

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra mechaniky

Návrh modelu pro demonstraci kmitání buzeného rotující hmotou

Design of a Model for Demonstration of Vibration Excited by a Rotating Mass

Student:
Vedoucí práce:

Roman Bojczuk
Ing. Alena Bilošová Ph.D.

Ostrava 2009

Prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucí bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě

podpis studenta

Prohlašuji, že

- byl jsem seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména §35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a §60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k prezenčnímu nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o bakalářské práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu §12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě :.....

ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

BOJCZUK, R. Návrh modelu pro demonstraci kmitání buzeného rotující hmotou: katedra mechaniky, Fakulta strojní VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2009, 33s. Bakalářská práce, vedoucí Bilošová, A.

Cílem bakalářské práce je navrhnout mechanický model pro demonstraci kmitání buzené rotující hmotou, tak aby splňoval požadované parametry. Práce je rozdělena do tří hlavních částí.

V první části je popsána teorie kmitání s jedním stupněm volnosti. Druhá část se zabývá konstrukčním návrhem modelu. V poslední části je uveden analytický a numerický výpočet první vlastní frekvence modelu. Zpracované hodnoty jsou srovnány s daty z měření stroboskopickou lampou.

Navržený model má sloužit jako pomůcka k předvedení rezonance při výuce předmětu Dynamika I.

ANNOTATION OF THESIS

BOJCZUK, R. Design of a Model for Demonstration of Vibration Excited by a Rotating Mass: Department of Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering VŠB – Technical University of Ostrava, 2009, 33 pages. Thesis, head: Bilošová, A.

The aim of thesis is to propose a mechanical model for the demonstration of oscillation which is excited by rotating mass, so as to meet the required parameters. The work is divided into three main parts.

The first part describes the theory of vibration with one degree of freedom. The second part of the thesis deals with the design model. In the last part is given an analytical and numerical calculation of the first own frequency of model. The processed values are compared with data from measurements by stroboscopic lamp.

The proposed model will be used as a demonstration tool for the demonstration of resonance in the teaching of the course dynamics I.

Poděkování vedoucímu bakalářské práce

Děkuji vedoucí bakalářské práce Ing. Aleně Bilošové Ph.D za její trpělivost, čas a ochotu poskytnout mi cenné rady a připomínky v celém průběhu vypracování mé bakalářské práce

Obsah bakalářské práce

SEZNAM POUŽITÉHO ZNAČENÍ	5
1 ÚVOD	7
2 TEORIE KMITÁNÍ.....	10
2.1 Volné, netlumené kmitání	10
2.2 Volný, tlumený kmitavý pohyb.....	13
2.3 Vynucený kmitavý pohyb.....	15
2.3.1 Budící síla měnící se v čase harmonicky.....	17
2.3.2 Buzení rotující hmotou.....	18
3 NÁVRH MODELU.....	19
3.1 Volba motorku	19
3.2 Návrh rotující hmoty	19
3.3 Popis modelu a jeho funkce.....	20
4 URČENÍ PRVNÍ VLASTNÍ FREKVENCE MODELU	22
4.1 Analytický výpočet první vlastní frekvence modelu	22
4.2 Určení první vlastní frekvence modelu metodou konečných prvků (MKP)	24
4.3 Měření první vlastní frekvence pomocí stroboskopické lampy	25
5 SROVNÁNÍ ANALYTICKÉHO A NUMERICKÉHO VÝPOČTU S MĚŘENÍM	27
6 ZÁVĚR	28
7 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	30
8 PŘÍLOHY	31

Seznam použitého značení:

A,B	... integrační konstanty	[-]
C	... amplituda kmitů	[m]
E _o	... modul pružnosti v tahu oceli	[Pa]
E _p	... potenciální energie soustavy	[J]
F	... direkční síla	[N]
J _x	... polární kvadratický moment průřezu nosníku	[m ⁴]
L	... délka nosníku	[m]
T	... doba kmitu tlumeného kmitání	[s]
T ₀	... doba kmitu netlumeného kmitání	[s]
a	... zrychlení	[m.s ⁻²]
b	... konstanta tlumení	[N.s.m ⁻¹]
b _r	... poměrný útlum	[-]
b _{kr}	... součinitel kritického tlumení	[-]
e	... vzdálenost nevyvážku od středu otáčení	[m]
f	... frekvence	[Hz]
h	... výška průřezu nosníku	[m]
k	... tuhost	[N/m]
m	... hmotnost	[kg]
m ₁	... hmotnost nevyvážku	[kg]
n	... otáčky motorku	[ot.min ⁻¹]
s ₀	... amplituda vynucených kmitů	[m]
s _{st}	... statické prodloužení pružiny	[m]
v	... rychlost	[m.s ⁻¹]
v ₀	... počáteční rychlost	[m.s ⁻¹]
w	... šířka průřezu nosníku	[m]
x	... výchylka	[m]
x ₀	... počáteční výchylka	[m]
δ	... konstanta doznívání	[s ⁻¹]
η	... činitel naladění	[-]
η _{res}	... rezonanční činitel nladění	[-]

φ	. . . fázový posuv vůči budící síle	[rad]
φ_0	. . . fázový úhel	[rad]
ω	. . . úhlová rychlost	[rad.s ⁻¹]
ω_{res}	. . . rezonanční kruhová frekvence budící síly	[rad.s ⁻¹]
Ω	. . . vlastní kruhová frekvence tlumeného kmitání	[rad.s ⁻¹]
Ω_0	. . . vlastní kruhová frekvence netlumeného kmitání	[rad.s ⁻¹]

1 Úvod

Již název bakalářské práce „Návrh modelu pro demonstraci kmitání buzeného rotující hmotou“ v sobě nese pojem, který zaujímá ve všech důležitých oborech fyziky a techniky význačné postavení - kmitání.

Mechanické kmitání se vyskytuje v celé řadě provozů strojů či technologických procesů. Pro většinu strojů jsou vibrace nežádoucí a vedou ke snížení životnosti strojních dílů nebo dokonce k jejich trvalému poškození, které mohou způsobit katastrofu. Mezi obvyklé zdroje vynuceného kmitání patří rotační stroje, kde příčinou vibrací je nevyvážená hmota rotujících součástí. Příkladem takovýchto zařízení jsou synchronní a asynchronní generátory a alternátory, soustrojí parních turbín, ventilátory větších výkonů apod. Všechna tato zařízení jsou většinou umístěna na železobetonových rámových konstrukcích, na masivních blocích či podložích a jsou často vystavena negativním vibracím od rotačních strojů a zařízení.

V současné době, kdy stoupá snaha vyrábět výkonnější a přesnější stroje, je znalost pojmů z oboru kmitání velmi důležitá, a to jak při konstrukci strojů, tak v jejich provozu. Modelováním a hodnocením těchto konstrukcí se snažíme odhadnout jejich chování a předcházet tak dynamickým účinkům od vibrací. Existují dva přístupy jak získat potřebná data o vlastnostech konstrukce – analytický a numerický. Každý z nich se vyznačuje určitými výhodami a nevýhodami.

