

**Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava**  
číslo 1, rok 2008, ročník VIII, řada stavební  
článek č. 9

---

**Vladimír TOMICA<sup>1)</sup>, Martin KREJSA<sup>2)</sup>, Jozef GOCÁL<sup>3)</sup>**  
PŘÍPUSTNÁ ÚNAVOVÁ TRHLINA - TEORIE

### **Abstract**

This article provides an introduction to the characteristics of the acceptable fatigue crack size in steel structures and bridges. This crack size plays a key role in degradation of an element designed for an extreme loading combination but in fact is exposed to variable service loads.

### **1. ÚVOD**

Problém únavového poškození stavebních ocelových konstrukcí a mostů je řešen dlouhodobě. Přestože byla snaha nepřipustit vznik a šíření se únavových trhlin po celou návrhovou životnost, trhliny byly a jsou prohlídkami objevovány. Přejít na EC normy umožňuje, jednou z normových metodik, šíření těchto trhlin. Norma stanovuje dodržování určitých podmínek všeobecně. Chybí však potřebné postupy pro jejich naplnění.

Pro podchycení šíření únavových trhlin jsou důležité tři jejich rozměry. Prvním je iniciační rozměr, který představuje nahodilou závadu na prvku namáhaném proměnnými účinky zatížení. Nahodilost jeho výskytu a hlavně rozměr jsou stále celosvětově, a to nejen na stavebních konstrukcích, otevřený problém. Existenci iniciační trhliny ve stádiu šíření, mají podchytit prohlídky a to při změřitelné délce trhliny. Třetím významným rozměrem je doposud označovaný kritický rozměr. Tento rozměr je konečným zaznamenaným rozměrem před porušením formou křehkého lomu. Vzhledem k tomu, že za poslední mnohá desetiletí nebyl na stavebních konstrukcích tento defekt zaznamenan, bude vhodné stanovit největší konečný rozměr jiným způsobem. Stavební konstrukce a mosty se navrhuje na extrémní účinky zatížení. Únavové účinky se ověřují pouze na detailech náchylných na únavová poškození od proměnných účinků zatížení provozního. Pokud by celý nosný prvek byl navržen přesně na účinky extrémního zatížení, samozřejmě s příslušnou rezervou spolehlivosti návrhu, pak oslabení trhlinou negativně ovlivní jeho návrhový stav.

Poškození únavovou trhlinou je závislé na počtech cyklů rozkmitu napětí, což představuje časový faktor v průběhu spolehlivosti po celou návrhovou životnost. Předpokládá se, že poruchovost narůstá s časem (evidentně např. při korozi) a tedy spolehlivost klesá. Zahrne-li se do poruchovosti i možné šíření únavové trhliny, pak je ho potřebné sledovat a ohraničit největším přípustným oslabením. Toto oslabení je odvozeno od přípustného rozměru únavové trhliny. Příčinou tohoto typu degradace nosného prvku v čase je nahodilá existence

---

<sup>1)</sup> Prof. Ing. Vladimír Tomica, CSc., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava, Ludvíka Podéště 1875, 708 33 Ostrava - Poruba, e-mail: [vladimir.tomica@vsb.cz](mailto:vladimir.tomica@vsb.cz).

<sup>2)</sup> Ing. Martin KREJSA, Ph.D., VŠB-TUO, FAST, Katedra stavební mechaniky, Ludvíka Podéště 1875, 708 33 Ostrava - Poruba, e-mail: [martin.krejsa@vsb.cz](mailto:martin.krejsa@vsb.cz).

<sup>3)</sup> Ing. Jozef Gocál, Ph.D., Oddelenie kovových konštrukcií a mostov, Stavebná fakulta, Žilinská univerzita v Žiline.

iniciační trhliny a její růst vlivem proměnných účinků zatížení. Následkem je oslabení prvku navrženého na účinky extrémního zatížení, v průběhu stabilního narůstání trhliny až po přípustný rozměr, který v čase jeho dosažení je limitním pro zachování požadované spolehlivosti.

