

**Karel VOJTASÍK<sup>1</sup>, Eva HRUBEŠOVÁ<sup>2</sup>, Marek MOHYLA<sup>3</sup>, Jana STAŇKOVÁ<sup>4</sup>**

**STANOVENÍ VÝVOJE STAVU NAPJATOSTI V PRŮŘEZU TUNELOVÉ OCELOBETONOVÉ  
VÝZTUŽE DLE TEORIE SPOLUPRACUJÍCÍCH PRSTENCŮ**

**AN ASSESSMENT OF STRESS STATE IN SECTION OF STEEL CONCRETE TUNNEL LINING  
BASED ON A THEORY OF SIMULTANEOUS WORKING RINGS**

**Abstrakt**

Článek popisuje metodu, kterou se zjišťuje stav napjatosti v průřezu ocelobetonového tunelového ostění. Metoda je odvozena z teorie spolupracujících prstenců. Tato metoda vyhodnocuje parametry ocelobetonového ostění tunelu, které se mění v průběhu výstavby. Vyhodnocení stavu napjatosti v průřezu primárního ostění spočívá na modulu pružnosti homogenizovaného průřezu a na přenosových koeficientech radiálního napětí, které jsou výsledkem teorie spolupracujících prstenců. Na základě uvedené metody lze stanovit přerozdělovací koeficienty tangenciálních napětí, které umožňují přepočet napjatosti homogenizovaného průřezu ostění na skutečný stav napjatosti v průřezu tunelového ostění z oceli a betonu, tj. v ocelových prvcích a stříkaném betonu.

**Klíčová slova**

Primární ostění tunelu, ocelobetonová výztuž, přetvárné parametry, stav napětí v průřezu výztuže

**Abstract**

Paper describes a method setting up a stress state in section of the steel concrete tunnel lining. This method evolves from the theory of simultaneous working rings. The theory provides for evaluation of strain parameters of the steel concrete tunnel lining section as they change themselves in course of lining construction. The evaluation of stress state in lining section roots on the stress modulus of homogenized lining section and on the radial stress transfer coefficients that all of them are outputs getting the theory of simultaneous working rings off. On the basis of this method the tangential stress redistribution coefficients redraft the stress state of homogenized lining section for the real stress state in constituent section materials of the steel concrete tunnel lining, i.e. in the steel elements and the shotcrete.

**Keywords**

Tunnel primary lining, steel concrete lining, strain parameters, stress state in lining section

---

<sup>1</sup> Doc. Ing. Karel Vojtasík, CSc., Katedra geotechniky a podzemního stavitelství, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420) 597 321 947, e-mail: karel.vojtasik@vsb.cz.

<sup>2</sup> Doc. RNDr. Eva Hruběšová, Ph.D., Katedra geotechniky a podzemního stavitelství, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420) 597 321 973, e-mail: eva.hrubesova@vsb.cz.

<sup>3</sup> Ing. Marek Mohyla, Katedra geotechniky a podzemního stavitelství, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420) 597 321 362, e-mail: marek.mohyla.stl@vsb.cz.

<sup>3</sup> RNDr. Jana Staňková, Ph.D., Katedra matematiky a deskriptivní geometrie, Hornicko-geologická fakulta, VŠB-Technická univerzita Ostrava, 17 listopadu 15, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420) 597 324 127, e-mail: jana.stankova@vsb.cz.