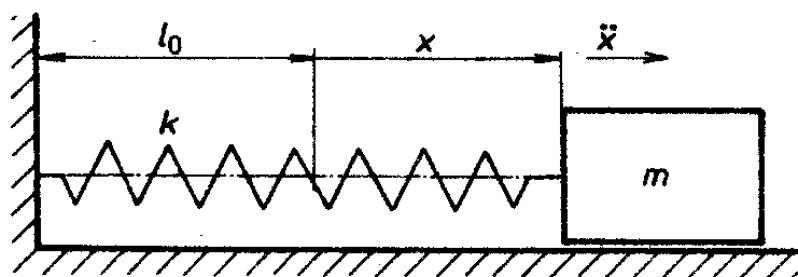
Předložená bakalářská práce se zabývá návrhem modelu a určením jeho první vlastní frekvence. Model bude využit pro demonstraci kmitání buzeného rotující hmotou a měl by pomoci studentům k lepšímu pochopení pojmů z oboru kmitání.

2 Teorie kmitání

2.1 Volný, netlumený kmitavý pohyb

Nejjednodušší mechanický model znázorňující volné netlumené kmitání s jedním stupněm volnosti je na obr.1.1. Jde o tuhé těleso hmotnosti m , které se pohybuje po vodorovné dokonale hladké podložce. Nepohyblivý rám a tuhé těleso spojuje nehmotná pružina o tuhosti k . V pružině vzniká direkční síla lineárně závislá na její deformaci a je dána vztahem

$$F = kx \quad (1.1)$$



Obr.1.1

Počátek souřadnic bude v místě stabilní rovnovážné polohy, to znamená v bodě nejmenší potenciální energie, kdy je pružina nedeformována. Potenciální energie soustavy je dána deformační energií pružiny

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \quad (1.2)$$

Je vidět, že pro jakoukoli hodnotu $x \neq 0$ bude hodnota $E_p > 0$

Direkční síla působí vždy proti smyslu deformace pružiny. Pohybová rovnice bude mít tvar

$$mx = -kx \quad (1.3)$$

nebo po úpravě

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 x = 0 \quad (1.4)$$

Kde Ω_0 je vlastní kruhová frekvence netlumené soustavy a je daná vztahem

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] \quad (1.5)$$

Vztah (1.4) je rovnice kmitavého pohybu, což je homogenní diferenciální rovnice druhého řádu. Předpokládané řešení této rovnice je ve tvaru

$$x = X \cdot e^{\lambda t}$$

Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + \Omega_0^2 = 0$$

Její kořeny jsou ryze imaginární

$$\lambda_{1,2} = \pm i\Omega_0$$

takže řešení $x(t)$ má tvar

$$x(t) = C_1 e^{i\Omega_0 t} + C_2 e^{-i\Omega_0 t} \quad (1.6)$$

využitím Eulerova vztahu

$$e^{\pm i\Omega_0 t} = \cos \Omega_0 t \pm i \sin \Omega_0 t$$

lze vztah (1.6) upravit na

$$x(t) = A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t \quad (1.7a)$$

nebo

$$x = C \sin (\Omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.7b)$$

V rovnicích (1.6) a (1.7) popisující harmonický pohyb, je C amplituda kmitů, φ_0 fázový úhel, vyjadřující posunutí na ose fáze v čase $t=0$.

Integrační konstanty A , B , C a φ_0 se určí ze známých počátečních podmínek výchylky x_0 a rychlosti v_0 na počátku pohybu v čase t_0 , nejčastěji v čase $t=0$

Rychlost pohybu získáme derivací rovnic (1.7a), resp. (1.7b) podle času.

$$v = \dot{x} = -A\Omega_0 \sin \Omega_0 t + B\Omega_0 \cos \Omega_0 t$$

$$v = \dot{x} = C\Omega_0 \cos (\Omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.8)$$

Opětovnou derivací podle času rov. (1.8) získáme zrychlení

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = -A\Omega_0^2 \cos \Omega_0 t - B\Omega_0^2 \sin \Omega_0 t = -\Omega_0^2 x$$

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = -C\Omega_0^2 \sin (\Omega_0 t + \varphi_0) = -\Omega_0^2 x \quad (1.9)$$

Pro počáteční podmínky $t=0$, $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$ obdržíme z rovnic (1.8) a (1.9) integrační konstanty

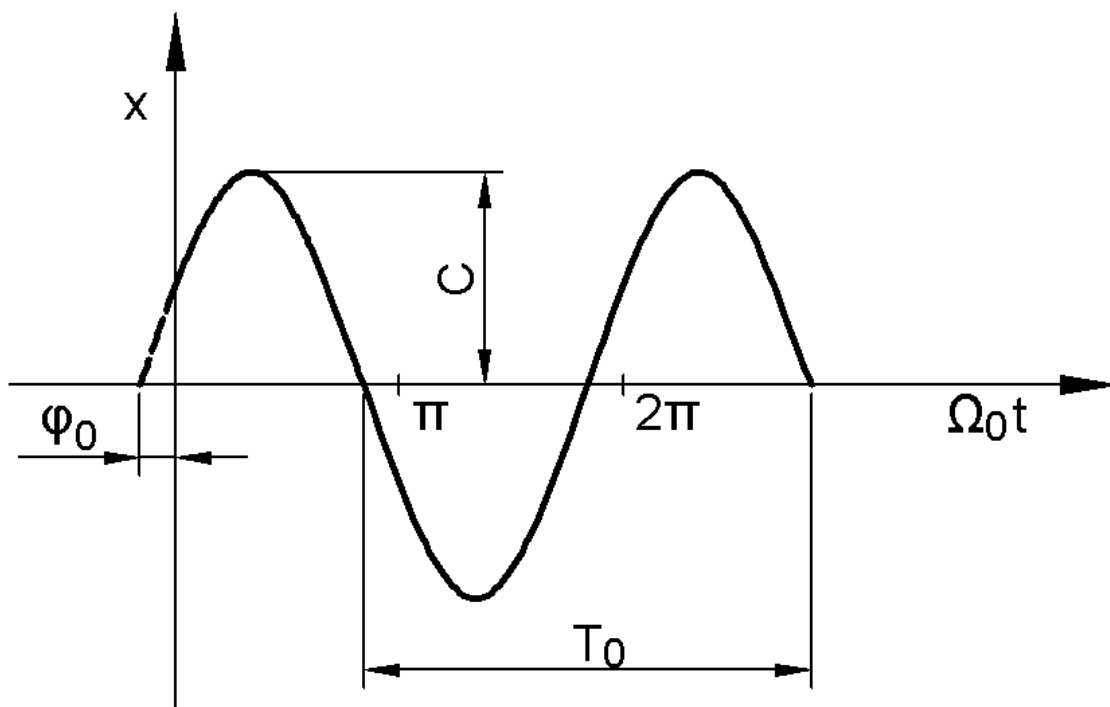
$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{\Omega_0}, \quad C = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega_0^2}}, \quad \varphi_0 = \arctan \frac{\Omega_0 x_0}{v_0}.$$

Jestliže rozvineme harmonický pohyb popsaný rovnicí (1.7) v čase (obr.1.2) , kdy na vodorovnou osu vynášíme v měřítku hodnotu $\Omega_0 t$ a na svislou osu výchylku x , vznikne sinusový průběh pohybu. Časový interval T_0 po kterém se průběh výchylky opakuje, se nazývá perioda neboli doba kmitu

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} \quad [s] \quad (1.10)$$

U kmitavého pohybu se často pracuje s převrácenou hodnotou periody – kmitočtem neboli frekvencí

$$f = \frac{1}{T_0} = \frac{\Omega_0}{2\pi} \quad [Hz] \quad (1.11)$$



Obr.2.2

Z řešení plyne, že netlumený kmitavý pohyb se periodicky opakuje nekonečně dlouho s konstantní amplitudou. To proto, že zanedbáváme brzdící síly, jejichž původ je v třecích silách mezi reálnými tělesy. Z praxe víme, že amplituda kmitavého pohybu v důsledku tlumení se zmenšuje do doby, než pohyb zanikne. Tento pohyb bude popsán v následující kapitole.

