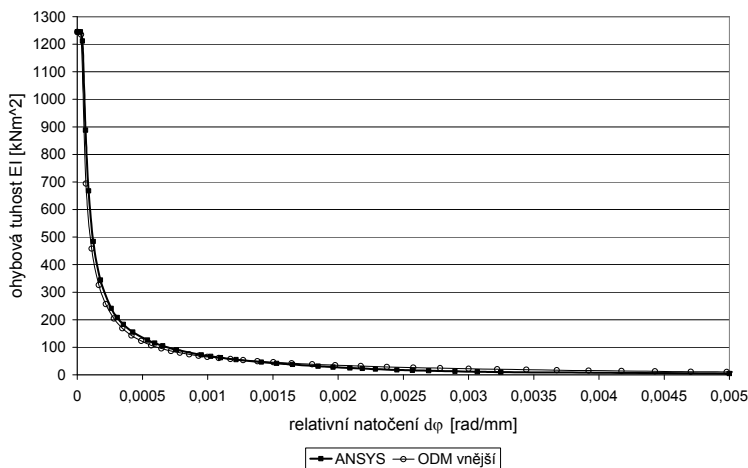
Na základě modelů realizovaných v programu ANSYS byla stanovena efektivní tuhost uvedeného profilu P-28, která je funkcí ohybového momentu  $M$  [4]. Máme-li funkční závislost efektivní tuhosti  $EI$  na ohybovém momentu  $M$ , lze pak dopočítat i odpovídající relativní natočení  $d\varphi$  a vykreslit průběh tuhosti  $EI$  v závislosti na relativním natočení  $d\varphi$  (obr. 7).

$$|d\varphi| = \left| \frac{M}{EI} \right| \quad (17)$$



Obr. 7: Křivky tuhosti  $EI$  závislé na  $M$  a následně pak  $d\varphi$

Na obr. 7 je křivka pro profil P-28 zatěžovaný z vnější strany kořene profilu. Na obr. 8 je pak její srovnání s křivkou získanou z ohybové zkoušky pomocí obecné deformační metody.



Obr. 8: Srovnání křivek získaných pomocí programu ANSYS a z ohybové zkoušky

### 3 ZÁVĚR

Článek se věnuje určení efektivní (sečnové) tuhosti průřezu  $EI$  ocelového profilu P-28 z ohybových zkoušek, které byly provedeny na vzorku délky 1 metr. Tyto hodnoty  $EI$  určujeme v závislosti na relativním natočení průřezu  $d\varphi$ . Hodnoty tuhosti  $EI$  byly určeny pomocí obecné deformační metody a iteračního postupu výpočtu a následně z nich byly zkonstruovány křivky. Výsledky byly porovnány s hodnotami získanými pomocí programu ANSYS.

### PODĚKOVÁNÍ

Projekt byl realizován za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím Grantové agentury České republiky. Registrační číslo projektu je 105/08/1562. A dále pak projektu SP/2010156 dotovaného MŠMT na specifický vysokoškolský výzkum.

### LITERATURA

- [1] JANAS, P. *Spolehlivost ocelových výztuží dlouhých důlních děl při rázovém zatížení*. Závěrečná zpráva projektu GA ČR 105/04/0458. Ostrava, 2007.
- [2] KADLČÁK, J., KYTÝR, J. *Statika stavebních konstrukcí II*. Brno, 2001. ISBN 80-214-1648-3.
- [3] RANDÝSKOVÁ, L., JANAS, P. Numerické geometricky nelineární řešení soustavy kruhových oblouků pomocí deformační metody. In *Modelování v mechanice 2010*. Mezinárodní konference. Sborník příspěvků, Ostrava, 2010. ISBN 978-80-248-2234-1.
- [4] MARKOPOULOS, A., JANAS, P., PODEŠVA, J. Efektivní ohybová tuhost profilu P-28 se zahrnutím osové síly. In *Modelování v mechanice 2010*. Mezinárodní konference. Sborník příspěvků, Ostrava, 2010. ISBN 978-80-248-2234-1.

### Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Jiří Šejnoha, DrSc., ČVUT Praha, Thákurova 7, Praha 6.