

Jiří ŠVEC<sup>1</sup>, Pavel ŠVEC<sup>2</sup>

## OBJEMOVÉ ZMĚNY LÁTEK

### Abstrakt

Předložený článek se zabývá objemovými změnami látek. Jsou diskutovány objemové změny vyvolané vnějšími silami a teplotní délkovou nebo objemovou roztažností, na praktických příkladech je demonstrován vliv objemových změn na bezpečnost technologie.

### Abstract

The contribution deals with changes in volume of substance. Are discussed volume changes caused by external forces and thermal linear and volume expansion, on practice example is demonstrated influence of volume changes on safety technology.

**Klíčová slova:** objemová změna, teplota, tlak

**Key words :** volume changes, temperature, pressure

### Úvod

Objemové změny látek mohou být způsobeny tlakem, teplotou nebo fázovými změnami. Každá objemová změna látky významným způsobem ovlivňuje bezpečnost konstrukce, jejíž je součástí a tím bezpečnost práce a technologií. Článek se zabývá pouze látkami homogenními (tj. bez pórů a dutin). Porézní látky se při působení vnějších sil nebo při zahřívání mohou chovat poněkud odlišně.

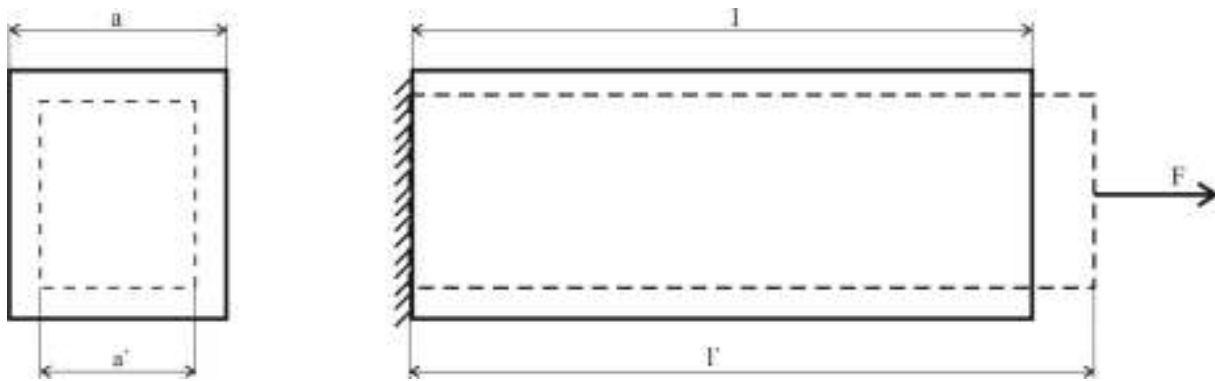
### Objemové změny látek způsobené tlakem (tahem)

Tyto objemové změny souvisí s deformacemi těles způsobenými tahem nebo tlakem. Připomeňme si základní vztahy z této problematiky. Přímá tyč o délce  $l$  z materiálu o modulu pružnosti  $E$  je namáhána deformující silou  $F$  ve směru osy tyče. Průřez tyče  $S$  je po celé délce tyče konstantní. Původní délka tyče  $l$  se prodlouží na  $l'$  a příčný rozměr  $a$  se zmenší na  $a'$  (obr.1.1).

---

<sup>1</sup> doc., RNDr., CSc., VŠB – TU Ostrava, Fakulta bezpečnostního inženýrství, Katedra bezpečnostního managementu, Lumírova 13, 700 30 Ostrava – Výškovice, e-mail: [jiří.svec@vsb.cz](mailto:jiří.svec@vsb.cz)

<sup>2</sup> Ing., VŠB – TU Ostrava, Fakulta metalurgie a materiálového inženýrství, Katedra automatizace a počítačové techniky v metalurgii, 17. listopadu 15, 708 33 Ostrava – Poruba, e-mail: [pavel.svec@vsb.cz](mailto:pavel.svec@vsb.cz)