2.2 Volný, tlumený kmitavý pohyb

Velmi často se vyskytuje tzv. viskózní tření, kdy toto tření modelujeme hydraulickým tlumičem, paralelně připojeným k pružině (obr.1.3), jehož odpor je úměrný rychlosti.

Pohybová rovnice tohoto modelu bude mít tvar

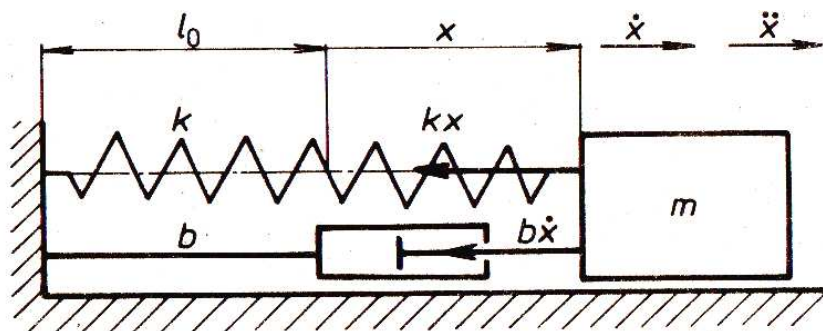
$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx$$

po úpravě

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0 \quad (1.12)$$

Kde δ je konstanta doznívání

$$\delta = \frac{b}{2m} \quad [s^{-1}] \quad (1.13)$$



Obr.2.3

Charakteristická rovnice nabude tvaru

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \Omega_0^2 = 0 \quad (1.14)$$

z této rovnice pak plynou kořeny

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \Omega_0^2} \quad (1.15)$$

Kořeny dané rovnice závisí na hodnotách δ a Ω_0 a mohou být reálné různé, reálné stejné nebo komplexně sdružené. Charakter pohybu, který vznikne, závisí na tvaru těchto kořenů.

Pro další řešení se zavádí veličina poměrný útlum definovaná jako

$$b_r = \frac{\delta}{\Omega_0} \quad \text{nebo} \quad b_r = \frac{b}{b_{kr}}$$

kde $b_{kr} = 2m\Omega_0$ a nazývá se součinitel kritického tlumení.

Podle velikosti poměrného útlumu rozlišujeme tři případy tlumení:

- kritické $b_r=1$
- podkritické $b_r<1$
- nadkritické $b_r>1$

Pro podkritické tlumení, kdy $\delta < \Omega_0$ jsou kořeny rovnice (1.14) komplexně sdružené a řešení je ve tvaru

$$x = e^{-\delta t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) \quad (1.16a)$$

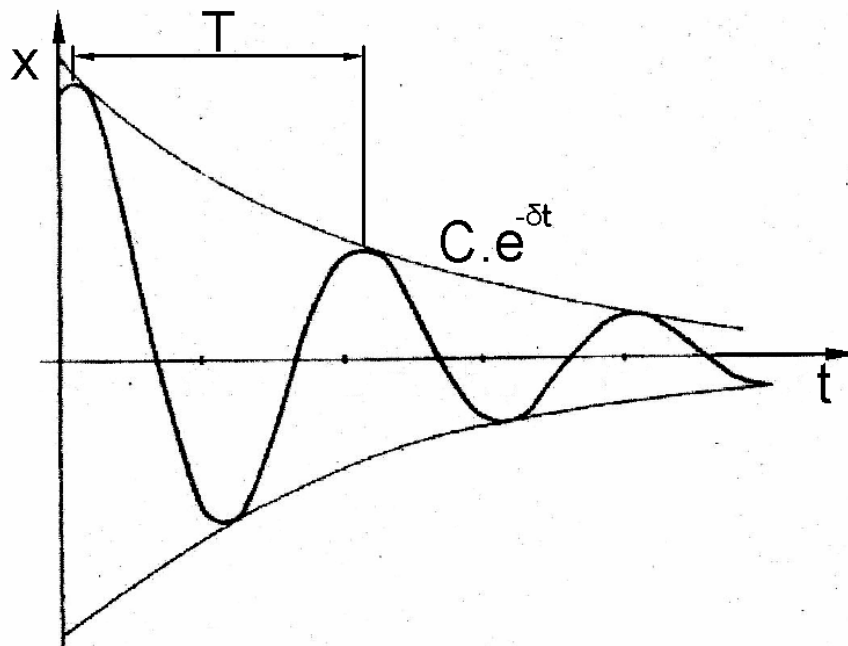
$$x = e^{-\delta t} C \sin(\Omega t + \varphi_0) \quad (1.16b)$$

kde Ω je vlastní kruhová frekvence tlumeného kmitání. Je menší než u netlumeného kmitání a určí se vztahem

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} \quad [s^{-1}] \quad (1.17)$$

Ze vztahu (1.16) a z obr.4) je patrné, že pohyb je periodický s amplitudou, která klesá exponenciálně s časem. Perioda tlumeného kmitání je větší než perioda u netlumeného kmitání.

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}} > T_0 \quad (1.18)$$



Obr.2.4

Rychlost bodu popisující tlumený kmitavý pohyb získáme derivací rovnice (1.16b) podle času, dostaneme

$$v = \dot{x} = e^{-\delta t} [C\Omega \cos(\Omega t + \varphi_0) - C\delta \sin(\Omega t + \varphi_0)] \quad (1.19a)$$

Zavedeme konstanty

$$C\Omega = C_V \sin \varphi_V, \quad C\delta = C_V \cos \varphi_V$$

pro něž platí

$$C_V = \sqrt{C^2 \Omega^2 + C^2 \delta^2} = C\Omega_0, \quad \varphi_V = \arctan \frac{\Omega}{\delta} \quad \text{pro } 0 \leq \varphi_V \leq \frac{\pi}{2}$$