Vzhledem k nejistotě, zda vůbec iniciační trhlina existuje a dalším nepřesnostem, které vstupují do výpočtu sledování jejího růstu je významná cílená, časově stanovená kontrola velikosti už zaměřitelné trhliny. Rozměr přípustné trhliny ovlivňuje stanovení času prohlídky.

Problematika je rozvedená ve dvou vzájemně se ovlivňujících částech: pravděpodobnostním řešení šíření únavové trhliny a nejistotách při stanovení veličin vstupujících do výpočtu.

## 2. ŠÍŘENÍ ÚNAVOVÉ TRHLINY

Únavová trhlina, oslabující konstrukční prvek o určitou plochu, je při sledování růstu popisovaná jen jedním celkovým rozměrem  $a$ . Pro popis růstu trhliny se nejčastěji používá metoda lineárně pružné lomové mechaniky, která definuje vztah mezi rychlostí šíření trhliny  $\frac{da}{dN}$  a rozkmitem koeficientu intenzity napětí  $\Delta K$  v čele trhliny Paris-Erdoganovou rovnicí

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m, \quad (1)$$

kde  $C$ ,  $m$  jsou materiálové konstanty,  $a$  je rozměr trhliny a  $N$  je počet zatěžovacích cyklů. Předpokladem pro stabilní šíření únavové trhliny je existence iniciační trhliny  $a_0$  v místě koncentrace napětí, které se může nacházet na okraji nebo na povrchu prvku.

Při výchozím předpokladu, že prvotní je návrh konstrukce na účinky extrémního zatížení s následným posudkem únavové odolnosti, pak je rezerva spolehlivosti v inženýrské pravděpodobnostní metodě vyjádřena ve tvaru

$$g_{(R,S)} = G = R - S, \quad (2)$$

kde  $R$  je náhodně proměnná odolnost prvku a  $S$  představuje náhodně proměnné účinky extrémního zatížení. V případě, že na takto navržený prvek působí provozní zatížení, mohou nastat následující případy (obr.1):

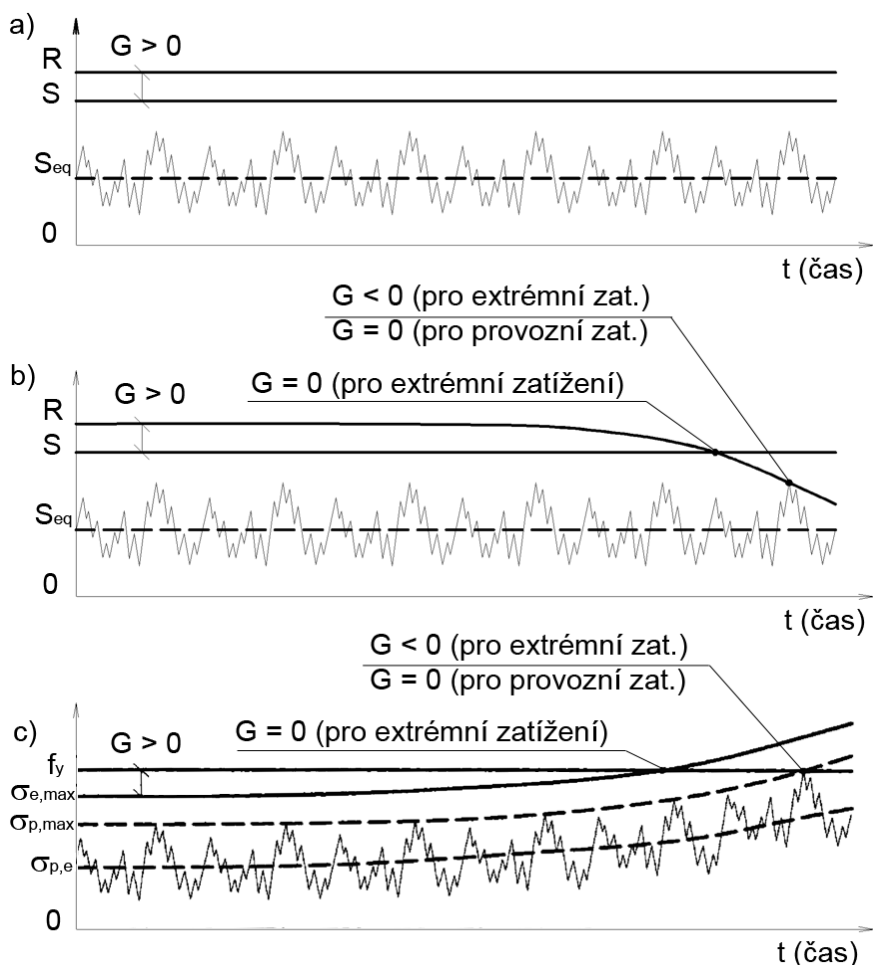
- a) bezpečná životnost - únavové účinky nedegradují prvek únavovou trhlinou;
- b) přípustná poruchovost - únavové účinky degradují prvek a snižují jeho únosnost;
- c) přípustná poruchovost – únavové účinky vyjádřené změnami napětí.