**Obrázek 1.1.:** Deformace tyče způsobená tahem

Mírou namáhání tyče je (mechanické) napětí (1-1)

$$\sigma = \frac{F}{S} \text{ (Pa)}$$

a deformace je vyjádřena relativním prodloužením tyče (1-2)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l' - l}{l}$$

Podle Hookeova zákona je deformace tyče přímo úměrná napětí (1-3)

$$\varepsilon = k\sigma = \frac{1}{E}\sigma$$

kde  $k$  – konstanta úměrnosti  
 $E$  – modul pružnosti v tahu (Pa)

Změna příčného rozměru tyče je charakterizována příčným zkrácením (1-4)

$$\eta = \frac{\Delta a}{a} = \frac{a - a'}{a}$$

a dále platí (1-5)

$$\eta = \mu\varepsilon$$

kde  $\mu$  – Poissonovo číslo

Je-li těleso namáháno všesměrným tlakem, je relativní změna objemu tělesa úměrná působícímu tlaku (1-6)

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa\Delta p = -\frac{1}{K}\Delta p$$

kde  $\kappa$  – koeficient stlačitelnosti ( $\text{Pa}^{-1}$ ),  
 $K$  – modul objemové pružnosti (Pa).

Mezi modulem pružnosti v tlaku  $E$  a modulem objemové stlačitelnosti  $K$  platí vztah (1-7)

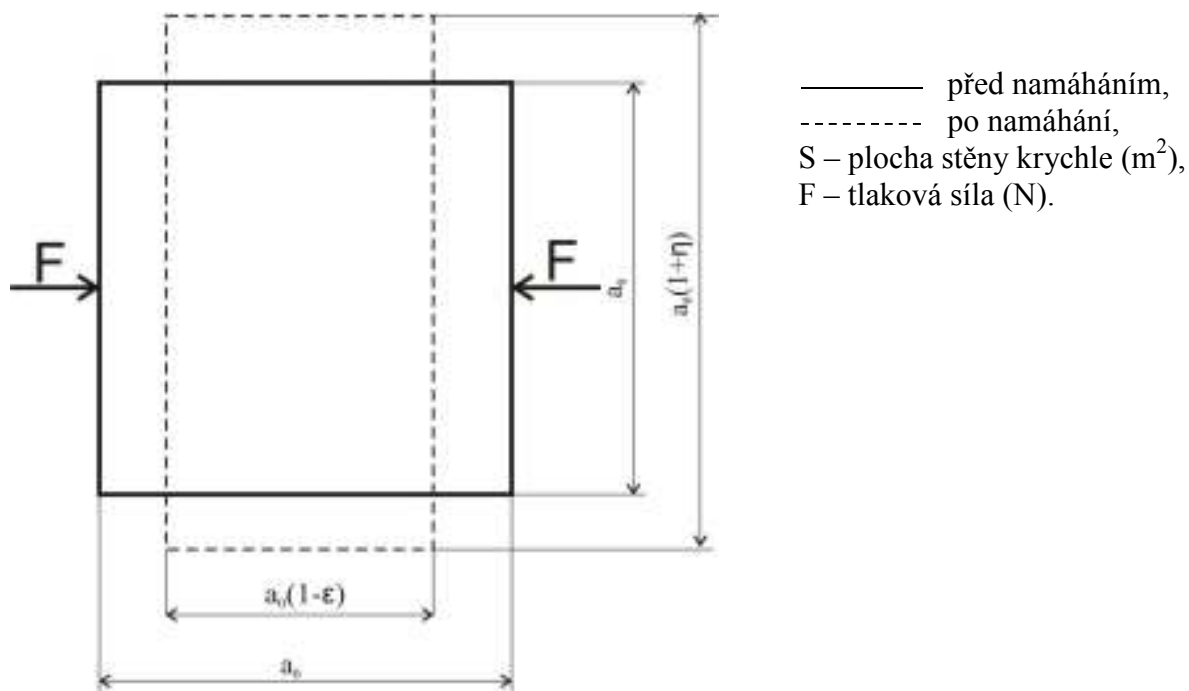
$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

Při namáhání ve smyku vyjadřuje odolnost látek proti této pružné deformaci modul pružnosti ve smyku  $G$ . Platí

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (1-8)$$

Posuďme nyní, jak výše uvedené jevy ovlivňují objem homogenní krychle při jednostranném a všestranném zatížení.