Rovnice pro rychlost lze upravit na tvar

$$v = C_V e^{-\delta t} \sin(\Omega t + \varphi_0 - \varphi_V) \quad (1.19b)$$

Obdobným způsobem bychom odvodili zrychlení

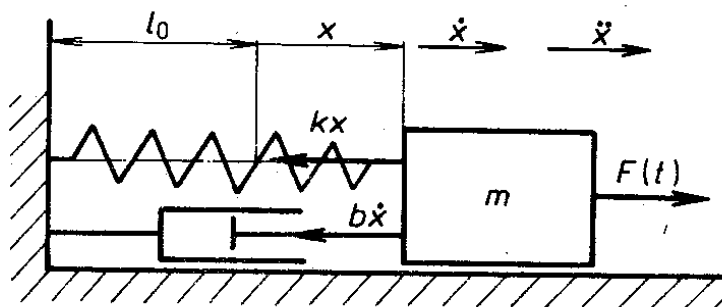
$$a = C_a e^{-\delta t} \sin(\Omega t + \varphi_0 - \varphi_a) \quad (1.20)$$

kde

$$C_a = C\Omega_0^2, \quad \varphi_a = 2\varphi_V$$

2.3 Vynucený kmitavý pohyb

V předchozích případech kmitavého pohybu jsme uvažovali pouze síly v pružinách a síly tlumící. Kmitavý pohyb byl závislý jen na hmotnosti tělesa, tuhosti pružiny, součiniteli tlumení a na počátečních podmínkách. V technické praxi se však zpravidla setkáváme s případy, kdy na mechanickou soustavu působí ještě síla, která je známou funkcí času. Takové síly se u kmitavých pohybů nazývají síly budící.



Obr.2.5

2.3.1 Budící síla měnící se v čase harmonicky

Pohybová rovnice pro tuto mechanickou soustavu bude mít tvar

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t), \quad (1.21)$$

kde $F(t)$ je budící síla.

Použitím už známých substitucí (1.5) a (1.13), lze pohybovou rovnici přepsat do tvaru

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (1.22)$$

Pohybová rovnice je nehomogenní rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty. Obecné řešení takové rovnice se skládá z řešení homogenní rovnice (bez pravé strany) a z partikulárního řešení:

$$x = x_h + x_p \quad (1.23)$$

Homogenní řešení získáme, položíme-li levou stranu rovnice (1.21) rovnu nule, tím získáme rovnici stejnou jako u volného tlumeného kmitání, jejíž řešení je dáno vztahem

$$x_h = e^{-\delta t} C \sin(\Omega t + \varphi_0) \quad (1.24)$$

Partikulární řešení bude mít frekvenci budící síly. Harmonická budící síla je dána vztahem

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t + \varphi_F) \quad (1.25)$$

Amplituda vynucených kmitů má tvar

$$s_0 = \frac{F_0}{k \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}\right)^2 + \left(2b_r \frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2}} \quad (1.26)$$

s použitím vztahů

$$s_{st} = \frac{F_0}{k}, \quad \eta = \frac{\omega}{\Omega_0}$$

kde s_{st} vyjadřuje statické prodloužení pružiny, η činitel naladění přejde rovnice na tvar

$$\frac{s_0}{s_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2b_r \eta)^2}} \quad (1.27)$$

U netlumeného pohybu ($b_r=0$) přejde rovnice (1.26) na tvar

$$\frac{s_0}{s_{st}} = \frac{1}{1 - \eta^2} \quad (1.28)$$

Je-li $\eta = 1$ ($\Omega_0 = \omega$) roste amplituda vynucených kmitů nade všechny meze $s_0 = \pm\infty$, $\varphi = \pi/2$,

vzniká rezonance. Při tlumeném pohybu neroste nikdy hodnota s_0 do nekonečna. Její extrémní hodnoty jsou konečné. Součinitel naladění pro maximum amplitudové charakteristiky dostaneme z podmínky

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{s_0}{s_{st}} \right) = 0 \quad (1.29)$$

Z uvedené podmínky obdržíme

$$\eta_m = \sqrt{1 - 2b_r^2} \quad (1.30)$$

Celkové řešení vynuceného kmitavého pohybu (obr.1.6) vznikne sečtením homogenního a partikulárního řešení, tedy

$$x = C e^{-\delta t} \sin(\Omega t + \varphi_0) + s_0 \sin(\omega t + \varphi_F + \varphi) \quad (1.31)$$

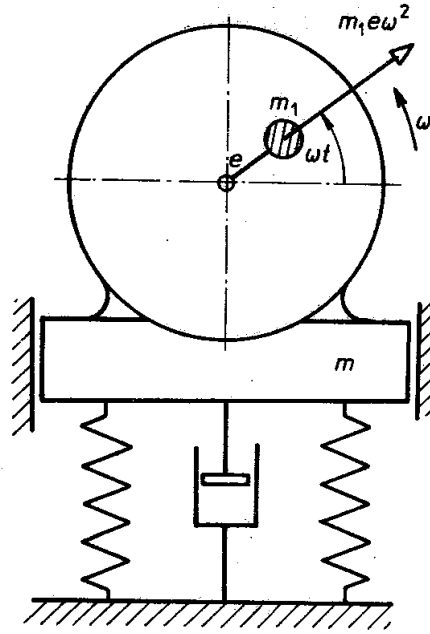


obr.2.6

2.3.2 Buzení rotující hmotou

Velmi často jsou vibrace způsobeny nevyváženou rotující hmotou. Takový případ nastává např. při rotaci staticky nevyváženého rotoru. Nevývažek o hmotnosti m_l je ve vzdálenosti e od osy otáčení (obr.1.7). Celé zařízení o hmotnosti m je odpruženo ve svislém směru soustavou pružin s výslednou konstantou k a tlumeno lineárním tlumením s konstantou tlumení b . Svislá složka odstředivé síly

$$F = m_l e \omega^2 \sin \omega t \quad (1.32)$$



Obr.2.7

Pohybová rovnice bude mít tvar

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega_0^2 x = \frac{m_1}{m} e \omega^2 \sin \omega t \quad (1.33)$$

položíme-li

$$F_0 = m_1 e \omega^2, \quad (1.34)$$

bude řešení shodné s řešením kmitavého pohybu buzeného harmonickou silou. Amplituda ustálených vynucených kmitů je

$$s_0 = \frac{m_1 e \eta^2}{m \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2b_r \eta)^2}} \quad (1.35)$$

Z toho pak součinitel frekvenčního přenosu

$$\frac{s_0}{\frac{m_1 e}{m}} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2b_r \eta)^2}} \quad (1.36)$$

Jestliže se frekvence budící síly blíží vlastní frekvenci soustavy, zvětšuje se amplituda kmitů. Růst amplitudy kmitů je tím větší, čím menší je tlumení soustavy. U netlumené soustavy platí, že rezonance nastává při rovnosti frekvence budící síly s vlastní frekvencí soustavy a roste nade všechny meze. U tlumené soustavy je nutno počítat s tlumením resp. s poměrným útlumem b_r , který u navrženého modelu nabývá hodnot menších než 1. Po

dosazení konstanty do vztahu (1.38) zjistíme, že rezonanční činitel naladění $\eta_{res} > 1$ a posouvá se v grafu závislosti součinitele frekvenčního přenosu na činiteli naladění doprava (obr.1.8).