Ve výpočtovém modelu šíření únavové trhliny je sledováno napětí, přičemž při vzniku největší přípustné trhliny je odolnost konstrukce  $R$  reprezentována napětím na mezi kluzu  $f_y$ , která je neměnná. Tento názornější přístup byl upřednostněn před přístupem b), jelikož vyjadřuje nelineární nárůst obou napětí na oslabovaném prvku.

Podmínka pro stanovení přípustné délky trhliny  $a_{cr}$  se s použitím (1) vyjádří:

$$N = \frac{1}{C} \int_{a_0}^{a_{ac}} \frac{da}{\Delta K^m} > N_{cel} \quad (3)$$

kde  $N$  je počet cyklů pro zvětšení trhliny z iniciační  $a_0$  do přípustné  $a_{ac}$ ,  $N_{cel}$  je počet cyklů za dobu celé životnosti. Vztah (3) je nepoužitelný, neboť iniciační rozměr není znám.



Obr.1: Rezerva spolehlivosti ve vztahu k návrhovým a provozním účinkům zatížení

Vztah pro rychlost šíření únavové trhliny (1) se musí pro sledovaný účel upravit. Rozkmit koeficientu intenzity napětí  $\Delta K$  se při konstantním rozkmitu napětí  $\Delta\sigma$  vyjádří vztahem:

$$\Delta K = \Delta\sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot F_{(a)} \quad (4)$$

Kalibrační funkce  $F_{(a)}$  sleduje průběh šíření trhliny, která se při změně počtu cyklů z  $N_1$  na  $N_2$  rozšíří z délky  $a_1$  na  $a_2$ . Úpravou (1) s využitím (4) lze pak získat:

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{(\sqrt{\pi \cdot a} \cdot F_{(a)})^m} = \int_{N_1}^{N_2} C \cdot \Delta\sigma^m \cdot dN \quad (5)$$

Pokud se délka trhliny  $a_1$  rovná počáteční velikosti trhliny a  $a_2$  sledované délce trhliny, levou stranu rovnice (5) lze pak považovat za odolnost konstrukce  $R$ :

$$R_{(a)} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{(\sqrt{\pi \cdot a} \cdot F_{(a)})^m} \quad (6)$$

Obdobně lze definovat akumulaci účinků zatížení, která se rovná pravé straně (5):

$$S = \int_{N_1}^{N_2} C \Delta \sigma^m \cdot dN = C \Delta \sigma^m \cdot (N_2 - N_1) \quad (7)$$

kde  $N$  je celkový počet rozkmitů špiček napětí  $\Delta \sigma$  při nárůstu velikosti trhliny z  $a_1$  na  $a_2$ .

Lze definovat funkci spolehlivosti, jejíž analýzou je možno získat pravděpodobnost poruchy  $P_f$ :

$$G_{fail(Z)} = R_{(a_2)} - S \quad (8)$$

kde  $Z$  je vektor náhodných fyzikálních vlastností – mechanických vlastností materiálu, geometrie konstrukce, účinků zatížení a také rozměrů únavové trhliny. Pravděpodobnost poruchy je pak rovna:

$$P_f = P(G_{fail(Z)} < 0) = P(R_{(a_2)} < S) \quad (9)$$

V našem případě bude  $a_1 = a_0$ , což je předpokládaný rozměr iniciační trhliny v pravděpodobnostním pojetí, a  $a_2 = a_{ac}$ , kde  $a_{ac}$  je rozměr přípustné trhliny nahrazující rozměr kritický  $a_{cr}$  v případě, kdy trhlina končí křehkým lomem.