Namáháme-li krychli o délce hrany  $a_0$  jednostranným tlakem  $p$ , deformuje se dle obr.1.2.



**Obrázek 1.2.:** Změna objemu krychle při jednostranném namáhání tlakem

Tlakové síly působí pouze na dvě protilehlé stěny krychle o ploše  $S$  a vyvolají v krychli napětí  $\sigma = p$ , čemuž odpovídá relativní zkrácení  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ .

Hrany krychle rovnoběžné s působícími silami se zkrátí na délku

(1-9)

$$a_1 = a_0(1 - \varepsilon)$$

Současně vznikne poměrné příčné prodloužení  $\eta = \mu\varepsilon$  a hrany krychle kolmé k působícím silám se prodlouží na délku

(1-10)

$$a_2 = a_0(1 + \eta)$$

Původní objem krychle  $V_0 = a_0^3$  se tedy jednostranným tlakem zmenší na hodnotu

(1-11)

$$V = a_0^3(1 - \varepsilon)(1 + \eta)^2 \approx V_0(1 - \varepsilon + 2\eta)$$

Po relativní změnu objemu krychle pak vychází

(1-12)

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon(1 - \mu) = \frac{\sigma}{E}(1 - \mu)$$

V případě železné krychle ( $E = 19,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ,  $G = 7,35 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ) při působení napětí  $10^8 \text{ Pa}$  je relativní změna objemu krychle asi 0,034%.

Podobným způsobem lze určit změnu objemu tyče tvaru hranolu o rozměrech  $a_0, b_0 = c_0$ , která je namáhána tahovým napětím  $\sigma$  ve směru rozměru  $a_0$ .

Vychází

(1-13)

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu)$$

Pokud by se jednalo o železnou tyč ( $E = 19,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ,  $G = 7,35 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ ) o rozměrech  $a_0 = 1 \text{ m}$ ,  $b_0 = c_0 = 0,1 \text{ m}$  namáhanou tahovým napětím  $\sigma = 10^8 \text{ Pa}$ , vychází

původní objem  $V_0 = 10^{-2} \text{ m}^3$

změna objemu  $\Delta V = 1,65 \times 10^{-6} \text{ m}^3$

relativní změna objemu  $\frac{\Delta V}{V} = 0,016\%$

Při namáhání krychle všestranným tlakem nastane na každé hraně poměrné zkrácení  $-\varepsilon$  a zároveň dvojí příčné prodloužení  $2\eta = 2\varepsilon\mu$ .

Tím se všechny hrany krychle zmenší na hodnotu

(1-14)

$$a_1 = a_0(1 - \varepsilon + 2\eta)$$

Objem krychle se pak zmenší na hodnotu

(1-15)

$$V_1 = a_1^3 = a_0^3(1 - \varepsilon + 2\eta)^3$$

(1-16)

$$V_1 \approx V_0(1 - 3\varepsilon + 6\eta)$$

Pro relativní zmenšení objemu krychle pak vychází

(1-17)

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_0 - V}{V_0} = 3\varepsilon - 6\eta = \frac{3\sigma}{E}(1 - 2\mu)$$

Vypočítáme-li relativní změnu objemu výše uvedené železné krychle, pak při uvedeném napětí vychází 0,051 %.

Podobným způsobem lze (po dosazení příslušných materiálových konstant) vypočítat relativní změnu objemu krychle i z různých jiných materiálů při všestranném namáhání tlakem. Pro napětí  $10^8$  Pa vychází

měď .....	0,072 %
mosaz .....	0,084 %
hliník .....	0,126 %
olovo .....	0,228 %
sklo .....	0,234 %

Je zřejmé, že tyto změny jsou v běžných podmínkách relativně malé.