Amplituda roste z nuly, kdy jsou otáčky rotující hmoty nulové tudíž i odstředivá síla je nulová. Se zvětšujícími se otáčkami resp. se zvětšující odstředivou silou F_0 roste výchylka až do svého maxima.

Rezonanční činitel naladění získáme derivací frekvenčního přenosu podle činitele naladění tedy

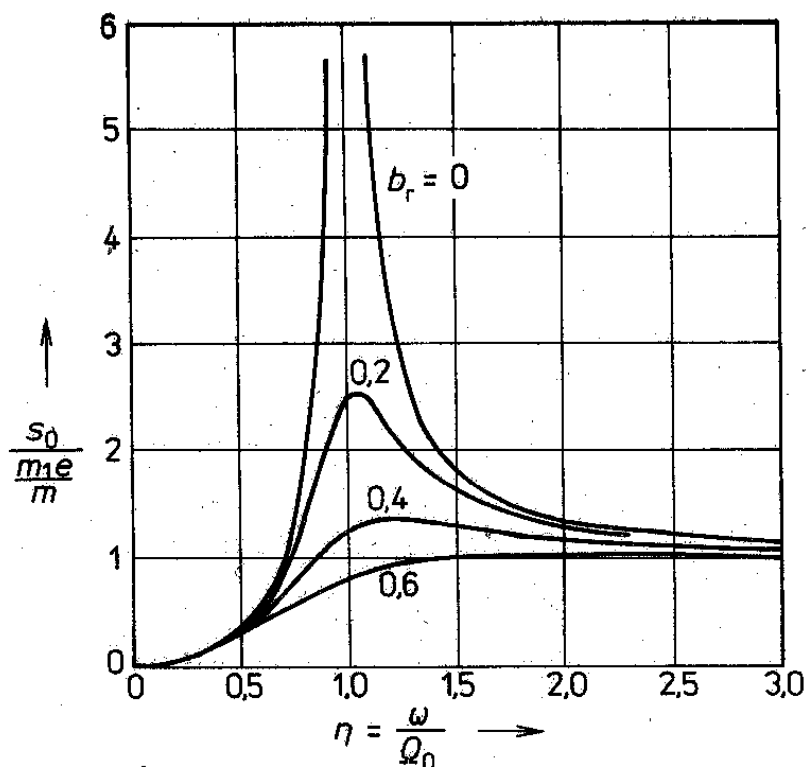
$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2b_r\eta)^2}} \right) = 0 \quad (1.37)$$

Po úpravě obdržíme

$$\eta_{res} = \frac{1}{\sqrt{1-2b_r^2}} \quad (1.38)$$

Hodnotu rezonanční kruhové frekvence budící síly určíme vztahem

$$\omega_{res} = \eta_{res} \cdot \Omega_0 \quad (1.39)$$



Obr. 2.8 Amplitudová charakteristika

3 Návrh modelu

Navržený model pro kmitání buzené rotující hmotou by měl být nosník jednostranně vetknutý nebo na dvou podporách. Vyhledaný vhodný modelářský motorek by měl pracovat v určité regulovatelné oblasti otáček, tak aby byl schopen vybudit první vlastní frekvenci modelu. Konstrukční návrh rotující hmoty (nevývažku) by měl být poháněn motorkem, tak aby byla měnitelná amplituda budící síly pomocí změny polohy nebo velikosti nevývažku. Okamžitou polohu nevývažku spolu s okamžitým průhybem nosníku by mělo být možné pozorovat pomocí stroboskopické lampy. Navržený model by neměl přesáhnout celkovou hmotnost 10 kg, aby jej bylo možno snadno přenášet a použít při výuce.

3.1 Volba motorku

Vycházelo se z předpokladu, že motorek bude připevněn přímo na nosníku. Rozměry a hmotnost motorku nesměly být příliš vysoké, aby konstrukční návrh nesměřoval k řešení umístění motorku mimo nosník. To by vyžadovalo mechanický převod, který by byl složitější jak pro samotné sestavení modelu, tak i pro ověření jeho funkčnosti.

Zvolený motorek je stejnosměrný motor JOHNSON s parametry 12V/230mA a běžně slouží jako pohon modelářských sestav, jako jsou např. elektrické vláčky.

Aby byl zvolený motorek regulovatelný, je napájen stejnosměrným napětím o velikosti 12V z regulovatelného zdroje DIAMETRAL R124R50E. Celková hmotnost regulovatelného zdroje činí cca 2,9 kg a tvoří tak převážnou část hmotnosti navrženého modelu.

3.2 Návrh rotující hmoty

Na hřídel motorku je nasunutý kovový disk. Na osazení kovového disku jsou dva protilehlé otvory s vyřezaným závitem pro šroub M3. Po utahení obou šroubů dojde k sevření hřídele motorku a zároveň k uchycení celého disku. Disk má vnější poloměr $R=25\text{ mm}$, s vyvrtanými 8 otvory na poloměru $e = 19\text{ mm}$. Tyto otvory mají průměr 4 mm a slouží k připevnění nevývažku. V jednom z osmi otvorů na disku je připevněn nevývažek pomocí

matice a šroubku o celkové hmotnosti $m_1=2,7\text{ g}$. Našroubováním dalších matic na šroub lze zvyšovat hmotnost rotující hmoty, čímž docílíme měnitelnost amplitudy budící síly.

Výkresová dokumentace disku je vypracována v příloze A.



Obr.3.9 Fotografie modelu

3.3 Popis modelu a jeho funkce

Nosník je tvořen ocelovým plátkem o délce 420 mm, jehož průřez má rozměry 3,1 x 24,5 mm. Na převislém konci nosníku je objímkou připevněn stejnosměrný motorek. Vetknutí na opačném konci nosníku je docíleno pevným uchycením konce nosníku k rámu, např. k hraně stolu pomocí šroubového držáku. Délku převislé části nosníku tak lze jednoduše měnit, pro přehlednost jsou po jeho délce fixem označeny délky o hodnotách 350, 300, 250 a 200 mm

Ze svorkovnice motorku vedou barevně odlišené vodiče (černý a červený), které jsou svým druhým koncem zapojené v příslušných zdírkách na regulovatelném zdroji. Sepnutím