### 3. METODIKA PRAVDĚPODOBNOSTNÍHO VÝPOČTU

Definujeme-li následující náhodné jevy, související s růstem únavové trhliny, které mohou nastat v libovolném čase „ $t$ “ během životnosti konstrukce, pak:

$F(t)$  - Zjištění poruchy v čase „ $t$ “ – velikost únavové trhliny  $a(t)$  dosáhla přípustnou velikost  $a_{ac}$ , takže platí:

$$a(t) \geq a_{ac} \quad (10)$$

$D(t)$  - Zjištění trhliny v čase „ $t$ “ – velikost únavové trhliny  $a(t)$  nedosáhla přípustnou velikost, takže platí:

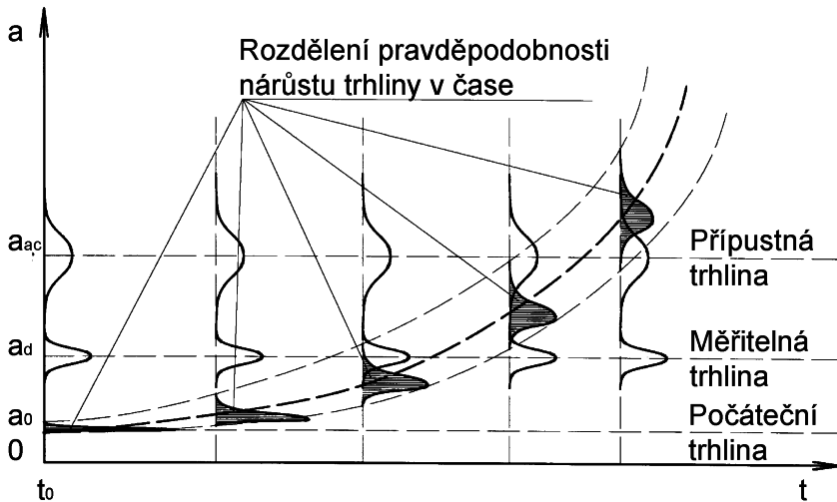
$$a_d \leq a(t) < a_{ac} \quad (11)$$

kde  $a_d$  je minimální měřitelná velikost trhliny;

$U(t)$  - Trhlina nebyla v čase „ $t$ “ zjištěná – velikost únavové trhliny  $a(t)$  nedosáhla měřitelnou velikost, takže platí:

$$a(t) < a_d \quad (12)$$

Nezjištění trhliny v čase „ $t$ “ může znamenat i případ, že v sledovaném konstrukčním prvku se nešíří žádná únavová trhlina, resp. se jedná o počáteční stadium nukleace únavové trhliny, s čímž lomová mechanika neuvazuje. V případě nezjištění únavové trhliny lze předpokládat, že trhlina v daném prvku ve skutečnosti je, avšak její velikost je natolik malá, že ji není možné za daných podmínek detekovat. Pravděpodobný průběh nárůstu únavové trhliny je znázorněn na obr.2.



Obr.2: Pravděpodobnostní průběh nárůstu únavové trhliny v čase

Na základě výše definovaných jevů je možno určit následující pravděpodobnosti:

- pravděpodobnost poruchy v čase „ $t$ “, tj. pravděpodobnost, že velikost únavové trhliny  $a(t)$  dosáhla přípustnou velikost  $a_{ac}$

$$P(F(t)) = P(a(t) \geq a_{ac}) \quad (13)$$

- pravděpodobnost detekování trhliny v čase „ $t$ “ o velikosti  $a(t)$  menší než je přípustná velikost  $a_{ac}$

$$P(D(t)) = P(a_d \leq a(t) < a_{ac}) \quad (14)$$

- pravděpodobnost nezjištění trhliny v čase „ $t$ “, tj. pravděpodobnost, že velikost únavové trhliny  $a(t)$  nedosáhla měřitelnou velikost  $a_d$