### Objemové změny látek vyvolané teplotou

Rozměry těles se mění se změnou teploty. Lze zkoumat teplotní roztažnost délkovou (v případě, že jeden rozměr tělesa výrazně převládá nad zbývajícími rozměry, např. drát, tyč apod.) nebo teplotní roztažnost objemovou.

Pro délkovou roztažnost platí

(2-1)

$$l_t = l_0[1 + \alpha(t - t_0)] = l_0(1 + \alpha\Delta t)$$

kde  $l_0$  - délka tyče při teplotě  $t_0$  (m)  
 $l$  - délka tyče při teplotě  $t$  (m)  
 $\alpha$  - součinitel teplotní délkové roztažnosti ( $K^{-1}$ )

Pro objemovou roztažnost platí

(2-2)

$$V_t = V_0[1 + \beta(t - t_0)] = V_0(1 + \beta\Delta t)$$

kde  $V_0$  - objem látky při teplotě  $t_0$  ( $m^3$ )  
 $V$  - objem látky při teplotě  $t$  ( $m^3$ )  
 $\beta$  - součinitel teplotní objemové roztažnosti ( $K^{-1}$ )

Pro součinitel teplotní objemové roztažnosti homogenních izotropních látek s dostatečnou přesností platí

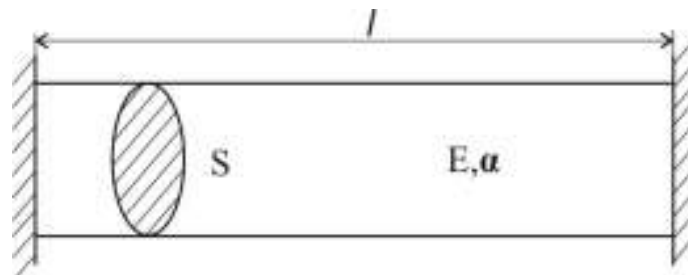
(2-3)

$$\beta = 3\alpha$$

Se zvyšující se teplotou zvětšují látky své rozměry a objem. Pokud je látka (resp. součástka z ní vyrobená) umístěna tak, že svůj objem zvětšit nemůže, působí tlakovou silou na omezující prostředí.

Vzhledem k tomu, že změny teploty jsou relativně časté může se uvedený jev promítat do všech oblastí bezpečnosti, a proto se jím budeme v další části příspěvku zabývat podrobněji.

Nejjednodušším případem je tyč  $(l_0, S, E, \alpha)$ , která se oběma konci dotýká pevných stěn a kterou zahřejeme o  $\Delta t$  (obr. 2.1)



**Obrázek 1.1.:** Tyč mezi dvěma pevnými stěnami

Pokud by tyč byla volná, zvětšila by se její délka dle vzorce (2-1) o

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t \quad (2-4)$$

relativní změna délky by byla

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \Delta t \quad (2-5)$$

Tyč se však roztáhnout nemůže, proto v ní vzniká dle vzorce (1-3) napětí

$$\sigma = \varepsilon E = \alpha E \Delta t \quad (2-6)$$

Toto napětí je číselně rovno tlaku, kterým tyč působí na stěny. Velikost tlakové síly pak závisí na průřezu tyče.

Stejná situace nastane i u pevně napjatého drátu při snížení jeho teploty. V drátu vznikne tahové napětí a drát působí na součástky, mezi nimiž je drát napnut tahovými silami.

Podobný problém může nastat při dopravě přehřáté páry pevně upevněným ocelovým potrubím. Pokud bude délka potrubí 50 m a při průchodu páry vzroste teplota z 15°C na 200°C vznikne dle (2-6) v potrubí mechanické napětí řádově  $0,5 \cdot 10^9$  Pa.

Výsledek ukazuje, že v přímém potrubí uloženém bez možnosti prodloužení by uvedeným zahřátím vzniklo hypotetické napětí řádově vyšší než dovolené namáhání materiálu potrubí. Ve skutečnosti by však došlo k vybočení (zakřivení) potrubí vzpěrem při nadměrném zatížení v tlaku.