## 1 ÚVOD

Ocelobetonové ostění podzemního díla je specifickou konstrukcí, jejímž charakteristickým rysem je souběh procesů výstavby a vykonávání stabilizační funkce. Stabilizační funkce začíná okamžikem nástřiku vrstvy betonové směsi na stěnu výrubu, vyztužené ocelovými prvky. K vyztužení se běžně používá ocelová mřížovina a ocelové rámy z příhradových, válcovaných nebo svařovaných ocelových prutů. Ocelové prvky vytváří okamžitou stabilizační reakci. Stříkaný beton integruje ocelové prvky s horninovým masivem. Integrace zajišťuje součinnost konstrukce OCB ostění s horninovým masivem, efektivní využití jak únosnosti konstrukce ostění, tak mobilizaci stabilitního potenciálu horninového prostředí. Stříkaný beton je příčinou, že OCB ostění má proměnlivý charakter, který plyne ze dvou okolností. Prvá je objektivní a souvisí s tuhnutím betonové směsi. Druhá, konstrukční, souvisí s prováděním OCB ostění, kdy stříkaný beton je aplikován postupně, nástřikem ve dvou nebo i několika vrstvách. Mezi nástřikem jednotlivých vrstev je zpravidla 24 hodinový časový odstup. Uvedené okolnosti jsou příčinou, že parametry, a tím i únosnost OCB ostění, se během výstavby vyvíjí až do okamžiku, kdy je ukončeno tvrdnutí betonu. Tento rys OCB ostění má mimořádný význam pro stabilizaci horninového prostředí. Postupný nárůst tuhosti OCB ostění dovoluje uvolňování napětí z horninového prostředí. Po provedení výlomu a po bezprostředním vybudování ocelobetonového ostění rozhodující roli sehrávají ocelové elementy. Mřížovina zapážuje výrub, ocelové rámy vytváří stabilizační reakci. Vrstva stříkaného betonu plní roli dokonalé základky. Nízká tuhost OCB ostění nebrání uvolnění napětí v hornině kolem výlomu díla. Tuhost a únosnost OCB ostění je v tomto okamžiku dána deformačními a pevnostními parametry ocelových elementů. V této fázi zpravidla dochází k významnému uvolnění napětí z horninového prostředí. V dalším průběhu se tvrdnoucí betonová vrstva začíná uplatňovat při vytváření stabilizační reakce OCB ostění. Konec růstu stabilizační reakce OCB ostění je podmíněn ukončením procesu tvrdnutí stříkaného betonu. Pracovní (deformační) charakteristika OCB ostění je dána vývojem tuhosti (modulu pružnosti) průřezu OCB ostění [3]. Stav napětí uvnitř průřezu OCB ostění v jeho jednotlivých konstrukčních materiálech bude funkcí vývoje tuhosti průřezu OCB ostění.

## 2 TEORIE SPOLUPRACUJÍCÍCH PRSTENCŮ

Teorie spolupracujících prstenců umožňuje homogenizaci materiálově heterogenního průřezu OCB ostění. Teorie vychází z analytického modelu pro výpočet napětí-deformačního stavu ve vícevrstevném kruhovém prstenci, který byl formulován prof. Bulytchevem [1]. Tento analytický model využívá teorii analytických funkcí komplexní proměnné, teorii komplexních potenciálů a funkce Kolosova. Algoritmus vychází z předpokladu, že se vnější zatížení (normálové i smykové) prstence přenáší jednotlivými vrstvami pomocí tzv. přenosových koeficientů, které obecně plynou z podmínky spojitosti deformací na jednotlivých kontaktech vrstev výztuže. Tyto přenosové koeficienty jsou funkcemi tloušťky vrstev a přetvárných charakteristik materiálů vrstev (Poissonovo číslo, modul pružnosti). Metoda vychází z následujícího tvaru vnějšího zatížení (obr.1)

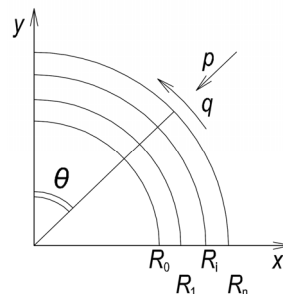
$$p = p_n = p_0 + p_2 \cos 2\theta$$

$$q = q_n = q_2 \sin 2\theta$$

$p_0$  – radiálně symetrická složka normálového vnějšího zatížení

$p_2$  – radiálně nesymetrická složka normálového vnějšího zatížení

$q_2$  – složka vnějšího tangenciálního zatížení



Obr.1: Základní výpočetní schéma

Napětí  $p_k$ ,  $q_k$  na jednotlivých kontaktech vrstev jsou definována pomocí přenosových koeficientů následujícími vztahy:

$$p_k = p_0(k) + p_2(k) \cos 2\theta$$

$$q_k = q_2(k) \sin 2\theta$$

$$p_0(k) = \left( \prod_{i=k+1}^n K_0(i) \right) p_0$$

$$\begin{pmatrix} p_2(k) \\ q_2(k) \end{pmatrix} = \left[ \prod_{i=k+1}^n \begin{pmatrix} K_{pp}(i) & K_{pq}(i) \\ K_{qp}(i) & K_{qq}(i) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

kde  $K_0(i)$ ,  $K_{pp}(i)$ ,  $K_{pq}(i)$ ,  $K_{qp}(i)$ ,  $K_{qq}(i)$ ,  $i=1, \dots, n$  jsou přenosové koeficienty přes  $i$ -tou vrstvu výztuže (přenosové koeficienty přes první (vnitřní) vrstvu jsou rovny nule). Takto vyjádřeným hodnotám radiálních napětí na jednotlivých kontaktech vrstev pak odpovídají tangenciální napětí a posuny na kontaktech vrstev. Tangenciální napětí na vnitřním a vnějším obryse výztužního prstence lze vyjádřit následovně:

vnitřní obrys  $k$ -té vrstvy:

$$\sigma_\theta(k, \text{vnitřní}) = p_0(k)m_1 - p_0(k-1)m_2$$

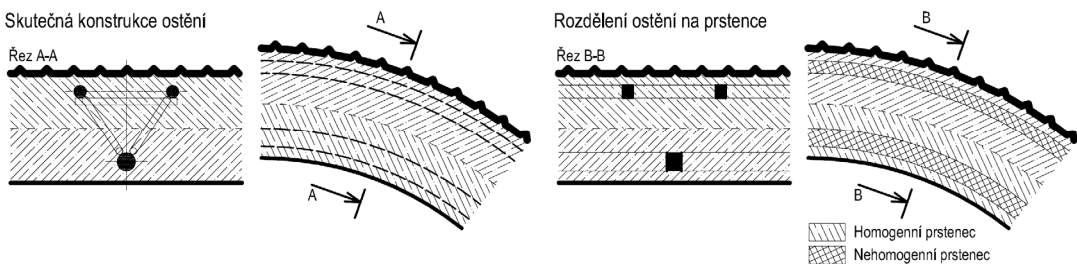
vnější obrys  $k$ -té vrstvy:

$$\sigma_\theta(k, \text{vnějš}) = p_0(k)m'_1 - p_0(k-1)m'_2$$

kde

$$m_1 = \frac{2c^2}{c^2 - 1}, m_2 = \frac{c^2 + 1}{c^2 - 1}, m'_1 = m_2, m'_2 = \frac{2}{c^2 - 1}, c = \frac{R_k}{R_{k-1}}$$

Uvedená výpočetní metodika je základem pro stanovení kvazihomogenního modulu pružnosti nehomogenního ostění. Nehomogenní ostění s vnitřními vložkami z odlišného materiálu (např. ocelové vložky) lze totiž rozdělit na jednotlivé dílčí vrstvy, z nichž některé jsou vrstvy homogenní, některé jsou nehomogenní s pravidelně se střídajícími dílčími tuhostně odlišnými oblastmi (výplň, vložka) (viz. obr. 2). Celé toto ostění tak může být považováno za speciální případ vícevrstvého ostění a pro stanovení napěťo-deformačního stavu lze tedy vycházet z již zmíněného algoritmu pro řešení vícevrstevých prstenců.