$$P(U(t)) = P(a(t) < a_d) \quad (15)$$

Tyto tři jevy tvoří úplný prostor jevů, které mohou nastat v čase „ $t$ “, a platí tedy:

$$P(F(t)) + P(D(t)) + P(U(t)) = 1 \quad (16)$$

Pravděpodobnosti v rovnicích (13) – (15) je možno vyčíslit v libovolném čase „ $t$ “ s využitím simulačních metod MONTE CARLO nebo Přímého Determinovaného Pravděpodobnostního Výpočtu [3] (dále jen PDPV, např. [1]). Výpočet probíhá ve zvolených časových krocích, přičemž jeden časový krok se obvykle rovná jednomu roku životnosti konstrukce. V okamžiku, kdy pravděpodobnost poruchy  $P(F(t))$  dosáhne předepsanou návrhovou hodnotu  $P_{fd}$ , je navržena prohlídka, která je zaměřena na zjištění únavové trhliny v příslušném konstrukčním prvku. Výsledek prohlídky poskytuje informaci o skutečném stavu konstrukce, který může být zakomponován do dalšího pravděpodobnostního výpočtu. Výsledkem prohlídky v čase „ $t_1$ “ může být jeden ze tří uvedených jevů, a to s následujícími pravděpodobnostmi:

$$P(F(t_1)) = P(a(t_1) \geq a_{ac}) \quad (17)$$

$$P(D(t_1)) = P(a_d \leq a(t_1) < a_{ac}) \quad (18)$$

$$P(U(t_1)) = P(a(t_1) < a_d) \quad (19)$$

Na základě výsledků prohlídky v čase „ $t_I$ “ je možno vyjádřit pravděpodobnost vzniku těchto jevů v čase  $T > t_I$  s využitím věty o podmíněné pravděpodobnosti následovně:

Za předpokladu, že v čase „ $t_I$ “ nastal jev  $F$ , je možno definovat:

$$\left. \begin{aligned} P(F(T)/F(t_I)) &= \frac{P(F(T) \cap F(t_I))}{P(F(t_I))} = \frac{P(F(t_I))}{P(F(t_I))} = 1,0 \\ P(D(T)/F(t_I)) &= \frac{P(D(T) \cap F(t_I))}{P(F(t_I))} = \frac{P(\{\emptyset\})}{P(F(t_I))} = 0 \\ P(U(T)/F(t_I)) &= \frac{P(U(T) \cap F(t_I))}{P(F(t_I))} = \frac{P(\{\emptyset\})}{P(F(t_I))} = 0 \end{aligned} \right\} \Sigma = 1,0 \quad (20)$$

Za předpokladu, že v čase „ $t_I$ “ nastal jev  $D$ , je možno definovat:

$$\left. \begin{aligned} P(F(T)/D(t_I)) &= \frac{P(F(T) \cap D(t_I))}{P(D(t_I))} \\ P(D(T)/D(t_I)) &= \frac{P(D(T) \cap D(t_I))}{P(D(t_I))} \\ P(U(T)/D(t_I)) &= \frac{P(U(T) \cap D(t_I))}{P(D(t_I))} = \frac{P(\{\emptyset\})}{P(D(t_I))} = 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \Sigma &= 1,0 \\ \Sigma &= 1,0 \end{aligned} \right\} \Sigma = 1,0 \quad (21)$$

Za předpokladu, že v čase „ $t_I$ “ nastal jev  $U$ , je možno definovat:

$$\left. \begin{aligned} P(F(T)/U(t_I)) &= \frac{P(F(T) \cap U(t_I))}{P(U(t_I))} \\ P(D(T)/U(t_I)) &= \frac{P(D(T) \cap U(t_I))}{P(U(t_I))} \\ P(U(T)/U(t_I)) &= \frac{P(U(T) \cap U(t_I))}{P(U(t_I))} = \frac{P(U(T))}{P(U(t_I))} \end{aligned} \right\} \Sigma = 1,0 \quad (22)$$