Podobně se při změnách teploty chovají desky vrstvené z materiálů s různou teplotní roztažností, jsou-li vrstvy vzájemně pevně spojeny (sendvičové desky). Nežádoucímú prohnutí lze zabránit tak, že jednotlivým vrstvám umožníme vzájemný posun, u třívrstvé desky je nutno volit krajní vrstvy stejné tloušťky z materiálů o stejné teplotní roztažnosti. K podobné deformaci může dojít u tlusté homogenní desky, která je vystavena jednosměrnému ohřevu a materiál má špatnou tepelnou vodivost. Desku si můžeme představit jako složenou z pevně spojených tenkých vrstev, které mají postupně nižší teploty a mají snahu se postupně méně roztahovat. Protože jsou však pevně spojeny, nastane prohnutí desky.

Další problémy v oblasti bezpečnosti způsobit může objemová roztažnost kapalin zvýšením tlaku resp. přetečením zaplněné nádrže.

Pokud kapalina ( $\beta_K, K$ ) zcela zaplňuje nádrž o objemu  $V_0$  při  $0^\circ\text{C}$  z materiálu o koeficientu objemové roztažnosti  $\beta_M$  ( $\beta_M < \beta_K$ ), pak při zvýšení teploty z  $t_1$  na  $t_2$  by se objem kapaliny zvětšil o

$$V_2 - V_1 = V_0(1 + \beta_K t_2) - V_0(1 + \beta_K t_1) = V_0 \beta_K (t_2 - t_1) = \beta_K V_0 \Delta t \quad (2-7)$$

Z definice koeficientu stlačitelnosti

$$\kappa = - \frac{\Delta V}{\Delta p} \frac{1}{V_0} \quad (2-8)$$

pro změnu objemu vyplývá

$$|\Delta V| = \kappa V_1 \Delta p = \kappa V_0 (1 + \beta_K t_1) \Delta p \quad (2-9)$$

Srovnáním rovnic (2-7) a (2-9) vychází pro zvýšení tlaku v nádobě

$$\Delta p = \frac{\beta_K \Delta t}{\kappa (1 + \beta_K t_1)} = \frac{K \beta_K \Delta t}{1 + \beta_K t_1} \quad (2-10)$$

Ve většině případů lze výraz  $\beta_K t_1$  vůči jedničce zanedbat a vztah zjednodušit na

$$\Delta p = K \beta_K \Delta t \quad (2-11)$$

Je však nutné uvážit, že se zvýšenou teplotou se roztahuje nejen kapalina, ale také nádrž. Pro přesný výpočet je tedy nutné do všech vztahů za koeficient  $\beta_K$  dosadit rozdíl koeficientů objemové roztažnosti kapaliny a materiálu ( $\beta_k - \beta_M$ ), tedy

$$\Delta p = K (\beta_k - \beta_M) \Delta t \quad (2-12)$$

Vztah (2-12) umožňuje také posoudit, kolik kapaliny vyteče při zahřátí ze zcela zaplněné nádrže, která není uzavřena.

Počítáme-li i s roztažností nádrže, vychází pro změnu objemu kapaliny (po dosazení za  $K$ )

$$\Delta V = V \Delta t (\beta_k - \beta_M) \quad (2-13)$$

kde  $V$  - původní objem nádrže i kapaliny ( $\text{m}^3$ )

$\Delta t$  - teplotní rozdíl (K)

$\beta_K$  - koeficient objemové roztažnosti kapaliny ( $\text{K}^{-1}$ )

$\beta_M$  - koeficient objemové roztažnosti materiálu nádrže ( $\text{K}^{-1}$ )

Výše uvedené skutečnosti je samozřejmě nutné vzít v úvahu při plnění nádrží kapalinami, za předpokladu, že může dojít ke zvýšení teploty.