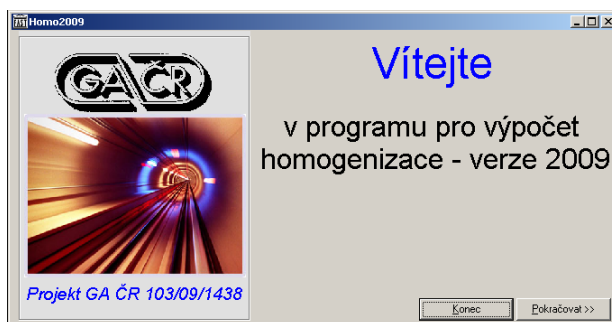
Obr.2: Rozklad průřezu OCB ostění na prstence

Výpočetní postup pro stanovení jediné reprezentativní hodnoty modulu pružnosti nehomogenního ostění se člení do dvou dílčích kroků:

- dílčí homogenizace materiálně nehomogenních prstenců (beton-ocel, ocel-volný prostor)
- globální homogenizace dílčích prstenců, která probíhá postupně, vždy na dvou sousedních prstencích. V prvním kroku jsou homogenizovány dva první prstence, vnitřní prstenc a jeho soused. Dále se postup opakuje, k nově vzniklému (ze dvou předchozích prstenců) je připojen následující dílčí prstenc. Postup se opakuje, dokud nejsou všechny prstence sloučeny do jednoho celku.

Výsledkem homogenizace je jediná hodnota modulu pružnosti, reprezentující strukturu a konstrukční materiály profilu ostění a přenosové koeficienty napětí. Z přenosových koeficientů napětí jsou dále odvozeny přerozdělovací koeficienty, které slouží pro zpětný výpočet hodnot napětí ve skutečných materiálech, tj. v betonu a oceli, v krajních vláknech homogenních i nehomogenních prstenců.

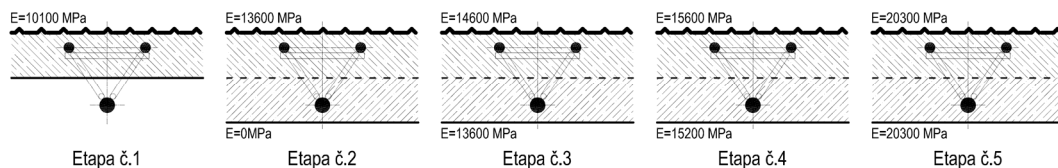
Princip a základní vztahy k teorii spolupracujících prstenců jsou podrobně uvedeny v článku [2]. K této teorii byl následně vyvinut výpočetní program, nesoucí název HOMO (obr.3). Program stanovuje hodnoty všech výše zmiňovaných parametrů, kterými je charakterizován proces homogenizace, tj.: moduly pružnosti homogenizovaných částí průřezu ostění; koeficienty přenosu napětí mezi prstenci; materiálové přerozdělovací koeficienty napětí pro krajní vlákna homogenních a heterogenních prstenců. Následující příklad uvádí výsledky výpočtu parametrů procesu homogenizace a jejich užití při stanovení vnitřních sil v betonu a oceli pro standardní konstrukci průřezu OCB ostění.



Obr.3: Program HOMO

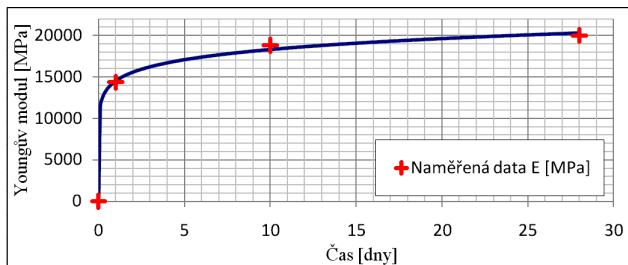
### 3 PŘÍKLAD

Obrázek č.4 zachycuje etapy provádění průřezu OCB ostění, které je konstruováno ocelovým příhradovým nosníkem ASTA 95, rozteč prutových rámu je jeden metr a stříkaným betonem, který je aplikován postupně ve dvou stejně mocných vrstvách s časovým odstupem jednoho dne. Neuvažuje se s vlivem ocelové mřížoviny. Průběh závislosti tvrdnutí betonu na čase uvádí graf na obr.5. Z této závislosti jsou pro daný čas tvrdnutí odečteny aktuální hodnoty modulu pružnosti betonu.