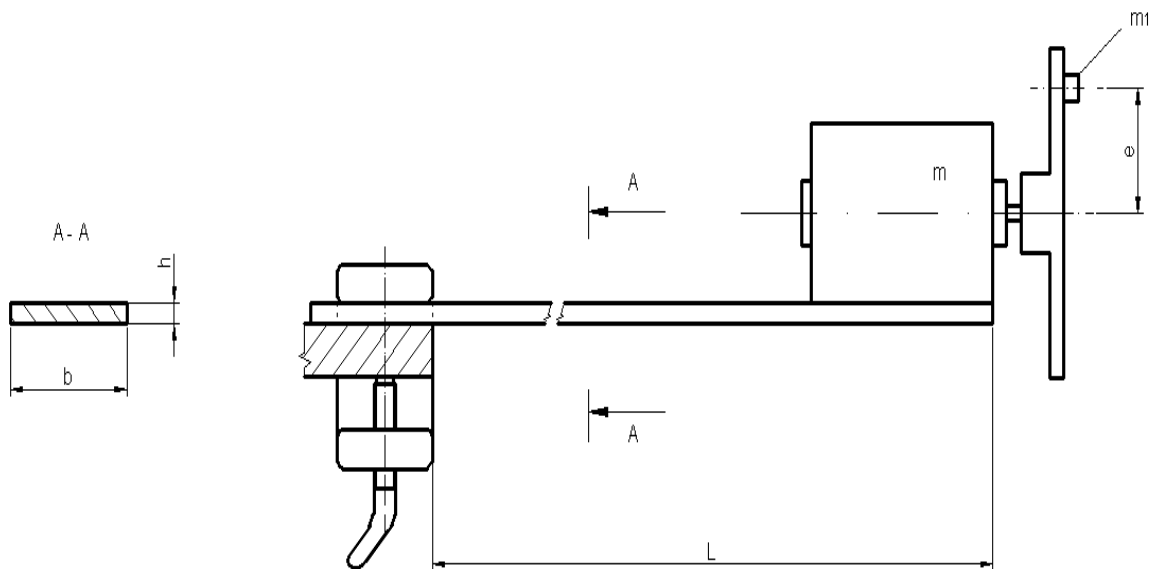
vypínače se na displeji zdroje objeví, v závislosti na poloze tlačítka, buď nastavované napětí nebo odebíraný proud. K regulaci otáček stejnosměrného motoru je potřeba mít tlačítko sepnuté pro nastavování odebíraného proudu. Požadovaný proud se nastavuje potenciometrem v rozsahu $0 \div 2$ A. Pozvolným otáčením potenciometru se zvyšuje odebíraný proud a zároveň se zvyšují otáčky motorku. Vyrůstá budící síla podle (rov.1.34), která vyvolává rozkmit nosníku. Dalším zvyšováním otáček se rozkmit nosníku zvětšuje až do svého maxima, nastává rezonance. Opětovným zvyšováním přiváděného proudu na svorky motoru, začne amplituda kmitů klesat podle grafu (1.8), rotor se bude otáčet tzv. nadkritickými otáčkami.

4 Určení první vlastní frekvence modelu

4.1 Analytický výpočet první vlastní frekvence modelu

Výpočet první vlastní frekvence soustavy bude názorně odvozen pouze pro délku $L_1=0,35\text{ m}$. První vlastní frekvence pro jednotlivé délky nosníku $L_2=0,3\text{ m}$, $L_3=0,25\text{ m}$ a $L_4=0,2\text{ m}$ budou uvedeny v tab.1

Ve výkladu teorie je za pružný člen považována vinutá spirálová pružina, která je jedním koncem pevně uchycena k nepohyblivému rámu a tvoří tak pružnou vazbu. Taková vazba tvořená pružinou ovšem nemusí být podmínkou kmitání. Pružným členem soustavy může být jakékoliv deformovatelné těleso. Deformovatelným tělesem navrženého modelu je nosník na jedné straně vetknutý a na převislém konci zatížený tíhou motorku o hmotnosti $m = 90\text{ g}$. Nosník o rozměrech $L_1 = 0,35\text{ m}$, $b = 0,0245\text{ m}$ a $h = 0,0031\text{ m}$, z oceli o modulu pružnosti v tahu $E = 2,1 \cdot 10^{11}\text{ Pa}$ se pod tíhou břemena prohne o velikost y . Tento průhyb je přímo úměrný síle F , můžeme tedy psát $F = ky$, což je analogie rov.(1.1).



Obr.4.10 Schéma modelu

Pro stanovení tuhosti k je nutno využít vztah pro průhyb vetknutého nosníku na konci zatíženého silou, který lze dohledat ve strojnických tabulkách, tedy

$$y = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J}, \quad (3.1)$$

kde J je polární kvadratický moment průřezu nosníku.

$$J = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0,0245 \cdot 0,0031^3}{12} = 6,082 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4 \quad (3.2)$$

Poměr síly k průhybu nám pak dává výraz pro tuhost

$$k = \frac{3 \cdot E \cdot J}{L^3} = \frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 6,082 \cdot 10^{-11}}{0,35^3} = 893,7 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (3.3)$$

Vlastní kruhová frekvence soustavy bude mít hodnotu

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{893,7}{0,09}} = 99,6 \text{ s}^{-1}. \quad (3.4)$$

Frekvence je

$$f = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{99,6}{2 \cdot \pi} = 15,8 \text{ Hz} \quad (3.5)$$

Kritické otáčky rotoru při rezonanci pak budou

$$n_{res} = 60 \cdot f = 951 \text{ min}^{-1} \quad (3.6)$$

TAB I. První vlastní frekvence nosníku při různých délkách určené analyticky

L [mm]	k [N/mm]	Ω_0 [rad.s ⁻¹]	f [Hz]
200	4,79	230,7	36,7
250	2,45	165,1	26,3
300	1,42	125,6	20
350	0,89	99,7	15,8

4.2 Určení první vlastní frekvence modelu metodou konečných prvků (MKP)

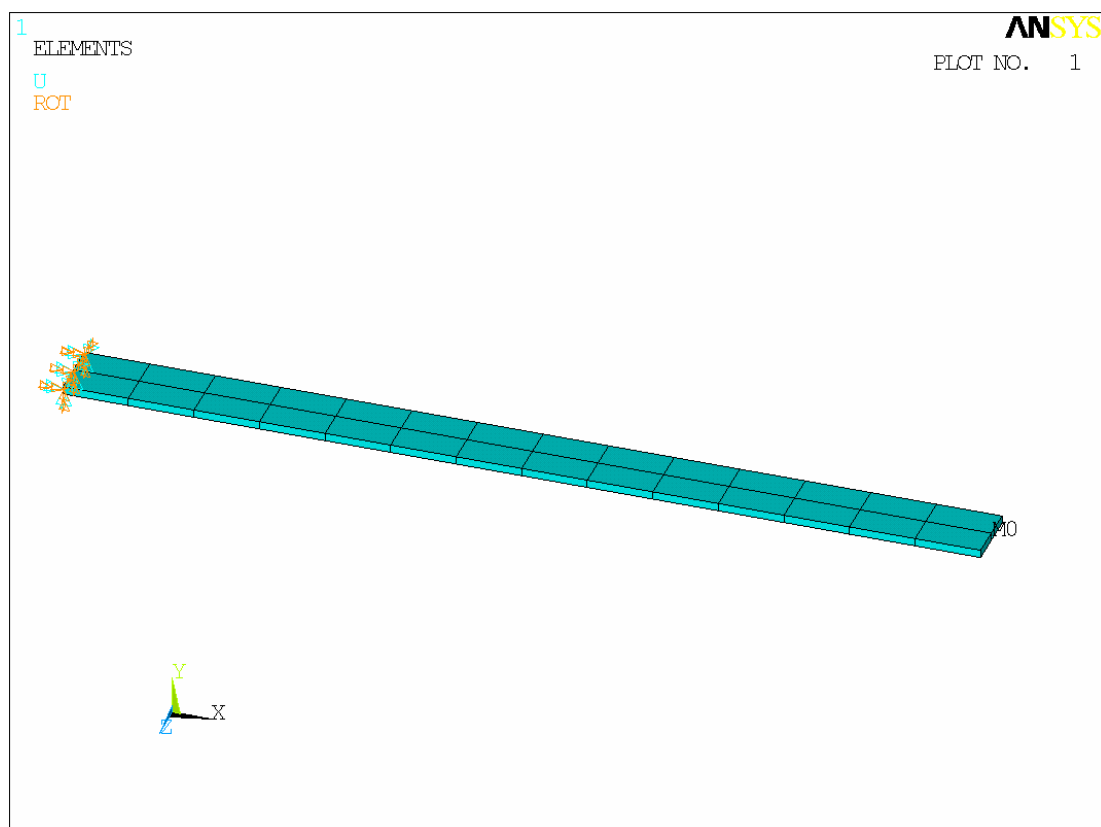
MKP je numerická metoda používaná pro analýzu struktur a těles. Tato metoda spočívá v diskretizaci spojitého kontinua do určitého (konečného) počtu prvků. Hledané parametry jsou určovány v jednotlivých uzlech konečnoprvkového modelu.