Podle věty o úplné pravděpodobnosti platí rovněž:

$$\begin{aligned} P(F(T)) &= P(F(t_I)) \cdot P(F(T)/F(t_I)) + P(D(t_I)) \cdot P(F(T)/D(t_I)) + P(U(t_I)) \cdot P(F(T)/U(t_I)) \\ P(D(T)) &= P(F(t_I)) \cdot P(D(T)/F(t_I)) + P(D(t_I)) \cdot P(D(T)/D(t_I)) + P(U(t_I)) \cdot P(D(T)/U(t_I)) \\ P(U(T)) &= P(F(t_I)) \cdot P(U(T)/F(t_I)) + P(D(t_I)) \cdot P(U(T)/D(t_I)) + P(U(t_I)) \cdot P(U(T)/U(t_I)) \end{aligned} \quad (23)$$

Po dosazení za podmíněné pravděpodobnosti, které lze jednoznačně určit (viz vztahy (20) – (22)), se vztahy (23) zjednoduší:

$$P(F(T)) = P(F(t_I)) + P(D(t_I)) \cdot P(F(T)/D(t_I)) + P(U(t_I)) \cdot P(F(T)/U(t_I)) \quad (24)$$

$$P(D(T)) = P(D(t_I)) \cdot P(D(T)/D(t_I)) + P(U(t_I)) \cdot P(D(T)/U(t_I)) \quad (25)$$

$$P(U(T)) = P(U(t_I)) \cdot \frac{P(U(T))}{P(U(t_I))} = P(U(T)) \quad (26)$$

Pro stanovení doby následující prohlídky je podstatné určit podmíněné pravděpodobnosti  $P(F(T)/F(t_I))$ , resp.  $P(F(T)/D(t_I))$ , které je možno vyjádřit z rovnice (24):

$$P(F(T)/U(t_i)) = \frac{P(F(T)) - P(F(t_i)) - P(D(t_i)) \cdot P(F(T)/D(t_i))}{P(U(t_i))} \quad (27)$$

$$P(F(T)/D(t_i)) = \frac{P(F(T)) - P(F(t_i)) - P(U(t_i)) \cdot P(F(T)/U(t_i))}{P(D(t_i))} \quad (28)$$

Podobně lze vyjádřit z rovnice (25) podmíněné pravděpodobnosti  $P(D(T)/U(t_i))$ , resp.  $P(D(T)/D(t_i))$ :

$$P(D(T)/U(t_i)) = \frac{P(D(T)) - P(D(t_i)) \cdot P(D(T)/D(t_i))}{P(U(t_i))} \quad (29)$$

$$P(D(T)/D(t_i)) = \frac{P(D(T)) - P(U(t_i)) \cdot P(D(T)/U(t_i))}{P(D(t_i))} \quad (30)$$

V případě vzniku jevu  $U(T > t_i)$  má smysl pouze určení podmíněné pravděpodobnosti  $P(U(T)/U(t_i))$ , která je uvedena v rovnicích (22):

$$P(U(T)/U(t_i)) = \frac{P(U(T))}{P(U(t_i))} \quad (31)$$

Pokud není brána v úvahu možná redistribuce napětí z místa oslabeného trhlinou, je v praktických případech rychlost nárůstu trhliny v rozsahu měřitelných hodnot obvykle již poměrně vysoká. V případě nalezení únavové trhliny během prohlídky se zvolí buď sledování bezpečného růstu trhliny nebo zásah, který další růst únavové trhliny zpomalí nebo zastaví. Pro potřeby efektivního načasování termínů následujících prohlídek má největší význam vztah (27), který určuje pravděpodobnost poruchy v čase  $T > t_i$  za předpokladu, že během poslední prohlídky nebyla na sledovaném místě nalezena únavová trhlina. Z tohoto vztahu je zřejmé, jaký vliv na výsledek pravděpodobnostního výpočtu mají vzájemné poměry mezi třemi uvažovanými velikostmi trhliny – počáteční, měřitelnou a přípustnou. Zvyšováním měřitelné velikosti trhliny  $a_d$ , resp. zmenšováním přípustné velikosti trhliny  $a_{ac}$ , se zmenšuje oblast detekce trhliny s velikostí menší než je přípustný rozměr  $a_{ac}$ , přičemž se zmenšuje i pravděpodobnost vzniku tohoto jevu v čase prohlídky  $P(D(t_i))$ . Ve speciálním mezním případě, kdy se měřitelná velikost trhliny bude shodovat s přípustnou velikostí, pak bude pravděpodobnost zjištění trhliny