Obr.4: Etapy provádění průřezu OCB ostění

Výpočet OCB ostění je rozčleněn do 5-ti etap. Každá etapa odpovídá mezní situaci ve výstavbě konstrukce průřezu OCB ostění. První etapa počátek konstrukce, postavení ocelového rámu a zapažení - nástřik první vrstvy betonu (1/2 den;  $E_{1v}=10100\text{MPa}$ ). Druhá etapa, nástřik druhé vrstvy stříkaného (1 1/2 den;  $E_{1v}=13600\text{MPa}$ ;  $E_{2v}=0\text{MPa}$ ). Ve třetí a čtvrté etapě vrstvy stříkaného betonu mají rozdílný modul pružnosti ( $E_{1v}>E_{2v}$ ), viz tabulka 1. Poslední pátá etapa představuje situaci, kdy moduly pružnosti v obou vrstvách si budou rovny ( $E_{1v}=E_{2v}$ ) a nebudou se již dále zvyšovat.



Obr.5: Závislost tvrdnutí betonu v čase

V tabulce č.1 jsou pro uvedený příklad průřezu OCB ostění shrnuty hodnoty modulu pružnosti homogenizovaného průřezu OCB ostění a přerozdělovacích koeficientů tangenciálních napětí pro všech pět etap výstavby průřez OCB ostění, jak byly vypočteny programem HOMO.

Moduly pružnosti homogenizovaných průřezů jsou určeny pro následná statická řešení OCB ostění v příslušných etapách výstavby. Přerozdělovací koeficienty tangenciálních napětí jsou určeny pro přepočet stavu napětí z homogenizovaného průřezu na stav napětí v průřezu OCB ostění v příslušné etapě výstavby.

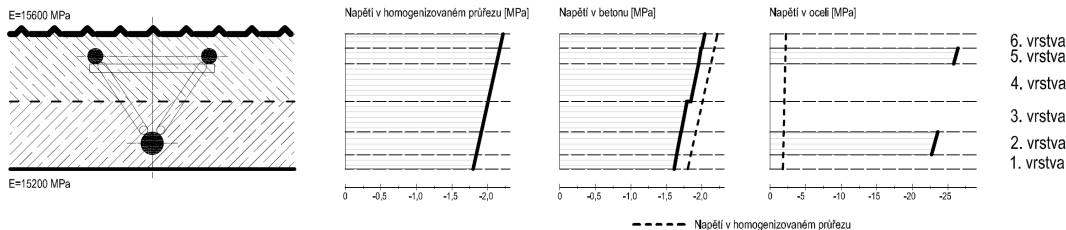
Tab.1: Výsledky výpočtu modulů homogenizovaných průřezů OCB ostění a přerozdělovacích koeficientů tangenciálních napětí ( $a_1$  – vnitřní vlákna prstence,  $a_2$  – vnější vlákna prstence)

Prsteneček č.	Materiál	Parametry	Etapa č.				
			1	2	3	4	5
1	Beton	$E_{bet.}$ [MPa]	0	0	13600	15200	20300
		$a_1$	0	0	0,866	0,893	0,927
		$a_2$	0	0	0,865	0,892	0,926
2	Beton	$E_{bet.}$ [MPa]	0	0	13600	15200	20300
		$a_1$	0	0	0,865	0,892	0,926
		$a_2$	0	0	0,864	0,890	0,925
	Ocel*)	$a_1$	30,031	23,892	13,355	12,326	9,575
	$a_2$	29,989	23,859	13,337	12,309	9,562	
3	Beton	$E_{bet.}$ [MPa]	0	0	13600	15200	20300
		$a_1$	0	0	0,866	0,892	0,926
		$a_2$	0	0	0,865	0,891	0,926
4	Beton	$E_{bet.}$ [MPa]	10100	13600	14600	15600	20300
		$a_1$	1,762	1,830	0,926	0,917	0,927
		$a_2$	1,761	1,829	0,927	0,918	0,926
5	Beton	$E_{bet.}$ [MPa]	10100	13600	14600	15600	20300
		$a_1$	1,761	1,829	0,927	0,918	0,928
		$a_2$	1,762	1,830	0,928	0,915	0,929
	Ocel*)	$a_1$	36,543	28,13	13,156	12,144	9,437
	$a_2$	36,551	28,136	13,159	12,147	9,440	
6	Beton	$E_{bet.}$ [MPa]	10100	13600	14600	15600	20300
		$a_1$	1,765	1,832	0,929	0,919	0,930
		$a_2$	1,766	1,834	0,930	0,920	0,931
$E_{homo.}$ [MPa]			6500	8200	15600	17000	22000