Geometrický model:

Vzhledem k tloušťce nosníku je pro modelování v softwaru ANSYS použit skořepinový prvek SHELL63 se 6° stupni volnosti v každém uzlu.

Zatížení:

Zatížení od motorku je v konečnoprvkovém modelu umístěno na konec nosníku jako hmotný bod o hmotnosti $m = 90g$ pomocí prvku MASS21. Na (obr.4.10) je přidaná hmota zobrazena označením $M0$.



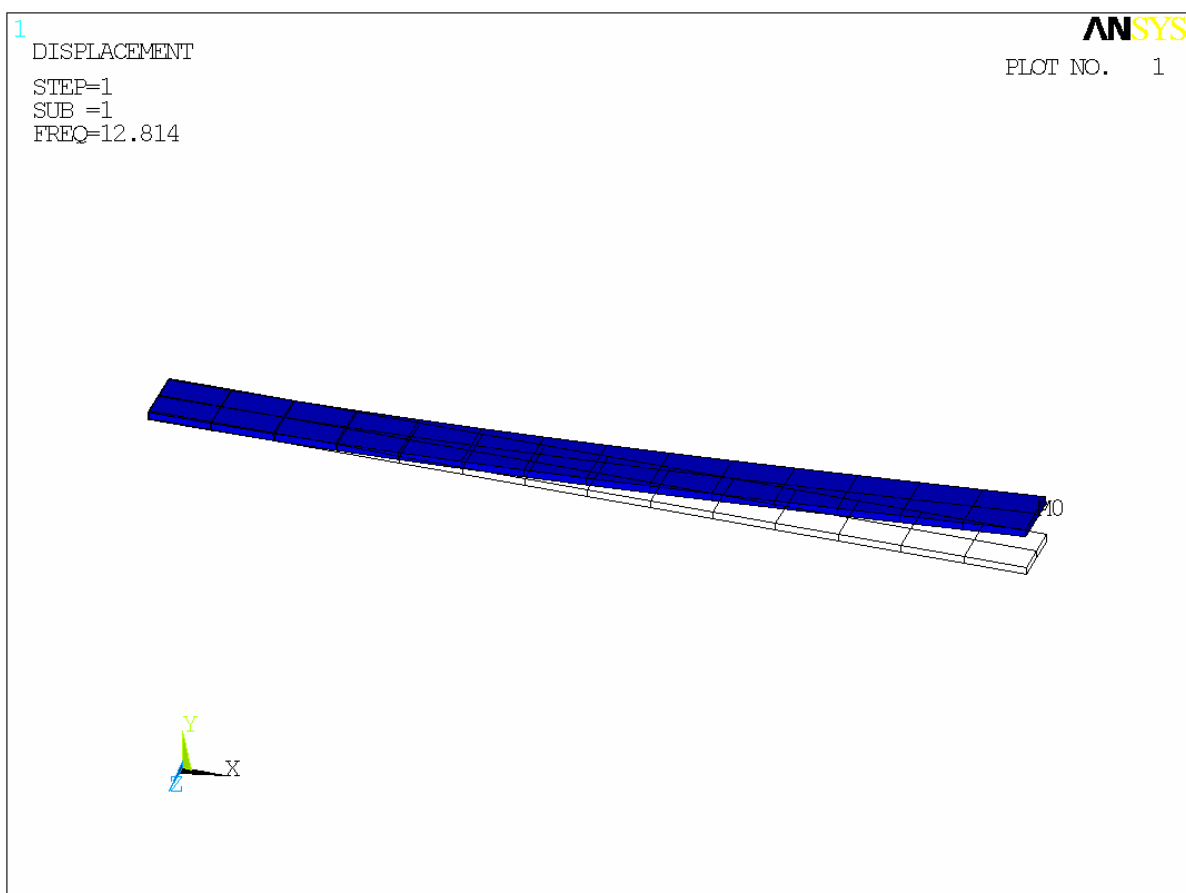
Obr.4.11 Výpočtový model nosníku tvořen skořepinovými prvky s aplikovanými vazbami a zatížením

Okrajové podmínky:

Nosník je pevně uchycen šroubovým držákem k rámu, který zabraňuje posuvu i rotaci v uchycení nosníku ve všech směrech a nahrazuje tak dokonalé vetknutí.

Výpočet:

Pro zjištění první vlastní frekvence jednostranně vetknutého nosníku byla provedena modální analýza metodou Block-Lanczos. První vlastní tvar nosníku je na (obr. 4.11.). Získaná frekvence je při zanedbání tlumení rovna otáčkám motorku, při kterých je vybudena rezonance nosníku. Hodnoty vlastních frekvencí jsou uvedeny v TAB.II



Obr.4.12 První svislý ohybový tvar

TABULKA II. První vlastní frekvence nosníku při různých délkách určené numericky

L	Ω_0	f
[mm]	[s ⁻¹]	[Hz]
200	203,2	32,3
250	141,1	22,5
300	104,8	16,9
350	80,5	12,8

4.3 Měření první vlastní frekvence pomocí stroboskopické lampy

Stroboskop je zařízení, které vysílá světelné signály o určité frekvenci. Jestliže se frekvence světelných signálů vhodně přizpůsobí otáčkám pozorovaného rotačního či periodického pohybu, může se nám tento sledovaný objekt jevit jako zpomalený či nepohyblivý. Stroboskopy se užívají například k zjištění počtu otáček rotačních strojů nebo slouží při vyšetřování stavů strojních součástí aniž by došlo k přerušení provozu.

K tomuto měření první vlastní frekvence modelu je použita stroboskopická lampa DB PLUS 2421655.

V první řadě je nastavena délka převislé části nosníku, který je pomocí šroubového držáku uchycen k např. desce stolu. Po zkontrolování zapojení zdroje do sítě a barevně odlišených vodičů do příslušných zdírek, můžeme zapnout zdroj a sepnout tlačítko pro nastavení odebírání proudu. Otáčením potenciometru zvyšujeme odebíraný proud a s tím i velikost rozkmitu nosníku. Pokusíme se nastavit proud do takové výše aby nosník kmital s co největším rozkmitem.