Jako příklad lze uvést zvýšení objemu ropy ve svislé ocelové kruhové nádrži ( $S = 15 \text{ m}^2$ ). Je-li původní objem ropy v nádrži  $140 \text{ m}^3$ , pak při zvýšení teploty o  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  pro zvýšení objemu ( $\Delta V$ ) a zvýšení hladiny ( $\Delta h$ ) vychází

- a) při zanedbání roztažnosti nádrže  
 $\Delta V = 2,52 \text{ m}^3$ ,  $\Delta h = 0,158 \text{ m}$
- b) při započítání roztažnosti nádrže  
 $\Delta V = 2,4 \text{ m}^3$ ,  $\Delta h = 0,151 \text{ m}$

Rozdíl mezi výsledky je asi 4,5 %.

### Objemové změny při fázových přechodech

Ke změně objemu látek dochází také při fázových přeměnách prvního druhu. Ty jsou charakterizovány:

- konstantní teplotou, při níž fázová přeměna probíhá,
- výměnou tepla (uvolňování nebo absorpce),
- skokovou nespojitou změnou objemu a entropie látky.

Jedná se o přeměny tání – tuhnutí, vypařování – kondenzace, sublimace – desublimace.

Změna objemu látek u výše uvedených přeměn je zakotvena i v Clausius - Clapeyronově rovnici, která udává závislost teploty fázové přeměny na tlaku.

(3-1)

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(v_2 - v_1)}{l}$$

kde  $\frac{dT}{dp}$  - změna teploty fázové přeměny v závislosti na vnějším tlaku ( $\text{KPa}^{-1}$ )

$T$  - teplota fázové přeměny (K)

$v_2$  - měrný objem „vyšší“ fáze ( $\text{m}^3\text{kg}^{-1}$ )

$v_1$  - měrný objem „nižší“ fáze ( $\text{m}^3\text{kg}^{-1}$ )

$l$  - měrné skupenské teplo ( $\text{Jkg}^{-1}$ )

Ke značnému zvýšení objemu látky dochází při vypařování, při tání a tuhnutí se objemy mění většinou jen nepatrně. Zpravidla bývá objem téhož množství látky v kapalném skupenství větší než ve skupenství pevném. Táním se zvětšuje objem olova o 3,4 %, rtuti o 3,7 %. Některé látky se však chovají anomálně. Nejdůležitější látkou z toho hlediska je zřejmě led, který táním zmenšuje objem o 9,1 %. Zmrazení vody v uzavřených systémech tedy může způsobit mnohé problémy.

### Závěr

Objemové změny látek mohou významným způsobem ovlivnit bezpečnost konstrukcí, jejichž jsou součástí a dále i bezpečnost práce i technologických procesů. Jsou způsobeny změnou tlaku, změnou teploty a dochází k nim i při fázových přechodech. Z provedených teoretických rozborů a praktických příkladů vychází, že nejzávažnější jsou z tohoto hlediska objemové změny látek vyvolané změnou teploty.



## Použitá literatura

- [1] Halliday, D. – Resnik, R. – Walker, J.: Fyzika. Část 2. Mechanika -Termodynamika. Nakladatelství VUTIUM a PROMETHEUS Praha. 2000. ISBN 80-214-1868-0 (VUTIUM), ISBN 81-7196-213-9 (PROMETHEUS)
- [2] Hájko, V. a kol.: Fyzika v příkladoch, Alfa, Bratislava, 1883
- [3] Pekárek, S. – Murla, M.: Fyzika I. – semináře, ČVUT Praha, 1992
- [4] Binko, J. – Kašpar, I.: Fyzika stavebního inženýra, SNTL / ALFA, Praha 1983
- [5] Vogel, H.: Probleme aus der Physik. Springer Verlag Berlin 1986.  
ISBN 3-540-6155-4
- [6] Lohmeyer, G.: Praktische Bauphysik, B.G. Teubner, Stuttgart, 1995.  
ISBN 3-519-25013-6
- [7] Lutz, P. a kol.: Lehrbuch der Bauphysik, B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.  
ISBN 3-519-25014-4