\*) ocel -  $E = 210\,000$  MPa

Grafy na obrázku č.6 zachycují stavy napětí v průřezu OCB ostění pro čtvrtou etapu výstavby. Graficky jsou zde zobrazeny průběhy napětí v homogenizovaném průřezu a průběhy napětí v betonu a oceli vypočtené s použitím příslušných přerozdělovacích koeficientů tangenciálních napětí.

#### Etapa č.4



Obr.6: Průběh rozložení napětí v materiálech, betonu a oceli, průřezu OCB ostění pro čtvrtou etapu.

## 4 ZÁVĚR

Teorie spolupracujících prstenců a na ní založená homogenizace průřezu vytvářejí základnu pro stanovení pracovní charakteristiky a stavu napětí v OCB ostění, které je charakterizováno heterogenní strukturou průřezu, časovou proměnlivostí přetvárných parametrů konstrukčních materiálů a etapovitostí výstavby.

Uvedený přístup a odvozená metoda řeší jen jednu část mnohem komplexnějšího problému. Stav napětí v ocelobetonové výztuži podzemních děl závisí nejen na její konstrukci, ale rovněž na chování horninového prostředí, které je do značné míry determinováno pracovní charakteristikou (vývojem tuhosti) výztuže.

V našem příkladě se s touto eventualitou neuvažovalo a stav napětí v průřezu byl stanoven jenom pro jednu dílčí etapu výstavby OCB ostění.

Předložená metoda dovoluje kompletní zahrnutí všech etap výstavby OCB ostění. Vyžaduje však znalost závislosti interakce mezi reakcí výztuže, její proměnlivou tuhostí a hodnotou zatížení z horninového prostředí. Pokud budeme znát hodnoty zatížení pro každou příslušnou etapu výstavby OCB ostění, pak budeme moci stanovit vývoj stavu napětí v OCB ostění od zahájení výstavby až do konečné stabilizace horninového prostředí.

Teorie spolupracujících prstenců a na ní založená analytická metoda stanovení deformačních parametrů průřezů ocelobetonových výztuží jsou alternativou k standardním postupům posuzování železobetonových průřezů nebo řešením odvozených z numerických metod, které v protikladu k navrženému analytickému přístupu usilují o postižení všech prvků komplexu v jejich skutečných parametrech

## PODĚKOVÁNÍ

Příspěvek byl realizován za finančního příspěví Grantové agentury ČR, projekt 103/09/1438 Výzkum pevnostních a přetvárných vlastností ostění ze stříkaného betonu vyztužených tuhými ocelovými prvky.

## LITERATURA

- [1] Bulytchev, N. C. *Mechanika podzemnych sooruzenij*. (1982) Moskva : NEDRA, 270
- [2] ALDORF, J., HRUBEŠOVÁ, E., VOJTASÍK, K., ĎURIŠ, L. *Alternativní výpočet tuhosti betonového ostění vyztuženého válcovými prvky*. Informace Českého svazu stavebních inženýrů. ročník XV. (2009), č. 1, 27-31. ISSN 1213-4112.
- [3] VOJTASÍK, K., HRUBEŠOVÁ, E., MOHYLA, M., STÁŇKOVÁ, J. *Determination of development of elastic modulus value for primary steel concrete reinforcement according to cooperative-ring-exchange theory*. Proc. 11th Int. Conf. Underground Construction Prague 2010, Prague: Czech Tunnelling Association ITA-AITES, 802-804. ISBN 978-80-254-7054-1.

## Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Dr. Ing. Jan PRUŠKA., FSv ČVUT v Praze, Thákurova, 7166 29, Praha 6.