Zapnutím stroboskopické lampy, začne přístroj vyzařovat světelné záblesky o určité frekvenci. Nasměrováním na otáčející se disk s nevyvážkem pozorujeme pohyb rotující hmoty. Změnou frekvence záblesku je snahou docílit, aby rotující nevyvážek se jevil nepohyblivý. Jestliže je frekvence stroboskopické lampy vhodně přizpůsobena rychlosti otáčejícího se disku, můžeme pozorovat úplné ustálení pohybu nevyvážku. Tato nastavená frekvence na stroboskopu je hledaná rezonanční frekvence modelu.

Hodnoty prvních vlastních frekvencí naměřených pomocí stroboskopické lampy jsou uvedeny v TAB.III.

TAB.III . První vlastní frekvence nosníku při různých délkách získané měřením

L	Ω_0	f
[mm]	[rad.s ⁻¹]	[Hz]
200	163,4	26
250	117,5	18,7
300	91,7	14,6
350	71	11,3

5 Srovnání analytického a numerického výpočtu s měřením

Souhrnná tabulka vykazuje dosti odlišné hodnoty prvních vlastních frekvencí navrženého modelu. U analytického výpočtu je hodnota silně ovlivněna skutečností, že vztah pro vlastní kruhovou frekvenci Ω_0 bere v úvahu pouze hmotnost zatěžujícího motorku. Zcela se zanedbává hmotnost ocelového nosníku, který je brán jako nehmotné těleso. Další skutečností je vyskytující se tlumení, které taktéž přispívá jistou měrou k nepřesnosti analytického výsledku, ať už se jedná o tlumení okolního prostředí (vzduch) nebo materiálové tlumení (odpor materiálu proti deformaci). Další nepřesnost výpočtu spočívá v přichycení modelu k pevné desce pomocí šroubového držáku. Toto uchycení nenahradí dokonalé vetknutí, tudíž tuhost nosníku bude nižší, než určená výpočtem.

Bližší reálné situaci je numerický výpočet. Numerický výpočet (MKP) lépe vystihuje rozložení hmotnosti nosníku po celé své délce. MKP také do konečné hodnoty vlastní frekvence zahrnuje dopady vnitřní deformace materiálu. V aplikaci zátěžných podmínek je motorek spolu s diskem do konečnoprvkového modelu zahrnut jako hmotný bod na konci převislé části nosníku. Toto zjednodušení ne zcela odpovídá skutečnosti a je také postiženo určitou chybou.

Šroubovým držákem nelze nosník uchytit tak pevně, aby nahrazoval dokonalé vetknutí, ovšem výpočtový model počítá s odebráním všech stupňů volnosti a s nulovým posunutím ve všech směrech vetknutí.

Hodnoty prvních vlastních frekvencí modelu jsou uvedeny v souhrnné tabulce TAB.IV.

TAB.IV. Souhrnná tabulka prvních vlastních frekvencí nosníku při různých délkách

L [mm]	f_a [Hz]	f_{num} [Hz]	f_{mer} [Hz]
200	36,7	32,3	26
250	26,3	22,5	18,7
300	20	16,9	14,6
350	15,8	12,8	11,3

Kde f_a značí první vlastní frekvenci vypočtenou analyticky, f_{num} první vlastní frekvenci určenou numericky a f_{mer} první vlastní frekvenci určenou měřením.

6 Závěr

Navržený model věrně znázorňuje vztahy odvozené v teorii kmitání buzené rotující hmotou a také znázorňuje závislost velikosti výchylky průhybu nosníku na činiteli naladění. Kmitající model názorně ukazuje, že existuje tzv. rezonanční oblast, kdy kmity dosahují poměrně vysokých hodnot. V praxi jsou tyto hodnoty často nepřijatelné a rizikové. Většina strojních dílů a součástí je konstruována tak, aby pracovala v tzv. nadkritických otáčkách, kdy je snahou přejít rezonanční oblast v co nejkratším čase. Výjimkou mohou být např. vibrační dopravníky, které naopak rezonanci využívají k dopravě sypkých materiálů.

Určení první vlastní frekvence modelu analytickou metodou vykazovalo hrubou odchylku od skutečné hodnoty, která, jak už bylo uvedeno, je způsobena mnoha faktory. Výpočet prvních vlastních frekvencí podobných jednostranně vetknutých nosníků by se dal mírně zpřesnit zahrnutím určité části hmotnosti nosníku do vztahu (1.5) resp. (3.4). Dále pak uvedením do výpočtu experimentálně zjištěných hodnot konstant materiálového tlumení apod.

Numerická metoda nám dává již přesnější informace o tom, jak se navržený model bude chovat a jaké bude mít parametry. Pomocí MKP lze najít nejen první vlastní frekvenci modelu, ale i následující vlastní frekvence a tvary, které v technické praxi je také velmi důležité znát. Další výhodou je modelování a určení vlastních tvarů a frekvencí u složitějších úloh, které by analytickým výpočtem bylo náročné nebo až nemožné určit.

7 Seznam použité literatury

- [1] BROUSIL, J., SLAVÍK, J., ZEMAN, V.: *Dynamika.*: Praha: SNTL, 1989, ISBN 80-03-00164-1
- [2] BISHOP, R.E.D.: *Kmitání.*: Praha: SNTL, 1978
- [3] PODEŠVA, J.: *Dynamika v příkladech.* Skripta VŠB-TU Ostrava, Ostrava 2005, ISBN 80-7078-678-7
- [4] VÁVRA, P., LEINVEBER, J.: *Strojnické tabulky.* Druhé doplněné vydání. Praha: Albra, 2005. ISBN 80-7361-011-6.

Internetové odkazy

- [5] PETRUŽELKA, J.: *Ročníkový projekt. Jak psát bakalářskou práci* [online]. Ostrava: VŠB-TUO, FS, poslední aktualizace 21.10. 2006. Dostupný z www:
[URL:http://www.345.vsb.cz/jiripetruzelka/Texty/Jak%20psat.pdf](http://www.345.vsb.cz/jiripetruzelka/Texty/Jak%20psat.pdf).
- [6] *Zásady pro vypracování bakalářské práce* [online]. Ostrava: FS VŠB-TU Ostrava: FS_SME_05_003, Verze B. Dostupný z www:
[URL:http://www.fs.vsb.cz/soubory/Zasady_pro_diplomky.pdf](http://www.fs.vsb.cz/soubory/Zasady_pro_diplomky.pdf).
- [7] PODEŠVA, J.: *Dynamika I (FS)* [online]: Dostupný z www:
URL:http://www.337.vsb.cz/materialy/dynamika_Jirka_e_learning/index.htm.

Použité programové vybavení

- [8] AUTODESK, Inc.: Autodesk AutoCAD Mechanical 2009, verze 2009, 2009, 2D strojírenský parametrický CAD
- [9] ANSYS, Inc.: Ansys Release 11.0SP1 UP20070830

8 Přílohy

BOJ037-BP-A4-D01 Dílenský výkres – Disk

DVD obsahující celou bakalářskou práci v elektronické podobě