$$P(D(t_i)) = P(a_d \leq a(t_i) < a_{ac}) = 0 \quad (32)$$

a vztah (27) se změní na

$$P(F(T)/U(t_i)) = \frac{P(F(T)) - P(F(t_i)) - P(D(t_i)) \cdot P(F(T)/D(t_i))}{P(U(t_i))} = \frac{P(F(T)) - P(F(t_i))}{P(U(t_i))} \quad (33)$$

a s využitím rovnice (16) bude mít tvar

$$P(F(T)/U(t_i)) = \frac{P(F(T)) - P(F(t_i))}{1 - P(F(t_i))} \quad (34)$$

Tento vztah, který bývá často aplikovaný v podobných případech sledování vývoje spolehlivosti konstrukce nebo její části, je pouze speciálním případem vztahu (27), který je obecnější a pro sledovaný případ vhodnější k použití.

Pravděpodobnosti v rovnici (27) lze vyčíslit v libovolném čase „ $T > t_l$ “ opět s využitím simulačních metod MONTE CARLO nebo PDPV [3]. Pokud pravděpodobnost poruchy  $P(F(t) / U(t_i))$  dosáhne předepsanou návrhovou hodnotu  $P_{fd}$ , je navržena další prohlídka, zaměřená na zjištění únavové trhliny v příslušném konstrukčním prvku. Výsledkem prohlídky může být opět jeden ze tří uvedených jevů s odpovídající pravděpodobností. Celý výpočet lze tímto způsobem opakovat za účelem správného načasování dalších prohlídek.

#### 4. ZÁVĚR

Článek uvádí teoreticky zpracovaný přístup k řešení šíření únavových trhlin se zaměřením na její největší přípustný rozměr. Takto sledovaný konečný rozměr únavové trhliny může přispět k rozlišení jejího kritického a přípustného rozměru. Přípustný rozměr v sobě zahrnuje bezpečnostní požadavky na dosažení kritické trhliny, která může být odvozená od křehkého lomu, ale pro ocelové konstrukce významněji od lomu houževnatého. Druhá část této problematiky, označená jako část aplikovaná, je zpracovaná v následujícím článku sborníku.

#### OZNÁMENÍ

Tento článek je příspěvkem k celosvětovým komplexním hodnocením bezpečnosti a rizik technických systémů a byl dosažen za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím Grantové agentury České republiky. Registrační číslo projektu je 103/05/2467.

#### LITERATURA

- [1] JANAS, P., KREJSA, M., KREJSA, V. Structural Reliability Assessment Using Direct Determined Fully Probabilistic Calculation. In: *proceedings of 3rd International ASRANet Colloquium 2006* (abstract p.8, full paper on CD). 10 – 12th July 2006, Glasgow, UK. ISBN 0-9553550-0-1 / 978-0-9553550-0-4 (In English).
- [2] TALLIN, A. G., CESARE, M. Inspection Based Reliability Updating for Fatigue of Steel Bridges. In: *Proceedings of Bridge Management Conference*, London 1990.
- [3] TOMICA, V., KREJSA, M. Optimal Safety Level of Acceptable Fatigue Crack. In: *5th International Probabilistic Workshop*. Ghent, Belgium, 28-29 November 2007. Edited by Luc Taerwe & Dirk Proske. ISBN 978-3-00-022030-2.
- [4] TOMICA, V., KREJSA, M. Možnost pravděpodobnostního výpočtu únavové trhliny metodou PDPV. In: *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava*. Řada stavební, číslo 1, rok 2007, ročník VII. pp.211-220. ISSN 1213-1962 ; ISBN 978-80-248-1661-6.
- [5] TOMICA, V. Effect of Local Plasticity on Fatigue Resistance. In: *Building Research Journal*, SAP Ltd., Vol. 44, Nr. 4, Bratislava 1996, pp.253-263.

Oponentní posudek vypracoval: Prof. Ing. Zdeněk Kala, Ph.D.